

ECUACIONES DE NAVIER-STOKES Y EL PROBLEMA DEL FLUJO EN LA CAVIDAD

JUAN CAMILO ACOSTA ARANGO

**FUNDACIÓN UNIVERSITARIA KONRAD LORENZ
FACULTAD DE MATEMÁTICAS E INGENIERÍAS
PROGRAMA DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ, D.C.**

2017

ECUACIONES DE NAVIER-STOKES Y EL PROBLEMA DEL FLUJO EN LA CAVIDAD

JUAN CAMILO ACOSTA ARANGO

Trabajo de grado para optar por el título de Matemático

Director
Dr. John Alexander Arredondo García

Asesor Metodológico
Juan Carlos Mendivelso Moreno

fundación universitaria konrad lorenz
Facultad de Matemáticas e Ingenierías
Programa de Matemáticas
Bogotá, D.C.
2017

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

Siendo las 9 horas del dia 31 de mayo de 2016, el estudiante JUAN CAMILO ACOSTA ARANGO con código estudiantil 614122005, del programa académico de Matemáticas, sustentó públicamente la Tesis de Grado titulada "**ECUACIONES DE NAVIER-STOKES Y EL PROBLEMA DEL FLUJO EN LA CAVIDAD**". El jurado unánimemente otorgó la calificación de **MERITORIA**.

ALBERTO FORERO
Jurado

ALEJANDRO CÁRDENAS
Jurado

**CARLOS ALBERTO
DIÉZ FONNEGRA**
Director del Programa de Matemáticas

**JOHN ALEXANDER
ARREDONDO GARCÍA**
Director del Trabajo de Grado

GUSTAVO ANDRÉS CAMPOS AVENDAÑO
Director Centro de Investigaciones de Matemáticas e Ingenierías

CARLOS ALBERTO DIÉZ FONNEGRA
Decano de Matemáticas e Ingenierías

Dedicado a mi familia.

Índice general

Índice de Figuras	7
Índice de Tablas	8
Resumen	10
1 Introducción	11
2 Antecedentes	14
3 Preliminares	15
3.1 Derivación de las ecuaciones de Navier-Stokes	15
3.1.1 Principio de Conservación de Masa	15
3.1.2 Principio de Conservación del Momentum	17
3.1.3 El número de Reynolds	21
3.1.4 Forma adimensional de las ecuaciones de Navier-Stokes	21
3.2 Esquema de diferencias finitas	22
3.2.1 Diferencias finitas de primer orden	23
3.2.2 Diferencias finitas laterales y centradas	23
3.2.3 Diferencias finitas de segundo orden	24
3.2.4 Ilustración del método de diferencias finitas	25
4 El problema de la cavidad	27
4.1 Ecuaciones de Navier-Stokes en términos de flujo y vorticidad	27
4.1.1 Vortex Stretching	29
4.2 Condiciones de frontera en la cavidad	30
5 Esquema numérico para la cavidad	33
5.1 Discretización	33
5.1.1 Esquema de diferencias finitas para la función de flujo	34
5.1.2 Esquema de diferencias finitas para la vorticidad	34
5.2 Análisis de consistencia	36
5.3 Análisis de estabilidad	39

6	Implementación y resultados numéricos	43
6.0.1	Implementación	43
6.0.2	Resultados numéricos	44
7	El problema de los <i>N</i>-Vórtices	53
8	Conclusiones	56
9	Perspectivas de investigación	58
9.1	Diferentes cavidades	58
9.2	Análisis de convergencia y estabilidad	58
9.3	Generalización al problema de <i>N</i> -Vórtices	59
	Bibliografía	59

Índice de Figuras

3.1	Conservación de masa en el volumen de control	16
3.2	Conservación de momentum y fuerzas de estrés en el V.C.	18
3.3	Flujo laminar vs flujo turbulento	21
3.4	Diferentes esquemas de aproximación a la derivada de una función	24
3.5	Discretización del espacio	25
4.1	Lid Driven Cavity Flow	27
4.2	Condiciones de frontera	32
5.1	Discretización espacial	33
5.2	Comparativa entre Δt_1 vs Δt_2	42
6.1	Perfil de vorticidades para $Re = 185$	47
6.2	Perfil de vorticidades para $Re = 186$	48
6.3	Perfil de vorticidades para $Re = 187$	49
6.4	Perfil de vorticidades para $Re = 703$	50
6.5	Perfil de vorticidades para $Re = 1653$	51
6.6	Perfil de vorticidades para $Re = 9376$	52

Índice de Tablas

5.1	Discretización para los términos de $\omega_{i,j}^{n+1}$	35
6.1	Resultados de la simulación	46
6.2	Bifurcaciones de la vorticidad	46

Resumen

Las ecuaciones de Navier-Stokes son el modelo que describe el movimiento de los fluidos. *Grosso modo*, son un conjunto de ecuaciones en derivadas parciales no lineales de segundo grado. En general no se conocen soluciones analíticas, de hecho, en los casos para los que se conocen soluciones, estas carecen de aplicación física. La Simulación de Fluidos por Computador (CFD por sus siglas en inglés), es la rama de la mecánica de fluidos que se vale de métodos numéricos para estudiar las ecuaciones de Navier-Stokes y, simular el comportamiento de los fluidos. En este trabajo se trata el problema del flujo en una cavidad con una pared móvil, el cual es el punto de partida para hacer un abordaje analítico y numérico de las ecuaciones que gobiernan los fluidos Newtonianos, los cuales son un caso particular de aplicación de las ecuaciones de Navier-Stokes. El flujo en la cavidad es un problema canónico y de obligatorio estudio en la mecánica de fluidos, aún hoy en día sigue siendo un área de activa investigación debido a su riqueza geométrica, la cual permite entre otras, estudiar el problema de la turbulencia y probar nuevos modelos numéricos.

Mediante desarrollos analíticos y simulación por diferencias finitas, reconstruimos el conjunto de ecuaciones adimensionales de Navier-Stokes, la discretización de estas ecuaciones y el perfil del fluido para números de Reynolds menores a 10.000. Hasta donde sabemos, por primera vez en la literatura científica, desarrollamos formalmente el análisis de consistencia y damos una aproximación lineal de la estabilidad numérica que garantiza la convergencia del modelo. Además encontramos los valores de bifurcación para el número de vorticidades en términos del número de Reynolds, con los cuales proponemos una novedosa conexión con el problema de los *N*-Vórtices.

Palabras clave: Navier-Stokes – problema del flujo en la cavidad – diferencias finitas – bifurcaciones para vorticidades– fluidos incompresibles.

Abstract

The Navier-Stokes equations are the model that describes the motion of fluids. Roughly they are a set of equations of non linear partial derivatives of second order. In general there is no analytical solutions, in fact, for the cases where solutions are known, have no physical sense. The Computer Fluid Simulation (CFD), is the branch of Fluid Mechanics which uses numerical methods for the study of Navier-Stokes equations and simulate the fluid behavior. In this work we address the problem related to the fluid flowing inside a cavity with a moving lid, which is the starting point to do a numerical analysis about the equations governing the Newtonian fluids, which are a particular case of Navier-Stokes equations. The cavity flow is a canonical problem and subject of obligatory study in fluid mechanics, even today it remains as an active investigation area due to its geometric richness, which allows the study of turbulence and the testing of new numerical methods among other applications.

Through analytical developments and finite differences simulations, we have reconstructed the set of non-dimensional Navier-Stokes equations, its discretization and the fluid's profile for Reynolds numbers less than 10.000. As far as we know, this is the first time in scientific literature, we formally develop the consistency analysis and give a linear approximation for the numeric stability which guarantees the model's convergence. We also find the bifurcation values for the number of vortices in terms of Reynolds number, with which we propose a novel idea relating the N-Vortex problem.

Key words: Navier-Stokes – Lid Driven Cavity Flow – Finite Differences – Incompressible fluids – Vortex bifurcations.

1 Introducción

Las ecuaciones de Navier-Stokes son el modelo por excelencia para describir cualquier sistema que involucre un fluido. Sus aplicaciones son infinitas, por ejemplo: para entender el comportamiento del paso de aire por los pulmones, de la sangre por el cuerpo e inclusive para la simulación de fluidos en la industria de los efectos especiales. Estas ecuaciones son la base para entender los comportamientos de los súper fluidos como lo es el plasma presente en el núcleo solar. En la ingeniería permiten crear modelos eficientes de todo tipo de vehículos. Llegan a tener aplicaciones tan importantes como en la investigación de movimientos telúricos, por medio de simulaciones de las placas tectónicas que fluyen sobre el magma de la Tierra. Es por los aspectos anteriormente mencionados que se puede decir que las ecuaciones de Navier-Stokes son de gran importancia para la humanidad y por esto encontrar expresiones analíticas que las resuelvan, implicarían un gran avance matemático y tecnológico. Pero como el progreso en el campo de sus aplicaciones no puede detenerse hasta que esto suceda, el abordaje numérico de estas ecuaciones es de suma importancia, lo que lo convierte en un campo de constante investigación.

Daniel Bernoulli fue el primero que vio en el cálculo diferencial la herramienta que permitiría analizar el movimiento de los fluidos. Basado en los trabajos de Bernoulli, Euler desarrolló un conjunto de ecuaciones cuyas soluciones describían el movimiento de un fluido hipotético o ideal, en términos prácticos, un fluido no viscoso. Claude-Louis Navier, en 1822, dedujo las ecuaciones de los fluidos que incorporaban la viscosidad. Estas, a pesar de ser correctas, estaban basadas en un análisis matemático erróneo. Veinte años después, Jorge Gabriel Stokes corrigió los errores en la deducción de Navier. Así desde entonces, a este conjunto de ecuaciones diferenciales parciales no lineales se les conoce como las ecuaciones de Navier-Stokes.

Las ecuaciones de Navier-Stokes fueron propuestas por el matemático Steven Smale, ante el Clay Mathematics Institute como uno de los **7 problemas del milenio**.

"Navier-Stokes equation; This is the equation which governs the flow of fluids such as water and air. However, there is no proof for the most basic questions one can ask: do solutions exist, and are they unique? Why ask for a proof? Because a proof gives not only certitude, but also understanding." [13]

Como lo menciona Smale en su formulación, no conocemos soluciones analíticas para

este problema. Esto es debido a que las ecuaciones diferenciales son **no lineales** y en general no existen métodos que den una forma para resolverlas.

A lo largo de este documento, a partir de una situación física, desarrollamos exhaustivamente los procedimientos matemáticos que llevan a las ecuaciones de Navier-Stokes. Las cuales aplicaremos al problema de la cavidad, el cual consiste en el estudio del comportamiento de un fluido dentro de una cavidad cuadrada, donde una de sus paredes es móvil y se desplaza con velocidad constante. En el contexto numérico estudiaremos la consistencia y la aproximación lineal a la estabilidad del modelo matemático discretizado, que describe el fluido en la cavidad el cual posteriormente implementamos computacionalmente. Con este modelo computacional estudiamos los perfiles del fluido para diversos valores del número de Reynolds y los valores de bifurcación en el número de vórtices que se observan en cada perfil.

Si bien existen muchas técnicas para el estudio numérico de las ecuaciones de Navier-Stokes, en este trabajo solo se estudia el método de las diferencias finitas, que a pesar de su sencillez matemática, siguen siendo uno de los métodos más ampliamente usados. Es de tener en cuenta que el análisis de la estabilidad y convergencia de ecuaciones parciales no lineales discretizadas usando diferencias finitas, es aún un problema abierto.

En el Capítulo 2, se abordan todos los conceptos necesarios para la derivación de las ecuaciones de Navier-Stokes y la teoría referente a las diferencias finitas. En el Capítulo 3 abordamos teóricamente el problema de la cavidad. En el Capítulo 4 se aplica el método de diferencias finitas explícitamente al problema de la cavidad. En el Capítulo 5 se presentan los resultados de las bifurcaciones de la vorticidad. En el Capítulo 6 se hace una presentación sencilla del problema de los *N*-Vórtices. En el Capítulo 7 se muestran las conclusiones del estudio para finalmente en el Capítulo 8 dar las perspectivas futuras de investigación.

Objetivo general

Estudiar la mecánica de fluidos presente en el problema de la cavidad dos-dimensional, cuyo comportamiento está gobernado por las ecuaciones de Navier-Stokes.

Objetivos específicos

- Plantear y derivar las ecuaciones de Navier-Stokes en su forma canónica.
- Plantear las ecuaciones de Navier-Stokes en términos de las funciones de flujo y vorticidad.
- Desarrollar el modelo computacional de las ecuaciones de Navier-Stokes usando diferencias finitas.

- Usar el modelo computacional como herramienta de estudio en la generación de vórtices con diferentes números de Reynolds.

2 Antecedentes

Dentro del estudio del problema de la cavidad es inevitable encontrarse con los trabajos de Ercan Erturk, quien ha estudiado a profundidad este tema abordando sus aspectos físicos, matemáticos y numéricos. En su trabajo *Discussions On Driven Cavity Flow*[7] se discute la solución numérica para las ecuaciones de Navier-Stokes en su forma dos-dimensional en términos de flujo y vorticidad utilizando la forma estable de dichas ecuaciones. Este artículo ha sido una de las más importantes fuentes de referencia durante nuestro estudio del problema de la cavidad.

Los libros *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics* de Chorin y Marsden, *Incompressible Flow* de Rondald L. Panton y *Elementary Fluid Mechanics* de Tsutomu Kambe son nuestra cimientos primarios en cuanto las bases matemáticas para la deducción de las ecuaciones de Navier-Stokes. En estos libros encontramos la introducción de conceptos esenciales en la dinámica de fluidos como el continuo, el número de Reynolds y la condición de no deslizamiento.

En cuanto a los métodos numéricos tratados en nuestro trabajo encontramos en el libro *Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations*[29] por J. C. Strikwerda todas las bases y nociones de la teoría relacionada a las diferencias finitas. A. Hadjidimos en *Successive overrelaxation (SOR) and related methods*[9] nos ofrece una completa introducción al método de sobre relajación para ecuaciones diferenciales parciales elípticas. W. T. Vetterling en *The art of scientific computing*[33] realiza una detallada deducción para el parámetro de sobre relajación.

P. Amodio, Yu. Blinkov, V. Gerdt y R. La Scala en *On Consistency of Finite Difference Approximations to the Navier-Stokes Equations* y Vladimir P. Gerdt en *Consistency Analysis of Finite Difference Approximations to PDE Systems* tratan una visión moderna del análisis de consistencia introduciendo los conceptos de consistencia débil (w-consistency) y consistencia fuerte (s-consistency). En cuanto a la estabilidad encontramos en *Finite differences for the convection-diffusion equation. On stability and boundary conditions*[27] por E. Sousa un excelente análisis para la ecuación no lineal de convección y difusión, texto de vital importancia para nosotros ya que introduce ideas de linealización que permiten utilizar el análisis de von Neumann en ecuaciones diferenciales no lineales.

3 Preliminares

“Approximate solutions to many problems that cannot be solved analytically, arise from numerical and other approximation techniques.”

Harold Cohen [5]

3.1 Derivación de las ecuaciones de Navier-Stokes

Sea Ω una región en un espacio dos-dimensional, la cual se encuentra llena de un fluido. Consideremos ahora una región fija $D \subseteq \Omega$, de dimensiones infinitesimales Δx , Δy , como se observa en la Figura 3.1. A la región D le llamaremos Volumen de Control o V.C.

Como nos interesa el estudio de fluidos incompresibles, tenemos que para cada tiempo t el fluido tiene una densidad ρ constante bien definida en todo Ω . Recordemos que la densidad establece la cantidad de masa m por unidad de volumen, por lo tanto para el V.C. dos-dimesional, tenemos que

$$\rho = \frac{m}{\Delta x \Delta y}. \quad (3.1)$$

Asumiendo m constante en todo Ω tendremos una densidad ρ constante.

3.1.1 Principio de Conservación de Masa

El principio fundamental de conservación de masa, establece que [31],

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt}(\rho \Delta x \Delta y) = 0. \quad (3.2)$$

Lo cual nos dice que la masa dentro de un sistema es constante en el tiempo. Para el caso del V.C, la cantidad de masa de entrada, es la misma de salida *i.e.*,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Razón} \\ \text{Acumulación} \\ \text{de Masa} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Razón} \\ \text{Masa de} \\ \text{Entrada} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{Razón} \\ \text{Masa de} \\ \text{Salida} \end{array} \right\}. \quad (3.3)$$

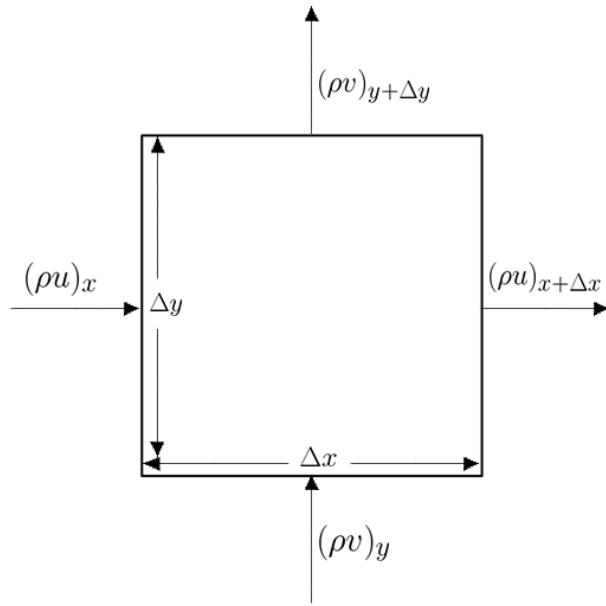


Figura 3.1: Conservación de masa en el volumen de control

Asumamos que $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))$ representa la trayectoria de una partícula arbitraria en Ω a tiempo t , donde $x(t)$ y $y(t)$ son funciones suaves de al menos clase C^2 . El campo de velocidades \mathbf{u} está dado por

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}(t), t) = \frac{d\mathbf{x}}{dt}(t),$$

donde para dicho campo de velocidades utilizaremos la notación.

$$\mathbf{u}(x, y, t) = (u(x, y, t), v(x, y, t)),$$

siendo $u(x, y, t), v(x, y, t)$ la velocidad en los ejes x y y respectivamente. Matemáticamente la Expresión 3.3 está dada por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Razón} \\ \text{Acumulación} \\ \text{de Masa} \end{array} \right\} = \frac{\partial m}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\rho \Delta x \Delta y),$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Razón} \\ \text{Masa de} \\ \text{Entrada} \end{array} \right\} = (\rho u)_x \Delta y + (\rho v)_y \Delta x,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Razón} \\ \text{Masa de} \\ \text{Salida} \end{array} \right\} = (\rho u)_{x+\Delta x} \Delta y + (\rho v)_{y+\Delta y} \Delta x .$$

Reemplazando y reagrupando en la ecuación de conservación de masa para el V.C 3.3., obtenemos

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \Delta x \Delta y = [(\rho u)_x - (\rho u)_{x+\Delta x}] \Delta y + [(\rho v)_y - (\rho v)_{y+\Delta y}] \Delta x. \quad (3.4)$$

Dividiendo la Ecuación 3.4 por $\Delta x \Delta y$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{(\rho u)_x - (\rho u)_{x+\Delta x}}{\Delta x} + \frac{(\rho v)_y - (\rho v)_{y+\Delta y}}{\Delta y}, \quad (3.5)$$

tomando los límites $\lim_{\Delta x \rightarrow 0}$, $\lim_{\Delta y \rightarrow 0}$ en la Ecuación 3.5 tenemos,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0.$$

Como asumimos en nuestra definición para la densidad que ρ es constante entonces

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

la cual reescribimos en forma vectorial como

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (3.6)$$

La Ecuación 3.6 es llamada **Ecuación de Conservación de Masa** y nos dice que la divergencia del campo de velocidades es cero en cualquier punto de Ω .

3.1.2 Principio de Conservación del Momentum

La razón de acumulación de momentum está dada por la expresión

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Razón} \\ \text{Acumulación} \\ \text{de Momentum} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Razón} \\ \text{Momentum} \\ \text{de Entrada} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{Razón} \\ \text{Momentum} \\ \text{de Salida} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{Fuerzas} \\ \text{superficiales} \\ \text{sobre el V.C} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{Fuerzas} \\ \text{sobre el} \\ \text{V.C} \end{array} \right\}. \quad (3.7)$$

Si hacemos el desarrollo de la conservación del momentum para el eje x , tenemos que su representación matemática es,

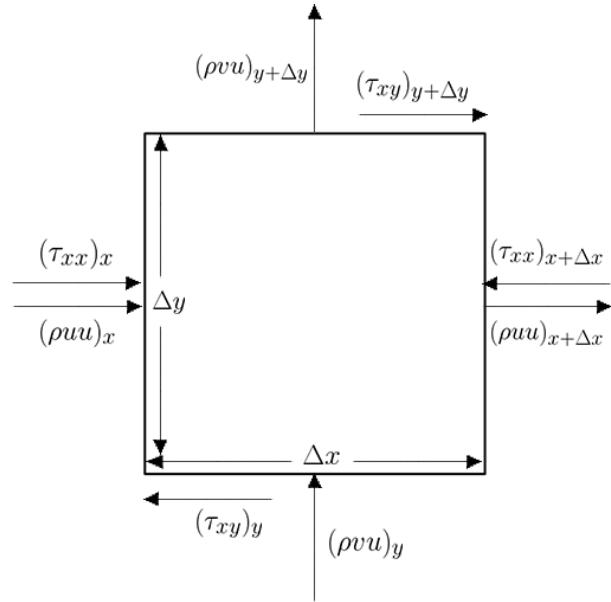


Figura 3.2: Conservación de momentum y fuerzas de estrés en el V.C.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Razón} \\ \text{Acumulación} \\ \text{de Momentum} \end{array} \right\} = \Delta x \Delta y \frac{\partial \rho u}{\partial t},$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Razón} \\ \text{Momentum} \\ \text{de Entrada} \end{array} \right\} = (\rho u u)_x \Delta y + (\rho u v)_y \Delta x,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Razón} \\ \text{Momentum} \\ \text{de Salida} \end{array} \right\} = (\rho u u)_{x+\Delta x} \Delta y + (\rho u v)_{y+\Delta y} \Delta x.$$

Para representar las fuerzas superficiales en la frontera ∂U (Fuerzas que actúan sobre el V.C), usamos la notación tensorial, τ_{xy} donde el subíndice xy es la normal orientada en x de la superficie, experimentando una fuerza en dirección y .

Dentro de estas fuerzas tenemos las de estrés normal y tangencial, como se observa en la Figura 3.2. Así,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Estrés} \\ \text{Normal} \end{array} \right\} = [(\tau_{xx})_{x+\Delta x} - (\tau_{xx})_x] \Delta y,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Estrés} \\ \text{Tangencial} \end{array} \right\} = [(\tau_{yx})_{y+\Delta y} - (\tau_{yx})_y] \Delta x.$$

La fuerza sobre el V.C., es la fuerza experimentada al encontrarse en el campo gravitacional, así que por la segunda ley de Newton y la Ecuación 3.1 se obtiene

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fuerza} \\ \text{sobre el} \\ \text{V.C} \end{array} \right\} = mg_x = \rho \Delta x \Delta y g_x .$$

Donde g_x es la componente en x del vector gravedad \mathbf{g} . Reemplazando y reagrupando en la Ecuación de Conservación de Momentum 3.7 obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho u}{\partial t} \Delta x \Delta y &= - \left[(\rho uu)_{x+\Delta x} - (\rho uu)_x \right] \Delta y \\ &\quad - \left[(\rho uv)_{y+\Delta y} - (\rho uv)_y \right] \Delta x \\ &\quad + \left[(\tau_{xx})_{x+\Delta x} - (\tau_{xx})_x \right] \Delta y \\ &\quad + \left[(\tau_{yx})_{y+\Delta y} - (\tau_{yx})_y \right] \Delta x \\ &\quad + \rho \Delta x \Delta y g_x, \end{aligned} \tag{3.8}$$

donde dividiendo la Ecuación 3.8 por $\Delta x \Delta y$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho u}{\partial t} &= - \left[\frac{(\rho uu)_{x+\Delta x} - (\rho uu)_x}{\Delta x} \right] \\ &\quad - \left[\frac{(\rho uv)_{y+\Delta y} - (\rho uv)_y}{\Delta y} \right] \\ &\quad + \left[\frac{(\tau_{xx})_{x+\Delta x} - (\tau_{xx})_x}{\Delta x} \right] \\ &\quad + \left[\frac{(\tau_{yx})_{y+\Delta y} - (\tau_{yx})_y}{\Delta y} \right] \\ &\quad + \rho g_x, \end{aligned} \tag{3.9}$$

tomando $\lim_{\Delta x \rightarrow 0}$, $\lim_{\Delta y \rightarrow 0}$ en la Ecuación 3.9 y reagrupando

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho uu}{\partial x} + \frac{\partial \rho uv}{\partial y} = \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \rho g_x. \tag{3.10}$$

En la Ecuación 3.10 tenemos dos funciones desconocidas τ_{xx} , τ_{yx} . Para su formulación nos limitaremos a los *Fluidos Newtonianos* [15]. Estos fluidos se caracterizan por tener una viscosidad y densidad constantes. Adicionalmente consideraremos fluidos isotérmicos, lo que implica que no se tendrán en cuenta cambios en temperatura.

Aplicando la *Ley de viscosidad de Newton* [25], la cual dice

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= -P + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \tau_{xy} = \tau_{yx} &= \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right). \end{aligned}$$

En donde μ es un coeficiente constante que representa la viscosidad del fluido, $P = P(\mathbf{x}(t), t) \rightarrow \mathbb{R}$ es la función de presión para $\mathbf{x}(t)$. Así se tiene,

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho \frac{\partial uu}{\partial x} + \rho \frac{\partial uv}{\partial y} &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ &\quad + \mu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) + \rho g_x. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Reordenando y aplicando la regla de la cadena en la Ecuación 3.11,

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial u}{\partial t} &= -\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ &\quad - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ &\quad + \mu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) + \rho g_x. \end{aligned}$$

Por la naturaleza de la construcción de \mathbf{u} , tenemos que sus componentes u y v son funciones continuas y de clase al menos C^2 , así podemos invocar el Teorema de Clairaut [1] el cual nos dice que $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)$. De esta manera obtenemos

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial u}{\partial t} &= -\rho \left[u \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial x} \right] \\ &\quad - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ &\quad + \mu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \rho g_x. \end{aligned}$$

Aplicando la Ecuación de Conservación de Masa 3.6 en la Ecuación 3.12 y reordenando, se tiene

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \rho g_x,$$

que es equivalente a

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + g_x. \quad (3.12)$$

De manera análoga aplicando el análisis para el eje y sobre el V.C, tenemos

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + g_y. \quad (3.13)$$

Así de las Ecuaciones 3.12 y 3.13, obtenemos la forma vectorial para la Ecuación de Conservación de Momentum.

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{g} \quad (3.14)$$

Donde $\nu = \frac{\mu}{\rho}$, es el coeficiente de viscosidad cinemática del fluido. El conjunto de Ecuaciones 3.6 y 3.14 son conocidas como ecuaciones de **Navier-Stokes** para fluidos Newtonianos [3], [17].

Observación 1. Si se asume que $\nu = 0$, la Ecuación 3.14 se reduce a

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \mathbf{g}. \quad (3.15)$$

Históricamente la Ecuación 3.15 fue desarrollada por Leonard Euler [4], [26], es por ello que los fluidos de viscosidad cero se suelen denominar eulerianos o en ocasiones fluidos ideales.

Es de notar que las ecuaciones de Navier-Stokes en \mathbb{R}^2 tienen solución analítica bajo ciertas condiciones muy específicas. Aunque representan avances en su estudio y entendimiento, estas soluciones parecen estar lejos de ser generalizadas en \mathbb{R}^n [20].

3.1.3 El número de Reynolds

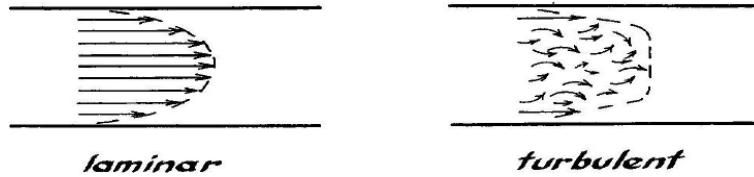


Figura 3.3: Flujo laminar vs flujo turbulento [21]

Dentro de los fluidos encontramos dos tipos de flujos, el laminar y el turbulento. Un flujo es laminar cuando el fluido se mueve en capas o láminas, como se observa en la primera imagen de la Figura 3.3. Un flujo turbulento es aquel en donde las partículas del fluido tienen un movimiento errático. Aquí el intercambio de momentum se da de forma transversal, imagen derecha Figura 3.3. La naturaleza laminar o turbulenta de un fluido se caracteriza por el número adimensional conocido como *número de Reynolds*.

3.1.4 Forma adimensional de las ecuaciones de Navier-Stokes

En el estudio del movimiento de un fluido viscoso, el flujo es representado con una velocidad característica U y longitud L . Cuando el fluido de densidad ρ tiene una única velocidad y longitud características U y L , el estado laminar o turbulento se representa con el número de Reynolds definido como

$$Re = \frac{\rho U L}{\mu} = \frac{U L}{\nu}.$$

Supongamos ahora que la coordenada $x(x, y)$, el tiempo t , la velocidad u y la presión P se normalizan a variables adimensionales. Denotamos estas variables adimensionales de la siguiente manera [18],

$$\begin{aligned} x^* &= \frac{x}{L} && \text{Donde } L \text{ es la longitud característica del problema.} \\ u^* &= \frac{u}{U} && \text{Donde } U \text{ es la Velocidad característica del fluido.} \\ t^* &= \frac{t}{L/U} && t \text{ es la variable de tiempo.} \\ P^* &= \frac{P}{\rho U^2} && \text{Presión adimensional.} \end{aligned}$$

Sustituyendo en las Ecuaciones de Conservación de Momentum 3.14 (Omitiremos la gravedad g asumiendo que las únicas fuerzas presentes son las fuerzas internas de viscosidad) y de Conservación de Masa 3.6, se obtiene la forma adimensional de las ecuaciones de Navier-Stokes (Por simplicidad en la escritura de las ecuaciones, en futuras referencias se usarán las variables sin el índice *),

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u = -\nabla P + \frac{1}{Re} \nabla^2 u \quad (3.16)$$

$$\nabla \cdot u = 0 \quad (3.17)$$

Donde recordemos que 3.16 es la Ecuación de Conservación de Momentum y 3.17 es la Ecuación de Conservación de Masa, ambas en su forma adimensional.

3.2 Esquema de diferencias finitas

Las diferencias finitas son un modelo matemático que nos permite generar soluciones numéricas de problemas cuya solución analítica es muy compleja o aún no es conocida.

El esquema de diferencias finitas es un método numérico que reemplaza todas las derivadas parciales en una ecuación diferencial parcial, por aproximaciones discretas. A esta nueva ecuación se le conoce como la forma discreta de la ecuación original. Luego de algunas manipulaciones algebraicas, esta ecuación discretizada genera una aproximación a la solución de la ecuación diferencial parcial.

Las diferencias finitas están basadas en el *Teorema de Taylor* [2] el cual enunciamos a continuación.

Teorema 1. (*Teorema de Taylor*). *Si la derivada $(n+1)$, $f^{n+1}(t)$, existe para todo t en un abierto Ω donde $a, x \in \Omega$ y si $P_n(x)$ es el polinomio de Taylor de orden- n para f alrededor de a , esto es.*

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$

Entonces el error $E_n(x) = f(x) - P_n(x)$ en la aproximación $f(x) \approx P_n(x)$ esta dado por

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!} (x-a)^{(n+1)}$$

Donde s es algún valor entre a y x .

Supongamos que f es una función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$. Llamemos $h = x - a$, $f(a) = f_i$, $f(a+h) = f_{i+1}$. Usando el Teorema de Taylor tenemos que f_i es

$$f_{i+1} = f_i + \frac{\partial f_i}{\partial x} h + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x^2} + \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 f_i}{\partial x^3} + E_3(x). \quad (3.18)$$

De la Ecuación 3.18 podemos despejar la primera derivada de f_i con respecto de x obteniendo

$$\frac{\partial f_i}{\partial x} = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} - \frac{h}{2!} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x^2} - \frac{h^2}{3!} \frac{\partial^3 f_i}{\partial x^3} + O(h^3). \quad (3.19)$$

Donde $O(h^n) = \pm \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!} h^{n+1}$. Si $h \rightarrow 0$, todas las derivadas de orden superior y $O(h^3)$ tienden a cero y la derivada parcial converge, i.e.,

$$\frac{\partial f_i}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_{i+1} - f_i}{h}.$$

3.2.1 Diferencias finitas de primer orden

Si tenemos un problema modelado por la función f y conocemos el valor de f en todo el dominio, las diferencias finitas nos permiten conocer la aproximación de la derivada parcial $\frac{\partial f_i}{\partial x}$, de la siguiente manera,

$$\frac{\partial f_i}{\partial x} = \frac{f_{i+1} - f_i}{h}. \quad (3.20)$$

Donde el orden de error es $O(h)$. La Ecuación 3.20 es la aproximación en diferencias finitas de primer orden para primeras derivadas.

3.2.2 Diferencias finitas laterales y centradas

Dependiendo del contexto del problema, una ecuación diferencial puede ser aproximada mediante tres formas diferentes. Como podemos observar en la Figura 3.4 la pendiente de color naranja representa la derivada analítica de la función y las demás pendientes son aproximaciones a esta. La Ecuación 3.20 también es conocida como diferencias progresivas (Forward Differences F.D), representada en la Figura 3.4 por la pendiente azul.

Si en el Teorema de Taylor 1, se tiene que $x < a$, la aproximación de $f(a+h)$ sería una aproximación por la izquierda para la cual tendríamos

$$f_{i-1} = f_i - \frac{\partial f_i}{\partial x} h + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x^2} - \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 f_i}{\partial x^3} + E_3(x). \quad (3.21)$$

Así la derivada parcial está dada por

$$\frac{\partial f_i}{\partial x} = \frac{f_i - f_{i-1}}{h} + \frac{h}{2!} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x^2} - \frac{h^2}{3!} \frac{\partial^3 f_i}{\partial x^3} + O(h^2). \quad (3.22)$$

De manera similar a las diferencias progresivas tendríamos la siguiente aproximación

$$\frac{\partial f_i}{\partial x} = \frac{f_i - f_{i+1}}{h}. \quad (3.23)$$

Donde el orden de error es $O(h)$. La Ecuación 3.23 es conocida como diferencias regresivas (Backward Differences B.D), representada en la Figura 3.4 por la pendiente roja. Una tercera aproximación resulta de sumar las Ecuaciones 3.19 y 3.22 para obtener

$$\frac{\partial f_i}{\partial x} = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h}, \quad (3.24)$$

con un orden de error $O(h^2)$. La aproximación 3.24 es conocida como diferencias centradas (Centered Differences C.D), representada por la pendiente verde en la Figura 3.4.

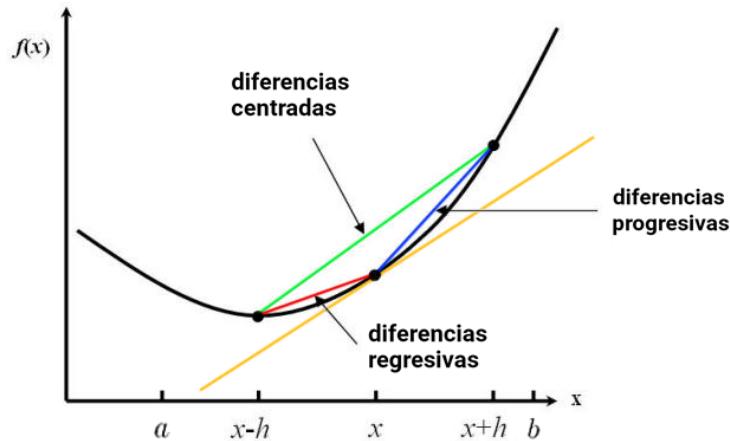


Figura 3.4: Diferentes esquemas de aproximación a la derivada de una función [8]

3.2.3 Diferencias finitas de segundo orden

Debido a la presencia de derivadas parciales de segundo orden en las Ecuaciones de Navier-Stokes, es de nuestro interés hallar la un esquema en diferencias finitas para estas derivadas.

A continuación procedamos sumando las Ecuaciones 3.18 y 3.21,

$$f_{i+1} + f_{i-1} = 2f_i + h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + E_3(x),$$

y despejando la derivada parcial de segundo orden obtenemos

$$\frac{\partial^2 f_i}{\partial x^2} = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2}. \quad (3.25)$$

Donde la Ecuación 3.25 tiene un orden de error $O(h^2)$.

3.2.4 Ilustración del método de diferencias finitas

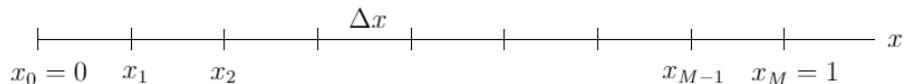


Figura 3.5: Discretización del espacio

El método de diferencias finitas consiste en reducir un problema que involucra ecuaciones diferenciales, a un problema discreto. Para esto comenzamos discretizando el dominio espacial, es decir generando una malla o partición. Generalmente se usa una partición uniforme donde $\Delta x = \frac{L}{M}$ donde L es la longitud del dominio y M el número de intervalos como se observa en la Figura 3.5. Si queremos referirnos a un nodo de la malla nos referiremos a él como $x_i = i\Delta x$ con $i = 0, 1, 2, \dots, M - 1, M$. De la misma manera que hemos discretizado el espacio lo hacemos con el tiempo t donde $\Delta t = \frac{t}{N}$ y $n = 0, 1, 2, \dots, N - 1, N$.

Ahora definiremos la función ψ_n^i para referirnos a la función evaluada en el punto $\psi(i\Delta x, n\Delta t)$.

Supongamos que debemos hallar numéricamente la solución para la ecuación unidimensional de convección lineal

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + c \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0. \quad (3.26)$$

Lo que nos dice esta ecuación es que la derivada de una función ψ con respecto al tiempo es directamente proporcional a la velocidad (donde la constante de proporcionalidad es $-c$),

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -c \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

La solución analítica de esta ecuación es sencilla. Dada la condición inicial

$$\psi(x, 0) = f(x), \quad (3.27)$$

supongamos que $\psi(x, t) = f(x - ct)$ es una solución de la ecuación diferencial. Entonces

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial t} &= -cf'(x - ct), \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= f'(x - ct).\end{aligned}$$

Reemplazando en la Ecuación 3.26, se tiene

$$-cf'(x - ct) + cf'(x - ct) = 0.$$

Con lo cual observamos que efectivamente $f(x - ct)$ es solución.

Para discretizar este problema utilizaremos el esquema numérico FT-BS (Forward Differences in Time, Backward Differences in space), mostrados anteriormente en las Ecuaciones 3.20 y 3.23. Así

$$\frac{\psi_{n+1}^i - \psi_n^i}{\Delta t} + c \frac{\psi_n^i - \psi_n^{i-1}}{\Delta x} = 0.$$

Analizando la discretización podemos observar que todas las variables, ψ_n^i y ψ_n^{i-1} están dadas por la condición inicial 3.27 cuando $n = 0$. Ahora Δt y Δx son conocidos ya que son el tamaño de paso que elegimos para tiempo y partición del espacio, por lo tanto solo nos resta despejar el término desconocido ψ_{n+1}^i , el cual podemos hallar resolviendo la ecuación discretizada. Así tenemos

$$\psi_{n+1}^i = \psi_n^i - c \frac{\Delta t}{\Delta x}.$$

Con la expresión anterior tenemos una forma explícita para la solución numérica de la Ecuación 3.26 en el tiempo $n + 1$. Además podemos observar que esencialmente el método es iterativo, es decir que para hallar una aproximación a tiempo $n + 1$, utiliza los valores previamente conocidos a tiempo n y éste es un proceso que se repite indefinidamente o bien hasta que se alcance una convergencia previamente establecida.

4 El problema de la cavidad

El problema de la cavidad o mejor conocido como *Lid-Driven Cavity Flow* es un problema canónico en CFD. Como se muestra en la Figura 4 consiste en investigar el comportamiento de un fluido contenido en una caja cuadrada donde únicamente la tapa superior se encuentra en movimiento a velocidad constante $\mathbf{u} = (1, 0)$.

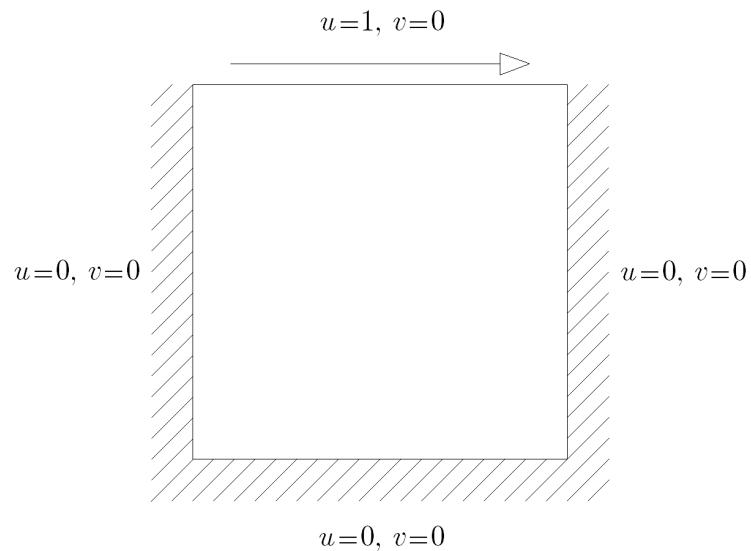


Figura 4.1: Lid Driven Cavity Flow

4.1 Ecuaciones de Navier-Stokes en términos de flujo y vorticidad

Las ecuaciones de Navier-Stokes pueden ser replanteadas en términos de las funciones de flujo y vorticidad. Esta definición es conveniente debido a que reduce el sistema de Ecuaciones 3.16 y 3.17, a únicamente dos funciones incógnitas acopladas entre sí.

Comencemos por formular el problema en términos de la vorticidad, el cual es un campo vectorial definido por el rotacional ($\nabla \times \mathbf{u}$) del campo de velocidades $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$,

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}. \quad (4.1)$$

Y en términos de la función de flujo definida como [19]

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \text{ y } v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (4.2)$$

Antes de comenzar el desarrollo, recordemos los siguientes resultados del cálculo vectorial. Sean F y G dos campos vectoriales en \mathbb{R}^3 y k un campo escalar en \mathbb{R} , entonces se tienen las siguientes identidades,

$$\frac{1}{2}\nabla(F \cdot F) = (F \cdot \nabla)F + F \times (\nabla \times F), \quad (4.3)$$

$$\nabla \times k = 0, \quad (4.4)$$

$$\nabla \times (F \times G) = (G \cdot \nabla)F - (F \cdot \nabla)G + F\nabla \cdot G - G\nabla \cdot F. \quad (4.5)$$

Aplicando la propiedad 4.3 en la Ecuación de Conservación de Momentum 3.16 tenemos

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) - \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}) = -\nabla p + \frac{1}{Re}\nabla^2 \mathbf{u}.$$

Usando la definición de la vorticidad 4.1,

$$\underbrace{\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})}_{\text{LHS}} - \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} = \underbrace{-\nabla p + \frac{1}{Re}\nabla^2 \mathbf{u}}_{\text{RHS}}. \quad (4.6)$$

Tomando el rotacional de la Ecuación 4.6, tenemos para LHS,

$$\nabla \times \text{LHS} = \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{u}) + \frac{1}{2}\nabla \times \nabla(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) - \nabla \times (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}).$$

Usando la propiedad 4.5

$$\nabla \times \text{LHS} = \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{u}) + \frac{1}{2}\nabla \times \nabla(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) - (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{\omega} - \mathbf{u} \nabla \cdot \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \nabla \cdot \mathbf{u}.$$

Donde los siguientes términos se cancelan,

$$\frac{1}{2}\nabla \times \nabla(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) = 0$$

por la propiedad 4.4

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) = 0$$

Y por la conservación de masa

$$\boldsymbol{\omega} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0.$$

Por lo tanto

$$\nabla \times \text{LHS} = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{\omega}.$$

Y para el rotacional de RHS

$$\nabla \times RHS = -\nabla \times \nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 (\nabla \times \mathbf{u}).$$

Aplicando las propiedades 4.1 y 4.4, se obtiene

$$\nabla \times RHS = \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega.$$

Combinando de nuevo LHS y RHS obtenemos la *Ecuación de Transporte de la Vorticidad*

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \omega = (\omega \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega. \quad (4.7)$$

4.1.1 Vortex Stretching

La Ecuación 4.7, muestra que la evolución de la vorticidad está dominada por el estiramiento de la vorticidad representado por $(\omega \cdot \nabla) \mathbf{u}$ y la difusión de vorticidad con $\frac{1}{Re} \nabla^2 \omega$, donde $\frac{1}{Re}$ es el coeficiente cinemático de viscosidad o coeficiente de difusión.

Recordemos que estamos en un problema 2 dimensional en donde el vector velocidad $\mathbf{u} = \{u(x, y, 0), v(x, y, 0), 0\}$, así que para 4.1 se tiene

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u(x, y, 0) & v(x, y, 0) & 0 \end{vmatrix}$$

Así

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} &= \left(\frac{\partial}{\partial y}(0) - \frac{\partial}{\partial z}v(x, y, 0) \right) \hat{\mathbf{i}} \\ &- \left(\frac{\partial}{\partial x}(0) - \frac{\partial}{\partial z}u(x, y, 0) \right) \hat{\mathbf{j}} \\ &+ \left(\frac{\partial}{\partial x}v(x, y, 0) - \frac{\partial}{\partial y}u(x, y, 0) \right) \hat{\mathbf{k}}. \end{aligned}$$

i.e.

$$\boldsymbol{\omega} = \left(\frac{\partial}{\partial x}v(x, y, 0) - \frac{\partial}{\partial y}u(x, y, 0) \right) \hat{\mathbf{k}},$$

por lo tanto la vorticidad en \mathbb{R}^2 está dada por

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (4.8)$$

Así para el estiramiento de la vorticidad

$$\begin{aligned} (\omega \cdot \nabla) \mathbf{u} &= \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{\mathbf{k}} \right) \cdot \left(0\hat{\mathbf{i}} + 0\hat{\mathbf{j}} + \left(\frac{\partial}{\partial x} v(x, y, 0) - \frac{\partial}{\partial y} u(x, y, 0) \right) \hat{\mathbf{k}} \right) \right] (u, v, 0) \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial x}(0) + \frac{\partial}{\partial y}(0) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial x} v(x, y, 0) - \frac{\partial}{\partial y} u(x, y, 0) \right) \right] (u, v, 0) \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial x} v(x, y, 0) - \frac{\partial}{\partial y} u(x, y, 0) \right) \right] (u, v, 0) \end{aligned}$$

De donde como las derivadas parciales $\frac{\partial}{\partial x} v(x, y, 0)$ y $\frac{\partial}{\partial y} u(x, y, 0)$ están dadas en términos de x y y , entonces se puede ver que la derivada parcial $\frac{\partial}{\partial z}$ sobre dichos términos es cero. Así podemos verificar que, $(\omega \cdot \nabla) \mathbf{u} = 0$. Con éste resultado, la *Ecuación de Transporte de la Vorticidad* 4.7 para fluidos dos-dimensionales se define como

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \omega = \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega. \quad (4.9)$$

Usando la función de flujo mostrada en la Ecuación 4.2 en las Ecuaciones 4.9 y 4.8, obtenemos

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right), \quad (4.10)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\omega. \quad (4.11)$$

La Ecuación 4.10 es conocida como *Ecuación de Advección-Difusión de la Vorticidad* y la Ecuación 4.11 como *Ecuación Elíptica de la Vorticidad*. Este es un sistema de ecuaciones acoplado, en el cual solo tenemos dos funciones por resolver, a diferencia del sistema de Ecuaciones de Navier-Stokes 3.16 y 3.17 que requiere solución para tres funciones u , v y p .

4.2 Condiciones de frontera en la cavidad

Para las condiciones de frontera usaremos la condición de *no deslizamiento*, la cual indica que si un sólido con velocidad local V_i , está en contacto con un fluido, entonces la velocidad local del fluido es igual a V_i [24]. Usando esta condición tenemos,

$$\begin{aligned} u(x, 1) &= 1, \quad v(x, 1) = 0, \quad \text{tapa superior}, \\ u(x, 0) &= 0, \quad v(x, 0) = 0, \quad \text{tapa inferior}, \\ u(0, y) &= 0, \quad v(0, y) = 0, \quad \text{tapa lateral izquierda}, \\ u(1, y) &= 0, \quad v(1, y) = 0, \quad \text{tapa lateral derecha}. \end{aligned}$$

Así tenemos que.

- Tapas laterales izquierda y derecha

$$u = 0 = \frac{\partial \psi}{\partial y}.$$

- Tapas superior e inferior

$$v = 0 = \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

De estas observaciones concluimos que ψ es una constante sobre la frontera y así por conveniencia podemos establecer que

$$\psi \equiv 0. \quad (4.12)$$

Pero aún debemos cumplir la siguiente condiciones de frontera.

- Tapa superior

$$u = 1 = \frac{\partial \psi}{\partial y}.$$

- Tapa inferior

$$u = 0 = \frac{\partial \psi}{\partial y}. \quad (4.13)$$

Para ω en los muros tenemos que ψ es constante a lo largo de cada muro, así usando la *Ecuación Elíptica de la Vorticidad* 4.11 se tiene.

- Tapas laterales izquierda y derecha.

$$\omega = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}.$$

- Tapas superior e inferior.

$$\omega = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}.$$

Recopilando, podemos observar en la Figura 4.2 las condiciones de frontera.

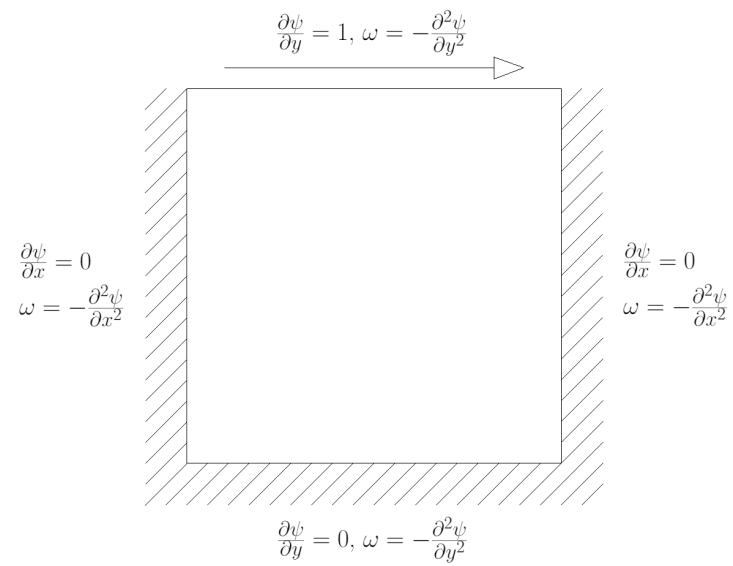


Figura 4.2: Condiciones de frontera

5 Esquema numérico para la cavidad

Para resolver la *Ecuación de Advección-Difusión de la Vorticidad* 4.10, usaremos diferencias finitas. Para la derivada temporal se empleará el esquema de diferencias progresivas. Para las derivadas espaciales de primer y segundo orden el esquema de diferencias centradas. La solución numérica de la *Ecuación Elíptica de la Vorticidad* 4.11 empleará diferencias finitas de segundo orden a las cuales se les aplicará el método de *Succesive Over-Relaxation*.

5.1 Discretización

En la Figura 5.1 podemos observar la malla de discretización para el dominio de la cavidad, donde la longitud característica es $L = 1$, $\Delta x = h = \frac{1}{N}$, donde N representa el número de particiones sobre un eje de la malla.

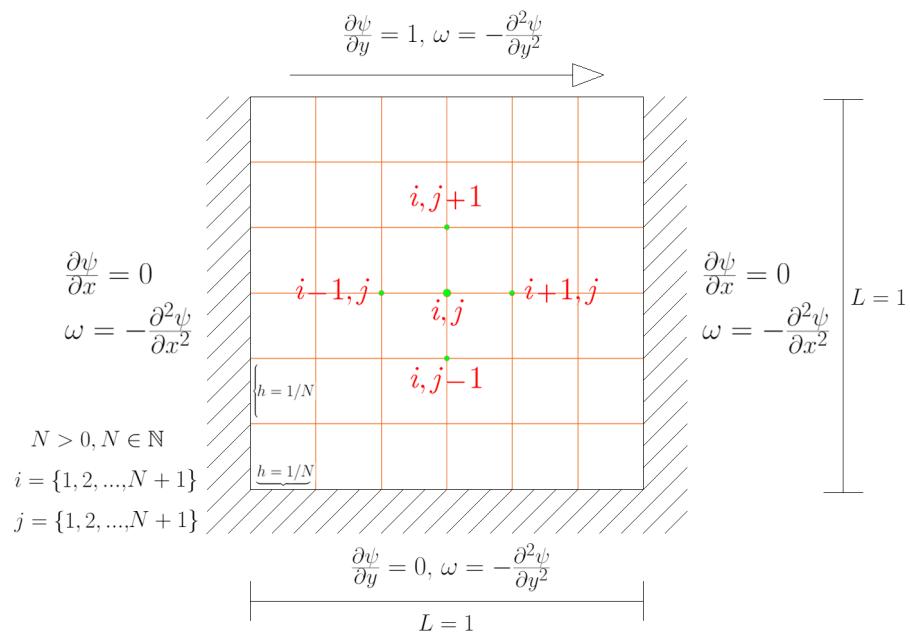


Figura 5.1: Discretización espacial

5.1.1 Esquema de diferencias finitas para la función de flujo

Para discretizar la Ecuación Elíptica de la Vorticidad 4.11 aplicaremos la Ecuación 3.25 y así obtenemos

$$-\omega_{i,j}^n = \frac{\psi_{i+1,j}^n + \psi_{i-1,j}^n + \psi_{i,j+1}^n + \psi_{i,j-1}^n - 4\psi_{i,j}^n}{h^2}.$$

Resolviendo para $\psi_{i,j}^n$

$$\psi_{i,j}^n = \frac{1}{4} \left(\psi_{i+1,j}^n + \psi_{i-1,j}^n + \psi_{i,j+1}^n + \psi_{i,j-1}^n + h^2 \omega_{i,j}^n \right).$$

Usando el método de *Successive Over-Relaxation (SOR)*[10] , para encontrar la solución de ψ se tiene

$$\psi_{i,j}^{n+1} = \frac{\beta}{4} (\psi_{i+1,j}^n + \psi_{i-1,j}^{n+1} + \psi_{i,j+1}^n + \psi_{i,j-1}^{n+1} + h^2 \omega_{i,j}^n) + (1 - \beta) \psi_{i,j}^n.$$

Donde β es el parámetro de relajación para el cual usamos la expresión dada por [33]

$$\beta = \frac{2}{1 + \frac{\pi}{N}}.$$

5.1.2 Esquema de diferencias finitas para la vorticidad

Podemos derivar ω en la tapa inferior usando Series de Taylor en ψ , así

$$\psi_{i,2} = \psi_{i,1} + \frac{\partial \psi_{i,1}}{\partial y} h + \frac{\partial^2 \psi_{i,1}}{\partial y^2} \frac{h^2}{2} + O(h^3). \quad (5.1)$$

Usando las Ecuaciones 4.12, 4.13 en la Ecuación 5.1 esta se convierte en

$$\psi_{i,2} = \omega_{i,1} \frac{h^2}{2} + O(h^3).$$

Resolviendo para ω obtenemos la discretización en la tapa inferior dada por

$$\omega_{i,1} = -\frac{2}{h^2} \psi_{i,2}.$$

De manera similar podemos encontrar ω en las otras fronteras.

- Tapa superior.

$$\omega_{i,N-1} = -\frac{2}{h^2} \psi_{i,N-1} - \frac{2}{h}.$$

- Tapa inferior.

$$\omega_{i,1} = -\frac{2}{h^2} \psi_{i,2}.$$

- Tapa lateral izquierda.

$$\omega_{1,j} = -\frac{2}{h^2} \psi_{2,j}.$$

- Tapa lateral derecha.

$$\omega_{N-1,j} = -\frac{2}{h^2} \psi_{N-1,j}.$$

Ahora para hallar la vorticidad en los nodos interiores de la grilla usamos la discretización FT-CS en la Ecuación 4.10, obteniendo

$$\begin{aligned} \frac{\omega_{i,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^n}{\Delta t} + & \left(\frac{\psi_{i,j+1}^n - \psi_{i,j-1}^n}{2h} \right) \left(\frac{\omega_{i+1,j}^n - \omega_{i-1,j}^n}{2h} \right) \\ & - \left(\frac{\psi_{i+1,j}^n - \psi_{i-1,j}^n}{2h} \right) \left(\frac{\omega_{i,j+1}^n - \omega_{i,j-1}^n}{2h} \right) \\ & = \frac{1}{Re} \left(\frac{\omega_{i+1,j}^n + \omega_{i-1,j}^n + \omega_{i,j+1}^n + \omega_{i,j-1}^n - 4\omega_{i,j}^n}{h^2} \right). \end{aligned}$$

Resolviendo para $\omega_{i,j}^{n+1}$ en la Ecuación 5.2, se obtiene

$$\begin{aligned} \omega_{i,j}^{n+1} = \omega_{i,j}^n + \Delta t \left[& \left(\frac{\psi_{i+1,j}^n - \psi_{i-1,j}^n}{2h} \right) \left(\frac{\omega_{i,j+1}^n - \omega_{i,j-1}^n}{2h} \right) \right. \\ & - \left(\frac{\psi_{i,j+1}^n - \psi_{i,j-1}^n}{2h} \right) \left(\frac{\omega_{i+1,j}^n - \omega_{i-1,j}^n}{2h} \right) \\ & \left. + \frac{1}{Re} \left(\frac{\omega_{i+1,j}^n + \omega_{i-1,j}^n + \omega_{i,j+1}^n + \omega_{i,j-1}^n - 4\omega_{i,j}^n}{h^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Para clarificar el resultado de la discretización a continuación recopilamos los resultados para cada término de $\omega_{i,j}^{n+1}$ en la Tabla 5.1.

Forma Diferencial	Forma Discreta
$\frac{\partial \omega}{\partial t}$	$\frac{\omega_{i,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^n}{\Delta t}$
$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x}$	$\left(\frac{\psi_{i,j+1}^n - \psi_{i,j-1}^n}{2h} \right) \left(\frac{\omega_{i+1,j}^n - \omega_{i-1,j}^n}{2h} \right)$
$\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y}$	$\left(\frac{\psi_{i+1,j}^n - \psi_{i-1,j}^n}{2h} \right) \left(\frac{\omega_{i,j+1}^n - \omega_{i,j-1}^n}{2h} \right)$
$\frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right)$	$\frac{1}{Re} \left(\frac{\omega_{i+1,j}^n + \omega_{i-1,j}^n + \omega_{i,j+1}^n + \omega_{i,j-1}^n - 4\omega_{i,j}^n}{h^2} \right)$

Tabla 5.1: *Discretización para los términos de $\omega_{i,j}^{n+1}$*

5.2 Análisis de consistencia

Definición 1. *Consistencia.* Dada una ecuación diferencial parcial, $D[u] = f$ y un esquema de diferencias finitas, $D_{k,h}[\nu] = f$, se dice que el esquema de diferencias finitas es consistente con la ecuación diferencial parcial si para cualquier función suave $\phi(t, x)$,

$$D[\phi] - D_{k,h}[\phi] \rightarrow 0 \quad \text{a medida que } k, h \rightarrow 0,$$

en cada punto (t, x) la convergencia es puntual [29].

Para verificar la convergencia del esquema 5.2, usamos la expansión en Series de Taylor para la funciones ψ, ω alrededor del punto (t_n, x_i, y_j)

$$\omega_{i,j}^{n+1} = \omega_{i,j}^n + \Delta t \omega_t + \frac{\Delta t^2}{2} \omega_{tt} + O(\Delta t^3), \quad (5.3)$$

$$\omega_{i+1,j}^n = \omega_{i,j}^n + h \omega_x + \frac{h^2}{2} \omega_{xx} + \frac{h^3}{6} \omega_{xxx} + O(h^4), \quad (5.4)$$

$$\omega_{i-1,j}^n = \omega_{i,j}^n - h \omega_x + \frac{h^2}{2} \omega_{xx} - \frac{h^3}{6} \omega_{xxx} + O(h^4), \quad (5.5)$$

$$\omega_{i,j+1}^n = \omega_{i,j}^n + h \omega_y + \frac{h^2}{2} \omega_{yy} + \frac{h^3}{6} \omega_{yyy} + O(h^4), \quad (5.6)$$

$$\omega_{i,j-1}^n = \omega_{i,j}^n - h \omega_y + \frac{h^2}{2} \omega_{yy} - \frac{h^3}{6} \omega_{yyy} + O(h^4), \quad (5.7)$$

$$\psi_{i+1,j}^n = \psi_{i,j}^n + h \psi_x + \frac{h^2}{2} \psi_{xx} + \frac{h^3}{6} \psi_{xxx} + O(h^4), \quad (5.8)$$

$$\psi_{i-1,j}^n = \psi_{i,j}^n - h \psi_x + \frac{h^2}{2} \psi_{xx} - \frac{h^3}{6} \psi_{xxx} + O(h^4), \quad (5.9)$$

$$\psi_{i,j+1}^n = \psi_{i,j}^n + h \psi_y + \frac{h^2}{2} \psi_{yy} + \frac{h^3}{6} \psi_{yyy} + O(h^4), \quad (5.10)$$

$$\psi_{i,j-1}^n = \psi_{i,j}^n - h \psi_y + \frac{h^2}{2} \psi_{yy} - \frac{h^3}{6} \psi_{yyy} + O(h^4). \quad (5.11)$$

Restando $\omega_{i,j}^n$ de la Ecuación 5.3 y dividiendo entre Δt

$$\frac{\omega_{i,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^n}{\Delta t} = \omega_t + \frac{\Delta t}{2} \omega_{tt} + O(\Delta t^2). \quad (5.12)$$

Restando la Ecuación 5.11 de la Ecuación 5.10 y dividiendo entre $2h$

$$\frac{\psi_{i,j+1}^n - \psi_{i,j-1}^n}{2h} = \psi_y + \frac{h^2}{6} \psi_{yyy} + O(h^3). \quad (5.13)$$

Análogamente realizando las mismas operaciones entre las Ecuaciones 5.5 y 5.4 obtenemos

$$\frac{\omega_{i+1,j}^n - \omega_{i-1,j}^n}{2h} = \omega_x + \frac{h^2}{6} \omega_{xxx} + O(h^3). \quad (5.14)$$

Restando la Ecuación 5.9 de la Ecuación 5.8

$$\frac{\psi_{i+1,j}^n - \psi_{i-1,j}^n}{2h} = \psi_x + \frac{h^2}{6}\psi_{xxx} + O(h^3). \quad (5.15)$$

Restando la Ecuación 5.7 de la Ecuación 5.6

$$\frac{\omega_{i,j+1}^n - \omega_{i,j-1}^n}{2h} = \omega_y + \frac{h^2}{6}\omega_{yyy} + O(h^3). \quad (5.16)$$

Tomando $\frac{1}{Re} \left(\frac{(5.4)+(5.5)+(5.6)+(5.7)-4\omega_{i,j}^n}{h^2} \right)$ tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{Re} \left(\frac{\omega_{i+1,j}^n + \omega_{i-1,j}^n + \omega_{i,j+1}^n + \omega_{i,j-1}^n - 4\omega_{i,j}^n}{h^2} \right) \\ = \frac{1}{Re} \left(\omega_{xx} + \omega_{yy} \right) + \frac{2}{Re} O(h^2). \end{aligned} \quad (5.17)$$

Multiplicando la Ecuación 5.13 con la Ecuación 5.14

$$\begin{aligned} \left(\frac{\psi_{i,j+1}^n - \psi_{i,j-1}^n}{2h} \right) \left(\frac{\omega_{i+1,j}^n - \omega_{i-1,j}^n}{2h} \right) = \\ \psi_y \omega_x + \frac{h^2}{6} \psi_y \omega_{yyy} + \psi_y O(h^3) \\ + \frac{h^2}{6} \psi_{yyy} \left(\omega_x + \frac{h^2}{6} \omega_{xxx} + O(h^3) \right) \\ + O(h^3) \left(\omega_x + \frac{h^2}{6} \omega_{xxx} + O(h^3) \omega \right). \end{aligned} \quad (5.18)$$

Multiplicando la Ecuación 5.15 con la Ecuación 5.16

$$\begin{aligned} \left(\frac{\psi_{i+1,j}^n - \psi_{i-1,j}^n}{2h} \right) \left(\frac{\omega_{i,j+1}^n - \omega_{i,j-1}^n}{2h} \right) = \\ \psi_x \omega_y + \frac{h^2}{6} \psi_x \omega_{xxx} + \psi_x O(h^3) \\ + \frac{h^2}{6} \psi_{xxx} \left(\omega_y + \frac{h^2}{6} \omega_{yyy} + O(h^3) \right) \\ O(h^3) \left(\omega_y + \frac{h^2}{6} \omega_{yyy} + O(h^3) \omega \right). \end{aligned} \quad (5.19)$$

Sumando las Ecuaciones (5.12) + (5.18) + (5.19)

$$\begin{aligned}
& \omega_t + \psi_y \omega_x - \psi_x \omega_y - \frac{1}{Re} \left(\omega_{xx} + \omega_{yy} \right) \\
& + \frac{\Delta t}{2} \omega_{tt} + O(\Delta t^2) + \frac{h^2}{6} \psi_y \omega_{xxx} + \psi_y O(h^3) \\
& + \frac{h^2}{6} \psi_{yyy} \left(\omega_x + \frac{h^2}{6} \omega_{xxx} + O(h^3) \right) \\
& + O(h^3) \left(\omega_x + \frac{h^2}{6} \omega_{xxx} + O(h^3) \right) \\
& - \frac{h^2}{6} \psi_x \omega_{yyy} - \psi_x O(h^3) \\
& - \frac{h^2}{6} \psi_{xxx} \left(\omega_y + \frac{h^2}{6} \omega_{yyy} + O(h^3) \right) \\
& - O(h^3) \left(\omega_y + \frac{h^2}{6} \omega_{yyy} + O(h^3) \right) \\
& - \frac{2}{Re} O(h^2) \\
& = \frac{\omega_{i,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^n}{\Delta t} + \left(\frac{\psi_{i,j+1}^n - \psi_{i,j-1}^n}{2h} \right) \left(\frac{\omega_{i+1,j}^n - \omega_{i-1,j}^n}{2h} \right) \\
& - \left(\frac{\psi_{i+1,j}^n - \psi_{i-1,j}^n}{2h} \right) \left(\frac{\omega_{i,j+1}^n - \omega_{i,j-1}^n}{2h} \right) \\
& - \frac{1}{Re} \left(\frac{\omega_{i+1,j}^n + \omega_{i-1,j}^n + \omega_{i,j+1}^n + \omega_{i,j-1}^n - 4\omega_{i,j}^n}{h^2} \right).
\end{aligned} \tag{5.20}$$

Reordenando términos.

$$\begin{aligned}
& \omega_t + \psi_y \omega_x - \psi_x \omega_y - \frac{1}{Re} \left(\omega_{xx} + \omega_{yy} \right) \\
& - \left[\frac{\omega_{i,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^n}{\Delta t} + \left(\frac{\psi_{i,j+1}^n - \psi_{i,j-1}^n}{2h} \right) \left(\frac{\omega_{i+1,j}^n - \omega_{i-1,j}^n}{2h} \right) \right. \\
& \quad \left. - \left(\frac{\psi_{i+1,j}^n - \psi_{i-1,j}^n}{2h} \right) \left(\frac{\omega_{i,j+1}^n - \omega_{i,j-1}^n}{2h} \right) \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{Re} \left(\frac{\omega_{i+1,j}^n + \omega_{i-1,j}^n + \omega_{i,j+1}^n + \omega_{i,j-1}^n - 4\omega_{i,j}^n}{h^2} \right) \right] \\
& \quad = -\frac{\Delta t}{2} \omega_{tt} + O(\Delta t^2) \\
& \quad - \frac{h^2}{6} \psi_y \omega_{xxx} + \psi_y O(h^3) \\
& \quad - \frac{h^2}{6} \psi_{yyy} \left(\omega_x + \frac{h^2}{6} \omega_{xxx} + O(h^3) \right) \\
& \quad - O(h^3) \left(\omega_x + \frac{h^2}{6} \omega_{xxx} + O(h^3) \right) \\
& \quad + \frac{h^2}{6} \psi_x \omega_{yyy} - \psi_x O(h^3)
\end{aligned} \tag{5.21}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{h^2}{6} \psi_{xxx} \left(\omega_y + \frac{h^2}{6} \omega_{yyy} + O(h^3) \right) \\
& + O(h^3) \left(\omega_y + \frac{h^2}{6} \omega_{yyy} + O(h^3) \right) \\
& + \frac{2}{Re} O(h^2).
\end{aligned}$$

En donde para la Ecuación 5.21 el error de truncamiento ϵ_T es

$$\begin{aligned}
\epsilon_T = & -\frac{\Delta t}{2} \omega_{tt} + O(\Delta t^2) + \frac{2}{Re} O(h^2) \\
& \frac{h^2}{6} \left[\psi_x \omega_{yyy} - \psi_y \omega_{xxx} + \psi_y O(h^3) - \psi_x O(h^3) \right] \\
& + \frac{h^2}{6} \left[\psi_{xxx} \left(\omega_y + \frac{h^2}{6} \omega_{yyy} + O(h^3) \right) - \psi_{yyy} \left(\omega_x + \frac{h^2}{6} \omega_{xxx} + O(h^3) \right) \right] \\
& + O(h^3) \left[\left(\omega_y + \frac{h^2}{6} \omega_{yyy} + O(h^3) \right) - \left(\omega_x + \frac{h^2}{6} \omega_{xxx} + O(h^3) \right) \right].
\end{aligned}$$

Y se observa que $\epsilon_T \rightarrow 0$, cuando $\Delta t, h \rightarrow 0$. Así podemos concluir que el esquema 5.2 es consistente.

5.3 Análisis de estabilidad

El análisis de estabilidad para esquemas numéricos aplicados a ecuaciones diferenciales parciales no lineales, es un problema abierto debido a que no se conoce una técnica general para su estudio. Ciertamente solo se pueden encontrar técnicas desarrolladas para problemas muy puntuales. Por lo anterior decidimos hacer una aproximación al análisis de estabilidad usando la bien conocida técnica de von Neuman [27] para ecuaciones parciales lineales como veremos a continuación.

Para nuestro problema dos-dimensional el análisis de von Neuman es una generalización directa del caso unidimensional. Así que tomando la descomposición de $\omega_{i,j}^n$ en Series de Fourier¹ e insertando el modo de Fourier² [28]

$$\omega_{i,j}^n = V^n e^{I(\theta_x i + \theta_y j)},$$

en la Ecuación 5.2 para obtener la condición de estabilidad de von Neuman.

Sin embargo en esta ecuación la presencia de ψ no nos permite aplicar directamente el análisis de von Neuman, por tal motivo expresaremos a ψ en términos de las funciones u y v asumiéndolas como si se tratara de coeficientes. De esta manera estamos expresando la ecuación de manera lineal. Así usando la Ecuación 4.2 en la Ecuación 5.2, obtenemos

¹Por simplificación en la notación usaremos I para denotar la unidad imaginaria $\sqrt{-1}$ e i, j como las coordenadas para los nodos en la malla.

²Para una introducción detallada al análisis de estabilidad de non Neumann sugerimos [11]

$$\begin{aligned}\omega_{i,j}^{n+1} = & \omega_{i,j}^n + \Delta t \left[u \left(\frac{\omega_{i,j+1}^n - \omega_{i,j-1}^n}{2h} \right) \right. \\ & + v \left(\frac{\omega_{i+1,j}^n - \omega_{i-1,j}^n}{2h} \right) \\ & \left. + \frac{1}{Re} \left(\frac{\omega_{i+1,j}^n + \omega_{i-1,j}^n + \omega_{i,j+1}^n + \omega_{i,j-1}^n - 4\omega_{i,j}^n}{h^2} \right) \right].\end{aligned}\quad (5.22)$$

De esta manera la condición de estabilidad de von Neuman será aplicada en una ecuación con solo una función discretizada. Ahora procedamos aplicando el análisis de estabilidad de forma habitual:

$$\begin{aligned}V^{n+1} e^{I(\theta_x i + \theta_y j)} = & V^n e^{I(\theta_x i + \theta_y j)} \\ & + \frac{u \Delta t}{2h} V^n \left[e^{I(\theta_x i + \theta_y (j+1))} - e^{I(\theta_x i + \theta_y (j-1))} \right] \\ & + \frac{v \Delta t}{2h} V^n \left[e^{I(\theta_x (i+1) + \theta_y j)} - e^{I(\theta_x (i-1) + \theta_y j)} \right] \\ & + \frac{\Delta t}{h^2 Re} V^n \left[e^{I(\theta_x (i+1) + \theta_y j)} + e^{I(\theta_x (i-1) + \theta_y j)} \right. \\ & \quad \left. + e^{I(\theta_x i + \theta_y (j+1))} + e^{I(\theta_x i + \theta_y (j-1))} \right. \\ & \quad \left. - 4e^{I(\theta_x i + \theta_y j)} \right].\end{aligned}\quad (5.23)$$

Dividiendo la Ecuación 5.23 por $e^{I(\theta_x i + \theta_y j)}$ tenemos,

$$\begin{aligned}V^{n+1} = & V^n \\ & + \frac{u \Delta t}{2h} V^n \left[e^{I\theta_y} - e^{-I\theta_y} \right] \\ & + \frac{v \Delta t}{2h} V^n \left[e^{I\theta_x} - e^{-I\theta_x} \right] \\ & + \frac{\Delta t}{h^2 Re} V^n \left[e^{I\theta_x} + e^{-I\theta_x} + e^{I\theta_y} + e^{-I\theta_y} - 4 \right].\end{aligned}\quad (5.24)$$

Dividiendo la Ecuación 5.24 por V^n y simplificando, esta se convierte en

$$\begin{aligned}\frac{V^{n+1}}{V^n} = & 1 + \frac{u \Delta t}{h} I \sin(\theta_y) + \frac{v \Delta t}{h} I \sin(\theta_x) \\ & + \frac{2 \Delta t}{h^2 Re} \left[\cos(\theta_x) + \cos(\theta_y) - 2 \right].\end{aligned}$$

En el problema de la cavidad estamos en un dominio cuadrado igualmente dividido en los ejes x y y , así que podemos asumir que para los ángulos de fase $\theta_x = \theta_y = \theta$, por lo tanto se tiene para el **coeficiente de amplificación** G ,

$$G = \frac{V^{n+1}}{V^n} = 1 + I \frac{\Delta t \sin \theta}{h} (u + v) + \frac{4\Delta t}{h^2 Re} (\cos(\theta - 1)).$$

Entonces para $|G|$ se tiene,

$$|G| = 1 + \frac{8\Delta t}{h^2 Re} (\cos \theta - 1) + \frac{16\Delta t^2}{h^4 Re} (\cos \theta - 1)^2 + \frac{(u + v)^2 \Delta t^2}{h^2} \sin^2 \theta. \quad (5.25)$$

Como la condición de estabilidad en el análisis de von Neuman establece que $|G| \leq 1$, se tiene para la Ecuación 5.25

$$\frac{8\Delta t}{h^2 Re} (\cos \theta - 1) + \frac{16\Delta t^2}{h^4 Re} (\cos \theta - 1)^2 + \frac{(u + v)^2 \Delta t^2}{h^2} \sin^2 \theta \leq 0. \quad (5.26)$$

Multiplicando la Ecuación 5.26 por $\frac{Reh^2}{4\Delta t}$ y usando la identidad $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$,

$$2(\cos \theta - 1) + \frac{4\Delta t^2}{Reh^2} (\cos \theta - 1)^2 + \frac{Re(u + v)^2 \Delta t}{4} (1 - \cos^2 \theta) \leq 0.$$

Reordenando términos

$$\frac{4\Delta t}{Reh^2} (\cos^2 \theta + 1) + \frac{(u + v)^2 Re \Delta t}{4} (1 - \cos^2 \theta) + 2 \left[1 - \frac{4\Delta t}{Reh^2} \right] \cos \theta \leq 2.$$

Lo cual solo nos deja con las siguientes posibilidades.

Si $\cos \theta = 1$, entonces $2 \leq 2$, lo cual no nos da información relevante.

Si $\cos \theta = 0$,

$$\Delta t_1 \leq \frac{8Reh^2}{16 + (u + v)^2 Re^2 h^2}. \quad (5.27)$$

Si $\cos \theta = -1$,

$$\Delta t_2 \leq \frac{Reh^2}{4}.$$

Como el mínimo valor para Δt debe ser seleccionado para prevenir inestabilidades, hemos creado una tabla para comparar Δt_1 , Δt_2 . En esta tabla el número de Reynolds corre dentro del rango 50 a 20.000, $h = \frac{1}{201}$, y se asume una velocidad máxima para el fluido donde $u + v = 5$ esto teniendo en cuenta que la tapa móvil tiene una velocidad

constante igual a uno y es la única fuente de movimiento.

Revisando la información en la Figura 5.2, $\Delta t_1 < \Delta t_2$ como era de esperar, y así la selección natural para Δt es Δt_1 .

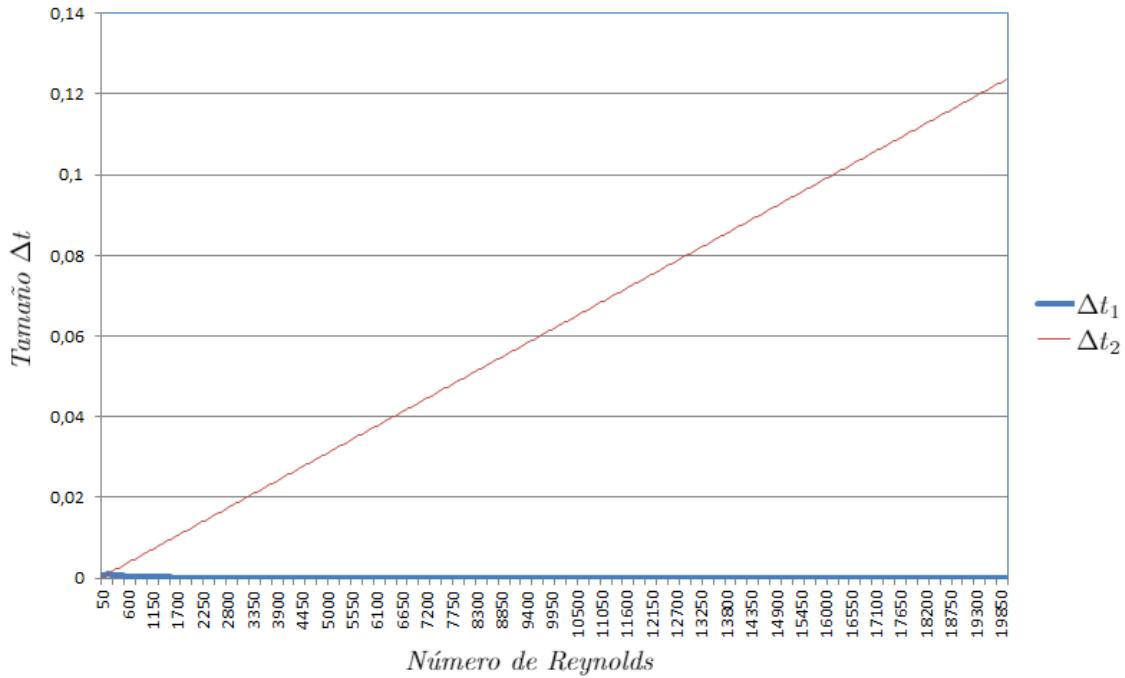


Figura 5.2: Comparativa entre Δt_1 vs Δt_2

Observación 2. Es de notar que la Expresión 5.27 para Δt depende de u y v , esto implica que en cada iteración de la simulación el valor para Δt debe ser recalculado.

Experimentalmente el análisis de von Neuman resultó de gran utilidad, debido a que en anteriores experimentos el valor que le asignábamos a Δt era cuestión de prueba y error. Luego de aplicar este análisis comprobamos que el valor analítico para Δt , resultó en simulaciones estables.

6 Implementación y resultados numéricos

El código para el simulador fue implementado usando los lenguajes de programación CUDA C y Phyton dentro del entorno de desarrollo Microsoft Visual Studio Community 2013. El simulador se escribió y probó en un computador con procesador Intel(R) CCore(TM) i7-4790k CPU @ 4.00GHz, con 16 GB de memoria ram y una aceleradora gráfica NVIDIA GeForce GTX 960.

6.0.1 Implementación

El desarrollo del simulador se encuentra altamente influenciado por el artículo *Stable Fluids* de Jos Stam [16]. La idea fundamental del simulador es poder ejecutar en tiempos cortos operaciones aritméticas sobre un gran número de datos. Por razones de eficiencia relacionados con la segmentación de memoria se usaron arrays unidimensionales en lugar de arrays multidimensionales. Por tratarse de un problema dos dimensional representado con arrays unidimensionales, el acceso a los datos se hace complicado y por tal motivo para se creó la siguiente macro

```
#define IJ(i , j) ((i) + GRID_SIZE*(j))
```

por medio de la cual se puede acceder directamente a la celda i, j de cualquier array de datos, por ejemplo a la vorticidad `omega[IJ(i, j)]`.

El simulador resuelve las ecuaciones de Navier-Stokes en términos de flujo y vorticidad realizando los siguientes pasos.

- Reservar memoria para los arreglos de las componentes u, v de la velocidad, ϕ y ω .
- Asignar los valores de las condiciones iniciales.
- Crear un ciclo de tipo *while* para resolver iterativamente cada paso en la simulación.
- Calcular la función de flujo usando el método de *Succesive Over Relaxation*.
- Forzar las condiciones de frontera en el array ω .
- Calcular los valores de la función de vorticidad.

- Calcular el valor de Δt para la siguiente iteración.
- Escribir los resultados en archivo plano o dibujar en pantalla la vorticidad.

El programa puede ser configurado antes de compilación, estableciendo los valores de las siguientes macros:

- Particiones de la cavidad en los ejes x,y.

```
#define GRID_SIZE 201
```

- Rapidez de la tapa superior.

```
#define LID_SPEED 1.0 f
```

- Número de Reynolds

```
#define REYNOLDS_NUMBER 1000.0 f
```

- Número de iteraciones para establecer convergencia de la función flujo

```
#define MAXSORITERATIONS 100
```

- Tolerancia al error para la función flujo

```
#define SOR_TOLERANCE_ERROR 0.001 f
```

- Si es 1 cada paso de la simulación será guardado en un archivo plano

```
#define CAPTUREDATA 0
```

- Si es 1 la simulación dibujara en pantalla los resultados de cada paso

```
#define USECPPPLOT 1
```

- Si es 1 el programa usara las capacidades de CUDA C para acelerar el computo

```
#define USECUDA 1
```

Todo el código fuente del simulador es de libre acceso y puede ser encontrado en el repositorio de GitHub <https://github.com/ja0335/Stream-Vorticity>.

6.0.2 Resultados numéricos

En la Tabla 5.1 podemos encontrar el resumen de los experimentos donde se varió el número de Reynolds en el intervalo $Re \in (0, 1000]$.

Grid Size	Re	No. Vórtices	Figura
101	200	2	-
101	50	1	-

101	100	1	-
101	150	1	-
101	125	1	-
101	140	1	-
101	145	1	-
101	149	1	-
101	175	1	-
101	187	2	-
101	181	1	-
101	184	1	-
101	185	1	6.1
101	186	3	6.2
101	187	2	6.3
101	188	2	-
101	189	2	-
101	200	2	-
101	300	2	-
101	400	2	-
101	500	2	-
101	625	2	-
101	687	2	-
101	700	2	-
101	701	2	-
101	702	2	-
101	703	3	6.4
101	704	3	-
101	705	3	-
101	710	3	-
101	715	3	-
101	730	3	-
101	720	3	-
101	740	3	-
101	750	3	-
101	1000	3	-
101	1500	3	-
101	1600	3	-
101	1650	3	-
101	1652	3	-
101	1653	4	6.5
101	1656	4	-
101	1662	4	-
101	1675	4	-
101	1700	4	-

101	1900	4	-
101	2000	4	-
101	3000	4	-
101	4000	4	-
101	5000	4	-
201	9000	4	-
201	9500	5	-
201	9250	4	-
201	9375	4	-
201	9437,5	5	-
201	9406,25	5	-
201	9400	5	-
201	9387,5	5	-
201	9381,25	5	-
201	9378,125	5	-
201	9376	5	6.6
201	10000	5	-

Tabla 6.1: *Resultados de la simulación*

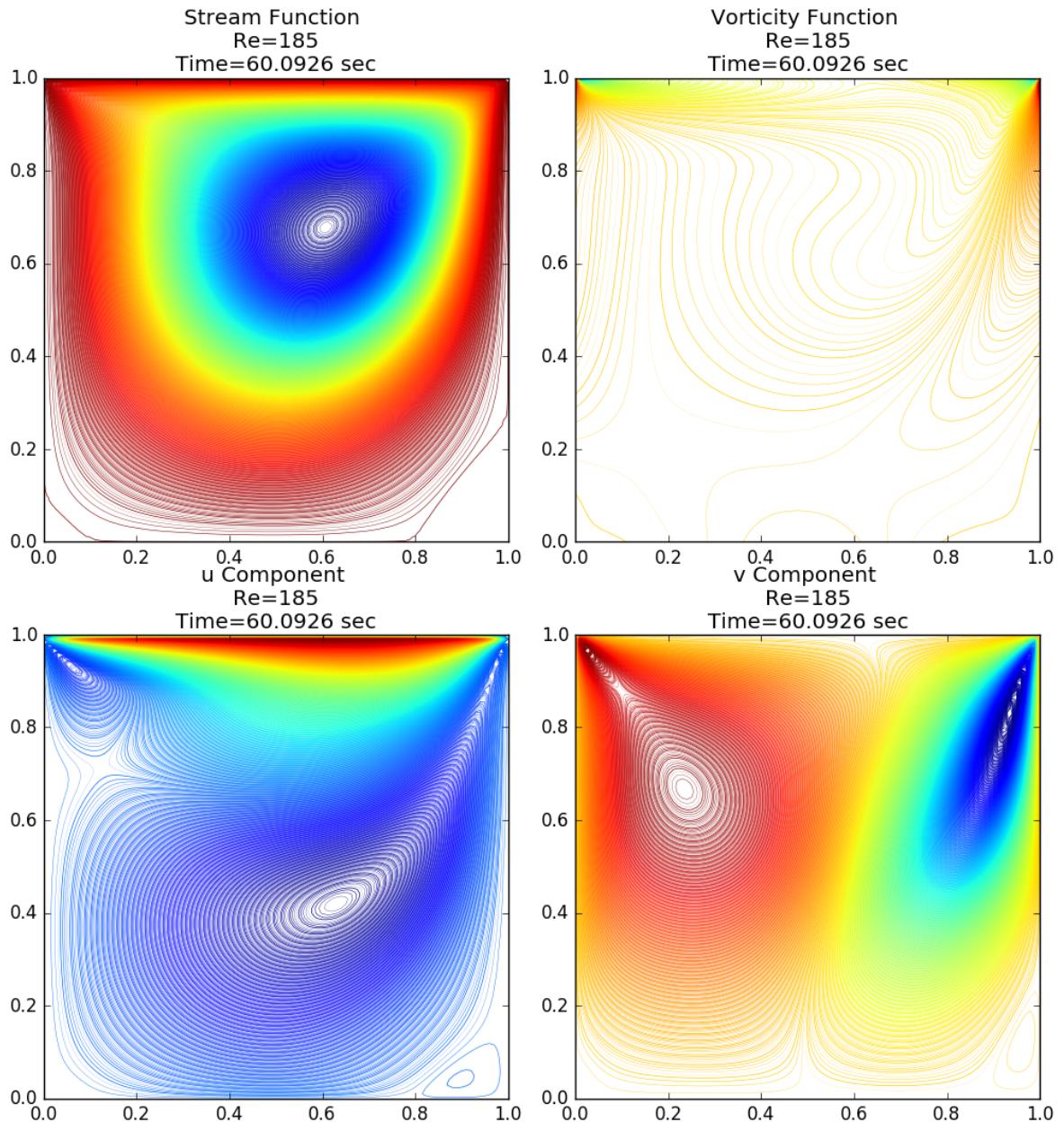
En la Tabla 6.2 se pueden observar los valores puntuales de Re para las bifurcaciones de la vorticidad.

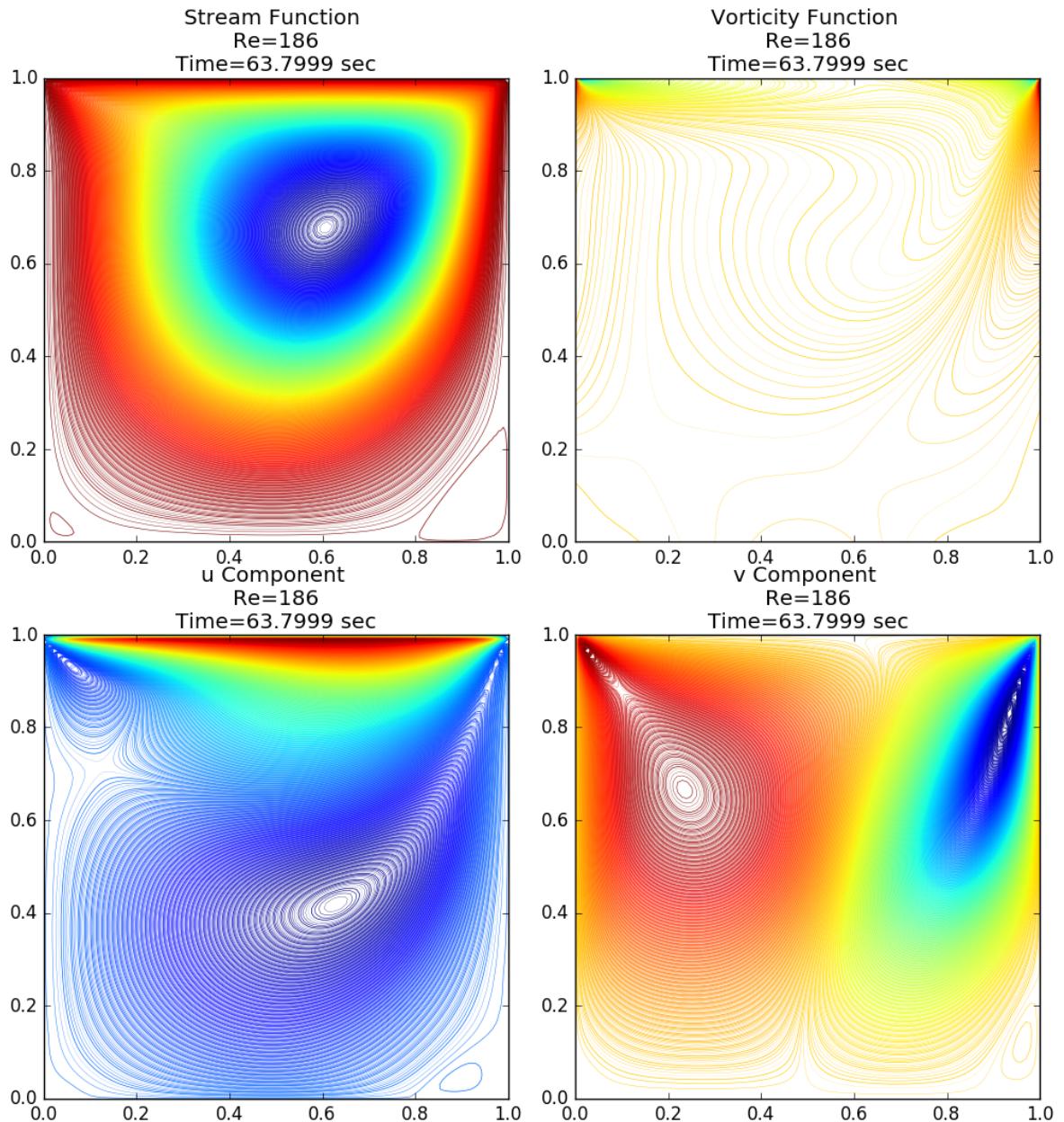
Grid Size	Re	No. Vórtices	Figura
101x101	185	1	6.1
101x101	186	3	6.2
101x101	187	2	6.3
101x101	703	3	6.4
101x101	1653	4	6.5
201x201	9376	5	6.6

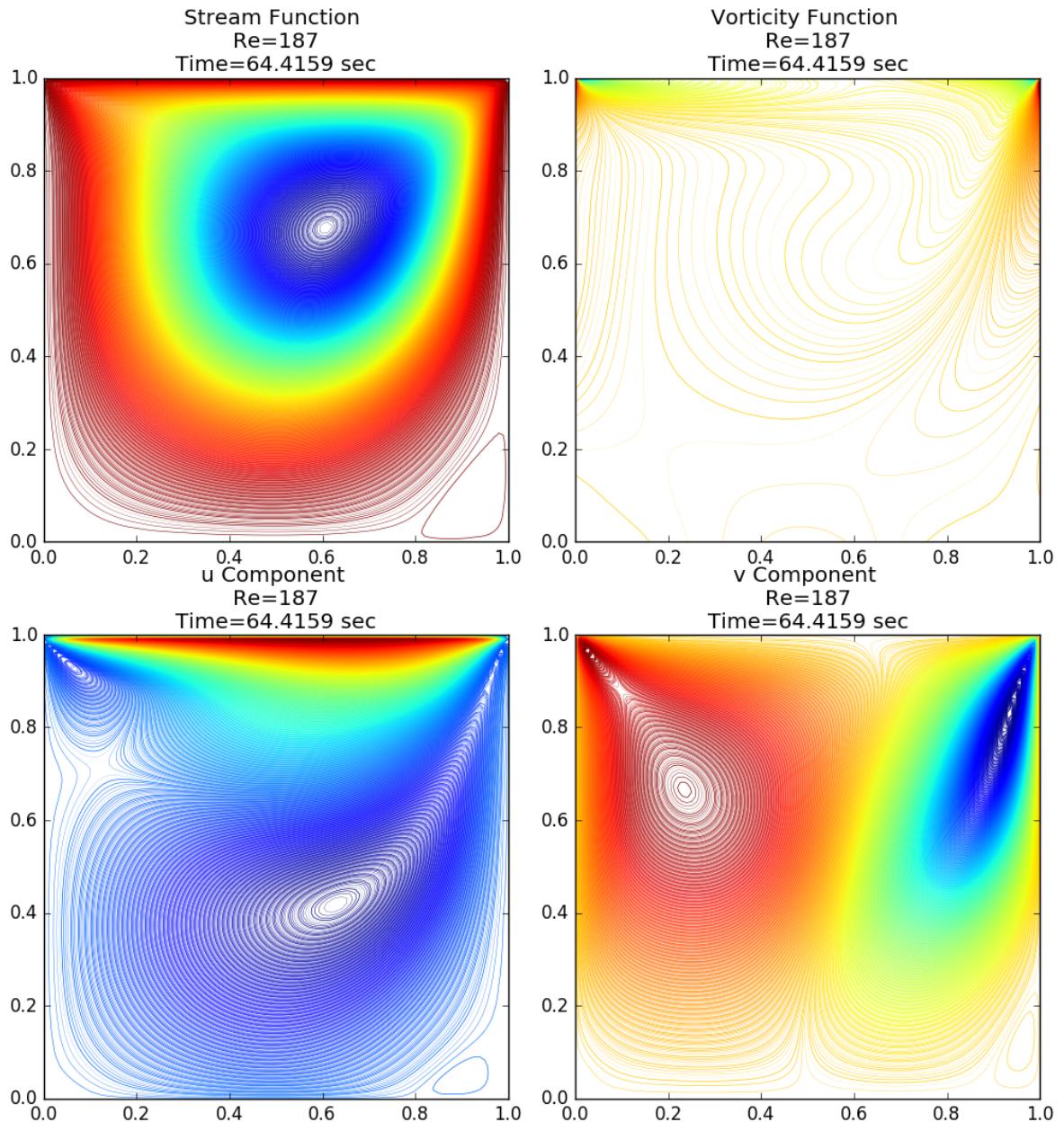
Tabla 6.2: *Bifurcaciones de la vorticidad*

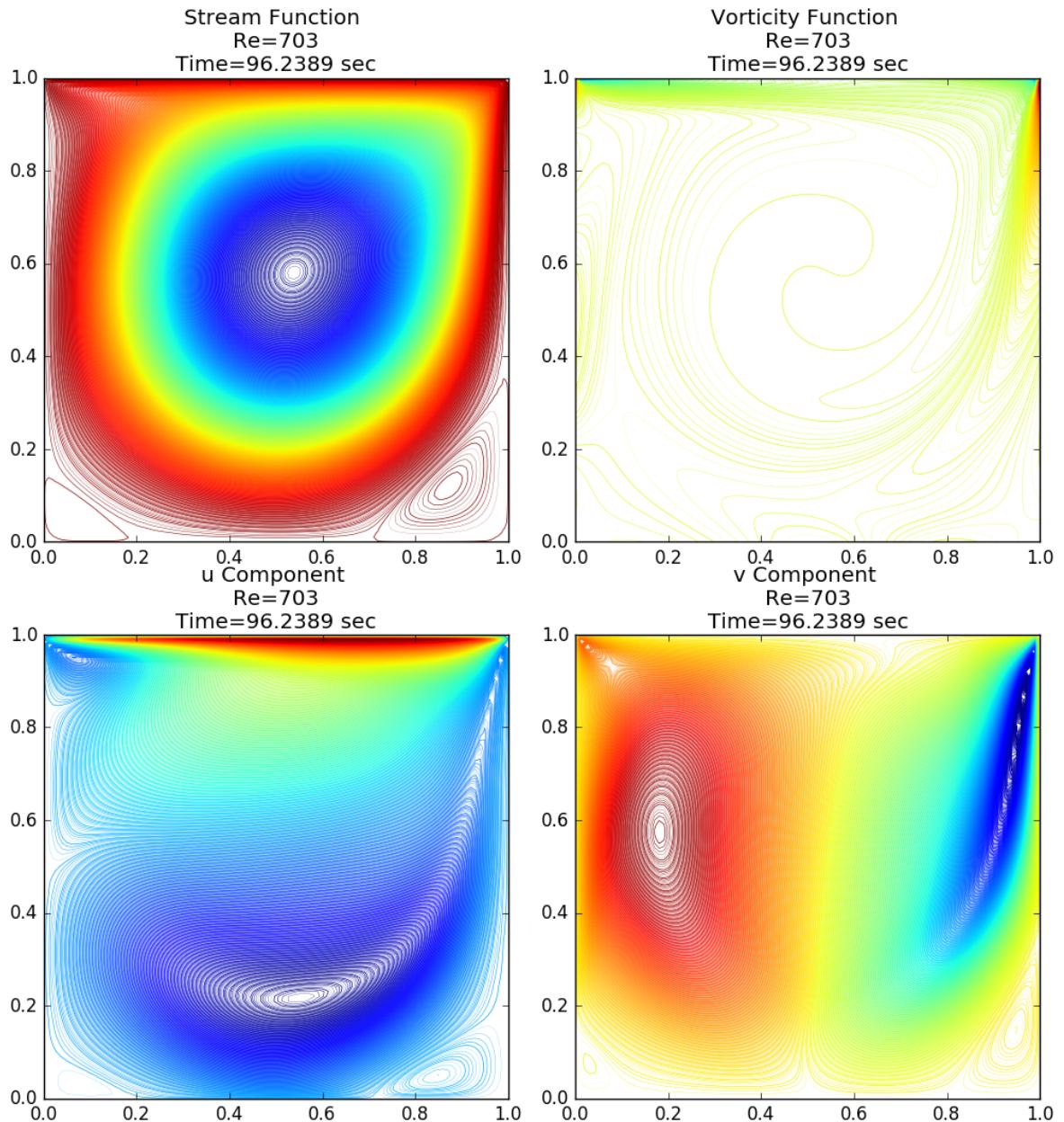
En las Figuras 6.1 a se observa el mapa de niveles de las funciones de flujo, vorticidad y las componentes u y v de la velocidad. Estos mapas de niveles nos dan una forma de visualizar el perfil de cada función cuando ya se ha alcanzado el régimen estable.

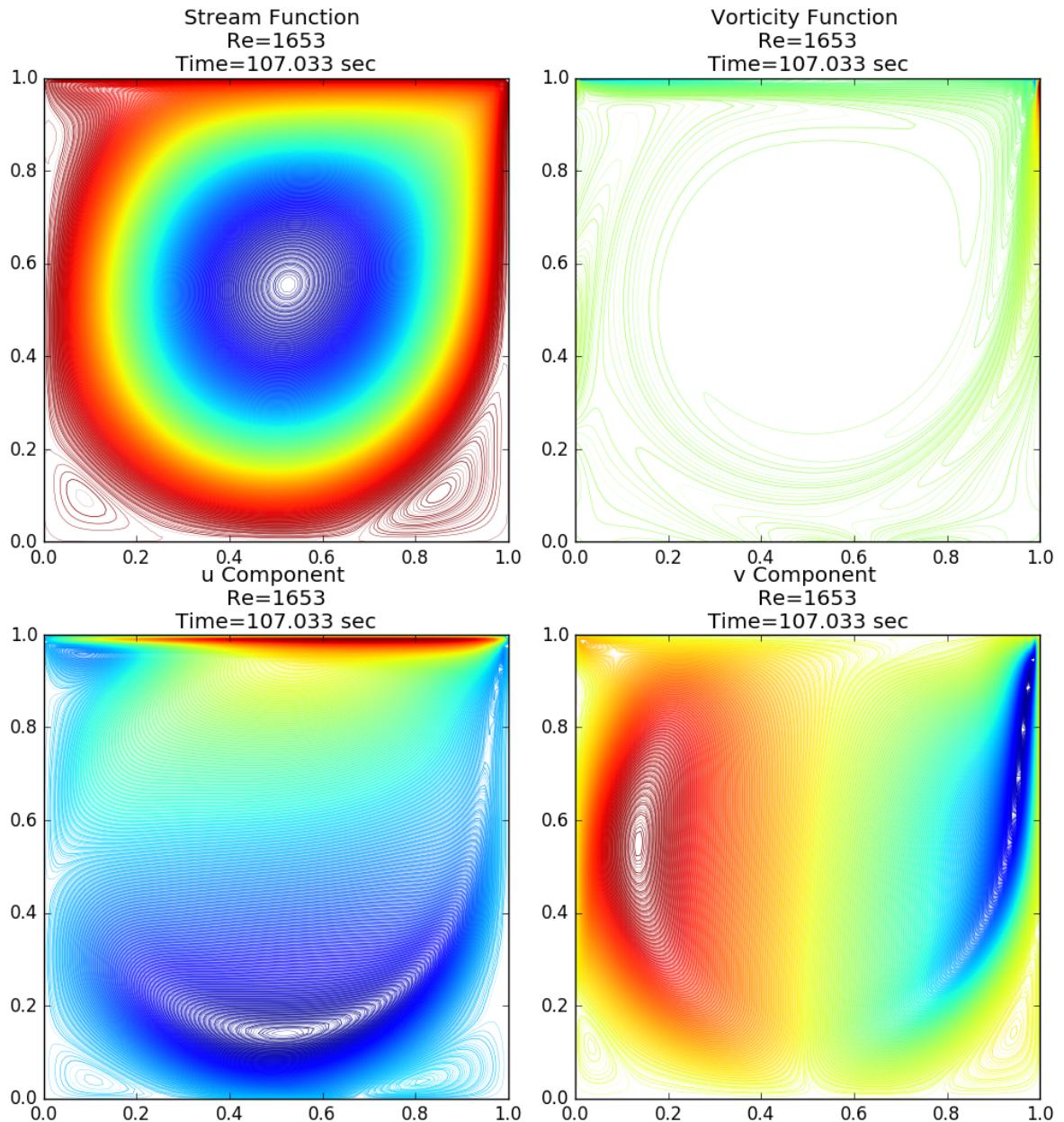
Es de notar el comportamiento inusual observado durante la transición entre uno y dos vórtices, en donde se presenta un salto de uno a tres y de nuevo a dos para los números de Reynolds $Re = 185$ Figura 6.1, $Re = 186$ Figura 6.2 y $Re = 187$ Figura 6.3, respectivamente. La generación del tercer vórtice sucede de nuevo en $Re = 703$ Figura 6.4. En la literatura consultada durante esta investigación, no hemos encontrado comportamientos similares o relacionados. El estudio de este fenómeno está fuera del alcance de este proyecto y se deja para futuras investigaciones.

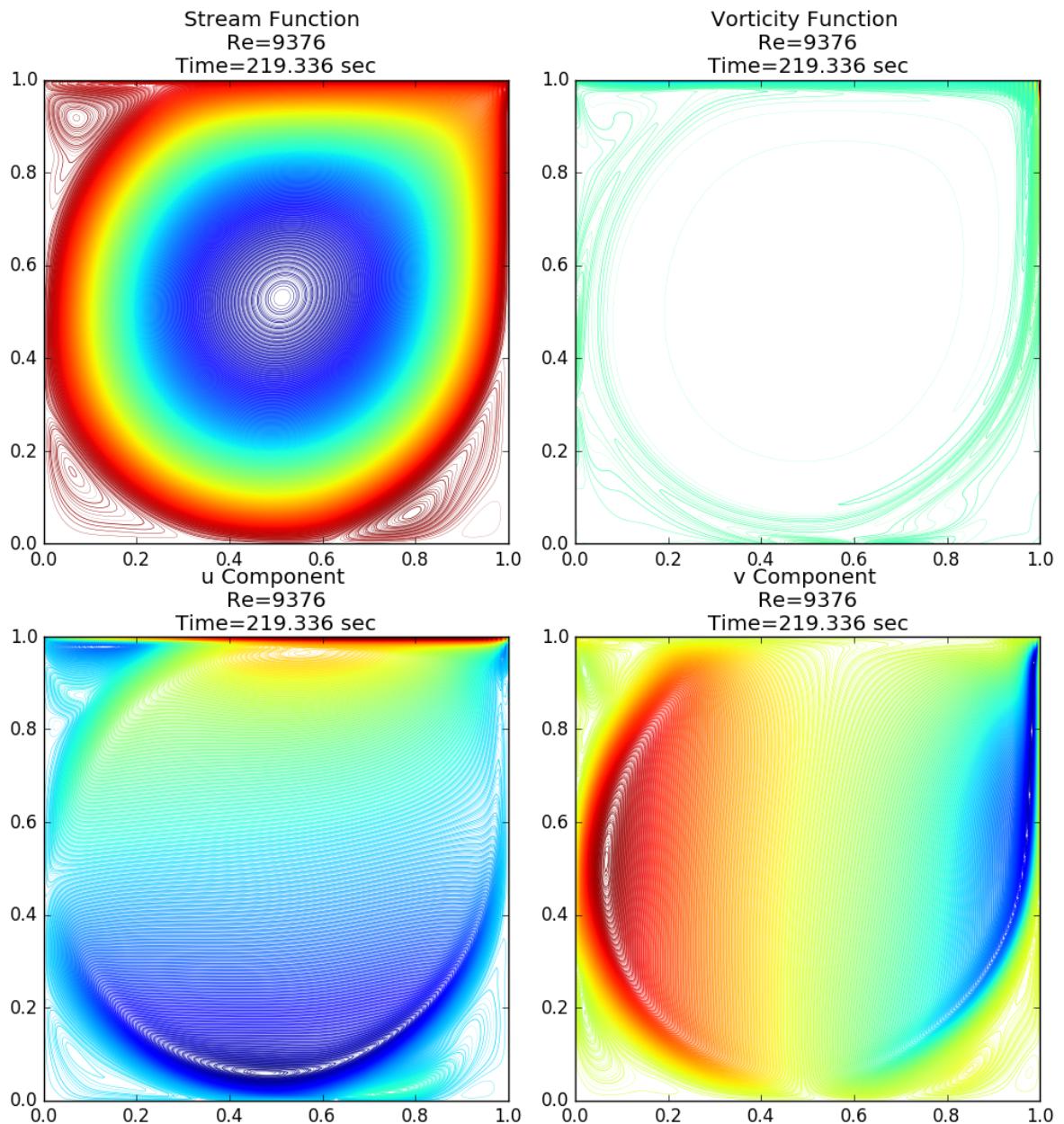
Figura 6.1: Perfil de vorticidades para $Re = 185$

Figura 6.2: Perfil de vorticidades para $Re = 186$

Figura 6.3: Perfil de vorticidades para $Re = 187$

Figura 6.4: Perfil de vorticidades para $Re = 703$

Figura 6.5: Perfil de vorticidades para $Re = 1653$

Figura 6.6: Perfil de vorticidades para $Re = 9376$

7 El problema de los N -Vórtices

El problema de los N -Vórtices tiene una relación fundamental con el problema de la cavidad. Y la razón es que para el problema de los N -Vórtices solo se conocen soluciones cuando $N \leq 3$, en otro caso es un problema abierto. Nosotros proponemos replantear las ecuaciones del problema de los N -Vórtices sin omitir la viscosidad y ya que gracias a nuestra simulación en la cavidad, conocemos las configuraciones para el número de vorticidades con $N \leq 5$, sería interesante tomar dichas configuraciones y verificar si son soluciones conocidas como equilibrio fijo o equilibrio relativo. En este capítulo hacemos una breve introducción al problema de los N -Vórtices.

Consideremos ahora de manera superficial el problema de los N -Vórtices, el cual consiste en describir la dinámica del movimiento dos-dimensional de N vórtices puntuales dentro de un fluido ideal o Euleriano. Si consideramos que la viscosidad de nuestro fluido de estudio es cero, tenemos que la Ecuación de Transporte de Vorticidad 4.9 se convierte en

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (u \cdot \nabla) \omega = 0, \quad (7.1)$$

así la Ecuación 7.1 simplemente describe la vorticidad siendo transportada a lo largo del campo de velocidades. En realidad la situación no es tan sencilla, debido a que la vorticidad está siendo transportada por el campo de velocidad y el campo de velocidades cambia en sí mismo en respuesta al cambio en la vorticidad. Helmholtz y Kirchhoff, estudiaron el modelo de evolución de la vorticidad para integrar el movimiento de los vórtices y el campo de velocidades. Ellos hicieron la suposición de que la vorticidad podía ser descrita en términos de la suma finita de los puntos de vorticidad cuyas posiciones se mueven en respuesta al campo de velocidades que los mismos vórtices crean. Es de notar que el campo de velocidades de un vórtice puntual puede ser calculado explícitamente usando la ley de Biot-Savart, hecho que Helmholtz y Kirchhoff usaron para seguir la evolución del campo de velocidad en su modelo y así encontrar el aporte al campo de velocidades realizado por los vórtices. De esta manera asumiendo que el campo de vorticidades puede ser escrito como [34]

$$\omega(z, t) = \sum_{k=1}^N \Gamma_k \delta(z - z_j(t)), \quad (7.2)$$

Donde $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, Γ_j es la fuerza del vórtice j y $z_j(t)$ es su posición y δ es la delta de Dirac usual [30]. Como asumimos que la viscosidad es cero, se pueden

encontrar explícitamente las ecuaciones diferenciales ordinarias para los centros de las vorticidades. Si asumimos $z_j(t) = (x_j(t), y_j(t))$, encontramos que las ecuaciones del movimiento están dadas por [34]

$$\dot{x}_j(t) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{k \neq j} \Gamma_k \frac{y_j - y_k}{|z_j - z_k|^2}, \quad (7.3)$$

$$\dot{y}_j(t) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{k \neq j} \Gamma_k \frac{x_j - x_k}{|z_j - z_k|^2}. \quad (7.4)$$

Se demuestra que el sistema de Ecuaciones 7.3 y 7.4 es un sistema Hamiltoniano en donde el Hamiltoniano es proporcional a la suma del logaritmo de la distancia entre las parejas de vórtices, concretamente [30]

$$\Gamma_k \dot{z}_k = J \nabla_{z_k} H(z), \quad k = 1, \dots, N, \quad (7.5)$$

valida para N vórtices cada uno con coordenadas $z_1(t), \dots, z_N(t)$ respectivamente, en el dominio $\Omega \in \mathbb{R}^2$, donde

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

es la matriz simpléctica estándar en \mathbb{R}^2 y $\Gamma_1, \dots, \Gamma_N \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ son las fuerzas fijas de los vórtices. El Hamiltoniano es singular y de la forma

$$H(z) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{j,k=1, j \neq k}^N \Gamma_j \Gamma_k \log |z_j - z_k| - F(z), \quad (7.6)$$

con $F : \Omega^n \rightarrow \mathbb{R}$ es de clase C^2 . H está definido en el espacio de configuración

$$\mathbb{F}_n(\Omega) = (z_1, \dots, z_n) \in \Omega^N : z_j \neq z_k, \text{ para } j \neq k.$$

Referimos al lector para una descripción a fondo del problema de los N -Vórtices a [32].

Las ecuaciones del problema de N vórtices tienen soluciones explícitas únicamente para $N \leq 3$. Se puede verificar que para dos vórtices con vorticidades iguales, estos se mueven en un círculo al rededor de su punto medio [6]. Si por el contrario los dos vórtices tienen signos opuestos entonces estos se mueven en una trayectoria perpendicular a la linea que los une. A estos patrones de comportamiento se les conoce como **configuraciones de vórtices** y refieren al objeto geométrico formado por la colección de vórtices. Si la configuración no se traslada ni se rota, se trata de un **equilibrio fijo**, de lo contrario es un **equilibrio relativo** [22].

Proposición 1. *Para $N = 3$, los únicos equilibrios relativos corresponden a configuraciones colineales de los vórtices o una configuración en la que los vórtices se encuentran en los vértices de un triángulo equilátero.*

Demostración. Comenzamos con la ecuación para el plano escrita en forma Cartesiana

$$\dot{\mathbf{x}}_\alpha = \sum_{\beta \neq \alpha} \frac{\Gamma_\beta}{2\pi} \frac{(x_\beta - x_\gamma) \times e_z}{l_{\alpha\beta}^2}, \quad (\alpha = 1, 2, 3).$$

Para probar la primera parte, comenzamos con la condición necesaria $\dot{\mathbf{x}}_\alpha = 0$, que nos da

$$\sum_{\beta \neq \alpha} \frac{\Gamma_\beta}{2\pi} \frac{(x_\beta - x_\gamma) \times e_z}{l_{\alpha\beta}^2} = 0.$$

Para $\alpha = 1$, tenemos

$$\frac{\Gamma_2(x_2 - x_1)}{l_{12}^2} = \frac{\Gamma_3(x_1 - x_3)}{l_{31}^2},$$

con lo que se muestra que $(x_2 - x_1)$ y $(x_1 - x_3)$ son escalares múltiples el uno del otro, por lo tanto los tres vórtices son colineales. Entonces si tomamos el producto punto sobre la izquierda con $(\Gamma_2/l_{12}^2)(x_2 - x_1)$ y en la derecha con $(\Gamma_3/l_{31}^2)(x_1 - x_3)$ obtenemos

$$\frac{\Gamma_2^2}{l_{12}^2} = \frac{\Gamma_3^2}{l_{31}^2}$$

y concluimos que

$$(x_2 - x_1) = \frac{\Gamma_2}{\Gamma_3}(x_1 - x_3).$$

Para la configuración de los vórtices formando triángulos equiláteros, comencemos con la condición que nos dice que el sistema esta en equilibrio relativo. Así se tiene

$$(l_{12}^2)' = \frac{2}{\pi} \Gamma_3 \sigma A \left(\frac{1}{l_{23}^2} - \frac{1}{l_{31}^2} \right) = 0$$

$$(l_{23}^2)' = \frac{2}{\pi} \Gamma_1 \sigma A \left(\frac{1}{l_{31}^2} - \frac{1}{l_{12}^2} \right) = 0$$

$$(l_{31}^2)' = \frac{2}{\pi} \Gamma_2 \sigma A \left(\frac{1}{l_{12}^2} - \frac{1}{l_{23}^2} \right) = 0.$$

Lo cual nos muestra que o se tiene $A = 0$ (colineales), o $l_{12}^2 = l_{23}^2 = l_{31}^2 \equiv s^2$ (triángulo equilátero).

□

Observación 3. *Enfatizamos que para $N \geq 4$ el problema de los N -vórtices esta completamente abierto, en particular, encontrar soluciones de equilibrio relativo.*

En el último capítulo haremos referencia a la relación entre el problema de los N -vórtices y el del fluido en la cavidad.

8 Conclusiones

En este documento investigamos de manera extensa el problema de la cavidad, usando la forma flujo-vorticidad de las ecuaciones de Navier-Stokes. En éste método solo se debe computar la evolución de la vorticidad, mientras que para la forma estándar de las ecuaciones está la evolución de la velocidad $\mathbf{u}(u, v)$. Esto implica el cálculo de la evolución en u, v . Adicionalmente encontramos el problema de asegurar la conservación de la masa $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, procedimiento que requiere más pasos a nivel computacional. A continuación puntualizaremos los principales características que encontramos acerca de este problema en la literatura y que logramos reproducir, así como los nuevos aportes que ofrece nuestra investigación:

- Pudimos verificar que el número de vórtices a diferentes números de Reynolds, encontrados en nuestras simulaciones, coincide con los presentados por Ercan Er-turk en su artículo *Discussions On Driven Cavity Flow*, [7] ($Re = 1000$ 3 vórtices, $Re = 2500$ 4 vórtices, $Re = 5000$ 5 vórtices, $Re = 7500$ 5 vórtices, $Re = 10000$ 5 vórtices). Aunque estos autores lograron sus resultados corriendo códigos que no son de libre divulgación en computadores de especificaciones técnicas muy por encima de las del equipo que nosotros usamos. En este sentido un gran logro computacional en nuestra investigación, es el desarrollo de un código que puede correr en condiciones muy aceptables en un computador convencional de capacidades genéricas, esto al menos para números de Reynolds $Re \in (0, 10.000]$.
- El análisis de estabilidad que presentamos para el esquema de diferencias finitas, arrojó una cota para Δt , la cual fue la que utilizamos para ejecutar las simulaciones aquí presentadas. Sin embargo previo a éste análisis se pudo evidenciar de manera experimental (pureba y error) que habían mejores Δt . Por lo anterior podemos concluir que se debe desarrollar un mejor análisis matemático que permita encontrar una cota óptima a la arrojada por la aproximación lineal que nosotros aplicamos.
- Las simulaciones nos permitieron concluir que para $Re \in (0, 10.000]$, el flujo en la cavidad es estable. Simulaciones de prueba usando $Re > 10.000$ no evidenciaron que el fluido alcance el régimen estacionario, al menos durante los tiempos de computo ensayados.

- Como se mencionó anteriormente se observó que para $Re > 10.000$ no se alcanzaban regímenes de estabilidad, es por ello que proponemos el estudio de bifurcaciones en la cavidad de un fluido en régimen estable a régimen inestable. Este estudio se aborda usando el **análisis de estabilidad hidrodinámica** [23] y el número de Reynolds para el cual ocurre una bifurcación de Hopf [14]. Los resultados obtenidos en esta investigación están siendo recopilados en un artículo [12], en el cual nos encontramos trabajando en como determinar el valor del número de Reynolds en el que el fluido deja de alcanzar el régimen estacionario. Con esto esperamos obtener el perfil del fluido en la cavidad para $Re \in (0, 50.000]$ y someter el artículo a una revista de alta divulgación.

9 Perspectivas de investigación

El estudio del problema de la cavidad tiene múltiples aplicaciones. Por un lado las académicas que van desde un sistema simple en el cual poner a prueba las ecuaciones de Navier-Stokes hasta un complejo mundo en el que aparecen todas las características dinámicas deseables en cualquier modelo. Por otro lado están las utilidades industriales que representa este problema, que aparecen al variar la geometría de la cavidad, un hecho que desde el punto de vista numérico representa la necesidad de desarrollar nuevas herramientas numéricas y hacer diversas variaciones en el enfoque que se ha utilizado en este documento. Por lo tanto, un enfoque distinto del problema de la cavidad del que se ha presentado en este documento da lugar a muchos interrogantes. En las siguientes secciones daremos algunas perspectivas y problemas que son interesantes por si mismos.

9.1 Diferentes cavidades

En este documento abordamos el problema de un fluido confinado en una cavidad cuadrada, así que es natural preguntarse que pasa cuando la geometría ya no es cuadrada, y se piensa en la cavidad rectangular, triangular, circular o más aun, una cavidad cuya geometría sea totalmente irregular. Para abordar este tipo de problemas se deben replantear las ecuaciones de la frontera para que coincidan con la nueva geometría, las cuales seguramente serán tan o más complicadas y computacionalmente ya no se pueden discretizar con diferencias finitas, así que en este caso será necesario hacer uso de nuevas técnicas como elementos finitos, volúmenes finitos, latiz-Boltzman o algún otro...

9.2 Análisis de convergencia y estabilidad

En la teoría clásica de análisis numérico el correcto desempeño y fiabilidad de un sistema discretizado llevado a un computador debe cumplir con el análisis de tres requisitos conocidos como consistencia, convergencia y estabilidad. Cuando el problema en cuestión es un conjunto de ecuaciones diferenciales lineales, dicho análisis es conocido como von Neuman. Para ecuaciones diferenciales no lineales no existe algo similar, solamente existen estudios en ecuaciones y problemas muy puntuales. Lo cual representa uno de los mayores obstáculos en el campo del CFD.

9.3 Generalización al problema de N -Vórtices

Como vimos en el Capítulo 7 encontrar soluciones de equilibrio relativo para un problema de N -Vórtices es un problema abierto para $N \geq 4$. En el problema de la cavidad para números de Reynolds menores de 10.000 el perfil que simulamos alcanza el régimen estable, por lo tanto las vorticidades que en estos casos aparecen se encuentran en equilibrio, siendo ejemplos no conocidos de las configuraciones buscadas en el problema de N -Vórtices. Aunque debemos resaltar que este problema está planteado para fluidos ideales, por lo tanto sería de un alto interés académico lo siguiente:

- Verificar si las configuraciones de vórtices en equilibrio absoluto que hemos encontrado para fluidos viscosos corresponden a soluciones de equilibrio absoluto o relativo en el problema clásico de N -Vórtices.
- Investigar el planteamiento de las ecuaciones para el movimiento de los vórtices 7.3, 7.4, en términos de fluidos newtonianos, es decir teniendo en cuenta la viscosidad del fluido.
- Teniendo en cuenta que los perfiles de vorticidad presentados en éste trabajo (Tabla 6.2) son para regímenes estables, ¿Pueden ser introducidas estas configuraciones, como equilibrios absolutos o relativos en un modelo de N -Vórtices para fluidos viscosos?

Bibliografía

- [1] T. M. Apostol. *CALCULUS, Multi-Variable Calculus and Linear Algebra, With Applications to Differential Equations and Probability. Volume II.* 2nd ed. Editorial Reverté, S. A, 1985, p. 340. ISBN: 84-291-5001-3.
- [2] T. M. Apostol. *CALCULUS. Volume I.* 2nd ed. Editorial Reverté, S. A, 1984, pp. 335–336. ISBN: 84-291-5002-1.
- [3] J. D. Gibbon Charles R. Doering. *Applied Analysis of the Navier-Stokes Equations.* Cambridge University Press, 1995, pp. 12–18. ISBN: 0-521-44557-4.
- [4] J. D. Gibbon Charles R. Doering. *Applied Analysis of the Navier-Stokes Equations.* Cambridge University Press, 1995, pp. 1–6. ISBN: 0-521-44557-4.
- [5] H. Cohen. *Numerical Approximation Methods.* Springer, 2006, p. 9. ISBN: 978-1-4419-9836-1.
- [6] Q. Dai. “Periodic solutions of the N point-vortex problem in planar domains”. PhD thesis. Justus-Liebig-Universitat Gießen, 2014.
- [7] E. Erturk. “Discussions on Driven Cavity Flow”. In: *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 60 (2009), pp. 275–294. doi: 10.1002/fld.1887.
- [8] Goddard Consulting. *Function of One Variable.* [Online; accessed May 3, 2017]. 2003–2017. URL: <http://www.goddardconsulting.ca/image-files/finiteelement-FcnOneVar.jpg>.
- [9] A. Hadjidimos. “Successive overrelaxation (SOR) and related methods”. In: *Journal of Computational and Applied Mathematics* 123 (1999), pp. 177–199.
- [10] A. Hadjidimos. “Successive overrelaxation (SOR) and related methods”. In: *Journal of Computational and Applied Mathematics* 123 (1999), pp. 177–199.
- [11] C. Hirsch. *Numerical Computation of Internal & External Flows.* Vol. vol 1. John Wiley & sons, 1994, pp. 283–287. ISBN: 0-471-91762-1.
- [12] J. C. Acosta Arango, J. A. Arredondo, O. D. Lopez Mejia. “Hydrodynamic stability analysis on the lid driven cavity flow”. In: *En preparación* (2017).
- [13] A. Jaffe J. Carlson and Editors A. Wiles. *The Millennium Prize Problems.* Published by the Clay Mathematics Institute, Cambridge Massachusetts, 2006, p. 57. ISBN: 0-8218-3679-X.
- [14] M. McCracken J. E. Marsden. *The Hopf Bifurcation and Its Applications.* Springer Science & Business Media, 2012. ISBN: 978-0-387-90200-5.

- [15] M. Peri C J. H. Ferziger. *Computational Methods for Fluid Dynamics, 3rd Edition.* Springer, 1999, p. 2. ISBN: 3-540-42074-6.
- [16] J. Stam. "Stable Fluids". In: *In SIGGRAPH 99 Conference Proceedings, Annual Conference Series* 121-128 (August 1999).
- [17] T. Kambe. *Elementary Fluid Mechanics.* World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2007, pp. 46–47. ISBN: 13 978-981-256-416-0.
- [18] T. Kambe. *Elementary Fluid Mechanics.* World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2007, pp. 51–52. ISBN: 13 978-981-256-416-0.
- [19] T. Kambe. *Elementary Fluid Mechanics.* World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2007, pp. 324–325. ISBN: 13 978-981-256-416-0.
- [20] L.S. Andallah M.A.K.Azad. "Analytical Solutions of 2D Incompressible Navier-Stokes Equations for Time Dependent Pressure Gradient". In: *International Journal of Scientific & Engineering Research* 5.6 (2014), pp. 878–886.
- [21] N. Gupta, H. Lawrence, M. Joshi, B. Dharmadhikari. "On the Analysis of the Laminar to Turbulent Flow Patterns in the Treatment of a Patient Receiving Oxygen". In: () .
- [22] P. K. Newton. *The N-Vortex Problem Analytical Techniques.* Springer, 2010, p. 39. ISBN: 978-1-4419-2916-7.
- [23] W. H. Reid P. G. Drazin. *Hydrodynamic Stability.* 2nd ed. Cambridge University Press, 2004. ISBN: 0-521-52541-1.
- [24] R. L. Panton. *Incompressible Flow, Fourth Edition.* John Wiley & Sons, 2013, pp. 120–121. ISBN: 978-1-118-01343-4.
- [25] E. N. Lightfoot R. Byron Bird W. E. Stewart. *Transport Phenomena, Revised 2nd Edition.* John Willey and Sons, Inc, 1999, p. 12. ISBN: 0-470-11539-4.
- [26] F. J. Uribe R. M. Velasco. *La Hidrodinámica de Leonhard Euler.* URL: <http://albertofest.matcuer.unam.mx/Misc46/Uribe.pdf>.
- [27] E. Sousa. "Finite differences for the convection-diffusion equation. On stability and boundary conditions". PhD thesis. University of Oxford, Oct. 2001.
- [28] E. Sousa. "Finite differences for the convection-diffusion equation. On stability and boundary conditions". PhD thesis. University of Oxford, Oct. 2001.
- [29] J. C. Strikwerda. *Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations.* 2nd edition. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2004, p. 25. ISBN: 978-0898715675.
- [30] Q. Dai Thomas Bartsch. *Periodic solutions of the N-vortex Hamiltonian system in planar domains.* Version 2. Mar. 22, 2014. arXiv: 1403.4533.
- [31] K. W. Bedford V. L. Streeter E. B. Wylie. *Mecánica de Fluidos, 9na Edición.* Mc Graw Hill, 1999, p. 115. ISBN: 958-600-987-4.
- [32] C. C. Tamayo Vasquez. "Equilibrios relativos poligonales en el problema de los N-vortices". MA thesis. Universidad Autonoma Metropolitana, 2011.

- [33] W. T. Vetterling W. H. Press S. A. Teukolsky. *Numerical recipes: the art of scientific computing*. 3rd ed. Cambridge University Press, 2007. ISBN: 9780511335556.
- [34] C. E. Wayne. “Vortices and Two-Dimensional Fluid Motion”. In: *Notices of American Mathematics Society* (2011), pp. 12–13.