

# Álgebra lineal

---

Javier Alberto Pérez Garza

# Álgebra lineal

Álgebra lineal es la rama de matemáticas que estudia las representaciones y operaciones de ecuaciones lineales, en particular:

- Vectores.
- Matrices.

Muchos problemas en el área de ciencia de datos son representados usando vectores y matrices, por lo que es importante que estés familiarizado con los conceptos.

# Vectores

Si  $n$  es un número entero positivo y  $\mathbb{R}$  es el conjunto de números reales. Entonces  $\mathbb{R}^n$  es el conjunto de todas las  $n$ -tuplas de números reales.

Un vector:

$$\vec{v} \in \mathbb{R}^n$$

es una  $n$ -tupla de número reales.

Por ejemplo:

$$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$$

# Operaciones con vectores (1)

Usemos los vectores  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$  y  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$  para ejemplificar las operaciones con vectores:

- suma:

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$$

- resta:

$$\vec{u} - \vec{v} = (u_1 - v_1, u_2 - v_2, u_3 - v_3)$$

- norma:

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

## Operaciones con vectores (2)

- vector por escalar:

$$\lambda \vec{u} = (\lambda u_1, \lambda u_2, \lambda u_3)$$

- producto cruz:

$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1)$$

Genera un nuevo vector. Solo para vectores en  $\mathbb{R}^3$ .

## Operaciones con vectores (3)

- producto punto o escalar (inner):

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

Genera un escalar.

- producto tensorial (outer):

$$\vec{u} \otimes \vec{v} = \begin{bmatrix} u_1 v_1 & u_1 v_2 & u_1 v_3 \\ u_2 v_1 & u_2 v_2 & u_2 v_3 \\ u_3 v_1 & u_3 v_2 & u_3 v_3 \end{bmatrix}$$

Genera una matriz.

# Matrices

Una matriz es un arreglo bidimensional de elementos numéricos. Una matriz  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  es un arreglo con dos dimensiones ( $m$  filas y  $n$  columnas) que contiene números reales.

Por ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$$

$A$  se utiliza para referirse a la matriz entera y  $a_{ij}$  para referirse a sus entradas.  $i$  denotando a la fila y  $j$  a la columna.

La notación  $a_{*j}$  o  $a_{*,j}$  es utilizada para referirse a la columna  $j$  de la matriz.

La notación  $a_{i*}$  o  $a_{i,*}$  es utilizada para referirse a la fila  $i$  de la matriz.

# Operaciones de matrices (1)

- suma:

$$C = A + B \Leftrightarrow c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Por ejemplo:

$$C = A + B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix}$$

- resta:

$$C = A - B \Leftrightarrow c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$$

Por ejemplo:

$$C = A - B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} \end{bmatrix}$$

Las dimensiones de las matrices deben ser iguales para poderse sumar y restar.



## Operaciones de matrices (2)

- producto por un escalar:

$$C = \lambda A \Leftrightarrow c_{ij} = \lambda a_{ij}$$

Por ejemplo:

$$\begin{aligned} C = \lambda A &= \lambda \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

## Operaciones de matrices (3)

- producto:

Si  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  y  $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$  entonces:

$$C = AB \in \mathbb{R}^{m \times p} \Leftrightarrow c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

Por ejemplo:

$$\begin{aligned} C = AB &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

El producto de dos matrices solo existe cuando el número de columnas en  $A$  es igual al número de filas en  $B$ .

## Operaciones de matrices (4)

- traspuesta:

$$C = A^T \Leftrightarrow c_{ij} = a_{ji}$$

Por ejemplo, si:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

entonces

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{bmatrix}$$

La matriz traspuesta de  $A$  es la misma matriz con las filas y columnas intercambiadas.

## Operaciones de matrices (5)

- traza:

La traza de una matriz cuadrada  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  se denota por  $\text{tr}A$  y es la suma de los elementos en su diagonal:

$$\text{tr}A = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

- identidad:

La matriz identidad se denota como  $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , es una matriz cuadrada con unos en su diagonal y ceros en el resto de sus entradas.

$$I_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

La matriz identidad tiene la propiedad que para toda matriz  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ :

$$AI = A = IA$$

## Operaciones de matrices (6)

- inversa:

La matriz inversa de una matriz cuadrada  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  se denota como  $A^{-1}$ , y es una matriz única tal que:

$$AA^{-1} = I = A^{-1}A$$

No todas las matrices tienen inversa. Una matriz es invertible o no-singular si tiene inversa y no invertible o singular en el caso contrario.

- determinante:

El determinante de una matriz cuadrada  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  se denota por  $\det(A)$  o  $|A|$  es una función  $\det : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Para una matriz 2x2:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \quad |A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

## Representando vectores como matrices

Es común representar a vectores  $n$ -dimensionales como matrices que contienen  $n$  filas y 1 columna, a esta representación se le conoce como **vector columna**. Por ejemplo, para un vector en  $\mathbb{R}^n$ :

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Si se requiere expresar un vector como una fila (**vector fila**) de manera explícita usando matrices (1 fila y  $n$  columnas) usamos la notación *traspuesta*  $x^T$ . Por ejemplo:

$$x^T = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix}$$

# Producto matriz-vector

Usando la representación matricial de los vectores, podemos definir el siguiente tipo de producto.

Dada una matriz  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  y un vector  $x \in \mathbb{R}^n$  ( $x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  como vector columna) su producto:

$$\begin{aligned} y &= Ax \in \mathbb{R}^m \\ &= \begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ & \vdots & \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,*} \cdot x \\ \vdots \\ a_{m,*} \cdot x \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La  $i$ -ésima entrada del vector  $y$  es igual al producto punto de la fila  $i$  de la matriz  $A$  y el vector  $x$ .

# Producto vector-matriz

En el segundo caso, es posible realizar el producto de un vector fila por una matriz.

Dada una matriz  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  y un vector  $x \in \mathbb{R}^m$  ( $x^T \in \mathbb{R}^{1 \times m}$  como vector fila), el producto:

$$\begin{aligned} y^T &= x^T A \in \mathbb{R}^n \\ &= \\ \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x^T \cdot a_{*,1} & \dots & x^T \cdot a_{*,n} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La  $i$ -ésima entrada del vector  $y^T$  es igual al producto punto del vector  $x$  y la columna  $i$  de la matriz  $A$ .