Álgebra lineal

Javier Alberto Pérez Garza

Álgebra lineal

Álgebra lineal es la rama de matemáticas que estudia las representaciones y operaciones de ecuaciones lineales, en particular:

- Vectores.
- Matrices.

Muchos problemas en el área de ciencia de datos son representados usando vectores y matrices, por lo que es importante que estés familiarizado con los conceptos.

Vectores

Si n es un número entero positivo y $\mathbb{R}$ es el conjunto de números reales. Entonces $\mathbb{R}^n$ es el conjunto de todas las n-tuplas de números reales.

Un vector:

$$\vec{v} \in \mathbb{R}^n$$

es una n-tupla de número reales.

Por ejemplo:

$$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$$

Operaciones con vectores (1)

Usemos los vectores $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ para ejemplificar las operaciones con vectores:

- suma:
$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$$
- resta:
$$\vec{u} - \vec{v} = (u_1 - v_1, u_2 - v_2, u_3 - v_3)$$
- norma:
$$||\vec{u}|| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

Operaciones con vectores (2)

- vector por escalar:
$$\lambda\vec{u} = (\lambda u_1, \lambda u_2, \lambda u_3)$$
- producto cruz:
$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1)$$

Genera un nuevo vector. Solo para vectores en $\mathbb{R}^3$.

Operaciones con vectores (3)

- producto punto o escalar (inner):

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

  Genera un escalar.

- producto tensorial (outer):

$$\vec{u} \otimes \vec{v} = \begin{bmatrix} u_1 v_1 & u_1 v_2 & u_1 v_3 \\ u_2 v_1 & u_2 v_2 & u_2 v_3 \\ u_3 v_1 & u_3 v_2 & u_3 v_3 \end{bmatrix}$$

  Genera una matriz.

Matrices

Una matriz es un arreglo bidimensional de elementos numéricos. Una matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ es un arreglo con dos dimensiones (m filas y n columnas) que contiene números reales.

Por ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$$

A se utiliza para referirse a la matriz entera y a_{ij} para referirse a sus entradas. i denotando a la fila y j a la columna.
La notación a_{*j} o $a_{*,j}$ es utilizada para referirse a la columna j de la matriz.
La notación a_{i*} o $a_{i,*}$ es utilizada para referirse a la fila j de la matriz.

Operaciones de matrices (1)

- suma:

$$C = A + B \Leftrightarrow c_{ij} = aij + bij$$

  Por ejemplo:

$$C = A + B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b22 \end{bmatrix}$$

- resta:

$$C = A - B \Leftrightarrow c_{ij} = aij - bij$$

  Por ejemplo:

$$C = A - B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b22 \end{bmatrix}$$

Las dimensiones de las matrices deben ser iguales para poderse sumar y restar.

Operaciones de matrices (2)

- producto por un escalar:

$$C = \lambda A \Leftrightarrow c_{ij} = \lambda a_{ij}$$

Por ejemplo:

$$C = \lambda A = \lambda \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} \end{bmatrix}$$

Operaciones de matrices (3)

- producto:
  Si $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$ entonces:

$$C = AB \in \mathbb{R}^{m\times p} \Leftrightarrow c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

  Por ejemplo:

$$C = AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} \end{bmatrix}$$

El producto de dos matrices solo existe cuando el número de columnas en A es igual al número de filas en B.

Operaciones de matrices (4)

- traspuesta:

$$C = A^T \Leftrightarrow c_{ij} = aji$$

Por ejemplo, si:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

entonces

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{bmatrix}$$

La matriz traspuesta de A es la misma matriz con las filas y columnas intercambiadas.

Operaciones de matrices (5)

- traza:
  La traza de una matriz cuadrada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se denota por tr$A$ y es la suma de los elementos en su diagonal:

$$\mathrm{tr}A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

- identidad:
  La matriz identidad se denota como $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$, es una matriz cuadrada con unos en su diagonal y ceros en el resto de sus entradas.

$$I_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

  La matriz identidad tiene la propiedad que para toda matriz $A \in \mathbb{R}^{mxn}$:

$$AI = A = IA$$

Operaciones de matrices (6)

- inversa:
  La matriz inversa de una matriz cuadrada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se denota como A^{-1}, y es una matriz única tal que:

  $$AA^{-1} = I = A^{-1}A$$

  No todas las matrices tienen inversa. Una matriz es invertible o no-singular si tiene inversa y no invertible o singular en el caso contrario.
- determinante:
  El determinante de una matriz cuadrada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se denota por $\det(A)$ o $|A|$ es una función $\det : \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R}$.
  Para una matriz 2x2:

  $$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad |A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Representando vectores como matrices

Es común representar a vectores n-dimensionales como matrices que contienen n filas y 1 columna, a esta representación se le conoce como **vector columna**. Por ejemplo, para un vector en $\mathbb{R}^n$:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Si se requiere expresar un vector como una fila (**vector fila**) de manera explícita usando matrices (1 fila y n columnas) usamos la notación *traspuesta* x^T. Por ejemplo:

$$x^T = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix}$$

Producto matriz-vector

Usando la representación matricial de los vectores, podemos definir el siguiente tipo de producto.
Dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y un vector $x \in \mathbb{R}^n$ ($x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ como vector columna) su producto:

$$y = Ax \in \mathbb{R}^m$$

$$=$$

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} \dots a_{1,n} \\ \vdots \\ a_{m,1} \dots a_{m,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,*} \cdot x \\ \vdots \\ a_{m,*} \cdot x \end{bmatrix}$$

La i-esima entrada del vector y es igual al producto punto de la fila i de la matriz A y el vector x.

Producto vector-matriz

En el segundo caso, es posible realizar el producto de un vector fila por una matriz.
Dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y un vector $x \in \mathbb{R}^m$ ($x^T \in \mathbb{R}^{1 \times m}$ como vector fila), el producto:

$$y^T = x^T A \in \mathbb{R}^n$$

$$=$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1,1} \dots a_{1,n} \\ \vdots \\ a_{m,1} \dots a_{m,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^T \cdot a_{*,1} & \dots & x^T \cdot a_{*,n} \end{bmatrix}$$

La i-esima entrada del vector y^T es igual al producto punto del vector x y la columna i de la matriz A.