



# Lid Driven Cavity Flow

Semillero de investigación en Mecánica de Fluidos

Juan Camilo Acosta Arango  
John Alexander Arredondo Garcia

[juanc.acostaa@konradlorenz.edu.co](mailto:juanc.acostaa@konradlorenz.edu.co)  
[alexander.arredondo@konradlorenz.edu.co](mailto:alexander.arredondo@konradlorenz.edu.co)

Fundación Universitaria Konrad Lorenz  
Facultad de Matemáticas

Bogotá, Colombia  
Octubre 18 de 2016



# Agenda

Introducción

Esquema de diferencias finitas

Resultados

Trabajos futuros



# Introducción

«Navier-Stokes equation; This is the equation which governs the flow of fluids such as water and air. However, there is no proof for the most basic questions one can ask: do solutions exist, and are they unique? Why ask for a proof? Because a proof gives not only certitude, but also understanding.» [1]



# Introducción

«Approximate solutions to many problems that cannot be solved analytically, arise from numerical and other approximation techniques.» [2]



# Objetivos

- Desarrollar y entender los pasos relacionados en la derivación y solución de las ecuaciones de Navier-Stokes usando diferencias finitas.
- Crear una simulación para el problema del Lid Driven Cavity Flow
- Comparar los resultados de la simulación con los obtenidos por Ercan Erturk en su artículo *Discussions On Driven Cavity Flow*[3]



# Ecuaciones de Navier Stokes

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = -\nabla P + \frac{1}{Re} \nabla^2 \vec{V}$$
$$\nabla \cdot \vec{V} = 0$$

Las ecuaciones de Navier Stokes son un modelo matemático simple que describe la manera en que un fluido viscoso e incompresible fluye



# Ecuaciones de Navier Stokes

*Advección*

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = -\nabla P + \frac{1}{Re} \nabla^2 \vec{V}$$

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0$$



# Ecuaciones de Navier Stokes

*Difusión*

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = -\nabla P + \frac{1}{Re} \nabla^2 \vec{V}$$

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0$$



# Ecuaciones de Navier Stokes

*Gradiente de Presión. El fluido se mueve de presiones altas a presiones bajas*

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = -\nabla P + \frac{1}{Re} \nabla^2 \vec{V}$$

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0$$



# Ecuaciones de Navier Stokes

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = -\nabla P + \frac{1}{Re} \nabla^2 \vec{V}$$
$$\nabla \cdot \vec{V} = 0$$

*Conservación de Masa*



# Ecuaciones de Navier Stokes en $\mathbb{R}^2$

- Evolución de la velocidad

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

- Conservación de masa

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$



# Formulación en términos de Flujo y Vorticidad en $\mathbb{R}^2$

Las ecuaciones de Navier-Stokes pueden ser simplificadas aplicando el operador rotacional  $\nabla \times$  e introduciendo la función de flujo  $\psi$  y vorticidad  $\omega$

$$\omega = \nabla \times \vec{V}$$

$$\psi_A(P) = \int_A^B \vec{V} \cdot \vec{n} \, ds$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{y} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$



# Formulación en términos de Flujo y Vorticidad en $\mathbb{R}^2$

- Evolución de la vorticidad

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right)$$

- Ecuación Elíptica

$$-\omega = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}$$

# Condiciones de Frontera

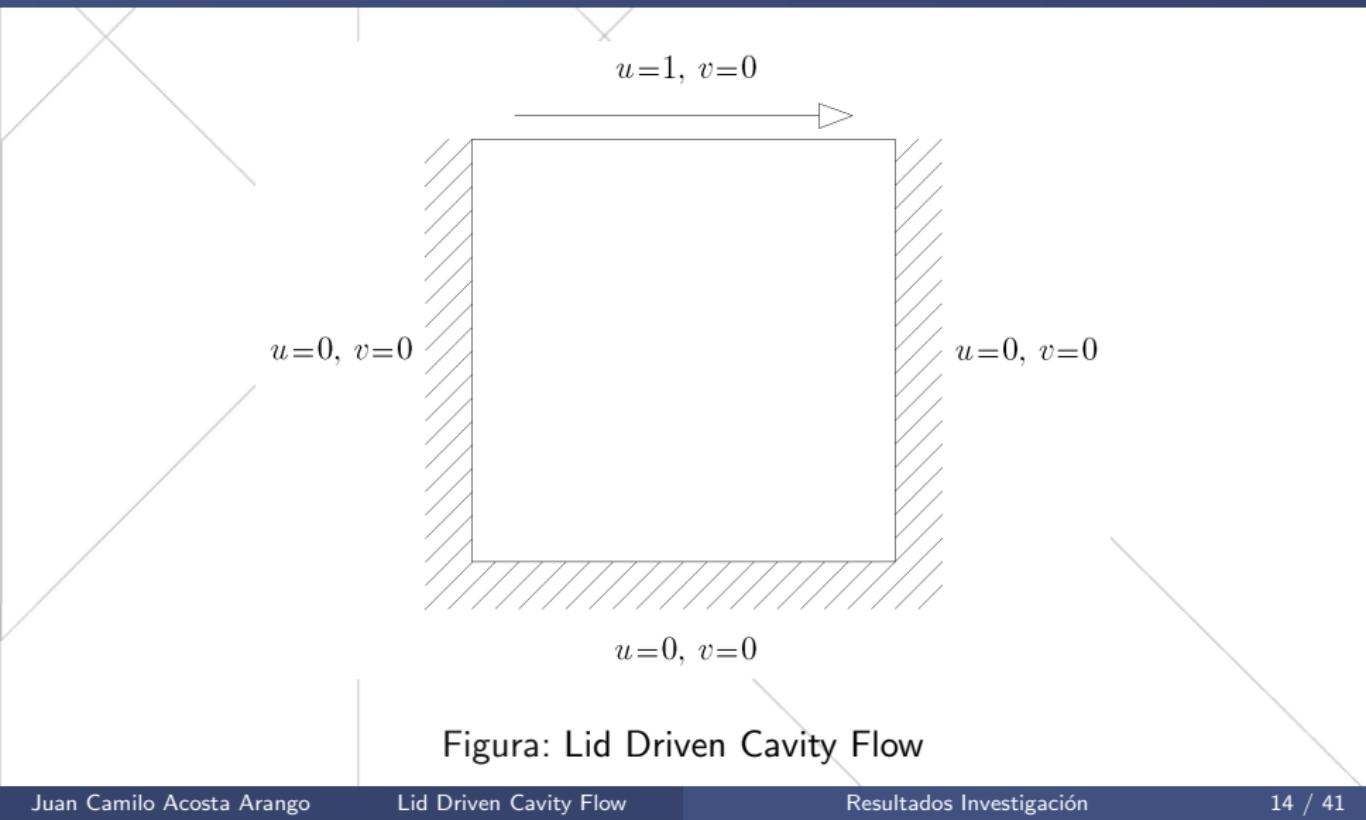


Figura: Lid Driven Cavity Flow



## Condiciones de Frontera

Ahora debemos formular las condiciones de frontera en términos de  $\psi$  y  $\omega$ . Si consideramos la frontera como una linea de corriente cerrada. i.e., un valor constante bajo la función de flujo

- Tapas laterales izquierda y derecha

$$u = 0 = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \text{ entonces } \psi = \text{Constante}$$

- Tapas superior e inferior

$$v = 0 = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \text{ entonces } \psi = \text{Constante}$$

Usando estas observaciones podemos tomar un valor de  $\psi$  conveniente

$$\psi = 0, \text{ en toda la frontera}$$



# Condiciones de Frontera

Para  $\psi$  en los muros

- Tapas laterales izquierda y derecha

$$v = 0 = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

- Tapa superior

$$u = 1 = \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

- Tapa inferior

$$u = 0 = \frac{\partial \psi}{\partial y}$$



## Condiciones de Frontera

Para  $\omega$  en los muros tenemos que  $\psi$  es constante a lo largo de cada muro, así usando la Ecuación Elíptica de la vorticidad se tiene

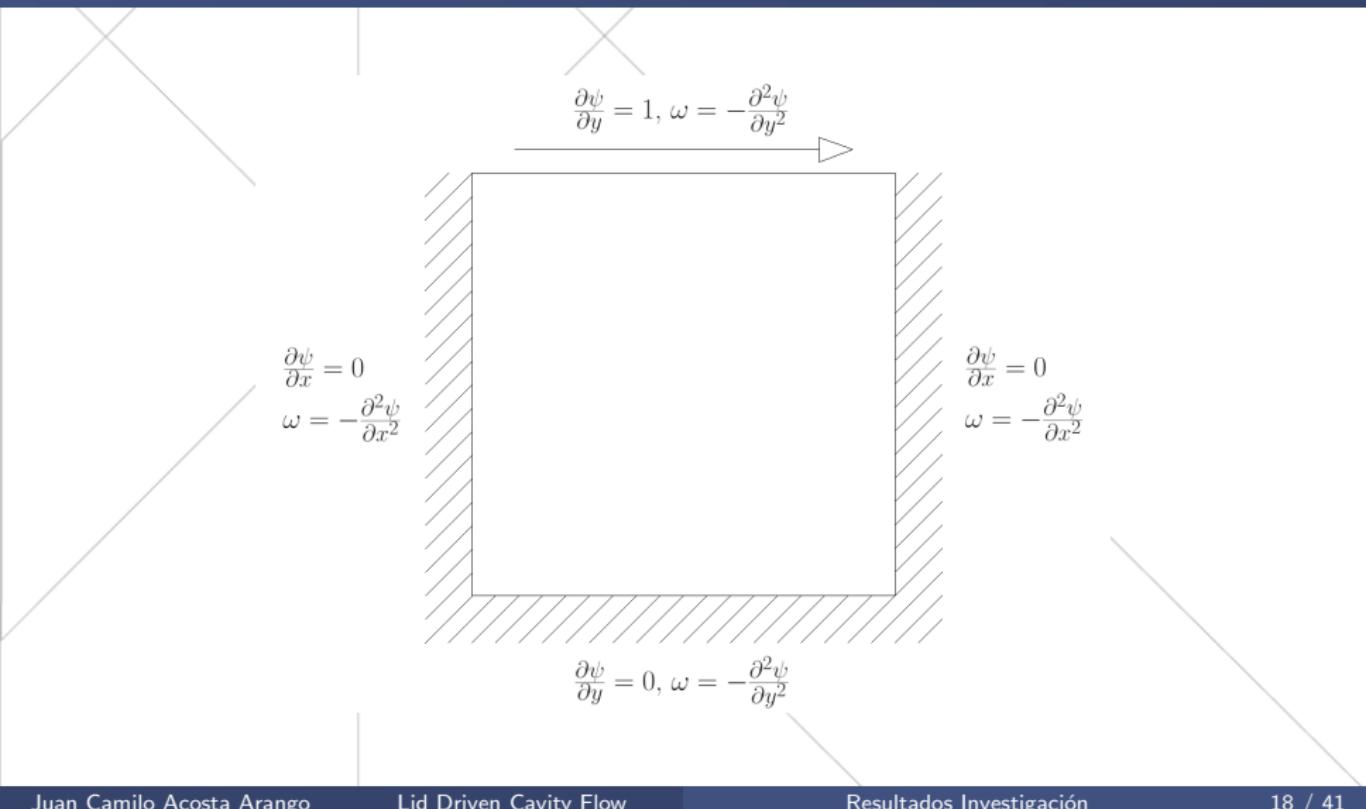
- Tapas laterales izquierda y derecha

$$\omega = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

- Tapas superior e inferior

$$\omega = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}$$

# Condiciones de Frontera





## Esquema de diferencias finitas

Es un método que reemplaza todas las derivadas parciales en la EDP, por aproximaciones **discretas**. Luego de algunas manipulaciones esta ecuación discretizada genera una aproximación a la solución de la EDP.



# Diferencias Finitas

El esquema en diferencias finitas esta basado en el *Teorema de Taylor*. Si la función  $U$  es  $C^n$  sobre el intervalo de integración  $(a, b)$ , entonces conociendo el valor de  $U$  en  $x \in (a, b)$ , podemos aproximar  $x + h \in (a, b)$

$$U(x+h) = U(x) + \frac{\partial U}{\partial x}(x)h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x)h^2 + \dots + \frac{1}{(n-1)!} \frac{\partial^{n-1} U}{\partial x^{(n-1)}}(x)h^{n-1} + O(h^n)$$



# Esquema de diferencias finitas

## Diferencias Finitas de Primer Orden

- Truncar la serie en el primer término.

$$U(x + h) = U(x) + \frac{\partial U}{\partial x}(x)h + O(h^2)$$

- Resolvido para  $\frac{\partial U}{\partial x}(x)$

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x) = \frac{U(x + h) - U(x)}{h} + O(h)$$

- Omitiendo  $O(h)$  obtenemos la aproximación en DF de primer orden

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x) \approx \frac{U(x + h) - U(x)}{h}$$

# Esquema de diferencias finitas

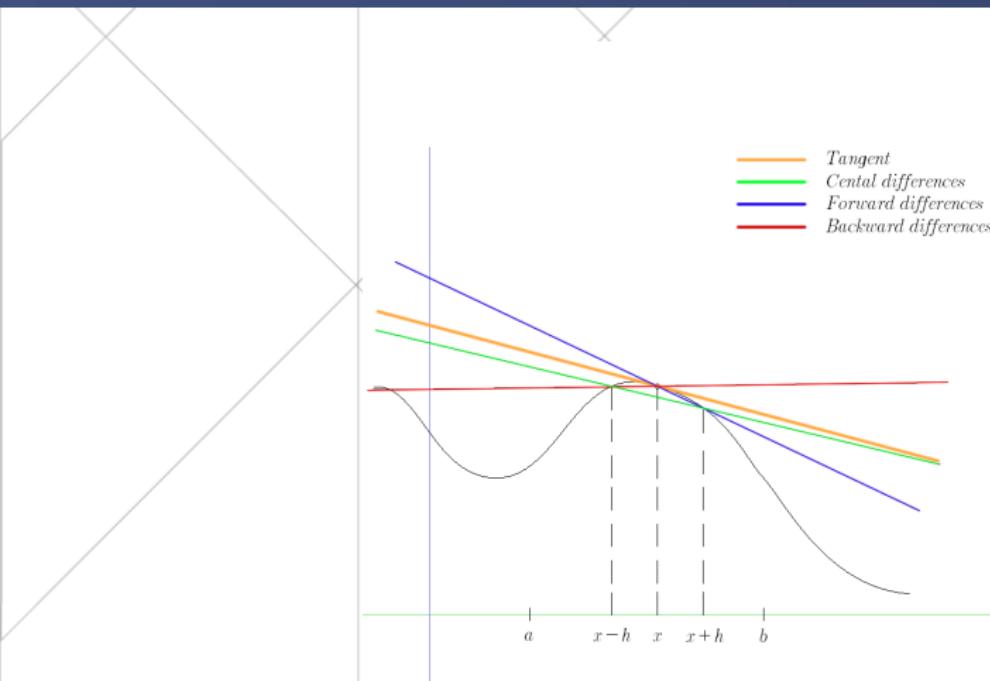


Figura: Diferentes Esquemas de Aproximación



## Notación

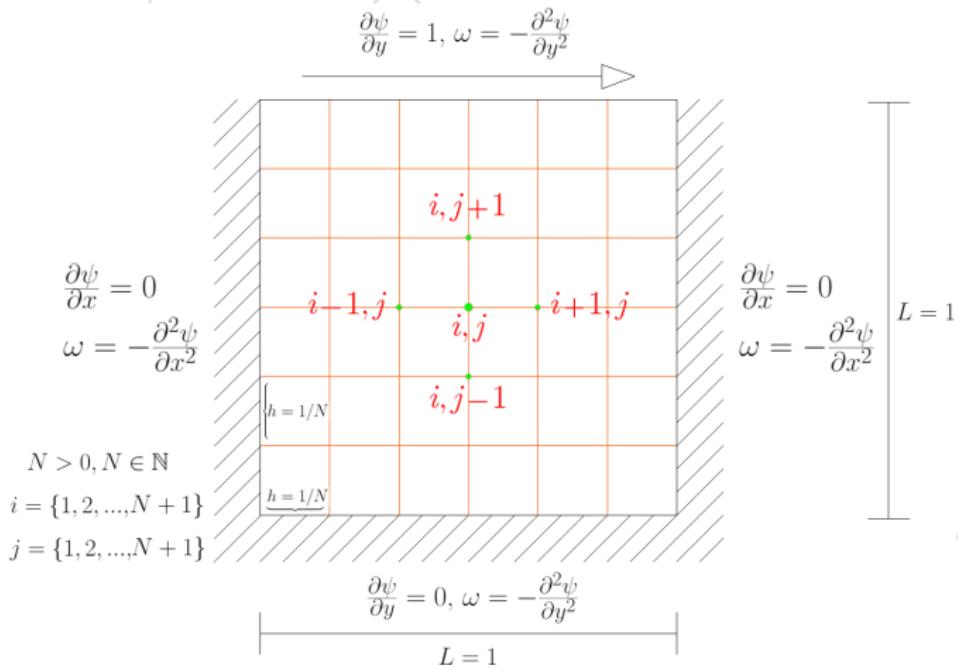
Denotaremos la solución numérica de la función  $U$  de la siguiente manera

$$u_{i,j}^n$$

Que refiere al valor aproximado de  $U$  en la posición  $i,j$  de la grilla a tiempo  $n$



# Discretización espacial





# Discretización

- Ecuación Elíptica o de Poisson

$$-\omega = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}$$

- Discretización

$$-\omega_{i,j}^n = \frac{\psi_{i+1,j}^n + \psi_{i-1,j}^n + \psi_{i,j+1}^n + \psi_{i,j-1}^n - 4\psi_{i,j}^n}{h^2}$$



## Discretización. Paso 1, calcular la función de flujo

Resolviendo para  $\psi_{i,j}^n$

$$\psi_{i,j}^n = \frac{1}{4} \left( \psi_{i+1,j}^n + \psi_{i-1,j}^n + \psi_{i,j+1}^n + \psi_{i,j-1}^n + h^2 \omega_{i,j}^n \right)$$

Usando el método de *Succesive Over-Relaxation (SOR)*, para encontrar la solución de  $\psi$  se tiene

$$\psi_{i,j}^{n+1} = \frac{\beta}{4} (\psi_{i+1,j}^n + \psi_{i-1,j}^{n+1} + \psi_{i,j+1}^n + \psi_{i,j-1}^{n+1} + h^2 \omega_{i,j}^n) + (1 - \beta) \psi_{i,j}^n$$

Donde para el parámetro de relajación  $\beta$  tenemos

$$\beta = \frac{2}{1 + \frac{\pi}{N}}$$



## Discretización. Paso 2, calcular $\omega$ en las fronteras

Derivar  $\omega$  en la tapa inferior usando Series de Taylor en  $\psi$

$$\psi_{i,2} = \psi_{i,1} + \frac{\partial \psi_{i,1}}{\partial y} h + \frac{\partial^2 \psi_{i,1}}{\partial y^2} \frac{h^2}{2} + O(h^3)$$

Recordemos que en la tapa inferior se tiene  $\omega = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}$  y

$$u = 0 = \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

$$\psi_{i,2} = \psi_{i,1} + uh - \omega \frac{h^2}{2} + O(h^3)$$

Así resolviendo para  $\omega$  en la tapa inferior

$$\omega_{i,1} = -\frac{2}{h^2} \psi_{i,2}$$

De manera similar se halla  $\omega$  en las otras fronteras



## Discretización. Paso 2, calcular $\omega$ en las fronteras

- Tapa superior

$$\omega_{i,N-1} = -\frac{2}{h^2}\psi_{i,N-1} - \frac{2}{h}$$

- Tapa inferior

$$\omega_{i,1} = -\frac{2}{h^2}\psi_{i,2}$$

- Tapa lateral izquierda

$$\omega_{1,j} = -\frac{2}{h^2}\psi_{2,j}$$

- Tapa lateral derecha

$$\omega_{N-1,j} = -\frac{2}{h^2}\psi_{N-1,j}$$



## Discretización. Paso 3, calcular $\omega$ en el interior

- Evolución de la vorticidad

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right)$$

- Discretización

$$\begin{aligned} & \frac{\omega_{i,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^n}{\Delta t} + \left( \frac{\psi_{i,j+1}^n - \psi_{i,j-1}^n}{2h} \right) \left( \frac{\omega_{i+1,j}^n - \omega_{i-1,j}^n}{2h} \right) \\ & - \left( \frac{\psi_{i+1,j}^n - \psi_{i-1,j}^n}{2h} \right) \left( \frac{\omega_{i,j+1}^n - \omega_{i,j-1}^n}{2h} \right) \\ & = \frac{1}{Re} \left( \frac{\omega_{i+1,j}^n + \omega_{i-1,j}^n + \omega_{i,j+1}^n + \omega_{i,j-1}^n - 4\omega_{i,j}^n}{h^2} \right) \end{aligned}$$



## Discretización. Paso 3, calcular $\omega$ en el interior

Forma Diferencial	Forma Discreta
$\frac{\partial \omega}{\partial t}$	$\frac{\omega_{i,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^n}{\Delta t}$
$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x}$	$\left( \frac{\psi_{i,j+1}^n - \psi_{i,j-1}^n}{2h} \right) \left( \frac{\omega_{i+1,j}^n - \omega_{i-1,j}^n}{2h} \right)$
$\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y}$	$\left( \frac{\psi_{i+1,j}^n - \psi_{i-1,j}^n}{2h} \right) \left( \frac{\omega_{i,j+1}^n - \omega_{i,j-1}^n}{2h} \right)$
$\frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right)$	$\frac{1}{Re} \left( \frac{\omega_{i+1,j}^n + \omega_{i-1,j}^n + \omega_{i,j+1}^n + \omega_{i,j-1}^n - 4\omega_{i,j}^n}{h^2} \right)$

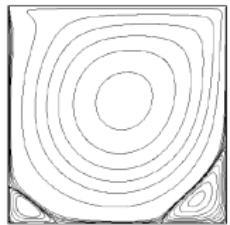
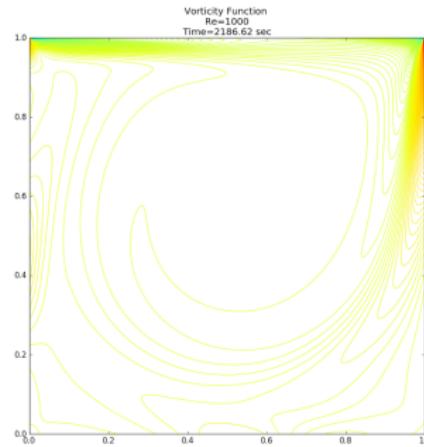
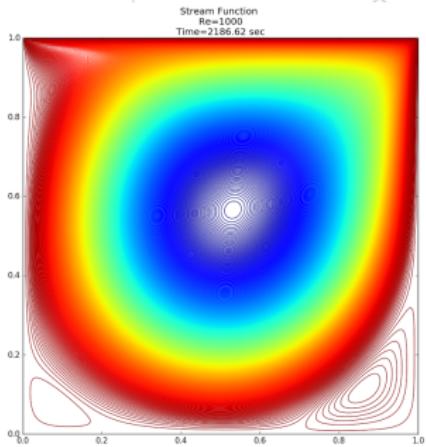


## Discretización. Paso 3, calcular $\omega$ en el interior

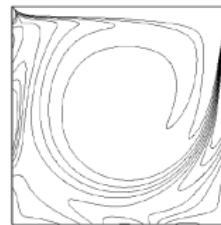
Resolviendo para  $\omega_{i,j}^{n+1}$  obtenemos.

$$\begin{aligned}\omega_{i,j}^{n+1} = & \omega_{i,j}^n + \Delta t \left[ \left( \frac{\psi_{i+1,j}^n - \psi_{i-1,j}^n}{2h} \right) \left( \frac{\omega_{i,j+1}^n - \omega_{i,j-1}^n}{2h} \right) \right. \\ & - \left( \frac{\psi_{i,j+1}^n - \psi_{i,j-1}^n}{2h} \right) \left( \frac{\omega_{i+1,j}^n - \omega_{i-1,j}^n}{2h} \right) \\ & \left. + \frac{1}{Re} \left( \frac{\omega_{i+1,j}^n + \omega_{i-1,j}^n + \omega_{i,j+1}^n + \omega_{i,j-1}^n - 4\omega_{i,j}^n}{h^2} \right) \right]\end{aligned}$$

# Resultados: $Re = 1000$ , $N = 101$ , $n = 0,001$

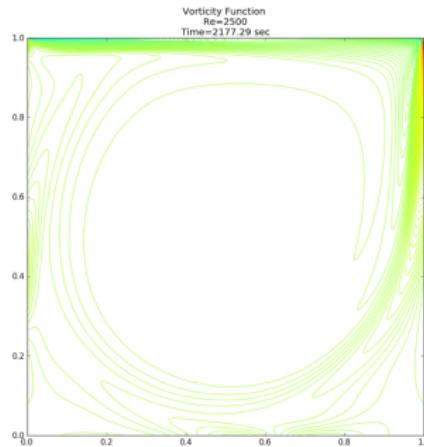
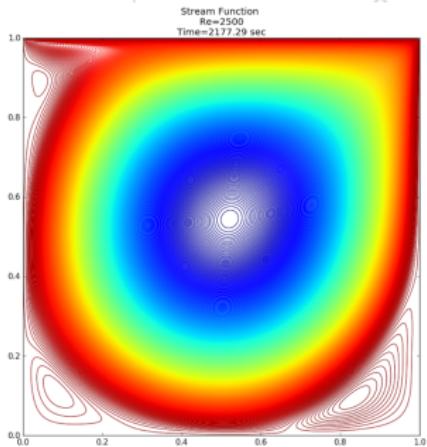


a)  $Re=1,000$

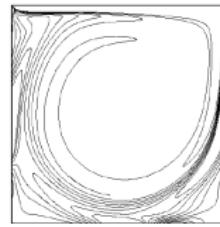


a)  $Re=1,000$

# Resultados: $Re = 2500$ , $N = 101$ , $n = 0,001$

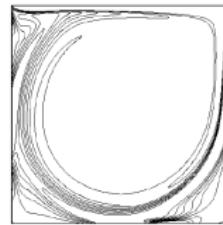
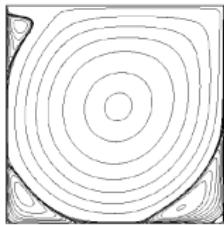
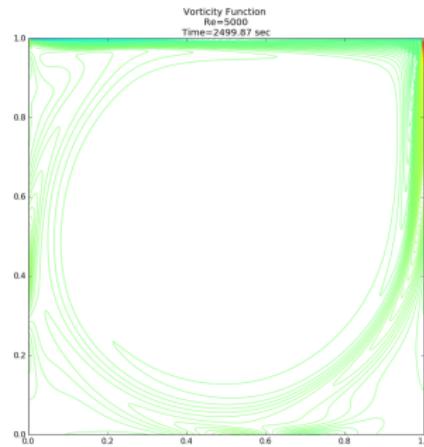
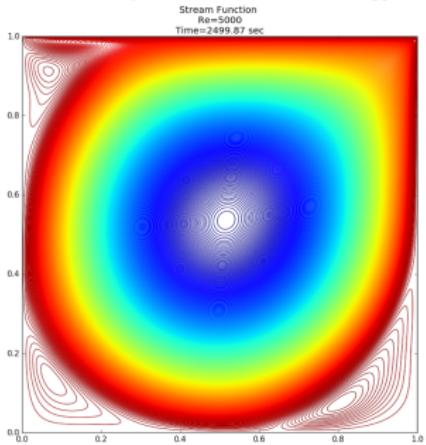


b)  $Re=2,500$



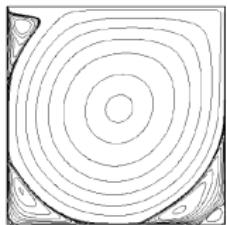
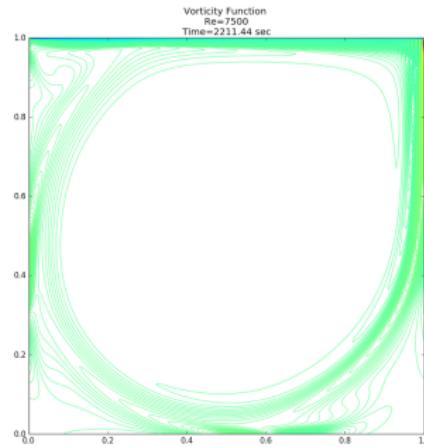
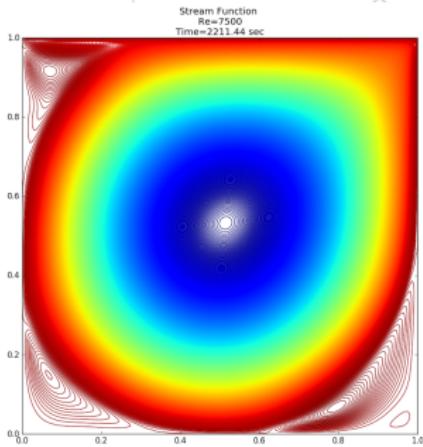
b)  $Re=2,500$

# Resultados: $Re = 5000$ , $N = 101$ , $n = 0,001$

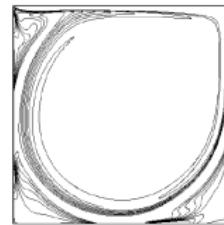




# Resultados: $Re = 7500$ , $N = 101$ , $n = 0,001$

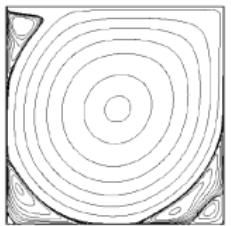
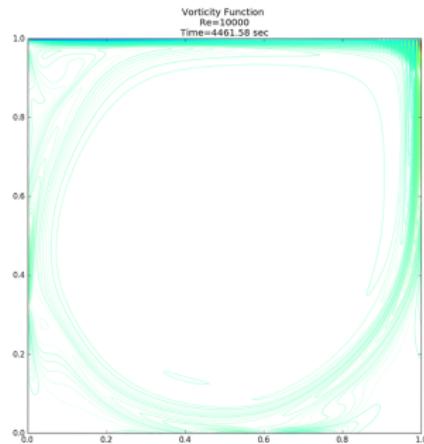
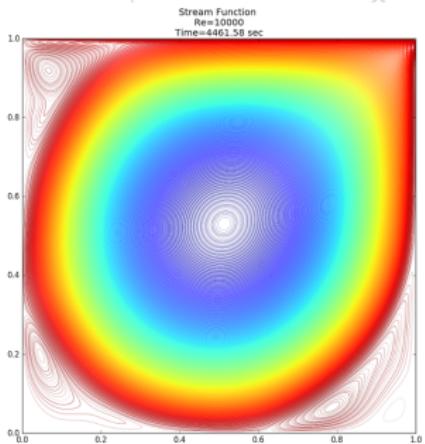


d)  $Re=7,500$

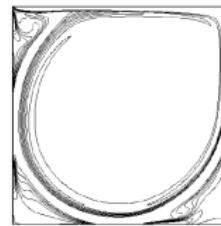


d)  $Re=7,500$

# Resultados: $Re = 10000$ , $N = 201$ , $n = 0,0005$

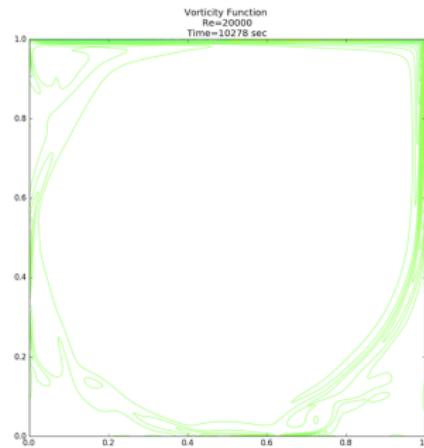
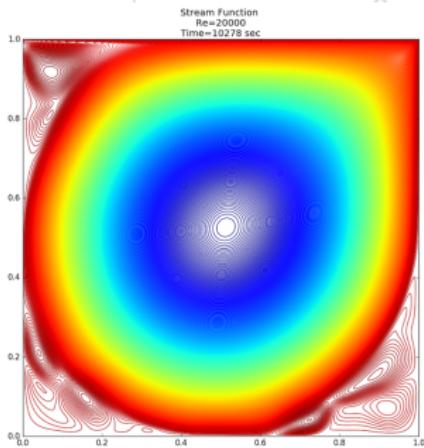


Lid Driven Cavity Flow

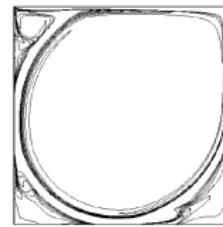


Resultados Investigación

# Resultados: $Re = 20000$ , $N = 1001$ , $n = 0,0005$



i)  $Re=20000$



i)  $Re=20000$



# Trabajos futuros

- Implementar un método para el análisis de estabilidad y convergencia en el problema
- Aplicar el Análisis de Fourier para buscar periodicidades en el comportamiento del fluido
- Buscar los valores de  $Re$  para el mapa de bifurcaciones de vórtices
- Utilizar las nuevas tecnologías de procesamiento en paralelo para mejorar el rendimiento de la simulación



## Anexos

### Forma Adimensional de las ecuaciones de Navier-Stokes[4]

$$r^* = \frac{r}{L}$$

Donde L es una longitud característica del problema

$$u^* = \frac{u}{U}$$

Donde U es una Velocidad característica del fluido

$$t^* = \frac{t}{L/U}$$

t es la variable de tiempo

$$p^* = \frac{p}{\rho U^2}$$

Presión adimensional

$$Re = \frac{\rho UL}{\mu}$$

Número de Reynolds



## Referencias I

-  A. Jaffe J. Carlson y Editors A. Wiles. *The Millennium Prize Problems.* Published by the Clay Mathematics Institute, Cambridge Massachusetts, 2006, pág. 57. ISBN: 0-8218-3679-X.
-  Harold Cohen. *Numerical Approximation Methods.* Springer, 2006, pág. 9. ISBN: 978-1-4419-9836-1.
-  Ercan Erturk. *Discussions On Driven Cavity Flow.* 2009. URL: <https://arxiv.org/pdf/cs/0411048.pdf>.
-  Prof. Dr. Volker John. *The Navier–Stokes Equations.* URL: [https://www.wias-berlin.de/people/john/LEHRE/NUM\\_NSE/num\\_nse\\_1.pdf](https://www.wias-berlin.de/people/john/LEHRE/NUM_NSE/num_nse_1.pdf).



## Referencias II

-  Boston University Lorena Barba. *12 steps to Navier-Stokes*. URL: <http://lorenabarba.com/blog/cfd-python-12-steps-to-navier-stokes/>.
-  Jerrold E. Marsden Alexandre Chorin. *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*. Library of Congress Cataloging in Publication Data, 1992. ISBN: 0-387 97300-1.
-  Hong G. Im. *A Finite Difference Code for the Navier-Stokes Equations in Vorticity/Stream Function Formulation*. 2001. URL: <http://www3.nd.edu/~gtryggva/CFD-Course/2011-Lecture-5.pdf>.
-  Prof Matthias Heil. *The Streamfunction and Vorticity*. URL: <http://www.maths.manchester.ac.uk/~mheil/Lectures/Fluids/Material/Chapter8.pdf>.