

MÉCANIQUE ET ONDES

Bibliographie

- [1] BFR, mécanique
- [2] Brasselet, Mécanique
- [3] Perez, Mécanique
- [4] Épreuve A 2018
- [5] Prépas Sciences Physique PCSI
- [6] Olivier, Physique des ondes
- [7] Cours perso
- [8] Physique tout-en-un, PC-PC*
- [9] BUP n°761, changement de fréquence, effet Doppler
- [10] http://maths-sciences-lp.ac-amiens.fr/IMG/dossier_radar/doppler_dossier.pdf
- [11] https://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Ondes/son/doppler_exPLICATION.php
- [12] Mécanique quantique, Dalibard, Basdevant
- [13] Physique atomique, Cagnac, Pebay-Peroula
- [14] <http://frederic.chambat.free.fr/ens/gravi/cours.pdf>
- [15] https://vanoise49.pagesperso-orange.fr/annexe_5_forces%20de%20marees.html
- [16] Garing, Ondes
- [17] Centrale TSI 2017
- [18] PUF Bouloumié, Méca Hydro Ondes, chapitre 8
- [19] Épreuve C 2017
- [20] http://gilbert.gastebois.pagesperso-orange.fr/java/pend_huygens/theorie_huygens.pdf
- [21] https://media4.obspm.fr/public/ressources_lu/pages_mesure-temps/impression.html
- [22] https://fr.wikipedia.org/wiki/Cadran_solaire
- [23] Électronique expérimentale, Krob
- [24] femto-physique
- [25] <http://ressources.univ-lemans.fr/AccesLibre/UM/Pedago/physique/02/meca/chaine.html>

I Loi de l'énergie cinétique pour les solides ([7])

1) Énergie cinétique pour un système

1.1 Cas général

On considère un système (\mathcal{Y}) de masse m_i formé de points de masse m_i situés au points M_i à l'instant t et possédant la vitesse $\vec{v}(M_i/R)$ relativement au référentiel R. L'énergie cinétique du système est donc la somme des énergies cinétiques de chaque point :

$$E_C(\mathcal{Y}/R) = \sum_i \frac{1}{2} m_i \cdot \vec{v}^2(M_i/R)$$

2) Solide en translation

Sur un solide en translation, la formule précédente se simplifie car tous les points M_i possèdent la même vitesse, que est la vitesse du centre d'assise $\vec{v}(G/R)$, d'où :

$$E_C(\mathcal{Y}/R) = \sum_i \frac{1}{2} m_i \cdot \vec{v}^2(M_i/R) = \sum_i \left(\frac{1}{2} m_i \times \vec{v}^2(G/R) \right) = \frac{1}{2} \left(\sum_i m_i \right) \times \vec{v}^2(G/R)$$

multiplié par \vec{v}

$$\Rightarrow E_C(\mathcal{Y}/R) = \frac{1}{2} m_{\text{tot}} \cdot \vec{v}^2(G/R)$$

Cette formule est une extension immédiate de la mécanique du point à un solide en translation qui comporte comme un point matériel.

3) Solide en rotation autour d'un axe fixe Δ

Chaque point M_i a une trajectoire circulaire de rayon r_i (distance à l'axe de rotation), et de vitesse angulaire ω .

L'énergie cinétique de M_i est donc :

$$E_C(M_i/R) = \frac{1}{2} m_i \cdot \vec{v}^2(M_i/R) = \frac{1}{2} m_i \times (r_i \cdot \omega)^2 = \frac{1}{2} m_i \cdot r_i^2 \cdot \omega^2$$

On obtient alors l'énergie cinétique du solide :

$$E_C(\vartheta/R) = \sum_i \frac{1}{2} m_i r_i^2 (\dot{\vartheta}_i/R)^2 = \sum_i \left(\frac{1}{2} m_i r_i^2 \dot{\omega}_i^2 \right)$$
$$= \frac{1}{2} \left(\sum_i m_i r_i^2 \dot{\omega}_i^2 \right) \times \omega^2$$

On reconnaît alors le moment d'énergie du solide par rapport à l'axe Δ , donc :

$$\boxed{E_C(\vartheta/R) = \frac{1}{2} J_\Delta(\vartheta) \times \omega^2(\vartheta/R)}$$

II La de l'énergie cinétique pour un système inélastique

1) Énoncé

Dans le cas d'un solide inélastique, on peut obtenir les théorèmes énergétiques par sommation des théorèmes énergétiques appliqués à chaque point.

On obtient ainsi le théorème de la puissance énergétique :

$$\boxed{\frac{dE_C(\vartheta/R)}{dt} = P_{ext}}$$

avec P_{ext} la puissance des forces extérieures

Dans sa forme intégrée, on obtient le théorème de l'énergie élastique :

la variation d'énergie élastique du système entre les instants t_1 et t_2 est égale aux travaux des forces extérieures :

$$\boxed{\Delta E_C(\vartheta/R) = \int_{t_1}^{t_2} P_{ext} dt = W_{ext}}$$

Tout comme le mécanique du point, certains travaux de actions extérieures ne dépendent que de l'état initial et de l'état final du solide.

On peut les écrire sous forme d'énergie potentielle telle que $dE_p = -\delta W$, et on obtient ainsi le théorème de l'énergie mécanique et le théorème de la puissance

$$\boxed{\Delta E_m(\vartheta/R) = W_{ext}, \text{ non conservatif, } 1 \rightarrow 2}$$

$$\boxed{\frac{dE_m(\vartheta/R)}{dt} = P_{ext}, \text{ non conservatif}}$$

Si le système n'est soumis qu'à des forces conservatrices (f) ou à des forces non conservatrices qui ne travailent pas, alors l'énergie mécanique est conservée.
On dit que l'énergie mécanique est une intégrale première du mouvement.

Remarque: pour un système matériel (\mathcal{S}) de masse $m_{\mathcal{S}}$ et de centre d'inertie G ,
la puissance et le travail des forces sont :

$$P(\vec{P}/R) = m_{\mathcal{S}} \cdot \vec{v} \cdot \vec{F}(G/R)$$

$W_{\text{ext}}(\vec{P}) = m_{\mathcal{S}} \cdot g \cdot (z_{G,f} - z_{G,i})$ pour un axe (O_z) dirigé vers le bas.

(ou $W_{\text{ext}}(\vec{P}) = m_{\mathcal{S}} \cdot g \cdot (z_{G,i} - z_{G,f})$ pour un axe (O_z) dirigé vers le bas)

L'énergie potentielle de pesanteur du système (\mathcal{S}) étant $E_{\text{p,pes}}(\mathcal{S}) = m_{\mathcal{S}} \cdot g \cdot z_{G,f}$ lorsque
 \vec{v} est vers le haut ou $E_{\text{p,pes}}(\mathcal{S}) = m_{\mathcal{S}} \cdot g \cdot z_{G,i}$ lorsque \vec{v} est vers le bas

2) puissance d'une action sur un solide

a) Solide en translation

Sur un solide en translation, la vitesse est commençable à celle d'un point matériel.

La puissance d'une force \vec{F} s'exprime alors par :

$$P(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{v} (G/R)$$

b) Solide en rotation autour d'un axe fixe Δ

Sur un solide en rotation autour d'un axe fixe, le théorème de la puissance cinétique et le loi du moment cinétique scelant par rapport à l'axe de rotation doivent permettre d'obtenir la même équation.

On sait que l'énergie cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe vaut

$$E_c(\mathcal{S}/R) = \frac{1}{2} I_\Delta(\mathcal{S}) \times \omega^2(\mathcal{S}/R)$$

On peut calculer sa dérivée par rapport au temps et appliquer le théorème de la puissance cinétique :

$$\frac{dE_c(\mathcal{S}/R)}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} I_\Delta(\mathcal{S}) \times \omega^2(\mathcal{S}/R) \right) = \frac{1}{2} \times I_\Delta(\mathcal{S}) \times \frac{d\omega^2(\mathcal{S}/R)}{dt}$$

$$= \frac{1}{2} I_\Delta(\mathcal{S}) \times 2\omega(\mathcal{S}/R) \times \dot{\omega}(\mathcal{S}/R) = I_\Delta(\mathcal{S}) \times \omega \times \dot{\omega}$$

D'après le théorème de la puissance mécanique, $dE(\vec{y}/R) = \text{Fest}$, donc $J_{\Delta}(\vec{y}) \times \omega \times \omega = \frac{dE(\vec{y}/R)}{dt}$

En élevant la loi du moment cinétique $\overset{\text{rotat}}{\omega}$ au rapport à l'axe Δ , on obtient la relation : $d(J_{\Delta}(\vec{y}/R)) = M_{\Delta}(\text{Fest} \rightarrow \vec{y})$

$$= J_{\Delta}(\vec{y}) \times \omega(\vec{y}/R)$$

$$= J_{\Delta}(\vec{y}) \times \underline{\omega(\vec{y}/R)} = \text{cts}_{\Delta}(\vec{F}_{\text{ext}} \rightarrow \vec{y})$$

$$\text{ssi } J_{\Delta}(\vec{y}) \times \omega = \text{cts}_{\Delta}(\vec{F}_{\text{ext}} \rightarrow \vec{y})$$

On multiplie cette dernière équation par ω : $J_{\Delta}(\vec{y}) \times \omega \times \omega = \text{cts}_{\Delta}(\vec{F}_{\text{ext}} \rightarrow \vec{y}) \times \omega$

En combinant les 2 équations du mouvement, on obtient :

$$J_{\Delta}(\vec{y}) \times \omega \times \omega = \text{Fest} = \text{cts}_{\Delta}(\vec{F}_{\text{ext}} \rightarrow \vec{y}) \times \omega$$

La puissance d'une action sur un objet en rotation autour d'un axe fixe est donc :

$$P = M_{\Delta}(\vec{F} \rightarrow \vec{y}) \times \omega$$

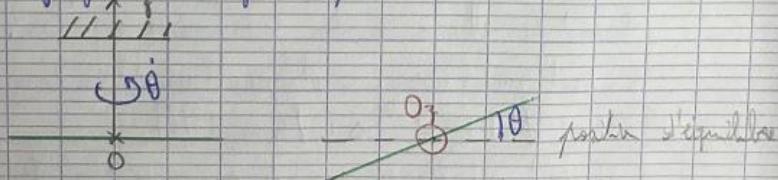
On retrouve en particulier la puissance d'un couple E ,

$$P = E \times \omega$$

3) Exemples

1) Pendule de torsion

On étudie un bâton homogène (longueur l , masse m , moment d'inertie J_0 , par rapport à (Oz)) fixé à un fil au point O centre de masse du bâton.



Le poids et la tension du fil s'appliquent au point O qui ne se déplace pas, par conséquent ces deux actions ne travaillent pas. ($P(P) = P \cdot \vec{r}(O/R) \cdot \vec{o}$)

$$= 0$$

Le fil exerce un couple de torsion sur le bâton tel que $\vec{\tau} = -k\theta \hat{z}$ ou $\vec{\tau} = k\theta \vec{z}$
 On peut calculer la puissance du couple:

$$\vec{\tau} = \vec{\epsilon}_w = -k\theta \times \vec{0}$$

On en déduit alors l'expression du travail:

$$W = \int_{t_1}^{t_2} \vec{\tau} \cdot \vec{v} dt = \int_{t_1}^{t_2} -k\theta \vec{0} \cdot \vec{v} dt$$

$$W = \int_{t_1}^{t_2} -k\theta \frac{d(\frac{1}{2}\theta^2)}{dt} dt$$

$$W = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} d(-\frac{1}{2}k\theta^2) dt = \left[-\frac{1}{2}k\theta^2 \right]_{t_1}^{t_2} = -\frac{k}{2} (\theta^2(t_2) - \theta^2(t_1))$$

On constate que le travail ne dépend que des positions initiale et finale, donc
 le couple de torsion définit une énergie potentielle de torsion.

$$W = -\left(\frac{k}{2}\theta^2(t_2) - \frac{k}{2}\theta^2(t_1) \right) = -\Delta E_p = -(E_p(t_2) - E_p(t_1))$$

Donc $E_p(\theta) = \frac{1}{2}k\theta^2$ en choisissant une référence d'énergie potentielle lorsque
 le fil est au repos : $E_p(\theta=0)=0$.

Remarque: autre méthode: $W = \int_{t_1}^{t_2} -k\theta \dot{\theta} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(-\frac{1}{2}k\theta^2 \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} d(-\frac{1}{2}k\theta^2)$
 $= \int \delta W = \int -dE_p$

Donc par identification, $-d(\frac{1}{2}k\theta^2) = -dE_p$, soit $E_p = \frac{1}{2}k\theta^2 + \text{cte}$

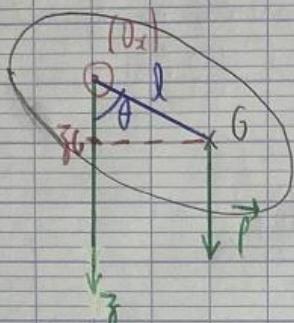
Toutes les actions extérieures agissant sur le bâton sont conservatives, par
 conséquent l'énergie mécanique se conserve et on peut écrire une intégrale première
 du mouvement: $E_{tot}(q/R) = E_C(q/R) + E_p(q/R)$

$$= \frac{1}{2} I_{0z} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} k\theta^2 = \text{cte}$$

On détermine la constante à l'aide des conditions initiales.

b) Pendule pesant

On constate le pendule pesant étudié au chapitre précédent :



On peut écrire l'énergie mécanique du pendule :

$$E_c(\vartheta/R) = \frac{1}{2} I_{O_x} \times \omega^2 = \frac{1}{2} I_{O_x} \times \dot{\theta}^2$$

Le poids est une force conservatrice, donc on peut écrire l'expression de l'énergie potentielle du pesant : l'énergie potentielle de pesant d'un système s'identifie à l'énergie potentielle de pesant de l'entre l'énergie conservée toute la masse du système.

En pesant $E_p, pes(3=0)=0$, on a :

$$E_p, pes(3/R) = -mgtg\theta \times zg + 0$$

avec $zg = l \cos \theta$

Si on a $E_p, pes(3/R) = -mgtg\theta \times l \cos \theta$, car l'axe (O_z) est dirigé vers le bas (avec un axe (O_z) dirigé vers le haut, on aurait $E_p, pes = mgtg\theta$ avec $zg = -l \cos \theta$).

La liaison pivot à O est une liaison pivot parfaite, par conséquent le moment Nétaire de l'action de la liaison pivot sur le pendule par rapport à (O_x) est nul. Donc la puissance de cette action $P(pivot) = \partial r_a(pivot) \times v_a = 0$.

La liaison pivot parfaite ne travaille pas. Le système est soumis à des actions conservatrices sur lesquelles ne travaille pas, par conséquent l'énergie mécanique conserve, donc on peut écrire l'intégrale première du mouvement :

$$E_m(3/R) = E_c(3/R) + E_p(3/R)$$

$$= \frac{1}{2} I_{O_x} \dot{\theta}^2 - mgtg\theta \times l \cos \theta = cste.$$

L'intégrale première du mouvement correspond exactement à l'équation de l'harmonique de phasor.

On en déduit que lorsqu'un système est conservatif, une trajectoire de phase correspond à une courbe d'énergie mécanique constante.

III Law de l'énergie mécanique pour un système déformable

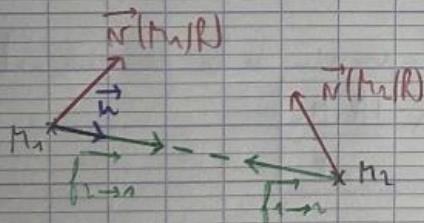
1) Exemple : travail d'inertie (voie physique)

2) Principe des actions mutuelles

Pour calculer le travail d'une puissance des forces intérieures, on peut se restreindre au cas d'un système de deux points. Pour les systèmes plus complexes, on pourra sommer les puissances des forces intérieures de toutes les paires de points du système.

On considère un système de deux points M_1 et M_2 , de vitesses respectives.

$$\vec{v}(M_1/R) = \frac{d\vec{O}M_1}{dt} \quad \text{et} \quad \vec{v}(M_2/R) = \frac{d\vec{O}M_2}{dt}, \quad \text{dans un référentiel R d'origine}$$



Le point M_1 exerce sur M_2 une force $\vec{f}_{12,R} = -\vec{f}_{21,R}$ (ici on a représenté une force attractive, donc $f_{12} < 0$).

D'après le principe des actions réciproques, M_2 exerce sur M_1 une force $\vec{f}_{21,R} = -\vec{f}_{12,R} = -\vec{f}_{12,R}$.

On définit la puissance des actions intérieures par :

$$\begin{aligned} P_{int/R} &= \vec{f}_{12,R} \cdot \vec{v}(M_1/R) + \vec{f}_{21,R} \cdot \vec{v}(M_2/R) \\ &= -\vec{f}_{12,R} \cdot \vec{v}(M_1/R) + \vec{f}_{12,R} \cdot \vec{v}(M_2/R) \\ &= \vec{f}_{12,R} \cdot (\vec{v}(M_2/R) - \vec{v}(M_1/R)) \\ &= \vec{f}_{12,R} \cdot \left(\frac{d\vec{O}M_2}{dt} - \frac{d\vec{O}M_1}{dt} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \vec{f}_{12} \cdot \frac{d}{dt} (\vec{M}_1 - \vec{M}_2) \\ &= \vec{f}_{12} \cdot \frac{d}{dt} (\vec{0} \vec{M}_1 + \vec{M}_2) \\ &= \vec{f}_{12} \cdot \frac{d \vec{M}_2}{dt} \end{aligned}$$

En utilisant le vecteur unitaire \vec{n} perpendiculaire au vecteur fixe, on a :

$$P_{int/R} = f_{12} \vec{v} \cdot \frac{d(\vec{M}_1 \vec{M}_2 \vec{v})}{dt}$$

$$= f_{12} \vec{v} \cdot \left(\frac{d \vec{M}_2 \vec{M}_1}{dt} \vec{v} + \vec{M}_2 \vec{M}_1 \frac{d \vec{v}}{dt} \right)$$

$$= f_{12} \frac{d \vec{M}_2 \vec{M}_1 \times (\vec{v} \times \vec{v})}{dt} + f_{12} \vec{M}_2 \vec{M}_1 \times \vec{v} \cdot \frac{d \vec{v}}{dt}$$

Le vecteur \vec{v} étant un vecteur unitaire, on a : $\vec{v}^2 = 1 \Rightarrow \vec{v} \times \vec{v} \cdot \frac{d \vec{v}}{dt} = 0$

$$\text{donc } \vec{v} \cdot \frac{d \vec{v}}{dt} = 0$$

$$\frac{d(\vec{v} \times \vec{v})}{dt}$$

On en déduit donc l'expression de la puissance intérieure :

$$P_{int/R} = f_{12} \times \frac{d \vec{M}_2 \vec{M}_1}{dt}$$

Si la distance $M_2 M_1$ est constante au cours du temps, alors la puissance intérieure est nulle. On retrouve alors que pour un solide déformable, la tension et la puissance des forces intérieures sont nuls. Au contraire, si le système se déforme et est élastique, la distance entre les points du système varie au cours du temps, alors la puissance des forces intérieures n'est pas nulle même si la résultante des forces intérieures l'est.

3) Loi de l'énergie cinétique

Sur un système (S) quelconque on doit ajouter un terme provenant des forces intérieures dans la loi de l'énergie cinétique par rapport au cas des systèmes indéformables. La loi de l'énergie cinétique s'écrit donc :

$$\frac{dE_c(S/R)}{dt} = P_{ext} + P_{int}$$

Cette loi s'écrit aussi sous la forme suivante :

$$\Delta E_c(S/R) = W_{ext} + W_{int}$$

avec W_{ext} le travail des forces extérieures et
 $W_{int} = \int_{t_1}^{t_2} P_{int} dt$ le travail des forces intérieures

III) Loi de l'énergie cinétique pour un système déformable

1) Expérience : tabouret d'inertie

Vidéo de l'expérience.

On modélise cette expérience par un homme sur un tabouret dont le siège peut tourner quasiment sans frottement autour d'un axe Δ (liaison pivot parfaite entre le siège et l'axe de rotation).

Les bras repliés le long du corps, la personne est en rotation à la vitesse angulaire ω_1 . Lorsqu'elle détend ses bras sa vitesse angulaire devient ω_2 .

On cherche à faire un bilan énergétique de cette expérience.

Le système est formé de la personne et du siège mobile du tabouret.

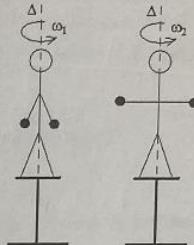
On étudie son mouvement dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

Les actions mécaniques exercées sur le système sont le poids et l'action de liaison entre le tabouret et l'axe. On écrit alors le théorème du moment cinétique scalaire :

$$\frac{dL_\Delta(S/R)}{dt} = M_\Delta(pivot \rightarrow S) + L_\Delta(pivot \rightarrow S)$$

Le poids est parallèle à l'axe Δ par conséquent $M_\Delta(pivot \rightarrow S) = 0$ et la liaison pivot est supposée parfaite donc $M_\Delta(pivot \rightarrow S) = 0$. On en déduit :

$$\frac{dL_\Delta(S/R)}{dt} = 0 \Rightarrow L_\Delta(S/R) = \text{constante}$$



Dans l'état initial le moment d'inertie par rapport à Δ est $J_1(S)$ alors que dans l'état final il vaut $J_2(S)$. La conservation du moment cinétique donne alors :

$$J_1(S)\omega_1 = J_2(S)\omega_2$$

Par définition le moment d'inertie vaut $J(S) = \sum m_i r_i^2$

Or dans l'état final la personne a les bras tendus donc certaines des distances r_i sont supérieures à celles de l'état initial donc $J_2(S) > J_1(S)$

On en déduit donc que $\omega_2 < \omega_1$

On calcule alors la variation d'énergie cinétique du système :

$$\Delta E_c(S/R) = \frac{1}{2} J(S) \omega_2^2 - \frac{1}{2} J(S) \omega_1^2 = \frac{1}{2} J(S) \left(\frac{J_1(S)}{J_2(S)} \omega_1 \right)^2 - \frac{1}{2} J(S) \omega_1^2 = \frac{1}{2} J(S) \omega_1^2 \left(\frac{J_1(S)}{J_2(S)} - 1 \right)$$

Or le travail des actions extérieures est nul car le centre d'inertie ne se déplace pas au cours de la déformation et la liaison pivot est parfaite. Par conséquent la loi de l'énergie cinétique des systèmes indéformables ne s'applique pas ici.

La déformation du système a entraîné l'existence d'un travail des forces intérieures (exercées par les muscles) qu'il faut prendre en compte. La loi de l'énergie cinétique doit s'écrire ici :

$$\Delta E_c(S/R) = W_{int}$$

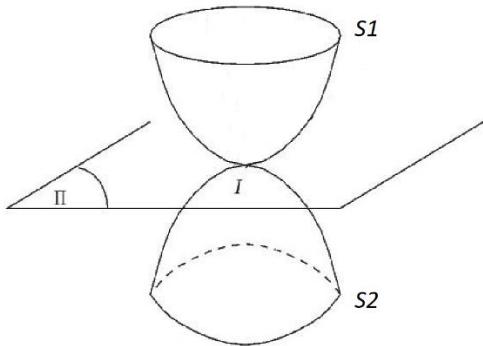
II Frottements (voir [1], [3])

On va s'intéresser aux frottements qui s'appliquent sur des solides uniquement. On se place dans le cadre de la mécanique du point. On modélisera donc les contacts par des points matériels.

1) Frottements secs

a) Contact entre deux solides

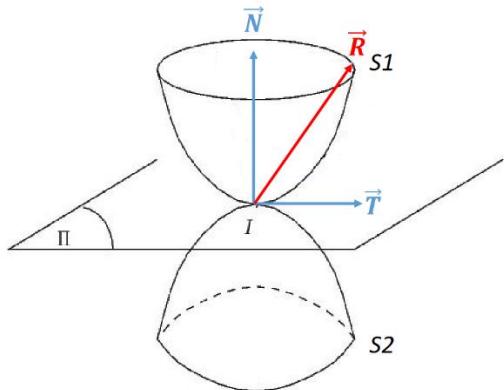
Contact entre deux solides



On note I le point de contact entre les deux solides et le plan Π .

On définit la vitesse de glissement par : $\vec{v}_g = \vec{v}_{1/2}$, \vec{v}_g appartient au plan Π , on dit qu'il y a roulement sans glissement si cette vitesse est nulle.

Contact entre deux solides



La réaction entre les 2 solides se décompose en une composante normale et une composante tangentielle.

\vec{T} correspond à la force de frottements

Du fait de l'existence d'aspérité et d'un grand nombre de petits contacts, la modélisation n'est pas simple.

b) Lois de Coulomb

Il s'agit de lois phénoménologiques introduites d'abord par De Vinci puis par Coulomb.

- Cas de non-glissement : inégalité entre les composantes normale et tangentielle

On introduit un coefficient de frottement statique f_s tel que : $T \leq f_s N$

f_s dépend de l'état de la surface mais ne dépend pas de l'aire de contact

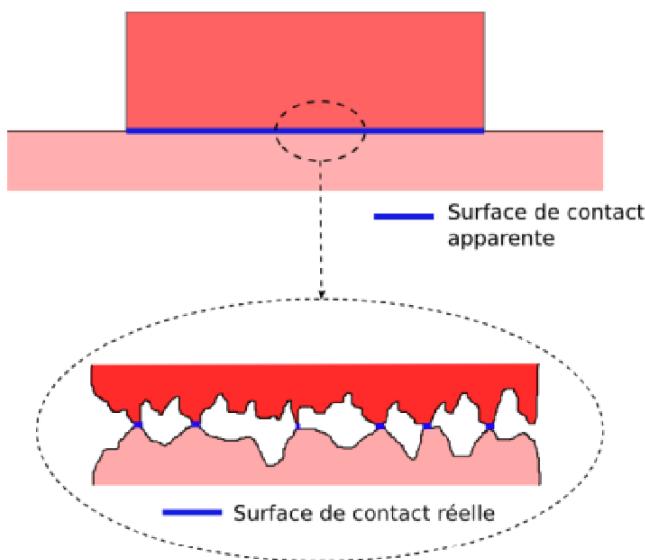
- Cas de glissement : vitesse de glissement non nulle

On introduit un coefficient de frottement dynamique f_d tel que $T = f_d N$

f_d est indépendant de \vec{v}_g

On aura toujours $f_d < f_s$

Aspect mésoscopique



Ex : meuble que l'on pousse

Coefficients de frottement statique et dynamique

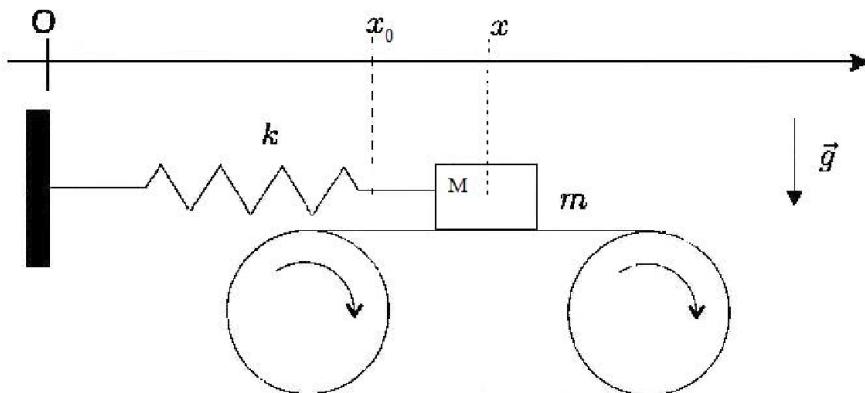
	f_s	f_d
Caoutchouc/Verre	2	
Pneu/ Route sèche	0.9	0.8
Pneu/Route mouillée	0.5	0.35

Remarque : \vec{T} est toujours opposée à la vitesse, donc on a bien une force dissipative.

c) Exemple : mouvement d'un archet sur une corde de violon

Ce mouvement est analogue à un mouvement « stick-slip » saccadé sur un tapis roulant. Le tapis roulant joue le rôle de l'archet et le système masse + ressort joue le rôle de la corde enduite de colophane. Le poids appliqué sur la masse équivaut à la force exercée sur la corde en appuyant plus ou moins sur l'archet.

Modélisation du mouvement de l'archet



On note x_0 la position d'équilibre du système masse + ressort, qu'on prend égal à la longueur à vide l_0 .

On peut décomposer le mouvement en plusieurs phases :

- Phase 1 : « Stick »

La masse adhère, elle se déplace à la vitesse du tapis, notée V , qui est constante.

En appliquant le PFD, on obtient : $\vec{0} = \vec{P} + \vec{T} + \vec{N} + \vec{F}$, F est la force de rappel du ressort. En projetant sur Ox et Oz , on obtient : $N = mg$ et $T = k(x - l_0)$

Or, $x - x_0 = x - l_0 = Vt$

La condition d'adhérence impose $T \leq f_s N$, ainsi on est en phase « Stick » tant que $t \leq t_1 = \frac{f_s mg}{kV}$

Modélisation du mouvement de l'archet



- Phase 2 : « Slip »

La masse glisse. Le PFD donne cette fois : $m\ddot{x} = -k(x - l_0) + T$

La condition de glissement impose : $T = f_d N = f_d mg$

$$\text{Ainsi, } \ddot{x} + \omega_0(x - l_0) = f_d g, \text{ donc : } x(t) = l_0 + \frac{f_d g}{\omega_0^2} + A \cos(\omega_0(t - t_1) + \varphi)$$

On détermine A et φ en utilisant la continuité de x et \dot{x} en t_1 , on trouve :

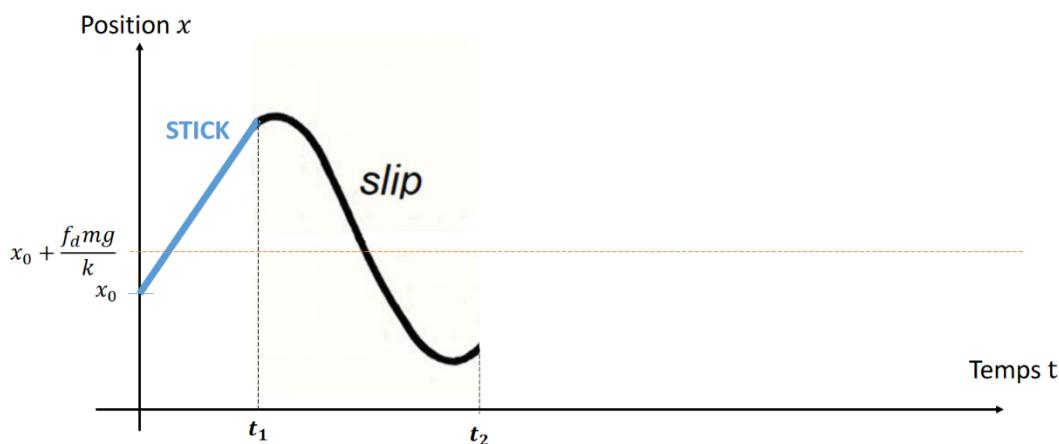
$$\tan(\varphi) = \frac{V\omega_0}{g(f_d - f_s)} \text{ et } A = \frac{1}{\omega_0} \sqrt{\frac{g^2(f_d - f_s)^2}{\omega_0^2} + V^2}$$

Remarque : - si V augmente, l'amplitude des oscillations augmente

- si k diminue (si on desserre la corde de violon), l'amplitude des oscillations augmente

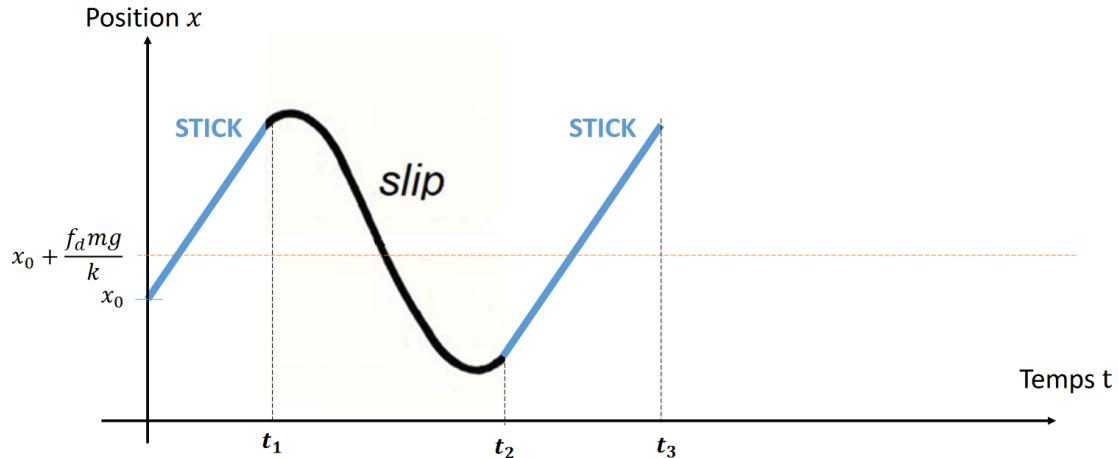
La phase « Slip » prend fin au bout d'un temps t_2 tel que $\dot{x}(t_2) = V$: $t_2 = t_1 + \frac{\pi - 2\varphi}{\omega_0}$

Modélisation du mouvement de l'archet

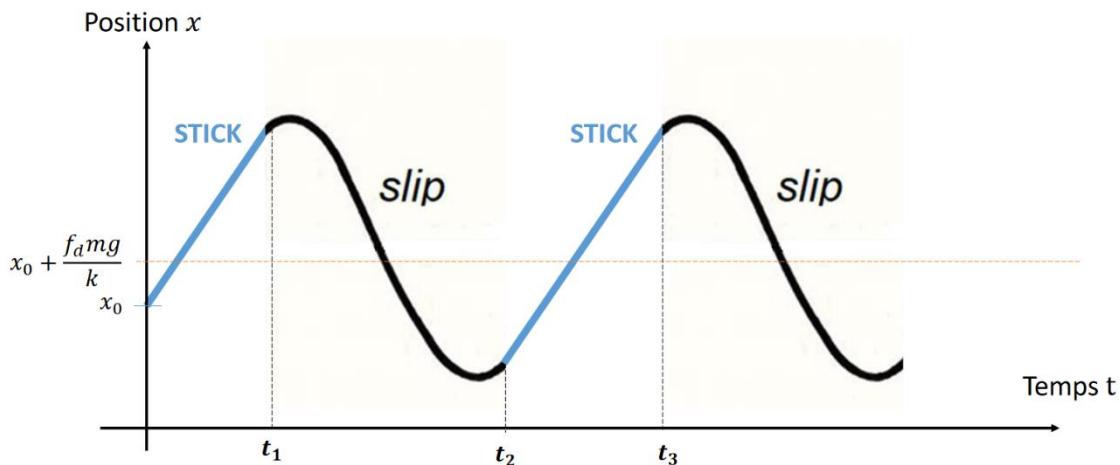


Puis on revient en phase « Stick » et ainsi de suite...

Modélisation du mouvement de l'archet



Modélisation du mouvement de l'archet



On obtient un mouvement non sinusoïdal, mais périodique. On peut faire une transformée de Fourier et obtenir un grand nombre d'harmoniques, qui témoignent d'un son riche. Si on veut un son le moins pur possible, et donc un timbre riche, il faut un mouvement « Slip » le moins sinusoïdal possible donc il faut diminuer $t_2 - t_1$, donc augmenter t_1 par exemple, et donc jouer sur f_s (rôle de la colophane). Comme quoi, les frottements ne sont pas nécessairement des ennuis.

On a vu que la présence d'aspérité et de rugosité à l'échelle mésoscopique est à l'origine de la dissipation d'énergie due aux frottements secs. On retrouve la même chose lorsqu'on parle de frottements visqueux, mais cette fois c'est la viscosité qui en est à l'origine.

2) Frottements visqueux

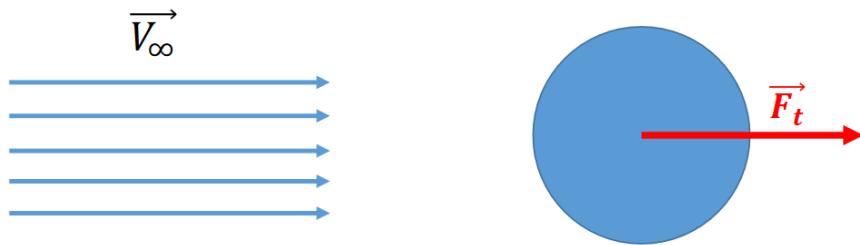
a) Écoulement d'une sphère

La traînée (**voir mécanique des fluides**) est la force qui s'oppose au mouvement d'un solide indéformable se déplaçant dans un fluide.

$|\vec{F}_t| = \frac{1}{2} C_x \rho S v^2$, S est la section transversale, ρ est la masse volumique du fluide, C_x est le coefficient de traînée.

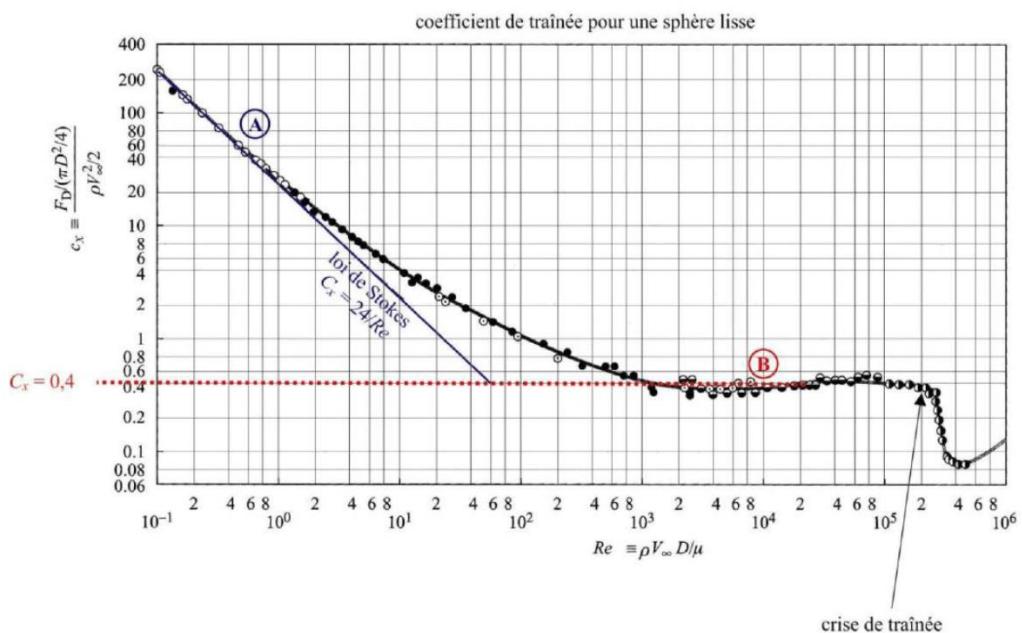
Écoulement d'une sphère :

Force de traînée d'une sphère



Difficile de résoudre analytiquement...on part alors de résultats expérimentaux. Pour un obstacle de forme et d'orientation donnés, $C_x = f(Re)$, avec Re le nombre de Reynolds (**voir mécanique des fluides**).

Evolution du coefficient de traînée avec Re



- Si $Re \ll 1$ (voire $Re < 1$) :

Par analyse dimensionnelle, F_t est proportionnel à ηRv .

Graphiquement, $C_x = \frac{24}{Re}$, avec $Re = \frac{\rho L v}{\eta}$ et $L = 2R$ (diamètre de la sphère)

Ainsi, $\vec{F}_t = -6\pi\eta R\vec{v}$ (régime de Stokes)

- Si $1000 < \text{Re} < 100000$: C_x est constant

On a $\vec{F}_t = \frac{1}{2}C_x\rho S v^2 \vec{u}$, avec $\vec{u} = \frac{\vec{v}}{v}$

Coefficients de traînée constants

Corps 3D	Coefficient de traînée
Sphère	0.4
Cube	1.05
Cube à 45°	0.80
Corps de moindre traînée	0.04

b) Exemple d'application

On considère une bille en acier. Selon le fluide dans lequel elle chute, le type de force de frottements peut changer. Si elle est dans une colonne remplie de glycérol/huile de silicone, Re est faible donc la force de frottements est proportionnelle à la vitesse. Si elle tombe de haut, Re est élevé donc la force de frottements est proportionnelle au carré de la vitesse.

Dans l'huile de silicone : manip : viscosimètre à chute libre

Dans l'air : le PFD donne : $m \frac{dv}{dt} = mg - \frac{1}{2}C_x\rho_{air}Sv^2$

Or, $m = \frac{4}{3}\pi\rho_{acier}R^3$ et $S = \pi R^2$

Donc : $\frac{4R\rho_{acier}R}{3} \frac{dv}{dt} = \frac{4\rho_{acier}Rg}{3} - \frac{1}{2}C_x\rho_{air}v^2$

Ainsi, $\frac{1}{g} \frac{dv}{dt} = 1 - \frac{3C_x\rho_{air}v^2}{8\rho_{acier}Rg}$

On pose $v_0 = \sqrt{\frac{8\rho_{acier}Rg}{3C_x\rho_{air}}}$ et $x = \frac{v}{v_0}$

On a donc : $\frac{dx}{1-x^2} = \frac{gdt}{v_0}$

$\operatorname{arctanh}(x) = \frac{gt}{v_0}$ donc $v(t) = v_0 \tanh\left(\frac{gt}{v_0}\right)$

III Ondes (voir [5], [6], [7])

Partout autour de nous, on observe des phénomènes ondulatoires : propagation d'une onde sonore dans un fluide quand on parle, dans un solide lorsqu'on frappe dans ses mains, la lumière qui nous parvient provenant du Soleil ou d'une simple lampe est une onde électromagnétique. Bref, de nombreux phénomènes physiques peuvent être décrits de manière ondulatoire.

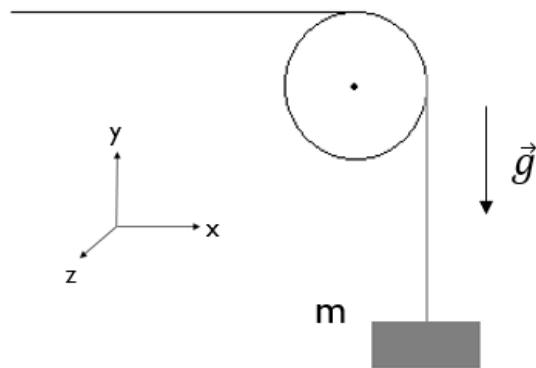
Une onde est le phénomène de transport d'une information/d'une perturbation avec transport d'énergie mais sans transfert de matière.

Une onde est décrite par une grandeur physique variant dans l'espace et dans le temps, ces variations sont régies par une équation de propagation. Nous allons d'abord établir cette équation dans le cas unidimensionnel pour une corde vibrante.

1) Équation de D'Alembert

a) Corde vibrante

On considère une corde tendue (par exemple par une masse), et donc soumise à une tension.

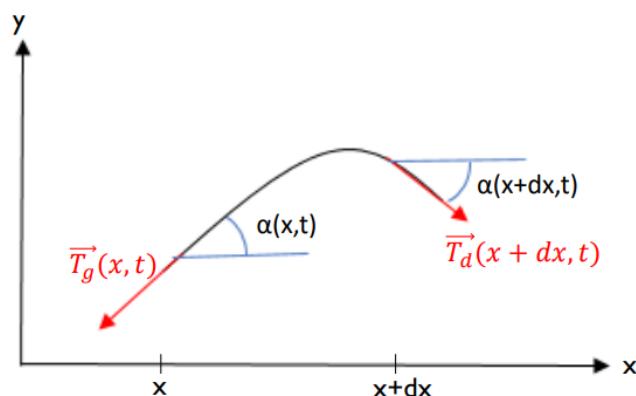


La corde est supposée : -homogène, de masse linéique μ

-sans raideur

On néglige le poids de la corde (corde horizontale au repos).

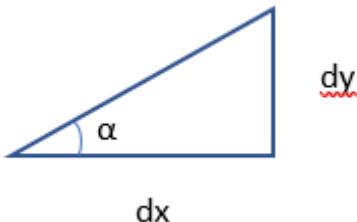
On applique une déformation à la corde :



α est l'angle entre la corde au point x et l'horizontale. On se place dans l'approximation des petits mouvements.

système : portion élémentaire de corde de longueur ds et de masse $dm = \mu ds$

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}$$



$$\frac{\partial y}{\partial x} = \tan(\alpha) \approx \alpha$$

Donc $dm \approx \mu dx$ car $\alpha \ll 1$ rad

référentiel : terrestre, supposé galiléen

bilan des actions mécaniques extérieures : * $\overrightarrow{T_g(x, t)}$

$$*\overrightarrow{T_d(x + dx, t)}$$

D'après le principe des actions réciproques : $\overrightarrow{T_g(x, t)} = -\overrightarrow{T_d(x, t)}$

principe fondamental de la dynamique : $dm \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \overrightarrow{T_d(x + dx, t)} - \overrightarrow{T_d(x, t)}$

On projette sur \vec{e}_x et \vec{e}_y l'équation précédente, et on obtient :

$$\begin{cases} 0 = T(x + dx, t) \cos(\alpha(x + dx, t)) - T(x, t) \cos(\alpha(x, t)) \quad (1) \\ \mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T(x + dx, t) \sin(\alpha(x + dx, t)) - T(x, t) \sin(\alpha(x, t)) \quad (2) \end{cases}$$

D'après (1) : $T(x + dx, t) \cos(\alpha(x + dx, t)) = T(x, t) \cos(\alpha(x, t)) = T_0$

D'après (2) : $\mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = T_0 \tan(\alpha(x + dx, t)) - T_0 \tan(\alpha(x, t)) \approx T_0 \frac{\partial \tan(\alpha)}{\partial x} dx = T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx$

Ainsi, on obtient : $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T_0}{\mu} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$

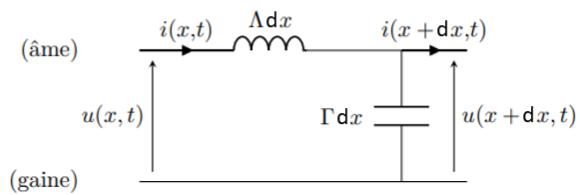
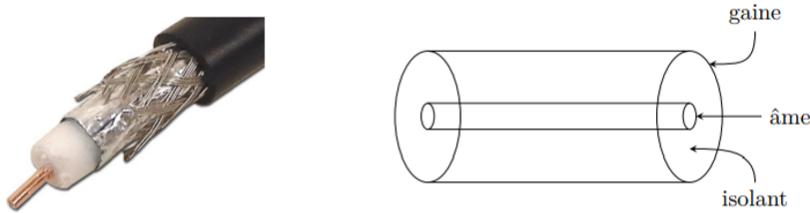
Cette équation est appelée équation de D'Alembert.

On pose $c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$ la célérité des ondes. Pour un piano, $c \approx 300 \text{ m.s}^{-1}$.

b) Câble coaxial

Des ondes électromagnétiques se propagent dans le câble. On peut envisager le modèle suivant :

Modèle du câble coaxial



Loi des noeuds :

$$i(x, t) = i(x + dx, t) + \Gamma dx \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\rightarrow \frac{\partial i}{\partial x} = -\Gamma \frac{\partial u}{\partial t}$$

Lois des mailles :

$$u(x, t) = u(x + dx, t) + \Lambda dx \frac{\partial i}{\partial t}$$

$$\rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = -\Lambda \frac{\partial i}{\partial t}$$

Équation de d'Alembert :

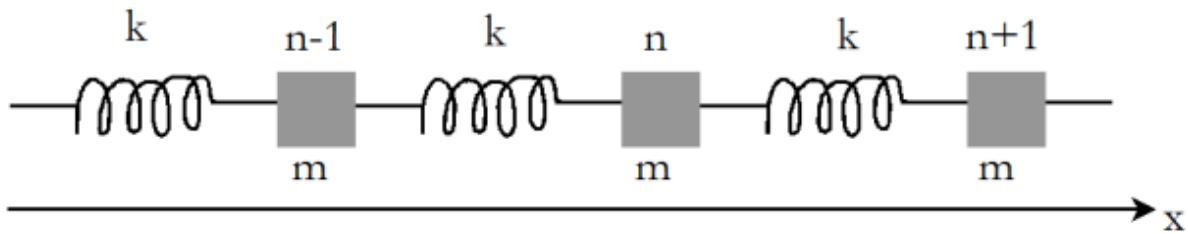
$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}, \text{ avec } c = \frac{1}{\sqrt{\Gamma \Lambda}} \sim 2.10^8 m.s^{-1}$$

c) Chaîne d'oscillateurs (À COMPLÉTER)

On considère qu'un solide est constitué d'une chaîne infinie d'atomes ponctuels, de masse m , reliés entre eux par des ressorts de raideur k et de longueur à vide a . La chaîne d'atomes couplés élastiquement par des ressorts constitue une modélisation simple pour décrire la propagation de petits mouvements vibratoires dans un solide, c'est-à-dire la propagation du son dans un solide. Ce dernier est en effet constitué d'empilements réguliers d'atomes. Les forces rappelant un atome vers sa position d'équilibre peuvent être modélisées par un rappel élastique, dans la mesure où les amplitudes des vibrations des atomes sont faibles (on suppose ici que le solide est homogène et isotrope).

Le mouvement de l'ensemble se fait sans frottements le long de l'axe (Ox). Les atomes se déplacent légèrement autour de leurs positions d'équilibres respectives, que l'on peut repérer sous la forme :

$$x_{n,eq} = na.$$



d) Ondes élastiques (À COMPLÉTER)

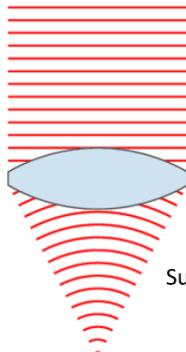
2) Solutions de l'équation de D'Alembert

a) Ondes planes

Surface d'onde : surface continue de l'espace dont tous les points sont dans le même état vibratoire, c'est-à-dire que le champ décrivant la vibration (champ de pression, champ électromagnétique, champ de vitesses, ...) prend la même valeur en tout point de la surface.

Une onde est dite plane si ses surfaces d'ondes sont des plans parallèles entre eux. Ces plans sont appelés plans d'ondes. Une onde plane ne dépend alors que d'une seule coordonnée cartésienne spatiale.

Exemple de surface d'ondes



Surface d'onde plane (rayons lumineux parallèles)

Surface d'onde sphérique (rayons lumineux convergent au foyer de la lentille)



Ondes à la surface de l'eau

b) Ondes planes progressives

onde progressive : phénomène de propagation d'une perturbation dans un milieu matériel.

Pour une onde progressive, l'espace et le temps sont couplés. On peut poser $u = x - ct$ et $v = x + ct$ et montrer que $\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} = 0$.

On pose $u=x-ct$ et $v=x+ct$

$$*\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = 1 \text{ et } \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial v}{\partial t} = -c$$

$$*\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} = c \left(\frac{\partial}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial u} \right)$$

$$*\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v} \right) = \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial u \partial v}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = c \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial u} \right) = c^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} - 2 \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \right)$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} = 0}$$

On cherche des solutions de la forme : $y(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct)$, f désigne une onde progressive se propageant selon les x croissants, g désigne une onde progressive se déplaçant selon les x décroissants.

Une onde progressive se propage à la célérité c sans déformation.

Attention ! y n'a aucune raison d'être une onde progressive !

c) Ondes planes progressives harmoniques

Une onde plane progressive harmonique est une onde plane, progressive dont la dépendance spatio-temporelle est sinusoïdale.

$y(x,t) = y_0 \cos(\omega t - kx + \varphi)$ ou $y(x,t) = y_0 \cos(\omega t + kx + \varphi)$, ω est la pulsation, k est le vecteur d'onde.

En injectant dans l'équation de D'Alembert, on obtient : $\omega^2 = k^2 c^2$, soit $\omega = kc$. Cette relation est appelée relation de dispersion.

L'équation d'un plan d'onde est : $\omega t - kx + \varphi = cste \Rightarrow x = v_\varphi t + x_0$, avec $v_\varphi = \frac{\omega}{k}$ la vitesse de phase, ici, $v_\varphi = c$.

On définit aussi la vitesse de groupe : $v_g = \frac{d\omega}{dk}$

Même si ce modèle est pratique pour décrire un grand nombre de situations, certains phénomènes ondulatoires n'obéissent pas à l'équation de D'Alembert. En outre, les conditions aux limites peuvent avoir une influence sur la structure de l'onde. Nous verrons plus loin les limites de l'OPPH.

d) Ondes stationnaires

Pour une onde stationnaire, l'espace et le temps sont découplés : $y(x, t) = f(x)g(t)$

En injectant dans l'équation de D'Alembert, on obtient : $f(x) \frac{d^2g}{dt^2} = c^2 g(t) \frac{d^2f}{dx^2}$

$\Rightarrow \frac{1}{g} \frac{d^2g}{dt^2} = \frac{c^2}{f} \frac{d^2f}{dx^2} = K = \text{cste}$ car les deux membres ne dépendent que du temps ou de l'espace.

$$\Rightarrow \frac{d^2g}{dt^2} = Kg(t)$$

*Si $K > 0$, $g(t) = Ae^{\sqrt{K}t} + Be^{-\sqrt{K}t}$

On prend $A = 0$ sinon g diverge. Quand t tend vers l'infini, g tend vers 0, mais ce n'est pas ce qu'on observe, cette solution n'est donc pas pertinente.

*Si $K = 0$, $g(t) = At + B$, on doit prendre $A = 0$, donc $g(t) = B$. Cette solution n'est pas plus pertinente que la précédente.

*Si $K < 0$, on reconnaît un oscillateur harmonique, on pose $K' = -K$.

$$\frac{d^2g}{dt^2} + K'g(t) = 0$$

Donc $g(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, avec $\omega = \sqrt{K'}$

De même, $f(x) = B\cos(kx + \psi)$, avec $k = \frac{\sqrt{K'}}{c}$

Finalement, $y(x, t) = y_0 \cos(\omega t + \varphi) \cos(kx + \psi)$

On remarque qu'il existe des x pour lesquels la vibration est nulle pour tout t :

$\Rightarrow kx_n + \psi = (n + \frac{1}{2})\pi$, n est un entier relatif. Ces points sont appelés nœuds de vibration.

Entre 2 nœuds successifs, $\Delta x = \frac{\pi}{k} = \frac{\lambda}{2}$

De même, il existe des x pour lesquels l'amplitude est maximale pour tout t :

$\Rightarrow kx_n + \psi = n\pi$, n est un entier relatif. Ces points sont appelés ventres de vibration.

Entre 2 ventres successifs, $\Delta x = \frac{\pi}{k} = \frac{\lambda}{2}$



Un ventre et un nœud sont séparés de $\frac{\lambda}{4}$. La longueur de la corde est $L = \frac{n\lambda}{2}$.

La sortie est fixée en $x=L$, en $x=0 : y(0,t)=a \cos(\omega t)$

$$y(x,t)=(\alpha \cos(kx) + \beta \sin(kx))(\gamma \cos(\omega t) + \delta \sin(\omega t))$$

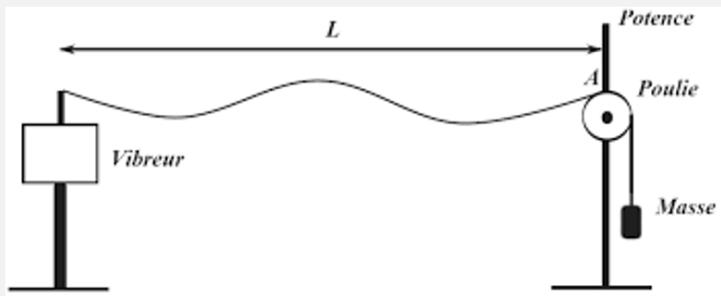
Pour tout t , $y(0,t)=\alpha \gamma \cos(\omega t) + \alpha \delta \sin(\omega t)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha \gamma = a \\ \alpha \delta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha \gamma = a \\ \delta = 0 \end{cases}$$

$$y(L,t)=0=(a \cos(kL) + \beta \gamma \sin(kL)) \cos(\omega t)$$

$$\Rightarrow \beta \gamma = \frac{a \cos(kL)}{\sin(kL)}$$

$$\Rightarrow y(x,t) = \frac{a \cos(\omega t)}{\sin(kL)} \sin(k(L-x))$$



Si $\sin(kL) = 0$, c'est-à-dire $k_n L = n\pi$, y diverge. En réalité on ne l'observe pas car il y a des non-linéarités (inelasticité des matériaux) et notre modèle ne les prend pas en compte, la corde n'est pas élastique. On observe en fait une résonance.

Lien avec les ondes progressives harmoniques :

$$y(x,t) = y_0 \cos(\omega t + \varphi) \cos(kx + \psi) = \frac{y_0}{2} (\cos(\omega t + kx + \varphi + \psi) + \cos(\omega t - kx + \varphi - \psi))$$

⇒ Toute onde stationnaire peut être décomposée en somme de 2 ondes progressives harmoniques de même amplitude.

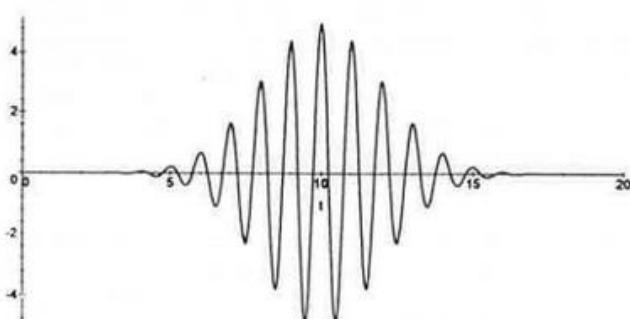
Si on part d'une OPH : $A \cos(\omega t - kx) = A \cos(\omega t) \cos(kx) + A \sin(\omega t) \sin(kx)$

Les OPH d'une part ou les ondes stationnaires d'autre part forment une base de solutions de l'équation de D'Alembert.

3) Limite de l'OPPH

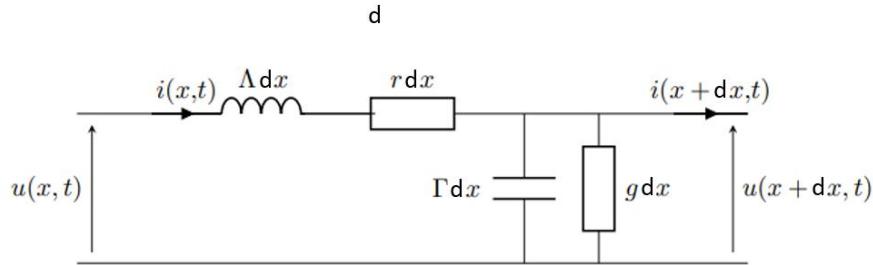
L'OPPH n'est pas physique car elle possède une extension spatiale et temporelle infinie. Une onde réelle est la superposition d'OPPH, elle se propage en se déformant.

paquet d'onde : superposition d'OPPH dont la fréquence varie continûment entre $f_0 - \frac{\Delta f}{2}$ et $f_0 + \frac{\Delta f}{2}$.
On parle d'onde plane dont le spectre est centré sur f_0 et de largeur Δf .



v_g définit la vitesse moyenne de propagation d'un paquet d'ondes (vitesse de transport de l'énergie, de l'information).

Modèle du câble coaxial avec pertes



$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\Lambda g + \Gamma r) \frac{\partial u}{\partial t} + r g u . \quad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 + i \frac{g}{\omega \Gamma} \right) \left(1 + i \frac{r}{\Lambda \omega} \right)$$

Il existe une condition sur la valeurs des différents composants du câble (condition d'Heaviside) pour laquelle il y a propagation avec atténuation mais sans dispersion : $\Lambda g = \Gamma r$.

4) Dispersion et absorption

a) Corde vibrante amortie

On reprend le modèle de la corde vibrante et on ajoute un terme d'amortissement : $-\lambda dx \frac{\partial y}{\partial t} \vec{e}_y$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = b \frac{\partial y}{\partial t}, \text{ avec } b = \frac{\lambda}{T_0} > 0$$

On cherche des solutions de la forme : $s(x, t) = \underline{s}_0 e^{i(\omega t - kx)}$

On obtient la relation de dispersion : $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - i\omega b$

Il n'existe pas de solution réelle pour la relation précédente. Mais si on prend k complexe alors des solutions sont possibles. Il ne s'agit plus d'OPPH, mais comme leur structure est proche, on parlera d'ondes presque planes progressives harmoniques.

$\underline{k} = k'(\omega) + ik''(\omega)$, k' et k'' sont réels.

$$s(x, t) = \underline{s}_0 e^{i(\omega t - kx)} = \underline{s}_0 e^{k'' x} e^{i(\omega t - k' x)}$$

$$\Rightarrow s(x, t) = s_0 e^{k'' x} \cos(\omega t - k' x)$$

La partie réelle de \underline{k} agit sur la propagation, la partie imaginaire de \underline{k} agit sur la dépendance spatiale de l'amplitude de l'onde.

Pour une prise en compte de phénomènes dissipatifs, on doit avoir une atténuation de l'onde dans le sens de propagation : $k'' < 0$.

La vitesse de phase s'écrit : $v_\varphi = \frac{\omega}{Re(k)} = \frac{\omega}{k'}$

A priori, v_φ dépend de $\omega \rightarrow$ deux ondes de pulsations différentes ne se propagent pas à la même vitesse : c'est le phénomène de dispersion.

Un milieu est dit dispersif si v_φ dépend de ω

Ex : décomposition de la lumière blanche par un prisme

L'angle de réfraction dans un prisme dépend de l'indice $n = \frac{c}{v_\varphi}$, donc n dépend de λ

Le terme $e^{k''x}$ décrit un amortissement ou une amplification selon le signe de k'' et le sens de propagation. La situation la plus fréquemment rencontrée est celle de l'amortissement : on dit alors que le milieu est absorbant. On peut caractériser l'amortissement par une distance caractéristique : $\delta = \frac{1}{|k''|}$

b) Propagation d'une onde quelconque

Une onde réelle est la superposition d'OPPH, elle se propage en se déformant \rightarrow par absorption, par dispersion.

On néglige l'influence de l'absorption.

- Propagation de deux ondes de fréquences voisines

$$\omega_1 = \omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2} \text{ et } \omega_2 = \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}, \Delta\omega \ll \omega_0$$

$$k_1 = k(\omega_1) = k\left(\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}\right) = k(\omega_0) - \frac{\Delta\omega}{2} \frac{dk}{d\omega}_{\omega_0}$$

$$k_2 = k(\omega_2) = k\left(\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}\right) = k(\omega_0) + \frac{\Delta\omega}{2} \frac{dk}{d\omega}_{\omega_0}$$

$$k_1 = k_0 - \frac{\Delta k}{2} \text{ et } k_2 = k_0 + \frac{\Delta k}{2}, \Delta k \ll k_0$$

$$s(t) = s_0 \cos(\omega_1 t - k_1 x) + s_0 \cos(\omega_2 t - k_2 x) = 2s_0 \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x\right) \cos(\omega_0 t - k_0 x)$$

On note que l'enveloppe se propage à $v_\varphi = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$

- Généralisation : paquet d'ondes (voir plus haut)

Plus le milieu est dispersif, plus le paquet d'ondes s'étale. Ce comportement implique une limitation pour la propagation d'informations. On retient en général qu'il faut que le premier minimum d'un signal soit séparé du maximum du précédent pour que les signaux soient séparables.

Pour un milieu faiblement dispersif, un paquet d'ondes se propage à la vitesse v_g , dite vitesse de groupe, définie par : $v_g = \frac{d\omega}{dk}_{\omega_0, k_0}$

v_g définit la vitesse moyenne de propagation d'un paquet d'ondes. Elle représente une information ou une forme d'énergie.

Pour un milieu non dispersif, $v_g = v_\varphi = c$

c) Dispersion dans un plasma (**voir électromagnétisme**)

Un plasma est un gaz dont les atomes sont ionisés : il est constitué de cation et d'électrons.

Au repos, un plasma est localement neutre. Les atomes ont une masse M , les électrons ont une masse m , $m \ll M$. Les cations sont supposés quasi-immobiles.

On étudie la propagation d'une onde électromagnétique presque plane progressive harmonique, se propageant selon Oz, la polarisation est selon Ox.

- $\operatorname{div}(\vec{E}(M, t)) = -i\vec{k} \cdot \vec{E}(M, t) = 0$ (Maxwell-Gauss)
- $\rho = 0$
- $\rho_e = -\rho_c$

On suppose les électrons non relativistes. On néglige la force magnétique devant la force électrique.

On applique le PFD à un électron : $m \frac{d\vec{v}_e}{dt} = -e\vec{E} \rightarrow i\omega \vec{v}_e = -e\vec{E}$

La densité de courants s'écrit : $\vec{j} = -n_e e \vec{v}_e = \frac{n_e e^2}{im\omega} \vec{E}$, n_e est la densité particulaire d'électrons dans le plasma au repos.

D'après la loi d'Ohm locale : $\vec{j} = \underline{\gamma} \vec{E}$

Donc la conductivité s'écrit : $\underline{\gamma} = \frac{n_e e^2}{im\omega}$

Comme $\underline{\gamma}$ est imaginaire pur, \vec{j} et \vec{E} sont en quadrature → la puissance moyenne cédée aux charges est nulle.

Équations de Maxwell et conséquences :

Maxwell-Gauss : $-i\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$

Maxwell-Faraday : $-i\vec{k} \wedge \vec{E} = -i\omega \vec{B}$

Maxwell-Thomson : $i - \vec{k} \cdot \vec{B} = 0$

Maxwell-Ampère : $-i\vec{k} \wedge \vec{B} = \frac{i\omega}{c^2} \vec{E} + \mu_0 \vec{j} \rightarrow -i\vec{k} \wedge \vec{B} = (\frac{i\omega}{c^2} + \mu_0 \underline{\gamma}) \vec{E}$

L'onde est transverse électrique et transverse magnétique.

La relation de dispersion s'écrit : $\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\mu_0 n_e e^2}{m}$

On introduit la pulsation plasma : $\omega_p = \sqrt{\frac{n_e e^2}{m \epsilon_0}}$, $\underline{k}^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$

Le milieu est dispersif.

$$\text{Si } \underline{k}^2 < 0 : \underline{k} = -\frac{i}{\delta} \text{ avec } \delta = \sqrt{\frac{c^2}{\omega_p^2 - \omega^2}}$$

Le champ électromagnétique dans le plasma est une onde stationnaire amortie sur la distance caractéristique δ : on parle d'onde évanescante.

Les fréquences inférieures à f_p ne peuvent pas se propager.

$$\text{Si } \underline{k}^2 > 0 : k = \pm \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}} \text{ (propagation car } k \text{ est réel)}$$

$$\text{La vitesse de phase s'écrit : } v_\phi = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}} > c$$

La vitesse de phase est supérieure à c , vitesse limite imposée par la théorie de la relativité à tout transport d'information. Il n'y a là aucun paradoxe puisque qu'une OPPH seule n'a pas d'existence physique.

$$\text{La vitesse de groupe s'écrit : } v_g = c \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} < c$$

La vitesse de groupe est inférieure à c : en effet un paquet d'ondes possède une existence physique, et sa modulation transporte une information.

On note que $v_\phi v_g = c^2$

IV Effet Doppler (voir [7] à [11])

L'effet Doppler traduit le décalage en fréquence d'une onde quand celle-ci se rapproche ou s'éloigne de nous. Nous le constatons au quotidien quand une voiture klaxonnant s'approche de nous (ou quand il s'agit d'une voiture de police ou d'un camion de pompier). Ce principe a été énoncé par Christian Doppler en 1842, puis démontré par Buys-Ballot en 1845 avec une expérience où des trompettistes jouaient dans un train en mouvement. En 1848, Fizeau met en évidence l'effet Doppler pour les ondes lumineuses, découverte qui servira par la suite à démontrer l'expansion de l'univers. Dans cette leçon nous allons démontrer dans des cas simples l'effet Doppler puis nous étudierons des applications concrètes.

1) Calcul de fréquence

a) Cas d'un émetteur fixe et d'un récepteur en mouvement

L'émetteur immobile émet un son de fréquence constante f_e (en Hz). Période T_e .
 c : vitesse du son (en m/s).
 V_r : vitesse du récepteur (en m/s).

Plaçons nous à l'instant t où le récepteur perçoit le 1^{er} front d'onde.

La distance séparant les 2 fronts d'onde est :

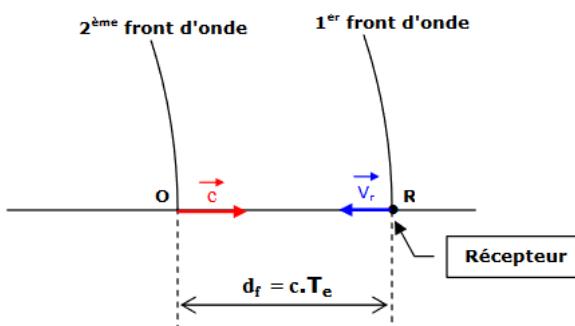
$$d_f = c \cdot T_e$$

En plaçant l'origine au point O, l'équation horaire du 2^{ème} front d'onde (qui va vers le récepteur) est :

$$d = c \cdot t$$

l'équation horaire du récepteur (qui va vers le 2^{ème} front d'onde) est :

$$d = d_f - V_r \cdot t = c \cdot T_e - V_r \cdot t$$



Le récepteur rencontrera le 2^{ème} front d'onde à l'instant t tel que :

$$c \cdot t = c \cdot T_e - V_r \cdot t \Rightarrow c \cdot t + V_r \cdot t = c \cdot T_e \Rightarrow (c + V_r) \cdot t = c \cdot T_e \Rightarrow t = \frac{c}{c + V_r} \cdot T_e$$

Ce temps est la période apparente T du son.

Le son perçu par l'observateur a donc une fréquence apparente d'expression :

$$f = \frac{c + V_r}{c} \cdot f_e$$

$\frac{c + V_r}{c} > 1$ donc $f > f_e$. L'observateur perçoit un son plus aigu.

Remarque : si l'émetteur est en mouvement et le récepteur est fixe, alors $f = \frac{c - V_r}{c} f_e$, donc $f < f_e$, le son est plus grave.

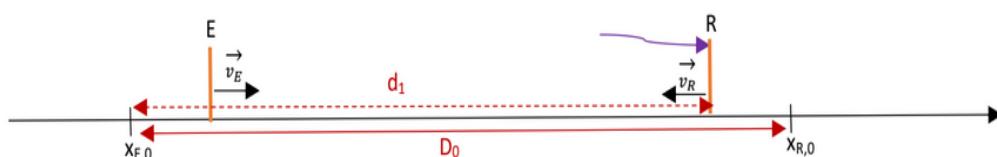
b) Généralisation : émetteur et récepteur en mouvement

Au tableau : Démo

- A $t_1=0$, émission de l'onde.



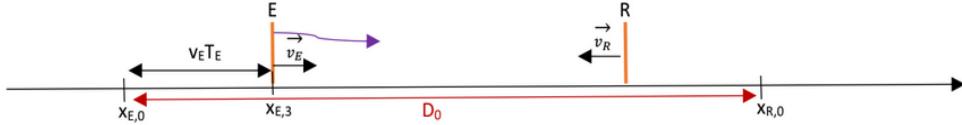
- A t_2 réception de l'onde.



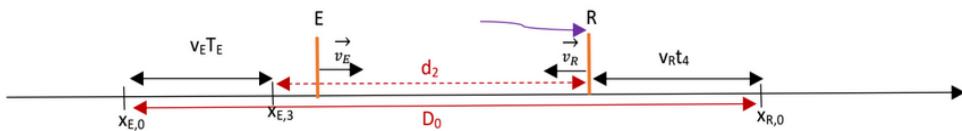
On note d_1 la distance parcourue par l'onde. Entre t_2 et t_1 R a parcouru une distance $v_R t_2$.

Soit $d_1 = c * t_2$ et $d_1 = D_0 - v_R t_2$ donc $t_2 = \frac{D_0}{c + v_R}$ (1)

- Emission à $t_3 = T_E$



- Réception à t_4



On note d_2 la distance parcourue par l'onde entre T_E et t_4 .

Soit $d_2 = c(t_4 - T_E)$ et $d_2 = D_0 - v_R t_4 - v_E T_E$ alors :

$$t_4 = \frac{D_0}{c + v_R} + \frac{T_E(c - v_E)}{c + v_R} \quad (2)$$

On obtient donc lorsque émetteur et récepteur s'approche :

$$T_R = t_4 - t_2 = (2) - (1)$$

$$T_R = T_E \frac{c - v_E}{c + v_R}$$

$$f_R = f_E \frac{c + v_R}{c - v_E}$$

Vitesse en m/s et fréquence en Hz.

Si on fixe comme sens positif le sens émetteur vers récepteur et qu'on considère V_R et V_E comme valeur algébrique on peut résumer le résultat avec une seule formule.

$$f_R = f_E \frac{c - \bar{v}_R}{c - \bar{v}_E}$$

On peut ainsi retrouver tous les cas possibles (faire pour un exemple).

$$f_R = f_e * \frac{c - v_r}{c - v_e}$$

En supposant l'émetteur où le récepteur fixe, donc une des valeurs de vitesse nulle, on peut obtenir l'autre valeur de vitesse assez facilement.

Ex : $v_e = 0$. $v_r = c * \frac{f_e - f_r}{f_e}$

2) Applications

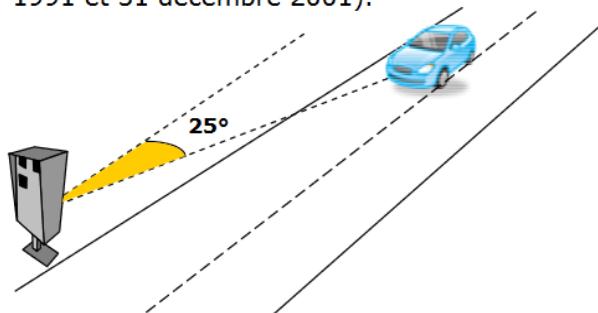
a) Principe du radar routier

Radar = RAdio Detection And Ranging = Détection et estimation de distance par onde radio.

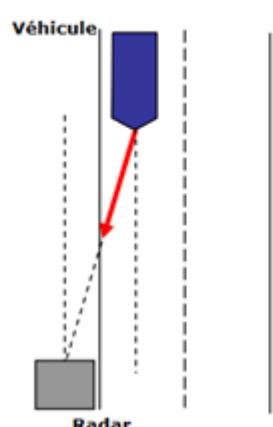
Une antenne émet une onde électromagnétique dans le domaine des ondes radio, qui se réfléchit sur les véhicules.

Par effet Doppler, la fréquence de l'onde réfléchie diffère de celle de l'onde incidente.

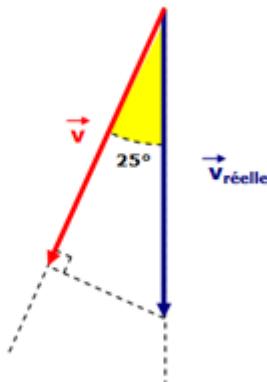
Pour que les mesures réalisées par les radars (fixes ou mobiles) soient exactes, ceux-ci doivent être réglés à 25° par rapport à l'axe du déplacement (arrêtés du 7 janvier 1991 et 31 décembre 2001).



☞ D'une part, l'onde réceptionnée a parcouru un "aller-retour", il est donc nécessaire d'introduire le coefficient $\frac{1}{2}$.



☞ D'autre part, La vitesse v ainsi calculée est la vitesse radiale. La vitesse réelle $v_{réelle}$ est donc telle que :
 $v = v_{réelle} \cdot \cos 25$



$$\text{Nous aboutissons donc à : } v_{réelle} = \frac{c(f_e - f)}{2 \cdot f \cdot \cos 25}$$

De plus :

Lorsque la cible se rapproche du radar, $f > f_e$. La vitesse $v_{réelle}$ est négative (normal, la cible se déplace en sens inverse de l'onde).

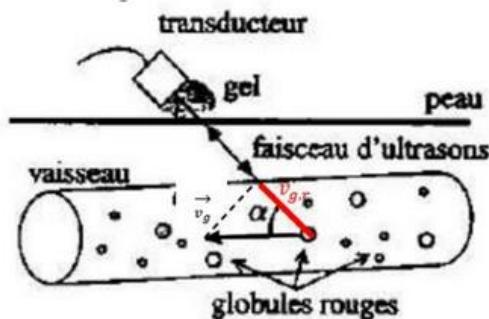
Pour simplifier les calculs selon les situations, nous poserons $\Delta f = |f_e - f|$

$$v_{réelle} = \frac{c \cdot \Delta f}{2 \cdot f \cdot \cos 25}$$

b) Échographie

Même principe que le radar mais pour déterminer la vitesse d'un écoulement sanguin.

Le transducteur émet un faisceau d'ultrasons de fréquence $f_0 = 3\text{MHz}$ et on considère que la célérité des ondes émises dans tout le milieu biologique est $c = 1500 \text{ m.s}^{-1}$.



Avec le même calcul que précédemment on obtient :

$$v_g = c \frac{(f_1 - f_0)}{2\cos(\alpha)f_0}$$

AN : Avec un angle de 10° et $f_1 - f_0 = 1,2 \text{ kHz}$ $f_0 = 3\text{MHz}$ et $c = 1500 \text{ m/s}$

$v_g = 0,3 \text{ m.s}^{-1}$ => correspond à la vitesse du sang dans les artères qui se trouve entre autres dans la carotide. Dans le corps, cette vitesse peut varier entre $0,1$ et $0,5 \text{ m.s}^{-1}$.

Échographie carotidienne : on détermine la vitesse du sang à différents endroits des artères de la carotide, car si un vaisseau présente un rétrécissement, alors la vitesse des globules rouges va augmenter.

D'autres applications existent comme l'écholocation de certains animaux, les radars météorologiques, les sonars des bateaux... L'effet Doppler est également utilisé en astronomie, il permet de prouver que l'Univers est en expansion, mettant en évidence le « redshift » (décalage vers le rouge).

V Ondes : adaptation d'impédance (voir [7], [16], [17])

L'adaptation d'impédance est une notion générale en physique, en particulier en physique des ondes. A chaque fois qu'une information est transmise sur une ligne de transmission, une onde de tension (et de courant) se propage dans le câble, typiquement dans un câble coaxial. Il existe une relation linéaire entre la tension et le courant : $U = ZI$, avec $Z = 50\Omega$ pour le câble coaxial. Cette onde arrive sur un récepteur avec une certaine impédance. Si cette impédance est différente de celle du câble, on observe une réflexion.

Expérience : GBF + oscilloscope (4 voies) + câble coaxial de 100 m : faire une adaptation d'impédance (régler impédance de sortie de l'oscilloscope)

L'adaptation d'impédance consiste simplement à avoir la même impédance que l'impédance caractéristique du câble.

1) Notion d'impédance en physique des ondes

a) Définition générale

L'impédance d'un système est définie comme le rapport d'une grandeur caractérisant une excitation à laquelle il est soumis et d'une grandeur caractérisant sa réponse.

Une onde est la propagation d'une perturbation à travers un milieu. Elle ne peut se propager que s'il existe des grandeurs couplées.

Ex : pour le câble coaxial : $u(x, t)$ et $i(x, t)$

Le couplage intervient par une relation de structure. L'impédance Z est le rapport des grandeurs couplées : $Z = \frac{u}{i}$ ici.

On peut montrer que ces deux paramètres suffisent à caractériser la propagation d'un milieu donné.

A partir de cette définition générale, on va maintenant s'intéresser à des cas particuliers.

b) Ondes acoustiques (**voir mécanique des fluides**)

On se place dans le cadre de l'approximation acoustique : on considère que la surpression est petite devant la pression du fluide au repos, et la vitesse est également petite.

$$\text{PFD} : \mu_0 \frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\text{Conservation de la masse} : \frac{\partial \mu}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

$$\text{Équation thermodynamique} : \mu = \mu_0 \chi_s p$$

$$\rightarrow \text{Équation de D'Alembert} : \Delta p = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \text{ avec } c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \chi_s}}$$

Relation de structure : on prend l'équation d'Euler

Les ondes progressives forment une base de solutions de l'équation de D'Alembert :

On choisit des ondes se propageant selon x croissants, on a donc $p(x, t) = F(x - ct)$ et $v(x, t) = G(x - ct)$
 $\rightarrow \mu_0 c G'(x - ct) = F'(x - ct)$

$$\rightarrow \mu_0 c G(x - ct) = F(x - ct) + h(t)$$

$$\text{Or } \frac{d^2 h}{dt^2} = 0 \text{ donc } h(t) = At + B, A = 0 \text{ sinon } h \text{ diverge}$$

On peut prendre $B = 0$, ainsi $h(t) = 0$

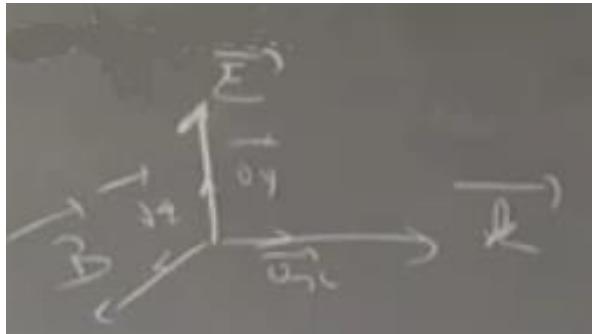
$$\text{Ainsi, } Z = \frac{p(x, t)}{v(x, t)} = \mu_0 c$$

c) Ondes lumineuses (**voir électromagnétisme**)

On se place dans un milieu transparent : le milieu a les mêmes propriétés que le vide mais on remplace ϵ_0 par $\epsilon_0\epsilon_r$, avec $\epsilon_r = n^2$. Un milieu est qualifié de transparent lorsque l'énergie transportée par les ondes qui le traversent n'y est pas absorbée.

On choisit une onde polarisée sur une direction transverse à la direction de propagation de l'onde :

$$\underline{\vec{E}} = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y$$



Ici, la relation de structure est l'équation de Maxwell-Faraday

$$\text{En complexe : } \vec{E} = E_0 e^{j(\omega t - kx)} \vec{e}_y$$

$$\text{Donc } -j\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}} \vec{e}_y = -j\omega \underline{\vec{B}} \vec{e}_z \rightarrow \underline{k}\underline{E} = \omega \underline{B}$$

$$\frac{\underline{E}}{\underline{B}} = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n} = Z$$

$$\text{En fait, } Z = \frac{E}{H} = \frac{\mu_0 c}{n}$$

L'intérêt de l'impédance est de regarder ce qui se passe quand on change de milieu. A l'interface entre deux milieux d'impédances caractéristiques différentes, les ondes sont réfléchies. L'adaptation d'impédance consiste à minimiser cette réflexion en prenant des milieux successifs ayant des impédances relativement proches.

2) Ondes à une interface

a) Coefficient de réflexion : ondes acoustiques (**voir mécanique des fluides**)

On considère deux milieux d'impédances respectives Z_1 et Z_2 . On considère une onde incidente, en partie transmise et en partie réfléchie.

$$p_i(x, t) = p_i^0 e^{j(\omega t - kx)} \text{ et } v_i = v_i^0 e^{j(\omega t - kx)} = \frac{p_i(x, t)}{Z_1} \text{ (propagation selon les x croissants)}$$

$$\text{Pour l'onde réfléchie : } p_r(x, t) = r p_i^0 e^{j(\omega t + kx)} \text{ et } v_r = \frac{-p_r(x, t)}{Z_1} \text{ (propagation selon les x décroissants)}$$

$$\text{Pour l'onde transmise : } p_t(x, t) = t p_i^0 e^{j(\omega t - kx)} \text{ et } v_t = \frac{p_t(x, t)}{Z_2}$$

La continuité de la pression s'obtient par un bilan des forces (de pression) en considérant que le système a une masse nulle : $p_i(0, t) + p_r(0, t) = p_t(0, t) \rightarrow 1 + r = t$

La continuité de la vitesse est donnée par les conditions aux limites en considérant un fluide parfait, on a donc : $v_i(0, t) + v_r(0, t) = v_t(0, t)$

$$Z_1 v_i(0, t) - Z_1 r v_i(0, t) = Z_2 t v_i(0, t) \rightarrow 1 - r = \frac{Z_2}{Z_1} t$$

On obtient ainsi : $r = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}$ et $t = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}$ (coefficients de réflexion et de transmission en amplitude)

On cherche maintenant les coefficients de réflexion en intensité.

Ces coefficients sont définis avec le vecteur de Poynting, déjà vu en électromagnétisme (pour rappel, $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$). On définit de même un vecteur de Poynting acoustique, qui s'écrit : $\vec{\Pi} = p \vec{v}$

Ainsi, on a : $R = \frac{\langle \vec{\Pi}_r \rangle}{\langle \vec{\Pi}_i \rangle}$ et $T = \frac{\langle \vec{\Pi}_t \rangle}{\langle \vec{\Pi}_i \rangle}$

$$\text{Donc, } R = \frac{|p_r v_r|}{|p_i v_i|} = r^2 = \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \right)^2 \text{ et } T = \frac{|p_t v_t|}{|p_i v_i|} = \frac{Z_1}{Z_2} t^2 = \frac{4Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2}$$

b) Coefficient de réflexion : ondes lumineuses

On considère deux milieux d'indices optiques respectifs n_1 et n_2 , on a $Z_i = \frac{\mu_0 c}{n_i}$

Ici, le milieu est non magnétique et non chargé (il a à peu près les mêmes propriétés que le vide), les champs électrique et magnétique sont donc continus.

Les relations établies précédemment sont exactement les mêmes ici, on aura donc :

$$r = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}, t = \frac{2n_2}{n_2 + n_1}, R = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \right)^2 \text{ et } T = \frac{4n_1 n_2}{(n_2 + n_1)^2}$$

Exemples : échographie



Le principe est d'envoyer des ondes ultrasonores sur le corps d'un patient, en l'occurrence une future maman, et on va regarder la réflexion de ces ondes pour savoir s'il y a un bébé. Le problème qui se pose est que les ondes doivent traverser la peau, or l'onde doit déjà traverser l'air. Comme pour l'oreille, on peut modéliser l'impédance du corps par de l'eau (plus compliqué en réalité...). Là comme ça, on voit rien, on utilise alors un gel spécial avec une impédance voisine de celle du corps humain, ce qui permet de mieux transmettre l'onde. A l'image, les zones blanches correspondent à des zones ayant une impédance différente de celle de l'eau, que l'on voit donc mieux en réflexion (si l'impédance est la même que celle de l'eau on ne verra rien puisque tout sera transmis).

Autres exemples : oreille ([voir mécanique des fluides](#)), couche anti-reflets ([voir \[17\]](#))

VI Précession ([voir \[3\], \[7\], \[12\], \[13\]](#))

La précession est le nom donné au changement graduel d'orientation de l'axe de rotation d'un objet. Ce mouvement est provoqué lorsqu'on applique un couple à un gyroscope. Il s'agit d'un appareil qui exploite le principe de conservation du moment cinétique. On l'utilise notamment pour le guidage des missiles, en aviation, la station spatiale internationale et le télescope Hubble.

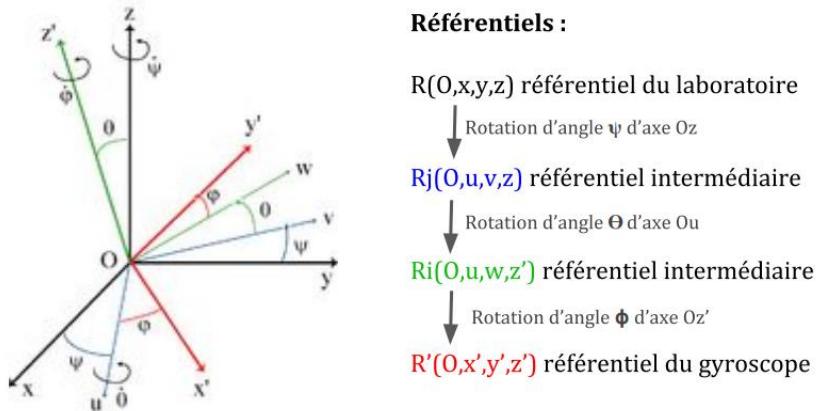
1) Le gyroscope

a) Définitions

Ici, l'axe de rotation propre \vec{e}_z' décrit au cours du temps un cône parcouru à vitesse de rotation $\dot{\psi}$ constante. L'angle θ entre \vec{e}_z' et \vec{e}_z reste fixe.

On étudie un gyroscope équilibré (solide de révolution mobile autour d'un point fixe O) et une masse m. Ce système a une symétrie de révolution autour de (Oz') avec O (point fixe) et G (centre de gravité) tels que $|\overrightarrow{OG}| = l$.

On introduit les angles d'Euler : Ψ (précession), ϕ (rotation propre), θ (nutation) et on se place dans la base $R_i(O, u, v, z')$.



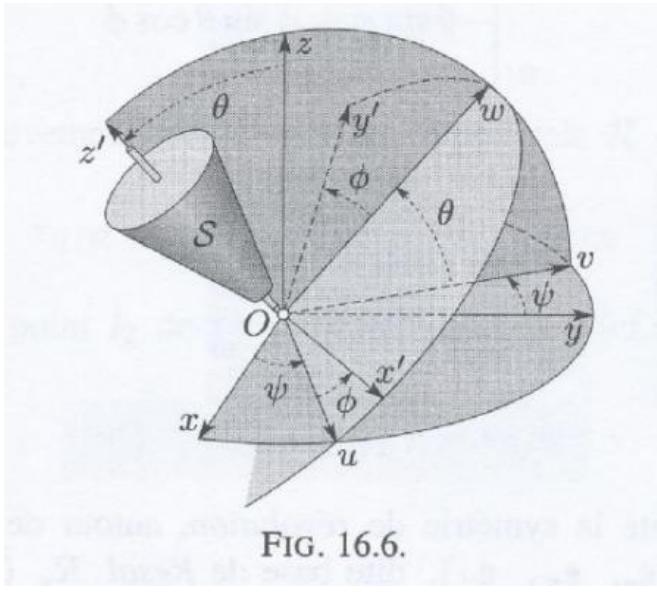
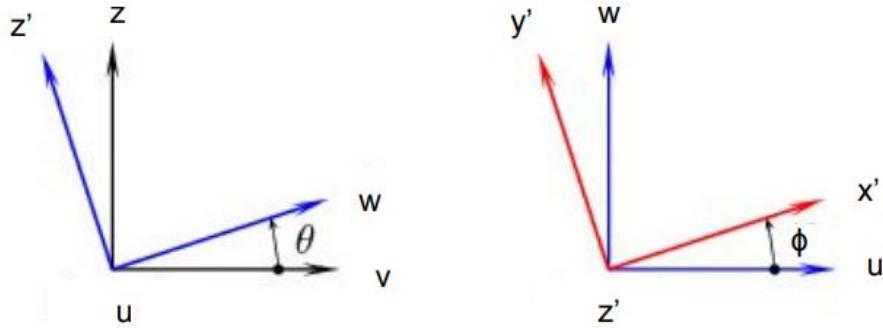


FIG. 16.6.

b) Équation de précession

On cherche $\overrightarrow{\Omega_{R/R'}}$, vitesse de rotation du gyroscope par rapport au référentiel du laboratoire, supposé galiléen, dans la base Ri.

$$\overrightarrow{\Omega_{R/R'}} = \dot{\psi} \vec{e}_z + \dot{\theta} \vec{e}_u + \dot{\phi} \vec{e}_{z'}$$



$$\overrightarrow{\Omega_{R'/R}} = \dot{\theta} \vec{e}_u + \dot{\psi} (\cos(\theta) \vec{e}_z + \sin(\theta) \vec{e}_w) + \dot{\phi} \vec{e}_{z'}$$

$$\overrightarrow{\Omega_{R'/R}} = \overrightarrow{\Omega_{Ri/R}} + \dot{\phi} \vec{e}_{z'}$$

La répartition de la masse est symétrique selon (Oz'), donc la matrice d'inertie est diagonale dans la base Ri et vaut : $\bar{I} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix}_{R_i}$

Le moment cinétique s'écrit donc : $\overrightarrow{L_O} = \bar{I} \overrightarrow{\Omega_{R/R'}} = \begin{pmatrix} I_1 \dot{\theta} \\ I_2 \dot{\psi} \sin(\theta) \\ I_z \dot{\psi} \cos(\theta) + I_z \dot{\phi} \end{pmatrix}_{R_i}$

D'après le théorème du moment cinétique appliqué en O dans R :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} \Big|_R = \frac{d\vec{L}_O}{dt} \Big|_{R_i} + \overrightarrow{\Omega_{R/R'}} \wedge \vec{L}_O = \vec{M}(\vec{P})_O = -l\vec{e}_{z'} \wedge mg\vec{e}_z = mglsin(\theta)\vec{e}_u$$

Projection dans la base Ri du théorème du moment cinétique en O par rapport à R :

$$\begin{aligned} 0 &= I\ddot{\theta} + (I_{z'} - I)\dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta + I_{z'}\dot{\phi}\dot{\psi} \sin \theta - \ell mg \sin \theta, \\ 0 &= I\ddot{\psi} + (2I - I_{z'})\dot{\theta}\dot{\psi} \cos \theta - I_{z'}\dot{\theta}\dot{\phi}, \\ 0 &= \ddot{\psi} \cos \theta - \dot{\theta}\dot{\psi} \sin \theta + \ddot{\phi}. \end{aligned}$$

On fait l'approximation gyroscopique : $\dot{\phi} \gg \dot{\psi}$ et $I_z\dot{\phi} \gg I_2\dot{\psi}, I_1\dot{\theta}$

Ainsi, $\vec{L}_O = I_z\dot{\phi}\vec{e}_{z'}$ avec $\overrightarrow{\Omega_{R/R'}} = \dot{\phi}\vec{e}_{z'}$

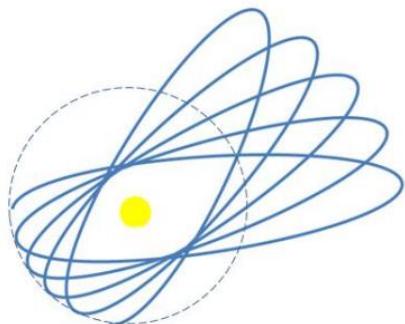
Le système précédent se réécrit : $\begin{cases} I_z\dot{\psi}\dot{\phi} \sin(\theta) - mglsin(\theta) = 0 \\ I_z\dot{\theta}\dot{\phi} = 0 \\ \ddot{\phi} = 0 \end{cases}$

- $\dot{\phi} = \text{cste}$ (vitesse de rotation propre)
- $\theta = \text{cste}$ (angle de nutation, entre Oz et Oz')
- $\dot{\psi} = \frac{mgl}{I_z\dot{\phi}}$ (vitesse de précession)

Le théorème du moment cinétique se réécrit : $\vec{M}(\vec{P})_O = \frac{mgl}{I_z\dot{\phi}}\vec{e}_z \wedge \vec{L}_O$ donc $\frac{d\vec{L}_O}{dt} \Big|_{R_i} = \dot{\psi}\vec{e}_z \wedge \vec{L}_O$ (équation de précession)

c) Précession de Mercure

Dans le système solaire, Mercure connaît une importante précession du périastre, de l'ordre de $560''$. La précession du périastre est le phénomène selon lequel un corps en orbite autour d'un autre voit l'ellipse décrivant sa trajectoire tourner lentement dans son plan orbital. De fait, au cours des révolutions successives, la direction décrite par la droite passant par le corps attracteur et le corps en orbite n'est pas fixe, mais varie lentement.



La précession de Mercure ne peut s'expliquer par l'étude précédente, mais par la relativité générale.

2) Effet gyromagnétique

a) Précession de Larmor

On place un atome d'hydrogène dans un champ magnétique constant \vec{B} . Un modèle classique donne :



Le noyau est considéré immobile ($m_p \gg m_e$)

On peut faire une analogie avec une boucle de courant : le moment magnétique s'écrit $\vec{m} = i\vec{S}$, avec $i = \frac{-qv}{2\pi r}$ et $\vec{S} = \pi r^2 \vec{u}$.

Le moment cinétique orbital de l'électron s'écrit : $\vec{L} = m_e r v \vec{u}$

On a donc : $\vec{\mu} = \frac{-q}{2m_e} \vec{L} = \gamma \vec{L}$, γ est le rapport gyromagnétique

Le théorème du moment cinétique appliqué à l'atome donne : $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}(\vec{F}_{mag}) = \vec{\mu} \wedge \vec{B}$

Donc : $\frac{d\vec{\mu}}{dt} = -\gamma \vec{B} \wedge \vec{\mu}$

Il y a donc une précession du moment magnétique à la pulsation $\omega_L = \gamma B$ (pulsation de Larmor)

Ordre de grandeur : pour $B = 1T$ la fréquence est de 14GHz.

b) Effet Einstein – De Haas

Dans les années 1910, Einstein et De Haas ont mis en évidence le lien entre magnétisme, moment angulaire et spin. Cet effet correspond à la rotation communiquée à un matériau ferromagnétique initialement au repos, suspendu à fil au centre d'un solénoïde parcouru par un courant électrique. On associe à cette rotation un moment cinétique, compensé par un moment de même intensité au cœur du matériau. L'effet Einstein-De Haas met en évidence le fait que le moment cinétique de spin est de même nature que le moment cinétique des solides en rotation, décrit en mécanique classique.

On considère un matériau ferromagnétique soumis à un champ magnétique \vec{B} : $\vec{L}_{mat} = \frac{1}{\gamma} \vec{\mu}_{mat}$

$\vec{L}_{sol} = I \vec{\omega}$ (mouvement des centres de gravité des atomes).

$\vec{L}_{tot} = \vec{L}_{mat} + \vec{L}_{sol}$, d'après le théorème du moment cinétique : $\frac{d\vec{L}_{tot}}{dt} = \vec{\mu}_{mat} \wedge \vec{B} = \vec{0}$ car en moyenne sur tout le matériau, $\vec{\mu}_{mat} \parallel \vec{B}$.

On a donc $\vec{L}_{tot} = cst \vec{e}$, or $\vec{L}_{tot} = \vec{0}$ initialement.

Donc $\vec{L}_{sol} = -\vec{L}_{mat}$

Cet effet confirme l'existence d'un effet gyromagnétique microscopique.

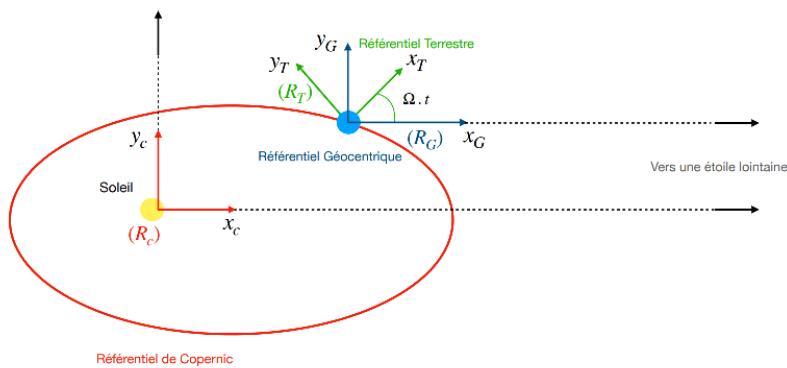
L'effet gyromagnétique microscopique que nous avons mis en évidence est exploité dans la résonance magnétique nucléaire (**voir mécanique quantique**).

Autres types de précession : effet de Sitter, précession de Thomas, précession géodétique, Cardan (voir Perez et BFR)

VII Référentiels terrestre et géocentrique (voir [1], [2], [3])

Quel référentiel pratique pour décrire le mouvement des objets terrestres ?

- référentiel de Copernic : origine au centre de masse du système solaire, axes pointant vers 3 étoiles lointaines supposées fixes
- référentiel géocentrique : origine au centre de masse de la Terre, axes pointant vers 3 étoiles lointaines supposées fixes
- référentiel terrestre : origine au centre de masse de la Terre, axes pointant vers 3 points fixes de la Terre



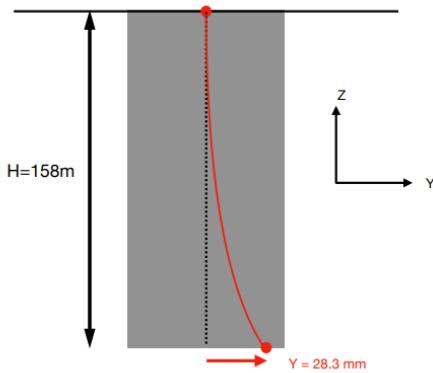
On suppose que le référentiel de Copernic est galiléen, en admettant que cette approximation est valable sur des échelles de temps de l'ordre de 230 millions d'années (période de rotation du Système Solaire dans la galaxie). Cependant, il n'est pas pratique pour décrire le mouvement d'objets à la surface de la Terre, notamment à cause du mouvement de la Terre (dicté par les lois de Kepler, voir plus bas).

Les axes du référentiel géocentrique pointant vers les mêmes étoiles lointaines que le référentiel de Copernic, par définition, le référentiel géocentrique est en translation non rectiligne et non uniforme par rapport au référentiel de Copernic. A priori, il n'y a pas de raison que l'on puisse le considérer galiléen. Pourtant, il est un bon candidat pour la description du mouvement des objets au voisinage de la Terre. Nous allons étudier plus en détail ce référentiel.

En 1832, Ferdinand Reich réalise l'expérience suivante dans une mine de Saxe : il lâche un objet du haut d'un puits de 158 m. Au sol, il remarque que statistiquement, les impacts sont décalés de 28,3 mm du point de lâcher de l'objet par rapport à la verticale locale : il met en évidence ce qu'on appelle depuis déjà des siècles la déviation vers l'est.



Ferdinand Reich

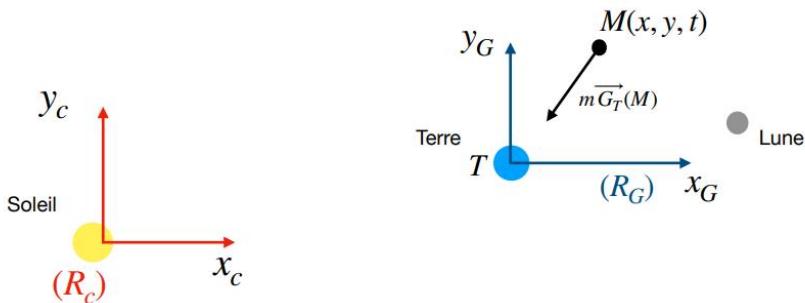


Mise en évidence d'une déviation de la chute vers l'Est

Ce phénomène avait déjà été observé et étudié auparavant, notamment par Newton, qui explique cet effet de manière sommaire par la rotation de la Terre sur elle-même. Il faudra attendre les travaux de Coriolis pour expliquer de manière convaincante cet effet, grâce à l'introduction de l'accélération de Coriolis, qui découle directement du caractère non galiléen du référentiel terrestre.

1) Dynamique dans le référentiel géocentrique

On considère un objet de masse m au voisinage de la Terre au point M .



On applique le PFD : $m\vec{a}(M/R_g) = m\vec{g}_S(M) + m\vec{g}_L(M) + m\vec{g}_T(M) + \vec{F}_{l,e} + \vec{F}_{l,c}$

Avec $\vec{F}_{l,e} = -m\vec{a}(T/R_C) - m\vec{\Omega}_g \wedge (\vec{\Omega}_g \wedge \vec{TM})$ et $\vec{F}_{l,c} = -2m\vec{\Omega}_g \wedge \vec{v}(M/R_g)$

Le référentiel de Copernic et le référentiel géocentrique sont en translation : il ne reste que le premier terme de la force d'entraînement : $\vec{a}(T/R_C) = \vec{g}_S(T) + \vec{g}_L(T)$

Finalement : $m\vec{a}(M/R_g) = m\vec{g}_T(M) + m(\vec{g}_S(M) - \vec{g}_S(T)) + m(\vec{g}_L(M) - \vec{g}_L(T))$

Les accélérations différentielles sont respectivement de l'ordre de $5 \cdot 10^{-7} \text{ m.s}^{-2}$ et 10^{-6} m.s^{-2} , elles sont très faibles devant l'accélération moyenne de la pesanteur terrestre. On peut donc négliger les effets de marée et supposer que le référentiel géocentrique est galiléen.

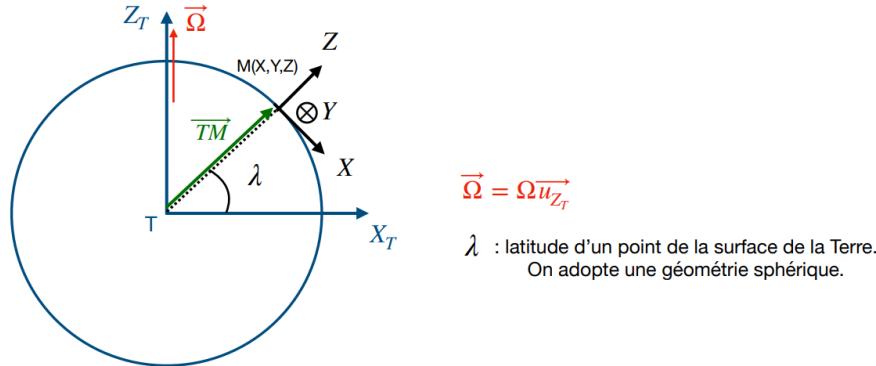
Ainsi, notre étude se limite aux effets non galiléens dus à la rotation du référentiel terrestre par rapport au référentiel géocentrique. On considère que cette rotation est uniforme, d'axe passant par les pôles, avec $\Omega = 7,29 \cdot 10^{-5} \text{ rad.s}^{-1}$. On peut réécrire le PFD dans le référentiel terrestre :

$$m\vec{a}(M/R_g) = \sum_i \vec{F}_i - m\vec{a}(T/R_g) - m\vec{\Omega}_g \wedge (\vec{\Omega}_g \wedge \vec{TM}) - 2m\vec{\Omega}_g \wedge \vec{v}(M/R_g)$$

Or $\vec{a}(T/R_C) = \vec{0}$

Donc

$$m\vec{a}(M/R_g) = \sum_i \vec{F}_i - m\vec{\Omega}_g \wedge (\vec{\Omega}_g \wedge \vec{TM}) - 2m\vec{\Omega}_g \wedge \vec{v}(M/R_g)$$



Remarques :

- Les accélérations d'inertie sont des accélérations uniquement dues à l'expression d'un certain mouvement dans un certain référentiel. On peut choisir de les modéliser mathématiquement par des forces, mais celles-ci ne vérifient pas le principe de l'action et de la réaction : ce ne sont pas des forces à proprement parler.
- La force d'inertie de Coriolis ne travaille pas, et la force d'inertie d'entraînement dérive d'un potentiel, donc l'énergie mécanique est conservée par ces forces. Dans le référentiel non-galiléen en question, il faut inclure l'énergie potentielle associée à la force centrifuge : $E_p(r) = \frac{m\Omega^2 r^2}{2}$ avec r la distance à l'axe de rotation.
- Seuls les points de Lagrange L4 et L5 sont stables par rapport au système à trois corps Objet-Terre-Soleil. Les autres sont des points cols ou selles donc instables. Pour un objet placé en L4 et L5, les forces d'inertie ont tendance à le ramener vers le point de Lagrange occupé à chaque fois qu'il tend à s'en éloigner.

2) Correction au champ de pesanteur terrestre

a) Effets de la force d'inertie d'entraînement

On s'intéresse à un objet immobile à la surface terrestre : $\vec{v}(M/R_g) = \vec{0}$ et donc $\vec{F}_{l,c} = \vec{0}$

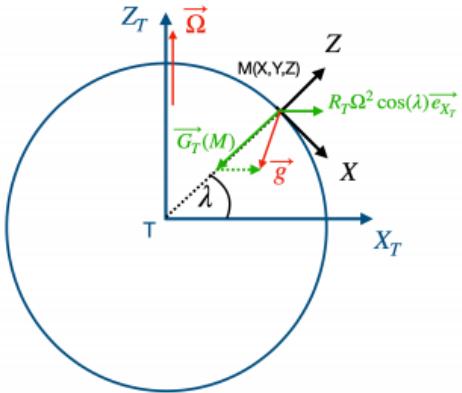
Dans ce cas : $\vec{TM} = R_T \cos(\lambda) \vec{u}_{X_T} + R_T \sin(\lambda) \vec{u}_{Z_T}$ et $\vec{\Omega} = \Omega \vec{u}_{Z_T}$

$$\vec{F}_{l,e} = m\Omega^2 R_T \cos(\lambda) \vec{u}_{X_T}$$

On définit le poids comme étant la force subie par un objet placé à la surface de la Terre et ne subissant comme vraie force que l'attraction gravitationnelle de la Terre :

$$\vec{P} = m\vec{g}(\lambda) = m\vec{g}_T + m\Omega^2 R_T \cos(\lambda) \vec{u}_{X_T}$$

Conséquence : le poids n'est plus strictement radial, mais admet une composante orthogonale à $\vec{\Omega}$. La verticale n'est donc plus dirigée vers le centre de la Terre.



b) Variation du champ de pesanteur terrestre

Au pôle nord, $\lambda = 90^\circ$ donc $\vec{g}(\lambda) = \vec{g}_T(M)$

A l'équateur, $\lambda = 0^\circ$ donc $\vec{g}(\lambda) = \vec{g}_T(M) + \Omega^2 R_T \vec{u}_{X_T}$

La différence maximale est donc $\Delta g = \Omega^2 R_T = 3,39 \cdot 10^{-2} m.s^{-2}$

Expérimentalement, cette différence est de $5,2 \cdot 10^{-2} m.s^{-2}$, l'écart est dû à l'hypothèse de sphéricité de la Terre. La mesure de cet écart nous renseigne d'ailleurs sur l'excentricité de la Terre.

3) Influence de la force d'inertie de Coriolis

a) Déviation vers l'est

On s'intéresse ici au mouvement d'un objet en chute libre depuis une hauteur h au voisinage de la surface de la Terre. On va négliger ici la correction faite sur la direction de la verticale locale.

L'équation du mouvement s'écrit : $m\vec{a}(M/R_T) = m\vec{g}(\lambda) - 2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}(M/R_T)$

Cette équation est a priori difficile à intégrer, on souhaite mettre en place un traitement perturbatif. Pour ça, on fait l'hypothèse suivante : à tout instant, on suppose que $v_z(M/R_T) \gg v_y(M/R_T) \rightarrow \vec{v}(M/R_T) // \vec{u}_Z$.

On obtient le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -2\Omega \cos(\lambda) \dot{z} \\ \ddot{z} = -g \end{cases}$$

On observe l'apparition d'une accélération due à la force de Coriolis, dirigée selon y , c'est-à-dire vers l'est dans notre système de coordonnées. Après intégration, en prenant une vitesse initiale nulle et $z(0) = R_T + h$, on obtient :

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= g\Omega \cos(\lambda) \frac{t^3}{3} \\ z &= R_T + h - \frac{gt^2}{2} \end{aligned}$$

Le temps de chute libre est tel que $z = R_T$, soit :

$$\begin{cases} \tau = \sqrt{\frac{2h}{g}} \\ y_c = \frac{\Omega \cos(\lambda)}{3\sqrt{g}} (2h)^{\frac{3}{2}} \end{cases}$$

y_c est la déviation vers l'est. Application numérique pour l'expérience de Ferdinand Reich : 27,4 mm.

On va maintenant raisonner en ordre de grandeur pour en tirer une observation générale :

$\frac{y_c}{h} \propto \Omega \sqrt{h}$ or $\tau \propto \sqrt{h}$ donc $\frac{y_c}{h} \propto \frac{\tau_c}{T}$ avec T la période de rotation de la Terre. On en déduit donc une propriété que l'on trouve souvent sans trop de justification : les effets relatifs de la force de Coriolis sont négligeables dès lors que la durée de l'expérience (ici le temps de chute τ) est très faible devant une journée.

b) Application : les vents géostrophiques

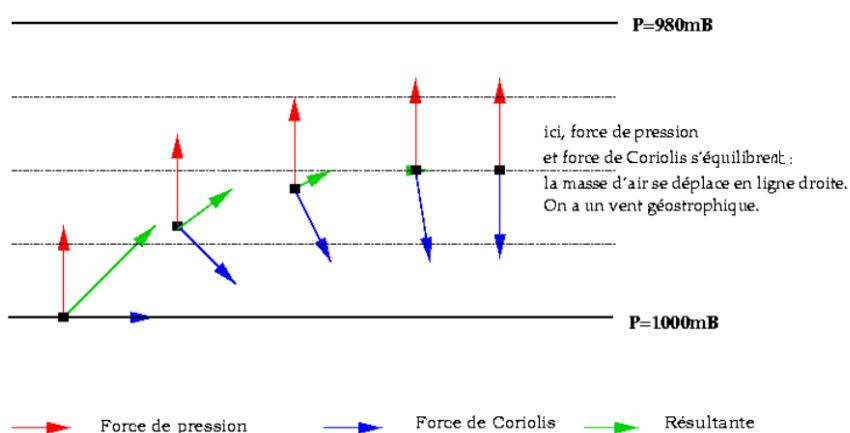
On s'intéresse au mouvement d'une particule de fluide dans l'atmosphère, dans le plan tangent local à la surface de la Terre, par exemple selon \vec{u}_X , c'est-à-dire vers le sud. Dans ce cas,

$$\vec{F}_{l,c} = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v} = -2m\Omega v \sin(\lambda) \vec{u}_Y$$

Le fluide est donc dévié vers l'ouest dans l'hémisphère nord, et vers l'est dans l'hémisphère sud. On admet que quelle que soit la direction de son mouvement, la masse de fluide est déviée vers sa droite dans l'hémisphère nord, et vers sa gauche dans l'hémisphère sud.

Une conséquence de cette déviation est la formation de cyclones dans des zones de l'atmosphère où règnent des gradients de horizontaux de pression.

Formation d'un vent géostrophique



On se place dans l'hémisphère nord. Le fluide est mis en mouvement par le gradient de pression considéré. Il acquiert une vitesse, et est donc soumis à la force de Coriolis, qui fait tourner la direction dans laquelle il évolue vers la droite constamment. Lorsque la force due au gradient de pression et la force de Coriolis s'annulent, on observe un équilibre. Le fluide en régime stationnaire est régi par l'équation : $\rho \vec{g} - \vec{\text{grad}}(p) - 2\rho \vec{\Omega} \wedge \vec{v} = \vec{0}$

En projetant l'équation dans le plan tangent (X, Y) et en notant $\overrightarrow{\text{grad}_{//}}(p)$ la composante tangentielle du gradient de pression, on obtient la vitesse géostrophique : $\vec{v} = \frac{\overrightarrow{u_{ZT}}}{2\rho\Omega} \wedge \overrightarrow{\text{grad}_{//}}(p)$. On en déduit que pour les vents géostrophiques, les isobares sont les lignes de champ.

Pour des dépressions (cyclones) ou des surpressions (anticyclones), le sens de $\overrightarrow{\text{grad}_{//}}(p)$ est inversé. Par ailleurs, pour un gradient de pression donné, le sens de rotation est inversé dans l'hémisphère nord et dans l'hémisphère sud.

Remarque : La déviation vers l'est est respectée dans les deux hémisphères, puisqu'elle ne dépend que du sens de rotation de la Terre quelle que soit la position sur le globe. Mathématiquement, on a fait intervenir la dépendance en la latitude par un $\cos \lambda$, qui est une fonction paire. Pour les vents géostrophiques, le sens dans lequel est dévié la masse de fluide par la force de Coriolis dépend de l'hémisphère. Mathématiquement, on a fait intervenir un $\sin \lambda$, fonction impaire, dans l'expression de la force de Coriolis pour un objet en mouvement dans le plan tangent (X, Y).

On peut négliger les forces de marées pour des objets proches de la surface de la Terre : on s'affranchit alors du caractère non-galiléen du référentiel géocentrique. On peut négliger l'accélération d' entraînement sans condition sur la durée de l'expérience car elle est faible devant l'accélération gravitationnelle terrestre pour un objet proche de la surface de la Terre également. Dans le cas où la durée de l'expérience est très courte devant une journée, on peut également négliger les effets relatifs de la force d'inertie de Coriolis.

VIII Forces centrales (voir [5], [7]) (À COMPLÉTER)

1) Définition

Un champ de forces centrales conservatif de centre O vérifie :

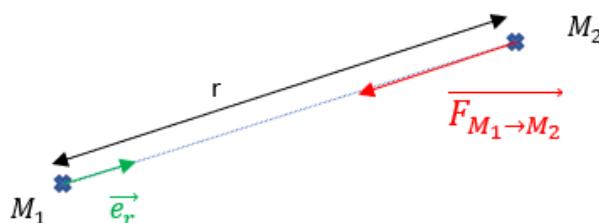
$$* \vec{F} = F \vec{e}_r$$

$$*F = - \frac{dE_p}{dr}$$

Si $F < 0$ alors la force est attractive, si $F > 0$ alors elle est répulsive.

Exemple : Interaction gravitationnelle

On considère deux objets M_1 et M_2 de masses respectives m_1 et m_2 , distants de r . La force exercée par M_1 sur M_2 s'écrit : $\overrightarrow{F_{M_1 \rightarrow M_2}} = - \frac{Gm_1m_2}{r^2} \vec{e}_r$ (interaction newtonienne).



$$\int dE_p = Gm_1m_2 \int \frac{dr}{r^2}$$

$$\Rightarrow E_p = -\frac{Gm_1m_2}{r} + K$$

On choisit d'imposer une énergie potentielle nulle lorsque les deux masses sont infiniment éloignées :

$$E_p = -\frac{Gm_1m_2}{r}$$

2) Lois de conservation

a) Conservation du moment cinétique

D'après le théorème du moment cinétique en O dans R_g (référentiel galiléen) au point M de masse m soumis à une force centrale \vec{F} : $\frac{d\vec{L}}{dt}(O, M/R_g) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0}$

Ainsi $\vec{L}(O, M/R_g) = \vec{L}_0 \rightarrow$ Le moment cinétique en O de M se conserve au cours du temps, donc le mouvement est plan.

Par définition, $\vec{L}_0 = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} = mr\vec{e}_r \wedge (\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta) = mr^2\dot{\theta}\vec{e}_z$ (mouvement dans le plan $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$)

Souvent, on pose $C = r^2\dot{\theta}$ (constante des aires)

b) Conservation de l'énergie mécanique

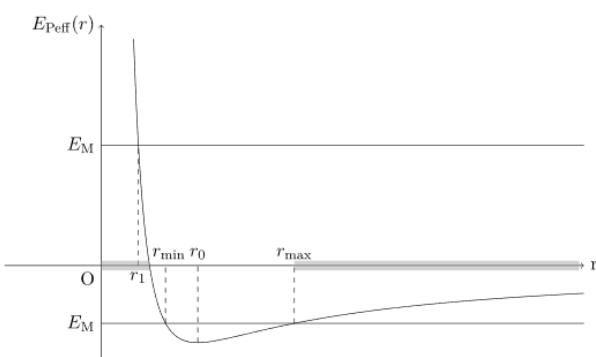
$$E_c = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$$

$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{mc^2}{2r^2} + E_p(r)$, on pose $E_{p,eff}(r) = \frac{mc^2}{2r^2} + E_p(r)$ (énergie potentielle effective)

\Rightarrow On se ramène à l'étude d'un mouvement à un seul degré de liberté : r

Le système n'étant soumis qu'à l'interaction gravitationnelle, qui est conservative, l'énergie mécanique est constante.

3) Trajectoires



- Si $E_m > 0$, la zone accessible est définie par $r \geq r_1$, le système est dans un état de diffusion, la trajectoire est une hyperbole.
- Si $E_m < 0$, la zone accessible est définie par $r_{min} \leq r \leq r_{max}$, le système est dans un état lié, la trajectoire est une ellipse.
- Si $E_m = E_{p,eff}(r_0)$, la trajectoire est un cercle.
- Le cas entre l'état lié et l'état de diffusion correspond à $E_m = 0$, le système est dans un état de diffusion dont la trajectoire est une parabole.

IX Mécanique céleste (voir [1], [4], [5], [7], [14], [15])

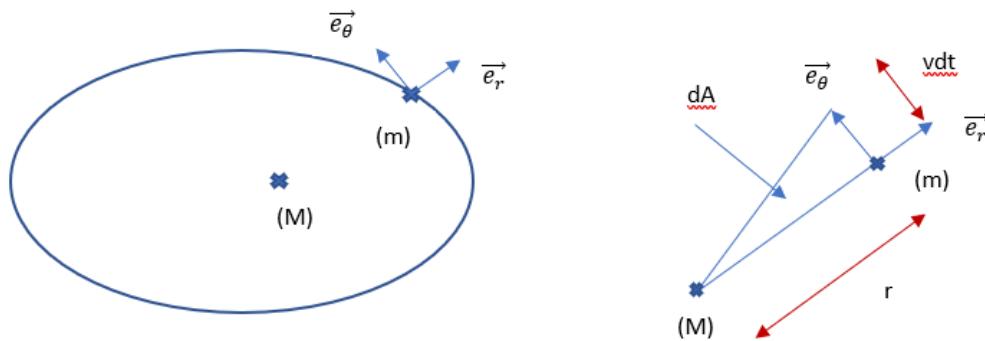
1) Lois de Kepler

Ces lois ont été établies de manière empirique par Johannes Kepler au début du XVII^e siècle, à partir des observations de Tycho Brahe, dont il était l'élève. A cette époque, l'héliocentrisme de Copernic s'opposait au géocentrisme, ce qui a valu à Galilée d'être condamné par l'Église. On pensait de plus que la vitesse de la lumière était infinie, jusqu'à ce que Roemer prouve le contraire en 1676 en observant les éclipses de Io, découvert par Galilée en 1610. Il faudra attendre 1687 pour que Newton démontre les lois de Kepler, grâce à sa théorie de la gravitation universelle.

a) Choix du référentiel – 1^e et 2^e lois de Kepler

Pour l'étude des mouvements des planètes et des satellites, le référentiel terrestre n'est pas adapté. On se placera donc dans le référentiel héliocentrique donc le centre est le centre du Soleil et les 3 axes sont définis par les directions de 3 étoiles suffisamment éloignées pour être considérées comme fixes.

1^e loi de Kepler : le centre des planètes décrit une ellipse dont l'un des foyers est le Soleil.

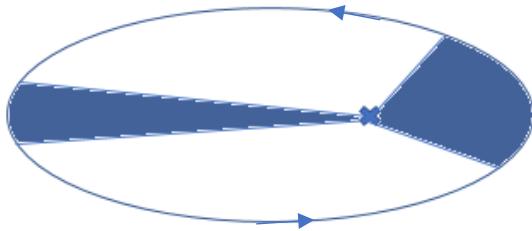


$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r v dt = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} dt$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{C}{2} \rightarrow \text{la vitesse de balayage (= vitesse aréolaire) est constante}$$

$$A = \frac{C}{2} t + cste$$

2^e loi de Kepler : Le rayon vecteur balaie des aires égales pour des intervalles de temps égaux.



b) 3^e loi de Kepler

Si on note T la période de révolution d'une planète autour du Soleil et a le demi-grand axe de sa trajectoire, alors : $\frac{T^2}{a^3} = \text{cste}$ -> se généralise pour les satellites

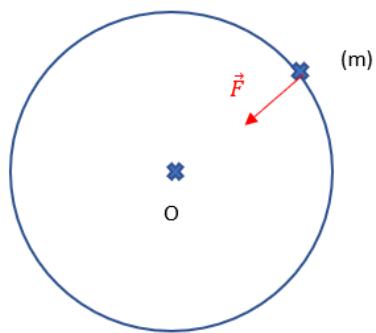
- Mouvement circulaire

On étudie un système de masse m (planète ou satellite) en interaction gravitationnelle avec un centre attracteur O de masse M (Soleil ou planète).

On suppose une trajectoire circulaire : $r = R = \text{cste}$

On se place dans le référentiel héliocentrique (ou le référentiel de la planète), supposé galiléen.

On utilise les coordonnées polaires



$$\vec{F} = -\frac{GmM}{R^2} \vec{e}_r$$

La 2^e loi de Newton s'écrit : $m\vec{a}(M/R) = \vec{F}$

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta$$

Or $r = \text{cste}$

$$\Rightarrow \vec{v} = r\dot{\theta}\vec{e}_r \text{ et } \vec{a} = -R\dot{\theta}^2\vec{e}_r + R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta$$

$$\begin{cases} -mR\dot{\theta}^2 = -\frac{GmM}{R^2} \\ mR\ddot{\theta} = 0 \end{cases}$$

- ⇒ La 2^e équation donne : $\ddot{\theta} = 0$
- ⇒ $\dot{\theta} = \text{cste}$
- ⇒ $v = \text{cste}$
- ⇒ Le mouvement est circulaire uniforme

$$\dot{\theta} = \frac{v}{R}$$

En remplaçant dans la 1^e équation, on obtient : $\frac{v^2}{R} = \frac{GM}{R^2}$, soit $v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$

Si on note T la période de révolution du système, comme $v = \text{cste}$, on peut écrire : $v = \frac{2\pi R}{T}$

L'égalité des vitesses se traduit par : $\frac{2\pi R}{T} = \sqrt{\frac{GM}{R}}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{4\pi^2 R^2}{T^2} &= \frac{GM}{R} \\ \Rightarrow \frac{T^2}{a^3} &= \frac{4\pi^2}{GM} \end{aligned}$$

Exemple : satellite géostationnaire

Certains satellites de communication doivent toujours être positionnés au même endroit dans le ciel à partir d'un point terrestre. De tels satellites sont géostationnaires. $T = 24\text{h}$

$$3^{\text{e}} \text{ loi de Kepler} \rightarrow R = \left(\frac{GM_T T^2}{4\pi^2} \right)^{\frac{1}{3}} \text{ (rayon de l'orbite)}$$

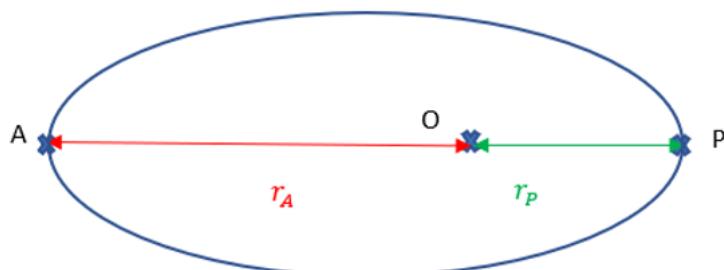
Application numérique : $M_T = 6,0 \cdot 10^{24}\text{kg}$, $G = 6,67 \cdot 10^{-11}\text{m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$

$$\Rightarrow R \approx 42000 \text{ km}$$

Or $R_T \approx 6400 \text{ km}$

⇒ Le satellite se trouve à une hauteur $h = R - R_T \approx 36000 \text{ km}$

- Mouvement elliptique



Le point A est appelé apogée pour un satellite, et aphélie pour une planète.

Le point P est appelé périgée pour un satellite, et périhélie pour une planète.

Remarque : le périhélie de Mercure n'est pas fixe, ce problème se résout grâce à la relativité générale

On définit le demi-grand axe par : $2a = r_A + r_P$

En A, $r = r_{max}$ et $v = v_{min} = r_A \dot{\theta}_A$ ($\dot{r}_A = 0$)

En P, $r = r_{min}$ et $v = v_{max} = r_P \dot{\theta}_P$ ($\dot{r}_P = 0$)

Dans le cas d'une ellipse, on peut généraliser la 3^e loi de Kepler : $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$

Remarque : dans le cas général, en posant $u = \frac{1}{r}$ et en déroulant les calculs à partir de la 2^e loi de Newton, on montre que $r = \frac{p}{1+e \cos \theta}$, avec $p = \frac{C^2}{GM}$, e est l'excentricité orbitale

Pour $e = 0$, $r = p \rightarrow$ cercle

Pour $0 < e < 1 \rightarrow$ ellipse

Pour $e = 1 \rightarrow$ parabole

Pour $e > 1 \rightarrow$ hyperbole

2) Mouvement elliptique

On considère un objet de masse m autour d'un centre attracteur de masse M (Lune autour de la Terre, planète autour d'une étoile...) dans un référentiel supposé galiléen (géocentrique, héliocentrique...). On utilise les coordonnées cylindriques. On considère la seule force gravitationnelle qu'exerce le centre attracteur sur l'objet. D'après la 2^e loi de Newton :

$$\begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{GM}{r^2} \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0 \end{cases}$$

La 2^e équation nous permet de retrouver la 2^e loi de Kepler et fait apparaître la constante des aires : $C = r^2\dot{\theta}$

On pose $u = \frac{1}{r}$ (changement de variable de Binet).

Ainsi, $\dot{r} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{dt} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta} \dot{\theta} = -C \frac{du}{d\theta}$ et $\ddot{r} = -C^2 u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2}$

En remplaçant dans la 1^e équation, on obtient : $C^2 u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2} + C^2 u^3 = GMu^2$

Donc : $\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{GM}{C^2}$

On reconnaît l'équation d'un oscillateur harmonique avec second membre.

La solution est donc : $u(\theta) = A \cos(\theta + \phi) + \frac{GM}{C^2}$

Ainsi, $r = \frac{1}{\frac{GM}{C^2} + A \cos(\theta + \phi)} = \frac{p}{1 + e \cos(\theta + \phi)}$ en posant $p = \frac{C^2}{GM}$ et $e = Ap$

On obtient l'équation d'une ellipse.

L'énergie mécanique s'écrit :

$$E_m = \frac{mC^2 A^2 \sin^2(\theta + \phi)}{2} + \frac{mC^2 \left(A \cos(\theta + \phi) + \frac{GM}{C^2} \right)^2}{2} - GmM \left(A \cos(\theta + \phi) + \frac{GM}{C^2} \right)$$

$$\text{On a donc : } E_m = \frac{mC^2 A^2}{2} - \frac{mC^2}{2p^2} = \frac{mC^2(e^2 - 1)}{2p^2}$$

Rappel :

- Si $e = 0$, on retrouve la trajectoire circulaire (état lié)
- Si $0 < e < 1$, la trajectoire est elliptique (état lié) (cas présent)
- Si $e = 1$, la trajectoire est parabolique (état de diffusion)
- Si $e > 1$, la trajectoire est hyperbolique (état de diffusion)

La trajectoire d'un objet autour d'un centre attracteur n'est jamais vraiment circulaire, les équations précédentes sont valables en général en changeant les constantes (selon les objets). A noter que l'excentricité dépend du temps en général (considérée constante ici pour simplifier les calculs), comme c'est le cas par exemple pour la Lune.

3) Dynamique du système Terre-Lune

a) Formation de la Lune

Plusieurs théories se sont succédé pour expliquer la formation de la Lune. On considère l'hypothèse de l'impact géant.

On considère une planète ayant la même masse que Mars orbitant dans le même sens à la même distance que la Terre du Soleil et dont le plan orbital fait un angle de 20° avec celui de la Terre. L'orbite des deux planètes est circulaire. On suppose que les deux planètes entrent en collision.

On se place dans le référentiel héliocentrique et on utilise les coordonnées cylindriques.

D'après la 2^e loi de Newton : $\begin{cases} R\dot{\theta}^2 = \frac{GM_S}{R^2} \\ R\ddot{\theta} = 0 \end{cases}$

$$\text{On en déduit } \dot{\theta} = \text{cste et } v = \frac{2\pi R}{T} = \sqrt{\frac{GM_S}{R}} = 30 \text{ km.s}^{-1}$$

$$\vec{v}_r = \vec{v}_{Terre} - \vec{v}_{Théia}$$

$$\text{Donc } v_r = \sqrt{v_{Terre}^2 + v_{Théia}^2 - 2v_{Terre}v_{Théia}\cos\theta}$$

$$v_{Terre} = v_{Théia} \text{ donc } v_r = 10,4 \text{ km.s}^{-1}$$

L'énergie libérée lors de l'impact s'écrit : $E = \frac{1}{2} m_{Théia} v_r^2 = 3,44 \cdot 10^{31} \text{ J}$, avec $m_{Théia} = 6,39 \cdot 10^{23} \text{ kg}$

On suppose que les débris éjectés sont tous mis en orbite autour de la Terre et que leur masse est égale à la masse de la Lune. On cherche maintenant l'élévation de température moyenne de ces débris, on suppose que la capacité thermique est de $1200 \text{ J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$ et que 10% de l'énergie cinétique est communiquée à ces débris. On a donc : $0,1 \times E = m_{\text{Lune}}c\Delta T$, on trouve $\Delta T = 4500 \text{ K}$, $m_{\text{Lune}} = 7,34 \cdot 10^{22} \text{ kg}$.

On suppose qu'après l'impact, les débris se refroidissent par rayonnement thermique en suivant la loi de Stefan : $P = \sigma T^4$, $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-4}$

On considère que la surface de rayonnement correspond à un disque d'un rayon égal à 10 rayons terrestres, $R_{\text{Terre}} = 6370 \text{ km}$.

Un bilan d'énergie donne : $m_{\text{Lune}}c \frac{\partial T}{\partial t} = -2\pi R^2 \sigma T^4$, le 2 vient du fait que l'on considère les deux faces du disques.

On intègre en séparant les variables et on obtient : $\frac{1}{T^3} - \frac{1}{T_0^3} = \frac{6\pi R^2 \sigma t}{m_{\text{Lune}}c}$, avec T_0 la température initiale.

On a donc : $T = \frac{T_0}{(1 + \frac{t}{\tau})^{\frac{1}{3}}}$ avec $\tau = \frac{m_{\text{Lune}}c}{6\pi R^2 \sigma T_0^3} = 1,88 \text{ jour} = 0,269 \text{ semaine}$

Ensuite, un phénomène d'accrétion s'est produit. On suppose qu'il a été très rapide et a duré 10 semaines. La température atteinte au bout de cette durée est donc : $T = 1484 \text{ K}$.

Avec de telles conditions, on peut supposer que la ré-accrétion engendra une Lune très majoritairement fondue.

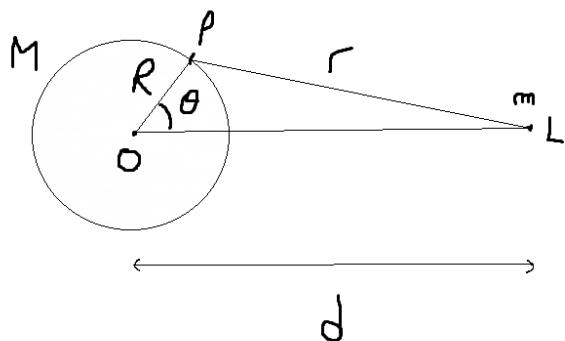
La Lune exerce des effets sur la Terre directement visibles : les marées.

b) Marées

Les effets de marée sont des effets dus au gradient du champ gravitationnel. Ils sont à l'origine du phénomènes de marées, de la synchronisation des orbites (la Lune nous montre toujours la même face), de la circularisation, de la destruction de corps, de volcanisme...

On suppose que la Terre est sphérique, recouverte d'une couche d'eau dont la hauteur est constante en l'absence de marée, la pression est la même partout, on néglige la force centrifuge devant la force gravitationnelle. En l'absence de marée, le champ de gravité en tout point de la surface s'écrit donc :

$$\vec{g} = -\frac{GM}{R^2} \vec{e}_r$$



$$r^2 = d^2 + R^2 - 2Rd \cos(\theta)$$

On note ϕ_L le potentiel gravitationnel (défini à une constante près), tel que : $\vec{g}_L = -\overrightarrow{\text{grad}}\phi_L$

$$\text{On a donc : } \phi_L = -\frac{Gm}{r} = -\frac{Gm}{d\sqrt{1+\frac{R^2}{d^2}-2\frac{R}{d}\cos(\theta)}} \simeq -\frac{Gm}{d}\left(1-\left(\frac{R^2}{2d^2}-\frac{R}{d}\cos(\theta)\right)+\frac{3}{8}\left(\frac{R^2}{d^2}-\frac{2R}{d}\cos(\theta)\right)^2\right)$$

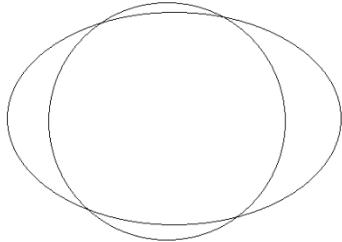
$$\text{En négligeant tout ordre supérieur à 2, on obtient : } \phi_L = -\frac{Gm}{d}\left(1+\frac{R}{d}\cos(\theta)-\frac{R^2}{2d^2}+\frac{3R^2}{2d^2}\cos^2(\theta)\right)$$

On définit le champ de pesanteur apparent par : $\vec{g}_{app} = \vec{g} + \vec{g}_L$.

$$\text{Ce champ correspond à un potentiel : } \phi_{app} = \frac{Gm}{d^3}\vec{OL}\cdot\vec{OP} + \phi_L = \frac{GmR\cos(\theta)}{d^2} + \phi_L$$

$$\text{Ainsi, } \phi_{app} = -\frac{Gm}{d} - \frac{GmR^2}{d^3}\left(\frac{3}{2}\cos^2(\theta) - \frac{1}{2}\right)$$

$$\text{Le potentiel étant défini à une constante près, on peut écrire : } \phi_{app} = -\frac{GmR^2}{d^3}\left(\frac{3}{2}\cos^2(\theta) - \frac{1}{2}\right)$$



On adopte un modèle hydrostatique. On note h l'élévation par rapport au niveau moyen en absence de marée. On peut supposer le champ de pesanteur et dérivant du potentiel gh . Comme $h \ll R$, on peut écrire : $\phi_{tot} = -\frac{GmR^2}{d^3}\left(\frac{3}{2}\cos^2(\theta) - \frac{1}{2}\right) + gh = K$

$$\text{En prenant la constante égale à 0, on obtient : } h(\theta) = \frac{Gmr^2}{2d^3g}(3\cos^2(\theta) - 1) = \frac{h_0}{2}(3\cos^2(\theta) - 1)$$

Pour la Lune, $h_0 = 34,1$ cm, pour le Soleil, $h_0 = 16,5$ cm

La pleine mer correspond à h maximal, la basse mer correspond à h minimal. La vive-eau correspond à l'alignement du Soleil et de la Lune par rapport à la Terre, la morte-eau correspond au moment où le Soleil et la Lune sont à 90° l'un de l'autre par rapport à la Terre.

Les effets de marée de la Lune sont plus importants que ceux du Soleil, mais les deux provoquent ce qu'on appelle la précession des équinoxes : il s'agit du mouvement de précession de l'axe de rotation de la Terre autour de la normale au plan de l'écliptique. Du fait de l'ellipticité de la Terre, l'attraction gravitationnelle du Soleil crée un moment qui a tendance à ramener le grand axe de la Terre dans le plan de l'écliptique ; or le moment cinétique de la Terre est conservé, et donc il y a précession de l'axe de rotation de la Terre (comme un gyroscope).

Du fait des forces de marée, par déformation de la Terre le long de l'axe Terre-Lune, une partie de son moment cinétique est graduellement transférée au moment orbital du couple Terre-Lune, entraînant un éloignement progressif de la Lune.

c) Éloignement de la Lune

La distance Terre-Lune augmente avec le temps. Ce phénomène est dû au fait que les marées sur Terre créent des moments de forces, lesquels engendrent un moment cinétique supplémentaire pour la Lune.

On suppose que le système Terre-Lune est isolé et on note G sont centre de masse, ainsi que T et L les centres de la Terre et de la Lune. Les moments cinétiques de la Terre et de la Lune s'écrivent :

$$\vec{L}_T = M_T \vec{GT} \wedge \vec{v}_T + I_T \vec{\omega}_T$$

$$\vec{L}_L = M_L \vec{GL} \wedge \vec{v}_L + I_L \vec{\omega}_L$$

Le moment cinétique total $\vec{L} = \vec{L}_T + \vec{L}_L$ est constant.

Par ailleurs, on a la relation suivante : $M_T \vec{GT} + M_L \vec{GL} = \vec{0}$

On pose $\vec{v}_T = \frac{d\vec{GT}}{dt}$ et $\vec{v}_L = \frac{d\vec{GL}}{dt}$

On a donc $M_T \vec{v}_T + M_L \vec{v}_L = \frac{d(M_T \vec{GT} + M_L \vec{GL})}{dt} = \vec{0}$

Ainsi, $\vec{L} = M_L (\vec{GL} - \vec{GT}) \wedge \vec{v}_L + I_T \vec{\omega}_T + I_L \vec{\omega}_L$

Finalement, $\vec{L} = M_L \vec{TL} \wedge \vec{v}_L + I_T \vec{\omega}_T + I_L \vec{\omega}_L$

On note d = TL (distance Terre-Lune)

On considère le cas simple d'une révolution circulaire autour du centre de masse et de la rotation axiale autour de l'axe polaire d'inertie, lui-même perpendiculaire au plan de l'orbite.

$\vec{v}_L = \vec{\omega}_R \wedge \vec{GL}$, avec ω_R la vitesse angulaire de révolution de la Lune.

Comme $I_T \omega_T \gg I_L \omega_L$, on peut écrire : $L = M_L d^2 \omega_R + I_T \omega_T$

Une diminution de la vitesse de rotation terrestre induit donc une augmentation du moment cinétique de révolution lunaire. La durée du jour terrestre diminue d'environ 1,7 ms par siècle, on cherche l'éloignement lunaire correspondant.

Le moment cinétique étant constant, on peut écrire : $M_L \frac{d(d^2 \omega_R)}{dt} + I_T \frac{d\omega_T}{dt} = 0$

Par ailleurs, $\omega_R^2 d^3 = GM_T$ (3^e loi de Kepler)

Donc, $M_L \sqrt{GM_T} \frac{d(\sqrt{d})}{dt} + I_T \frac{d\omega_T}{dt} = 0$

$$\frac{1}{2} \dot{d} M_L \sqrt{\frac{GM_T}{d}} = -I_T \dot{\omega}_T$$

$$\frac{\dot{d}}{d} = -\frac{2I_T \dot{\omega}_T}{\omega_R}$$

Or, $\frac{I_T}{M_T R_T^2} = 0,33$

(pour un objet sphérique, $I/(MR^2) = 0,4$)

$$\text{On a donc : } \frac{\dot{d}}{d} = -2 \frac{I_T}{M_T R_T^2} \frac{R_T^2}{d^2} \frac{M_T}{M_L} \frac{\omega_T}{\omega_R} = 2 \frac{I_T}{M_T R_T^2} \frac{R_T^2}{d^2} \frac{M_T}{M_L} \frac{T_T T_R}{T_T^2}$$

$$T_T = 1,7 \text{ ms. siècle}^{-1} = 1,7 \cdot 10^{-5} \text{ s. an}^{-1}, \quad T_T = 86164 \text{ s}, \quad M_T = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}, \quad R_T = 6371 \text{ km}, \\ M_L = 7,34 \cdot 10^{22} \text{ kg}, \quad T_R = 27 \text{ j}, \quad d = 384000 \text{ km}$$

On trouve $\dot{d} = 3 \text{ cm. an}^{-1}$

La mesure exacte par télémétrie laser donne $3,8 \text{ cm.an}^{-1}$.

La Lune est en rotation synchrone et conserve ainsi toujours la même face tournée vers la Terre. Toutefois cette rotation synchrone n'est vraie qu'en moyenne, du fait de son excentricité orbitale. On parle de libration. Nous allons maintenant voir l'effet de l'excentricité sur le mouvement de la Lune autour de la Terre.

Les forces de marée peuvent provoquer la dislocation d'un corps si sa distance est inférieure à une limite, appelée limite de Roche. Si au lieu de s'éloigner de la Terre, la Lune s'en approchait (ce qui est impossible), alors elle finirait par atteindre cette limite et se transformerait en un anneau de fragments de matière qui finirait par retomber sur Terre sous l'effet de la gravité. Cette limite dépend de la masse et de la taille des deux objets, et donc de leur composition interne.

4) Effondrement d'une étoile en fin de vie

On assimile une étoile à une sphère de rayon R , de masse volumique homogène ρ , à l'équilibre hydrostatique (**voir mécanique des fluides**).

D'après l'équation d'Euler : $\rho \vec{a} = \rho \vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}}(p)$, mais que vaut \vec{g} à l'intérieur de l'étoile ?

Par analogie avec le théorème de Gauss en électrostatique (**voir électromagnétisme**), on peut définir le théorème de Gauss gravitationnel :

$$\oint \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi G m_{int}$$

La surface de Gauss est une sphère de centre O et de rayon r .

Tout plan contenant O est un plan de symétrie pour la distribution de masse et donc un plan de symétrie pour \vec{g} . Donc $\vec{g}(r, \theta, \varphi) = g(r, \theta, \varphi) \vec{e}_r$

Il y a invariance par rotation autour de O, donc $g(r, \theta, \varphi) = g(r)$

D'après le théorème de Gauss gravitationnel :

- Pour $r < R$:

$$g 4\pi r^2 = -4\pi G \frac{4}{3} \pi r^3 \rho$$

$$\overrightarrow{g(r)} = -G \frac{4}{3} \pi r \rho \vec{e}_r$$

$$\overrightarrow{g(r)} = -G \frac{m(r)}{r^2} \vec{e}_r$$

On remarque que la partie de l'étoile entre r et R n'a aucune influence, \vec{g} est nul à l'intérieur d'une coquille vide.

- Pour $r \geq R$:

$$g4\pi r^2 = -4\pi GM_*$$

$$\overrightarrow{g(r)} = -\frac{GM_*}{r^2} \overrightarrow{e_r}$$

Ici on remarque que l'on obtient le même champ \overrightarrow{g} que si toute la masse de l'étoile était concentrée en O ! Le théorème de Gauss gravitationnel valide les hypothèses des masses ponctuelles que l'on a utilisées depuis le début.

Reprendons l'équation d'Euler projetée selon $\overrightarrow{e_r}$:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -G\frac{m(r)}{r^2} - \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr}$$

Tant que les deux termes de droite se compensent, l'étoile est stable. La majorité de la pression qui la maintient provient des réactions nucléaires en son sein. Lorsque qu'elle a consommé tout son carburant nucléaire (H et He pour notre soleil qui en est à 50% de ses réserves), alors la pression chute brutalement et l'étoile s'effondre sous son propre poids. Si l'on considère qu'à cet instant le terme en pression s'annule, on peut caractériser un ODG du temps d'effondrement :

$$\frac{R}{\tau^2} = \frac{GM_*}{R^2}$$

$$\tau = \left(\frac{R_*^3}{GM_*} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$AN : \tau_{Soleil} \approx 1h$$

Ce temps d'effondrement très faible prouve que le soleil n'est pas dans un effondrement très lent, mais bien à l'équilibre hydrostatique dans sa phase de combustion.

5) Formation d'un système binaire

FORMATION D'UN SYSTÈME BINAIRES



Système binaire 11 dans la nébuleuse du Tuyau
Image prise par ALMA en 2017

Sirius A et Sirius B sont deux étoiles indiscernables depuis la terre, dans la constellation du chien. Elles tournent l'une autour de l'autre (sur une trajectoire elliptique en 50 ans environ). C'est ce qu'on appelle une binaire et on se demande ici comment une binaire se forme. Lorsque deux étoiles de masses comparables se croisent, elles peuvent soit être déviées et continuer leur route (système libre, rencontre faible), soit se mettre à tourner l'une autour de l'autre (système lié, rencontre forte). On suppose deux étoiles de même masse m cf diapo.

On fait une étude énergétique lorsqu'elles sont infiniment éloignées pour pouvoir considérer qu'elles ne se voient pas et s'affranchir des interactions mutuelles lorsqu'elles seront proches. $E_c = \frac{1}{2}mv_*^2$. L'énergie potentielle de l'étoile "fixe" est $E_p = -\frac{Gm^2}{r}$. Il y a donc formation d'une binaire si $E_c < |E_p| = -\frac{Gm^2}{r}$

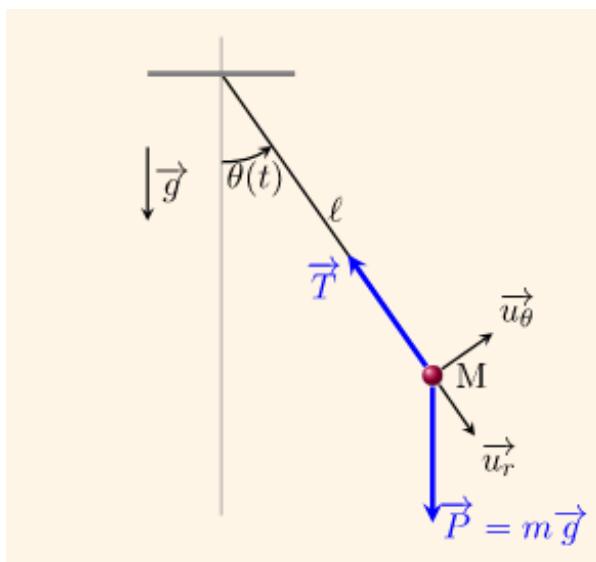
Déterminons R le rayon de la sphère d'influence de l'étoile, $\frac{1}{2}mv_*^2 = \frac{Gm^2}{R} \Rightarrow R = \frac{2Gm}{v_*^2}$. Si la première étoile passe hors de la sphère d'influence de l'autre alors il y a simple déflection des trajectoires, sinon il y a formation d'une binaire. Possibilité de résoudre avec une méthode type PFD dans le référentiel barycentrique. Introduire la seconde vitesse cosmique que l'on a en fait retrouvé ici : Vitesse de libération d'un corps quittant la Terre. $v = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}}$ ODG : 11 km.s^{-1}

X Oscillateurs (voir [1], [2], [18])

Un oscillateur est un système évoluant de part et d'autre d'un équilibre stable. Les variations des grandeurs décrivant le système se font en fonction du temps. On distingue plusieurs types d'oscillateurs selon leur fonctionnement et leurs effets. Les exemples les plus courants proviennent de la mécanique classique et de l'électricité, et c'est ce que nous allons voir dans ce cours.

1) Oscillateurs à 1 degré de liberté

a) Pendule simple



Le pendule subit le poids et la tension du fil, on considère qu'il n'y a pas de frottements.

Le principe fondamental de la dynamique s'écrit : $ml \frac{d\dot{\theta}}{dt} = -mg \sin(\theta)$

On obtient ainsi l'équation du pendule simple : $\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin(\theta) = 0$

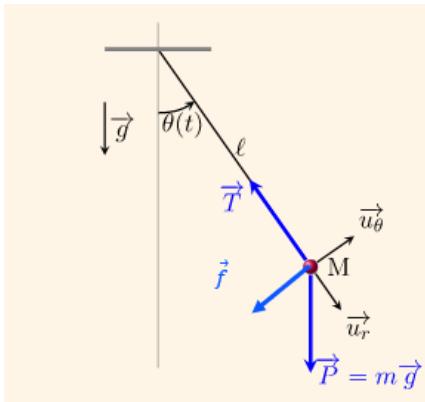
Dans l'approximation des petits mouvements, on peut écrire : $\sin(\theta) \sim \theta$

Donc : $\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$, on reconnaît l'équation d'un oscillateur harmonique déjà vue pour le système masse-ressort ou le circuit LC, avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ (ordre de grandeur de la période :

La solution s'écrit : $\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$

L'oscillateur harmonique est un cas idéal : nous avons négligé les frottements. Nous allons désormais les prendre en compte afin d'affiner le modèle du pendule.

b) Pendule amorti



On reprend le modèle précédent et on ajoute la force de frottements : $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$

Le travail du poids et de la tension du fil est nul. Le travail élémentaire de la force de frottements s'écrit : $\delta W = -\alpha v^2 dt$

L'énergie cinétique s'écrit : $E_c = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2$

L'énergie potentielle s'écrit : $E_p = mgl(1 - \cos(\theta))$

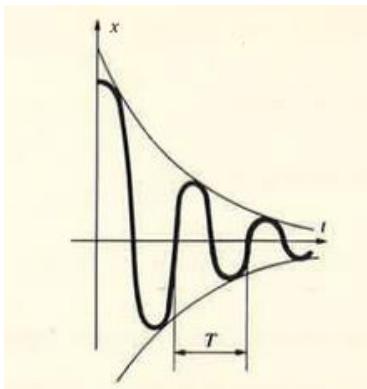
D'après le théorème de la puissance mécanique : $ml^2 \ddot{\theta} \dot{\theta} + mgl \dot{\theta} \sin(\theta) = -\alpha l^2 \dot{\theta}^2$

On obtient l'équation du mouvement : $ml^2 \ddot{\theta} + \alpha l^2 \dot{\theta} + mgl \sin(\theta) = 0$

Dans l'hypothèse des petits angles : $ml\ddot{\theta} + \alpha l\dot{\theta} + mg\theta = 0$ (équation d'un oscillateur amorti)

On introduit le coefficient d'amortissement ξ et la pulsation propre ω_0 : $\ddot{\theta} + 2\xi\omega_0\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$

$$\theta(t) = \theta_0 e^{-\omega_0 \xi t} \cos(\omega_0 t + \varphi)$$



On peut faire le parallèle avec le circuit RLC, pour lequel l'équation est : $L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$

L'introduction des frottements est l'équivalent mécanique de la résistance électrique, ce qui est très satisfaisant dans la mesure où ce sont ces termes qui sont responsables de la dissipation de l'énergie sous forme de chaleur.

Nous allons de nouveau négliger les frottements et considérer les non-linéarités du pendule.

c) Pendule : non-linéarités

Comme nous l'avons vu, l'équation du pendule simple est : $\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin(\theta) = 0$

Au voisinage de la position d'équilibre $\theta = 0$, l'oscillateur est harmonique. En revanche, pour des angles plus importants, il faut envisager des termes correctifs : $\sin(\theta) = \theta - \frac{\theta^3}{6} + \frac{\theta^5}{120} + o(\theta^5)$

On ne s'en tiendra qu'au premier terme correctif, l'équation devient donc :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \left(\theta - \frac{\theta^3}{6} \right) = 0$$

Pour résoudre cette équation non linéaire, on peut penser à chercher une solution sinusoïdale de la forme $\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega t)$, on obtient donc : $-\omega^2 \theta_0 \sin(\omega t) + \omega_0^2 \theta_0 \sin(\omega t) - \omega_0^2 \frac{\theta_0^3}{6} \sin^3(\omega t) = 0$

Or, $\sin^3(\omega t) = \frac{3}{4} \sin(\omega t) - \frac{1}{4} \sin(3\omega t)$

La présence du terme non linéaire entraîne l'apparition d'une harmonique de pulsation triple 3ω , dont l'amplitude, de l'ordre de θ_0^3 , est beaucoup plus faible. Il faudrait donc chercher la solution sous la forme : $\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega t) + \theta_1 \sin(3\omega t)$, avec $\theta_1 \ll \theta_0$. Mais en reportant cette solution dans l'équation, on obtiendrait de nouvelles harmoniques de fréquence 5ω , 7ω , 9ω et d'amplitudes toujours plus faibles. En résumé, la solution de l'équation semble être de la forme :

$\theta(t) = \theta_0 (\sin(\omega t) + \varepsilon_1 \sin(3\omega t) + \varepsilon_2 \sin(5\omega t) + \dots)$, avec $1 \gg \varepsilon_1 \gg \varepsilon_2 \gg \dots$

Le terme non linéaire crée ainsi une multitude d'harmoniques, l'évolution n'est plus sinusoïdale. On remarque par ailleurs que le spectre de θ ne contient que les harmoniques impaires. Cela provient de la symétrie du système par rapport à la position d'équilibre $\theta = 0$. En effet, au bout d'une demi-période par rapport à une position quelconque, le pendule se trouve dans une position symétrique :

$$\theta\left(t + \frac{T}{2}\right) = -\theta(t) \rightarrow \text{pour tout } n, A_n \sin\left(n\omega\left(t + \frac{T}{2}\right)\right) = -A_n \sin(n\omega t)$$

$$\rightarrow A_n \sin(n\omega t + n\pi) = -A_n \sin(n\omega t)$$

Donc $A_n = 0$ pour n pair.

Déterminons la période du phénomène (ou la pulsation fondamentale ω). On reporte l'expression de $\theta(t)$ dans l'équation et on néglige les termes en ε . On obtient alors : $-\omega^2 + \omega_0^2 - \frac{\omega^2 \theta_0^2}{8} = 0$

Ainsi, $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{\theta_0^2}{8}}$, et comme $\theta_0 \ll 1$, $T \approx T_0 (1 + \frac{\theta_0^2}{16})$ (formule de Borda) avec T_0 la période de l'oscillateur harmonique. En résumé, si l'amplitude n'est pas assez faible, l'oscillateur est

anharmonique : la période de l'oscillation dépend de l'amplitude (pas d'isochronisme) et les termes non linéaires génèrent de nouvelles fréquences (le signal est alors composé d'harmoniques).

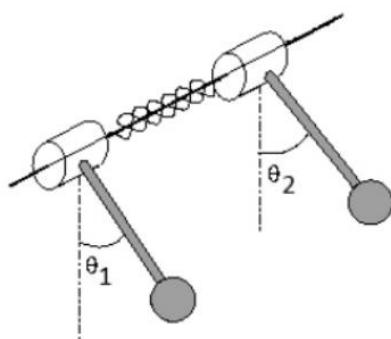
Comme on vient de le voir, la présence de phénomènes non linéaires implique qu'une auto-oscillation ne peut être purement sinusoïdale, son spectre possède forcément des harmoniques. Ce résultat est généralisable à l'électronique, où des oscillateurs auto-entretenus sont présents par exemple dans les montres à quartz et permettant ainsi la mesure du temps.

2) Oscillateurs à 2 degrés de liberté

a) Pendules couplés

On dit que deux objets sont couplés lorsqu'ils interagissent l'un avec l'autre. On considère 2 pendules couplés par un fil de torsion.

- Masses des pendules identiques notées m
- Longueurs des pendules identiques notées l
- Moments d'inertie des pendules identiques notés J
- Constante de couplage C
- Approximation des petits angles



On applique le théorème du moment cinétique aux deux pendules et on obtient :

$$\begin{cases} J\ddot{\theta}_1 = -mgl \sin(\theta_1) - C(\theta_1 - \theta_2) \\ J\ddot{\theta}_2 = -mgl \sin(\theta_2) + C(\theta_1 - \theta_2) \end{cases}$$

En posant $\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{J}}$ et $\omega_c = \sqrt{\frac{C}{J}}$ et en considérant des petits angles, on peut réécrire :

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 = -(\omega_0^2 + \omega_c^2)\theta_1 + \omega_c^2\theta_2 \\ \ddot{\theta}_2 = \omega_c^2\theta_1 - (\omega_0^2 + \omega_c^2)\theta_2 \end{cases}$$

Sous forme matricielle : $\begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(\omega_0^2 + \omega_c^2) & \omega_c^2 \\ \omega_c^2 & -(\omega_0^2 + \omega_c^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$

Remarque : avec un autre système d'oscillateurs à 2 degrés de liberté, on obtiendrait le même système en redéfinissant les pulsations.

On va maintenant chercher les modes propres, obtenus en diagonalisant la matrice précédente. On dit qu'un système est dans un mode propre lorsque tous les paramètres du système oscillent à la même pulsation ω .

On trouve $\omega_S = \omega_0$ et $\omega_A = \sqrt{\omega_0^2 + 2\omega_c^2}$

En se plaçant dans la base propre associée, on peut considérer le problème comme deux oscillateurs harmoniques découplés de pulsations respectives ω_S et ω_A .

Remarques :

- Indépendance des solutions symétrique et anti-symétrique
- Les deux pendules oscillent à la même fréquence
- Une seule fréquence est nécessaire pour décrire le système
- La fréquence est différente suivant le mode excité

On s'intéresse à l'évolution d'un état initial particulier : $\theta_1 = \theta_0$, $\theta_2 = 0$, $\dot{\theta}_1 = 0$ et $\dot{\theta}_2 = 0$.

La solution est une combinaison linéaire des modes propres.

$$\begin{cases} \theta_1 = C_S \cos(\omega_S t + \varphi_S) + C_A \cos(\omega_A t + \varphi_A) \\ \theta_2 = C_S \cos(\omega_S t + \varphi_S) - C_A \cos(\omega_A t + \varphi_A) \end{cases}$$

D'après les conditions initiales : $\varphi_S = \varphi_A = 0$, $C_S = C_A$ et $\theta_0 = 2C_S = 2C_A$

Ainsi :
$$\begin{cases} \theta_1 = \frac{\theta_0}{2} (\cos(\omega_S t) + \cos(\omega_A t)) \\ \theta_2 = \frac{\theta_0}{2} (\cos(\omega_S t) - \cos(\omega_A t)) \end{cases}$$

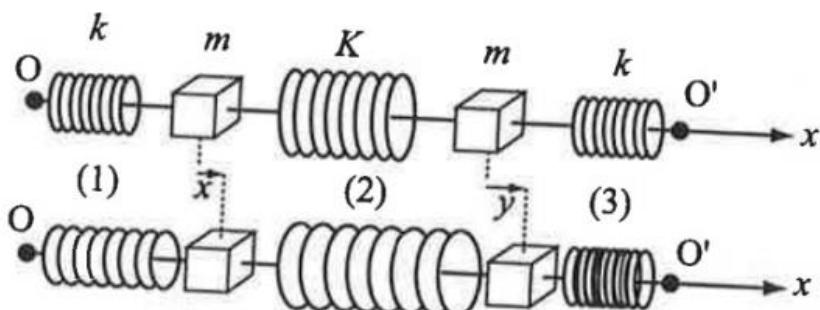
Soit :
$$\begin{cases} \theta_1 = \theta_0 \cos\left(\frac{\omega_S + \omega_A}{2}t\right) \cos\left(\frac{\omega_A - \omega_S}{2}t\right) \\ \theta_2 = \theta_0 \sin\left(\frac{\omega_S + \omega_A}{2}t\right) \sin\left(\frac{\omega_A - \omega_S}{2}t\right) \end{cases}$$
, ω_S et ω_A sont voisins, on a alors apparition de battements à la pulsation $\frac{\omega_A - \omega_S}{2}$

On a alors besoin de deux fréquences pour décrire le système. Le couplage permet un transfert d'énergie entre les deux pendules.

Remarque : ici on parle d'oscillations libres : on impose des conditions initiales et on laisse le système évoluer. A bien différencier du phénomène de résonance qui a lieu quand on a une excitation forcée. Les modes propres sont toujours définis en évolution libre.

b) Masses couplées

On considère 2 masses dont le mouvement est couplé par l'intermédiaire d'un ressort, avec la paramétrisation suivante :



La longueur du ressort (2) est : $l_2 = l_0 - x + y$

Pour les ressorts (1) et (3) : $l_1 = l_0 + x$ et $l_3 = l_0 - y$

En appliquant le principe fondamental de la dynamique à chacune des deux masses on obtient les équations couplées suivantes :

$$\begin{cases} m\ddot{x} + (K + k)x = Ky \\ m\ddot{y} + (K + k)y = Kx \end{cases}$$

Le mouvement général d'un système peut être décrit par une superposition de ses modes propres.

On cherche des solutions sous la forme : $x(t) = \alpha e^{-i\omega t}$ et $y(t) = \beta e^{-i\omega t}$, α et β sont complexes.

En injectant ces solutions dans les deux équations précédentes, on obtient un système matriciel que l'on peut diagonaliser pour obtenir deux solutions :

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ et } \omega_2 = \sqrt{\frac{k+2K}{m}}$$

On obtient ainsi 2 modes propres :

- Pour $\omega = \omega_1$, $\beta = \alpha$: x et y sont en phase, on appelle donc ce mode le mode symétrique.
- Pour $\omega = \omega_2$, $\beta = -\alpha$: x et y sont en opposition de phase, on appelle donc ce mode le mode antisymétrique.

La solution générale est une combinaison linéaire des deux modes :

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= A \cos \omega_1 t + B \sin \omega_1 t + C \cos \omega_2 t + D \sin \omega_2 t \\ y(t) &= A \cos \omega_1 t + B \sin \omega_1 t - C \cos \omega_2 t - D \sin \omega_2 t \end{aligned}}$$

On constate que la solution générale dépend désormais uniquement des conditions initiales du système. On va voir qu'en fonction du choix des conditions initiales on va pouvoir « activer » l'un ou l'autre des modes propres ou bien une combinaison linéaire des deux.

- Si $x(0) = a$ et $y(0) = a$: on active le mode symétrique, oscillations à ω_1
- Si $x(0) = -a$ et $y(0) = a$: on active le mode antisymétrique, oscillations à ω_2
- Si $x(0) = a$ et $y(0) = 0$: on a une oscillation des deux masses en quadrature à la pulsation $\omega_0 = (\omega_2 + \omega_1)/2$ et modulées en amplitude à $\Omega = (\omega_2 - \omega_1)/2$

Le dernier cas permet de faire une analogie avec l'inversion de la molécule d'ammoniac (à prendre avec des pinces cépendant).

XI Mesure du temps (voir [19] à [22])

Nos méthodes de mesure du temps reposent sur ce que l'on a d'abord cru parfait et immuable : le mouvement de la Terre. Très tôt, les civilisations ont eu besoin de mesurer le temps qui s'écoule. L'utilisation des mouvements célestes comme horloge a été l'idée la plus naturelle, ces mouvements paraissant de prime abord immuables, réguliers et uniformes. L'augmentation de la précision de mesure du temps va montrer qu'il n'en est rien et la recherche d'un temps vraiment uniforme va rendre obsolètes les vieilles définitions.

Du fait de l'augmentation de la précision dans la mesure du temps, les échelles utilisées ont rapidement évolué. La rotation diurne de la Terre autour de son axe a longtemps semblé suffisamment uniforme pour servir de base à l'échelle de temps utilisée par les astronomes et appelée Temps universel, mais on s'est aperçu que la Terre ralentissait en constatant, par exemple, que la Lune s'éloignait de la Terre d'une manière qui n'était pas en accord avec les calculs théoriques. Cela a conduit les astronomes à construire une autre échelle de temps fondée sur le mouvement orbital (révolution) de la Terre autour du Soleil.

La durée de l'année n'est cependant pas vraiment stable non plus et on a été amené à nouveau à changer d'échelle de temps. On utilise actuellement, et ce depuis 1967, une échelle de temps construite différemment, une échelle physique et non plus astronomique : on fabrique, à l'aide d'horloges atomiques (mesurant les fréquences des atomes), une "seconde" particulièrement stable. On va alors ajouter ces secondes les unes derrière les autres pour fabriquer une échelle de temps uniforme : le Temps atomique international, indépendant des mouvements célestes.

1) Les horloges

a) Cadran solaire et astronomie

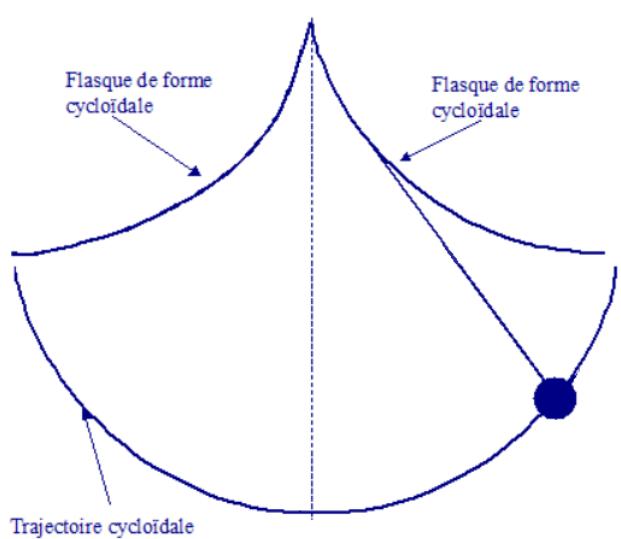
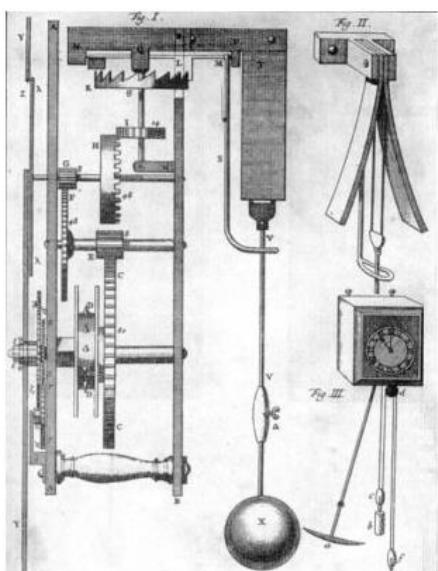
Parmi les dispositifs utilisés pour mesurer le temps, on peut citer le cadran solaire, qui fut l'un des premiers objets utilisés par l'Homme. Le principe du gnomon s'applique très simplement au cadran solaire : l'ombre du style se projette sur des divisions créées artificiellement sur la surface plane, indiquant l'écoulement des heures. L'ombre suit la course du soleil dans le ciel et passe progressivement sur chaque division. Le cadran solaire permettait ainsi de connaître l'heure.

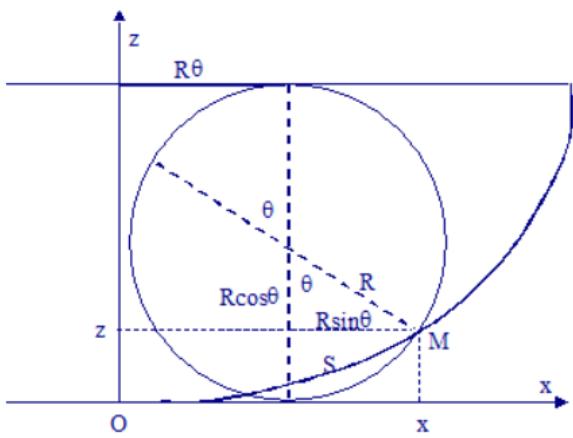
Le temps donné par les cadans solaires est ce que l'on appelle en astronomie le temps solaire vrai d'un lieu. Ce temps est donc un temps local qui n'est pas uniforme à cause de la non-uniformité du mouvement du Soleil dans le ciel. Cela tient au fait que le Soleil vrai se déplace sur une orbite elliptique suivant les lois de Kepler, dans le plan de l'écliptique. Ce temps fût d'un usage très courant jusqu'au XVIII^e siècle. Le développement rapide des moyens de communication rendit cependant obligatoire l'adoption d'un temps solaire moyen. Ce temps solaire moyen est donné par un soleil moyen (fictif) se déplaçant sur une orbite circulaire, à vitesse constante, dans le plan de l'équateur céleste. Ce temps solaire moyen est à l'origine de la première définition astronomique de la seconde jusqu'en 1960 : c'était 1/86400 du jour solaire moyen.

On va maintenant étudier différents dispositifs qui ont été utilisés ou même sont utilisés aujourd'hui.

b) Pendule de Huygens

Galilée, le premier, remarque l'intérêt du mouvement régulier du pendule pour la construction d'horloges. Mais c'est Christian Huygens (1629-1695) qui réussira à résoudre les problèmes liés à l'utilisation du pendule (non-isochronisme des grandes oscillations) et à inventer une horloge basée sur le pendule pesant, mais dotée d'un système de joues de forme cycloïdale raccourcissant la longueur libre du fil (en utilisant un ruban lié à une masse, le ruban s'enroulant autour de deux flasques symétriques de forme adéquate) à mesure que l'angle du pendule avec la verticale augmente. Cette horloge à pendule est bien plus précise que les horloges antérieures.





Une cycloïde est la courbe décrite par un point M de la circonference d'un cercle de rayon R qui roule sans glisser sous une droite horizontale.

On part avec $\theta = 0$ quand le point M est au plus bas de sa trajectoire (à $2R$ sous la droite).

On prend un repère Oxz centré sur le point d'origine O ($\theta = 0$)

Quand le cercle tourne d'un angle θ , il avance de $R\theta$ et le point M avance de $R\sin\theta$ par rapport au centre du cercle. Le point M a donc avancé de

$$x = R\theta + R\sin\theta$$

Le point M a monté de

$$z = R - R\cos\theta$$

$$z = R(1 - \cos\theta)$$

On veut montrer que, quelle que soit la position de départ à partir de laquelle on le lâche, le pendule arrive à sa position d'équilibre ($x = 0$) dans le même temps.

On note s l'abscisse curviligne : $ds = \sqrt{dx^2 + dz^2}$

$$\frac{ds}{d\theta} = R\sqrt{(1 + \cos\theta)^2 + \sin^2\theta} = R\sqrt{2(1 + \cos\theta)} = 2R\sqrt{\cos^2\frac{\theta}{2}} = 2R\cos\frac{\theta}{2}$$

On a donc : $s = 4R\sin\frac{\theta}{2}$, $\dot{s} = 2R\dot{\theta}\cos\frac{\theta}{2}$ et $\ddot{s} = 2R\ddot{\theta}\cos\frac{\theta}{2} - R\dot{\theta}^2\sin\frac{\theta}{2}$

Le pendule subit le poids et la tension de la tige. D'après le théorème de l'énergie mécanique :

$$\frac{dE_m}{dt} = 0, \text{ on a } 2R^2\dot{\theta}^2\cos^2\frac{\theta}{2} + 2gR\sin^2\frac{\theta}{2} = \text{cste}$$

$$\text{Donc : } 2R\dot{\theta}\ddot{\theta}\cos^2\frac{\theta}{2} - R\dot{\theta}^3\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} + g\dot{\theta}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} = 0$$

$$\text{Soit : } 2R\ddot{\theta}\cos\frac{\theta}{2} - R\dot{\theta}^2\sin\frac{\theta}{2} + g\sin\frac{\theta}{2} = 0$$

Ainsi, $\ddot{s} + \frac{g}{4R}s = 0$ (équation du pendule simple), la période vaut : $T = 4\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$, indépendante de l'amplitude (on parle d'isochronisme)

D'autres horloges suivront, jusqu'à ce que l'électronique voie le jour.

c) Horloge à quartz

La montre à quartz signe un changement important dans l'histoire de la mesure du temps. Basée sur les propriétés piézoélectriques du quartz, elle supplante très vite la montre mécanique. Une lamelle de quartz soumise à une compression mécanique voit apparaître une tension à ses bornes et vice-versa : c'est l'effet piézoélectrique.

Un diviseur de fréquences permet de passer de la fréquence élevée du quartz à la fréquence utile dans les montres. Ce n'est qu'après avoir réussi à miniaturiser les systèmes diviseurs de fréquence, avec

l'apparition des transistors puis des circuits intégrés que le principe de l'horloge à quartz, connu depuis 1920, a pu vraiment être mis en pratique sous une forme intéressante.

(voir **électricité-électronique**)

2) Mesures plus précises

a) Horloge atomique

Une horloge atomique est une horloge qui utilise la pérennité et l'immuabilité de la fréquence du rayonnement électromagnétique émis par un électron lors du passage d'un niveau d'énergie à un autre pour assurer l'exactitude et la stabilité du signal oscillant qu'elle produit.

Le principe d'une horloge atomique est basé sur un aspect fondamental de la physique quantique : un atome peut exister sous différents niveaux d'énergie qui sont quantifiés, c'est à dire que l'énergie d'un atome ne peut prendre que des valeurs bien précises, caractéristiques de la nature de l'atome (hydrogène, césum, etc.), et il lui est « interdit » de se trouver entre ces valeurs. Pour faire passer un atome d'un niveau d'énergie à un autre plus élevé (on parle de transition atomique), il doit recevoir un photon dont l'énergie correspond exactement à la différence d'énergie entre le niveau final et le niveau initial. À l'inverse, pour revenir au niveau d'énergie initial, il doit lui-même émettre un photon de même énergie. Le fonctionnement de cette horloge est basé sur l'oscillateur à quartz, les atomes de césum n'étant là que pour contrôler et ajuster la fréquence du signal généré par le quartz.

b) Relativité restreinte

(voir **relativité restreinte**)

La détermination précise du temps permet une meilleure étude des atomes et des molécules. La mesure du temps intervient également dans les tests de la gravitation et de la structure de l'espace-temps. On pourrait naïvement se poser la question de savoir si l'on a réellement besoin de tant de précision. Il y a plutôt lieu de s'interroger sur les recherches et technologies auxquelles cette précision donne accès. En recherche fondamentale, la détermination précise du temps permet de contribuer à une connaissance de plus en plus fine des multiples propriétés des atomes et des molécules. Les constantes physiques qui peuvent être déterminées par la seule mesure de fréquences de phénomènes physiques deviennent accessibles avec des précisions accrues. Enfin, la plupart des tests des modèles de structure de l'espace-temps et de la gravitation font intervenir la mesure du temps.

XII Résonance (voir [2], [6], [18], [24], [25])

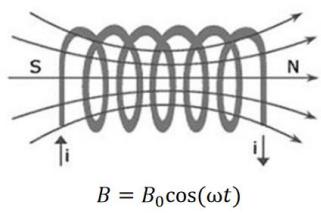
Une légende dit que la Castafiore, personnage des aventures de Tintin, peut casser du verre à distance. Comment cela est-il possible ?

Introduction



Une bobine (exciteur : la Castafiore) fait résonner un diapason (résonateur : le verre en cristal). On observe un maximum d'amplitude de la vibration à une certaine fréquence. Ceci est caractéristique d'un phénomène de résonance.

Exciteur
(Castafiore -> Bobine)



Résonateur
(Verre -> diapason)



$$\text{Force} \propto B^2 : \text{Oscillation du diapason}$$

La résonance est la réponse maximale d'un résonateur sous l'action d'un excitateur.

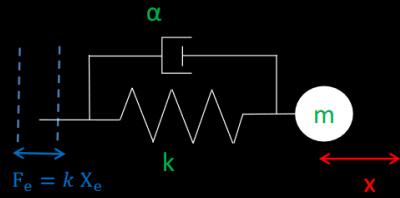
Dans ce cours, nous allons décrire le phénomène de résonance d'un oscillateur mécanique pour ensuite l'élargir à tous les domaines de la physique. Même si ces résonances sont parfois à éviter, nous verrons qu'elles permettent de caractériser de nombreux systèmes. On supposera que les systèmes étudiés sont linéaires, en régime permanent et en régime faiblement amorti.

1) Résonances d'un oscillateur forcé

a) Résonance d'élongation

On étudie le système masse-ressort :

Résonance d'elongation



Système : masse m

Référentiel : Terrestre supposé galiléen

Principe fondamental de la dynamique :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\alpha}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = \frac{k X_e}{m}$$

Si excitation sinusoïdale

$$X_e = x_e \cos(\omega t)$$



$$\underline{x} = \frac{\underline{x}_e}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + i \frac{\omega}{Q \omega_0}}$$

Pulsation propre

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Facteur de qualité

$$Q = \frac{1}{\alpha} \sqrt{km}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dz}{dt} + \omega_0^2 z = \frac{F}{m}$$

Soit une excitation sinusoïdale, $F = F_e \cos(\omega t)$. Comme le système est linéaire, l'amplitude est de la forme $z = z_m \cos(\omega t + \psi)$. En insérant cette solution dans l'équation différentielle, la réponse en amplitude à l'excitation vérifie

$$\underline{z} = \frac{\frac{F}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i \frac{\omega \omega_0}{Q}}$$

Cette expression est similaire à la réponse en tension d'un RLC!

Rappels : Caractéristiques d'une résonance d'elongation :

► Uniquement si $Q \approx \frac{1}{\sqrt{2}}$

► à $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$

► $\psi = -\frac{\pi}{2}$ à résonance

b) Résonance de vitesse

De même $v = v_m \cos(\omega t + \phi)$ et en complexe $\underline{v} = i\omega \underline{x}$. D'où

$$\underline{v} = \frac{\frac{F}{m}}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

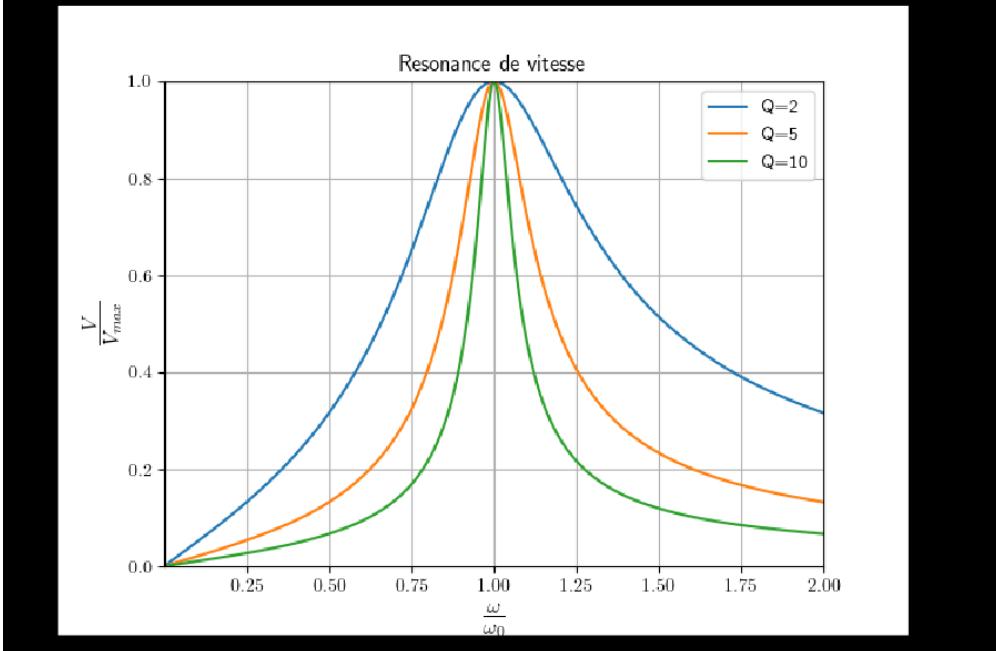
et donc

$$v_m = \frac{\frac{F_e}{\alpha}}{\sqrt{1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x} \right)^2}}$$

$$\phi = \arctan \left(Q \left(\frac{1}{x} - x \right) \right)$$

Formule analogue à la résonance d'intensité d'un RLC. On retrouve donc les mêmes caractéristiques.

Résonance de vitesse



Caractéristiques d'une résonance de vitesse :

- ▷ Quel que soit Q
- ▷ Maximum pour $\omega = \omega_0$ (mode propre du système)
- ▷ $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$
- ▷ $\phi = 0$ à résonance

		Analyses	
	$X_e = x_e \cos(\omega t)$		
$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\alpha}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = \frac{k X_e}{m}$	Equation différentielle	$\frac{d^2U}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dU}{dt} + \frac{U}{LC} = \frac{E}{LC}$	
α	Terme dissipatif	R	
$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$	Pulsation propre	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$	
$Q = \frac{1}{\alpha} \sqrt{km}$	Facteur de qualité	$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$	
Elongation x Vitesse v	Résonances	Tension U Intensité i	

c) Résonance de puissance

Appliquons le théorème de la puissance mécanique au ressort :

$$\frac{dEm}{dt} = Fv - \alpha v^2$$

En régime permanent

$$\left\langle \frac{dEm}{dt} \right\rangle_T = 0 \Leftrightarrow P_t = < \alpha v^2 > = \frac{\alpha v_m}{2}$$

La puissance transmise au système est donc de la forme

$$P_t = \frac{\frac{F_e^2}{\alpha}}{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}$$

Cette puissante est maximale pour $\omega = \omega_0$, il y a alors résonance de puissance. Ceci est aussi vrai pour le RLC et tous les oscillateurs, on en déduit une nouvelle définition du phénomène de résonance : La résonance correspond au maximum de puissance transmise au résonateur, lorsque l'apport d'énergie se fait à ω_0 , fréquence propre du système.

Que se passe-t-il pour des systèmes plus complexes ? Un système de quatre oscillateurs couplés présente quatre modes propres et aura donc quatre fréquences de résonances. Si ce nombre de degrés de liberté augmente jusqu'à tendre vers l'infini, le milieu pouvant être décrit de manière continue, que se passe-t-il ? Autrement dit, existe-t-il des résonances pour des phénomènes ondulatoires ?

2) Cavités résonantes

(voir optique)

Les résonances des phénomènes ondulatoires en cavité ont des propriétés analogues à celles des oscillateurs : puissance transmise maximale quand l'excitation se fait sur les modes propres du résonateur et largeur directement liée au facteur de qualité (et donc aux pertes).

3) Application à l'étude de la matière

But : Utiliser les propriétés du phénomène de résonance pour caractériser un système à priori complexe : le diapason.

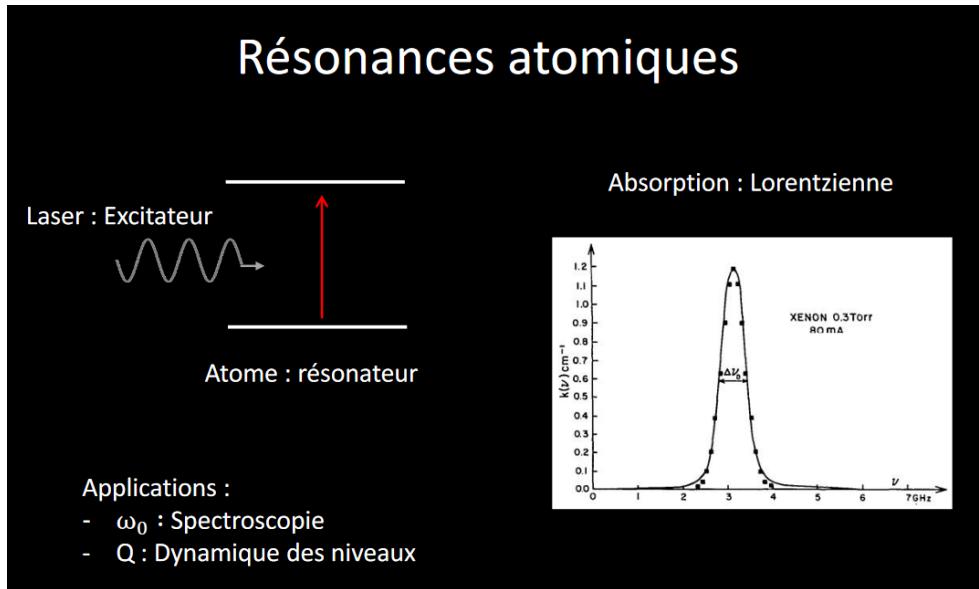
On envoie un courant alternatif d'environ un ampère dans la bobine. Celle-ci crée un champ B variable que l'on canalise au voisinage du haut du diapason, grâce à un noyau de fer doux. La force exercée est en B^2 ($E = \mu H = \chi B^2$ car le moment magnétique est induit) donc la réponse est deux fois plus rapide que l'excitation. Les vibrations du diapason se transmettent à l'air de la caisse de résonance et on utilise un micro à électret sensible à la surpression engendrée. On suppose que tension fournie par ce micro est l'image linéaire des oscillations du diapason.

On peut donc prendre quelques points autour de la résonance et utiliser le modèle le plus simple que nous ayons construit pour faire un ajustement : celui de la résonance d'élongation.

Ce modèle fonctionne et on peut extraire de l'ajustement $\omega_0 = 2\pi \times 440,26 \pm 0,05 \text{ Hz}$ et $Q = 3500 \pm 150$. L'incertitude sur Q est donnée par une minimisation des moindres carrés et celle sur ω_0 est essentiellement due à l'écart entre les points de mesure.

Ces valeurs sont cohérentes avec celles attendues mais il faut néanmoins rester critique envers l'ajustement simpliste utilisé.

Les résonances de systèmes complexes peuvent être ajustées par des modèles simples afin de les caractériser.



Envoyer un laser (exciteur) sur des niveaux d'énergie (résonateur) conduit à une absorption présentant des maxima de forme Lorentzienne. De la même manière que précédemment, les fréquences de ces résonances renseignent sur l'écart d'énergie entre les niveaux (application : spectroscopie) tandis que leur largeur renseigne sur les pertes (application : dynamique des systèmes).

Le phénomène de résonance caractérise un transfert optimal d'énergie entre un excitateur et un résonateur, que le système soit un ensemble d'oscillateurs ou une onde en cavité. Tous les modèles précédents ne prennent pas en compte les effets non-linéaires. Ceux-ci apparaissent quand la puissance devient importante et ils tendent à limiter l'amplitude des résonances. C'est donc pour cela que vous aurez beau chanter, vous ne casserez jamais de verres...

XIII Physique non linéaire (voir [1], [7], [23]) (**À COMPLÉTER**)

Portraits de phase...

Oscillateur de Van der Pol :

$$\frac{d^2s}{dt^2} - \epsilon\omega_0(1 - (\frac{s}{s_0})^2)\frac{ds}{dt} + \omega_0^2s = 0$$

Où ϵ est le paramètre de Van der Pol ($\epsilon, \omega_0, s_0 > 0$).

Intérêt : démarrage et stabilisation des oscillations.

- $1 - (\frac{s}{s_0})^2 > 0$: amplification du bruit et donc démarrage des oscillations.
- $1 - (\frac{s}{s_0})^2 < 0$: amortissement.

On multiplie l'équation différentielle par $\frac{ds}{dt}$ et on intègre, en se plaçant en régime permanent pour un mouvement quasi-sinusoidal $s = s_m \cos \omega t$ on trouve que $s_m = 2s_0$.

Ex : résistance négative

Systèmes proies-prédateur...

Le portrait de phase permet l'étude des propriétés de système sans avoir à effectuer de résolution, on peut obtenir beaucoup d'informations en linéarisant autour d'un point attracteur (point d'équilibre stable).