

OPTIQUE

Bibliographie

- [1] cours perso
- [2] <https://www.fabienbeilhe.com/blog/ouverture-diaphragme-photo>
- [3] Astronomie, astrophysique, Agnès Acker, Dunod
- [4] Spectroscopie instrumentale, P. Bousquet, Dunod Université
- [5] L'observation en astrophysique, Pierre Léna et Daniel Rouan
- [6] <http://culturesciencesphysique.ens-lyon.fr/ressource/Spectre-detection-exoplanetes.xml>
- [7] Garing, Ondes électromagnétiques dans un diélectrique, p104-108
- [8] Sanz, MP physique tout-en-un, chapitre 15
- [9] Taillet, Optique physique : approche optique et ondulatoire de la fibre optique
- [10] https://www.francetvinfo.fr/internet/securite-sur-internet/internet-des-cables-sous-marins-pour-faire-transiter-les donnees_1532971.html
- [11] <https://www.falstad.com/embox/guide.html>
- [12] H-prépa, Optique
- [13] <http://anim.institutoptique.fr/Young/>
- [14] Champeau, Ondes lumineuses
- [15] Houard, Optique expérimentale
- [16] Physique expérimentale, De Boeck
- [17] http://www.etienne-thibierge.fr/agreg/cplt_localisation.pdf
- [18] H-prépa, Optique ondulatoire, 2004
- [19] Sextant, Optique expérimentale, III.1.6
- [20] BFR, Optique
- [21] Mauras, Optique
- [22] femtophysique
- [23] <http://www.prof-tc.fr/Lycee/file/Terminale%20S/Specifique/03%20-%20Proprietes%20des%20ondes/Cours%20-%20TP%20-%20Exercices/TP%20-%20Mesure%20du%20pas%20d%20un%20CD.pdf>
- [24] Ashcroft et Mermin, Physique des solides
- [25] Rousseau, Cristallographie géométrique
- [26] <https://toutestquantique.fr/crystallography/>
- [27] <http://ressources.univ-lemans.fr/AccesLibre/UM/Pedago/physique/02/optiondu/fabry.html>

I Bases de l'optique géométrique ([1]) (À COMPLÉTER)

Conditions de Gauss : rayons peu inclinés par rapport à l'axe, rayons passant au voisinage du centre des lentilles

II Systèmes optiques ([1]) (À COMPLÉTER)

Stigmatisme : l'image d'un point fixe de l'axe est un point

Aplanétisme : stigmatisme réalisé également pour un point voisin de l'axe

Avant lentille : espace objet (objet réel, image virtuelle) ; après lentille : espace image (objet virtuel, image réelle)

Expériences : -source lumineuse – filtre coloré – lentille → montre que la distance focale est plus courte pour le bleu que pour le rouge (aberrations chromatiques)

-lampe QI – trou – lentille de grand diamètre – écran → tache bordée de rouge ou de bleu selon la position de l'écran

-expérience précédente mais en masquant la lentille au centre par un écran opaque circulaire de façon à ne l'utiliser que sur une couronne externe de 1cm de large

Correction des aberrations : lentille convergente + lentille divergente de verres différents

Mise en évidence des différentes aberrations : source + 2 réseaux + 2 lentilles convergentes

Minimiser aberrations géométriques : utiliser une lentille de projection de bonne qualité, c'est-à-dire au minimum un doublet achromatique, faire converger la lumière issue de la source au voisinage du centre de cette lentille de projection au moyen d'un condenseur.

III Photographie (voir [2])

L'optique géométrique est une branche de l'optique qui s'appuie notamment sur le modèle du rayon lumineux. Cette approche simple permet entre autres des constructions géométriques d'images (d'où son nom) et d'expliquer leur formation. Dans ce cours nous allons étudier un dispositif commun qu'on a tous sans doute déjà utilisé : l'appareil photo, afin de comprendre, entre autres, comment prendre des photos de bonne qualité.

1) Présentation et modélisation de l'appareil photo

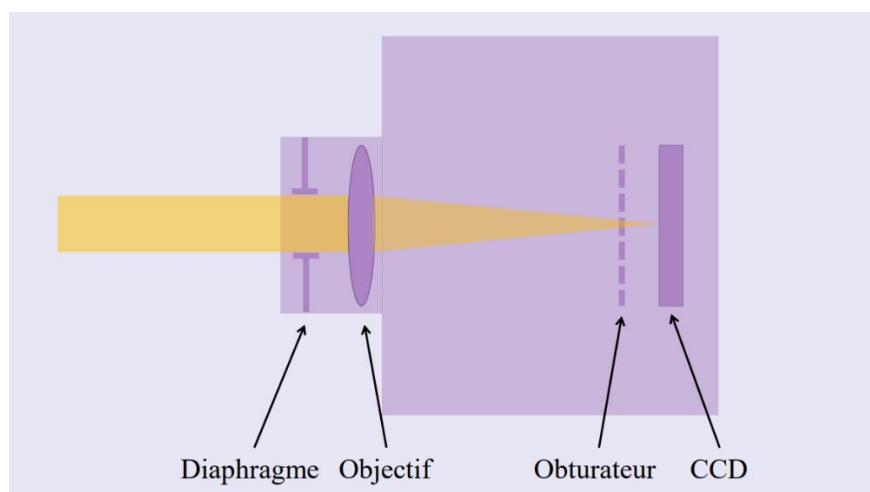
a) Présentation

Un appareil photo est constitué principalement d'un boîtier contenant une pellicule (film photosensible), un obturateur (diaphragme qui s'ouvre plus ou moins longtemps, modifie le temps de pose) et un diaphragme (fait varier la quantité de lumière), d'un objectif, qui est un système optique constitué de plusieurs lentilles convergentes et divergentes, et d'un capteur CCD, constitué d'une matrice de cellule ou pixels, produisant un courant dont l'intensité va être fonction de la quantité de lumière reçue.



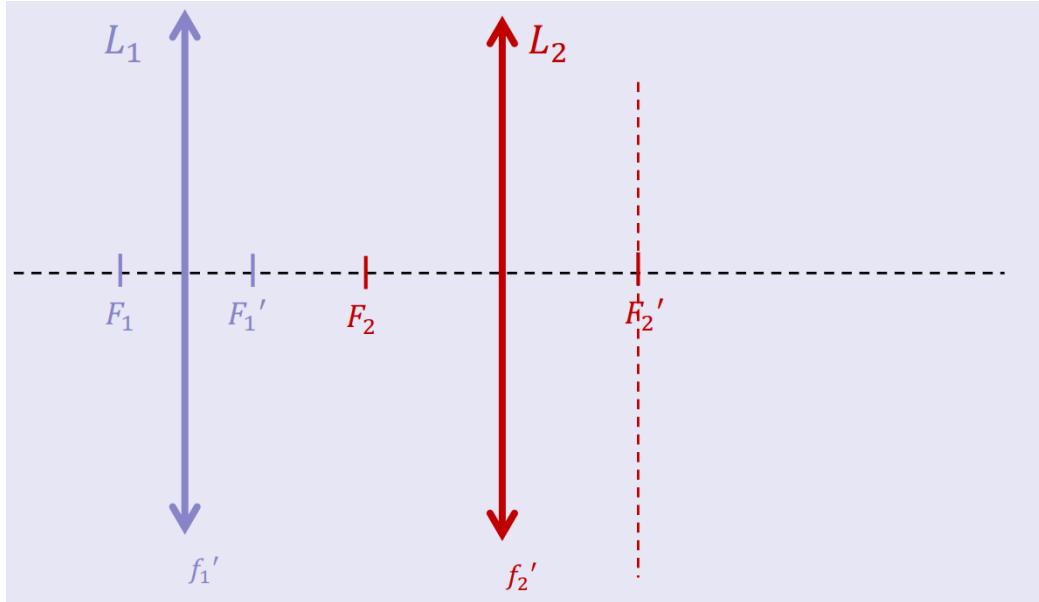
Extrait de la notice :

Dimensions (l x H x p)	130,2x 94,3 x 119,2 mm	Zone de mise au point	Normal: Grand-angle 30 cm - infini / Télé 150 cm - infini - AF Macro / Mise au point Manuelle / Intelligent Auto / Vidéo : Grand-angle 1 cm - infini / Télé 150 cm - infini
Poids	Env. 572 g sans batterie et carte SD	Vitesse d'obturation	Photo: Env. 4 - 1/2,000 sec (Obturateur Mécanique) Env. 1 - 1/16,000 sec (Obturateur Electronique) Paysage nocturne artistique (Environ 60 sec) Vidéo: Env. 1/25 - 1/16,000 sec Env. 1/2 - 1/16,000 sec (Mode vidéo créative / Mode MF)
Pixels effectifs	18.1 Mégapixels		
Taille capteur/ Pixels totaux/ Filtres	Capteur MOS Haute Sensibilité type 1/2.3 (avec pixels ultra-grands) / 18,9 Megapixels / Filtre Couleur Primaire		
OUverture	F2.8 - 5.9 / Diaphragme à Iris à Etape (F2.8 - 8.0 (W), F5.9 - 8.0 (T))	Viseur	Viseur électronique 1166K points (0.2"), Champ de vision: Env. 100%, Lentille 19,6x Grossissement: Env. 2.59x/0,46x (en équivalent 35 mm)
Zoom optique	60x	AVCHD (enregistrement continu)	FHD/60p, FHD/50p: Env. 100 min FHD/60i, FHD/50i: Env. 100 min
Longueur Focale	f = 3.58 - 215mm (équiv. 20 - 1260mm en 35mm en 4:3) (équiv. 21 - 1260mm en 35mm en 3:2) (équiv. 22 - 1320mm en 35mm en 16:9) (équiv. 23 - 1380mm en 35mm en 1:1) (équiv. 28 - 1680mm en 35mm en enregi. vidéo 4K PHOTO) (équiv. 28 - 1680mm en 35mm en enregi. vidéo 4K) (équiv. 22 - 1320mm en 35mm en enregi. vidéo FHD / HD)	MP4 (enregistrement continu)	4K/30p, 4K/25p: Env. 80 min FHD/60p, FHD/50p: Env. 100 min
Extra zoom optique	84x (4 : 3 / 9M (M)), 122x (4 : 3 / 4,5M (S))	AVCHD (enregistrement normal)	FHD/60p, FHD/50p: Env. 50 min FHD/60i, FHD/50i: Env. 50 min
Zoom intelligent	120x	MP4 (enregistrement normal)	4K/30p, 4K/25p: Env. 40 min FHD/60p, FHD/50p: Env. 50 min
Objectif	LUMIX DC VARIO - 14 éléments en 12 groupes (6 lentilles asphériques / 9 surfaces asphériques / 3 lentilles ED)	Taille des fichiers	4896x3672 (18M) (L) / 3456x2592 (9M) (M) / 2400x1800 (4,5M) (S) 4896x3264 (16M) (L) / 3456x2304 (8M) (M) / 2400x1600 (4M) (S) 4896x2752 (13,5M) (L) / 3840x2160 (8M) (M) / 1920x1080 (2M) (S) 5664x3664 (13,5M) (L) / 2592x2592 (7M) (M) / 1824x1824 (3,5M) (S)
Zoom électronique	Max. 4x ((Lorsque le Zoom électronique est utilisé simultanément avec le Zoom Intelligent, vous ne pouvez augmenter le taux de zoom qu'à 2x.)	Qualité d'image	RAW / RAW+Fin / RAW+Standard / Fin / Standard

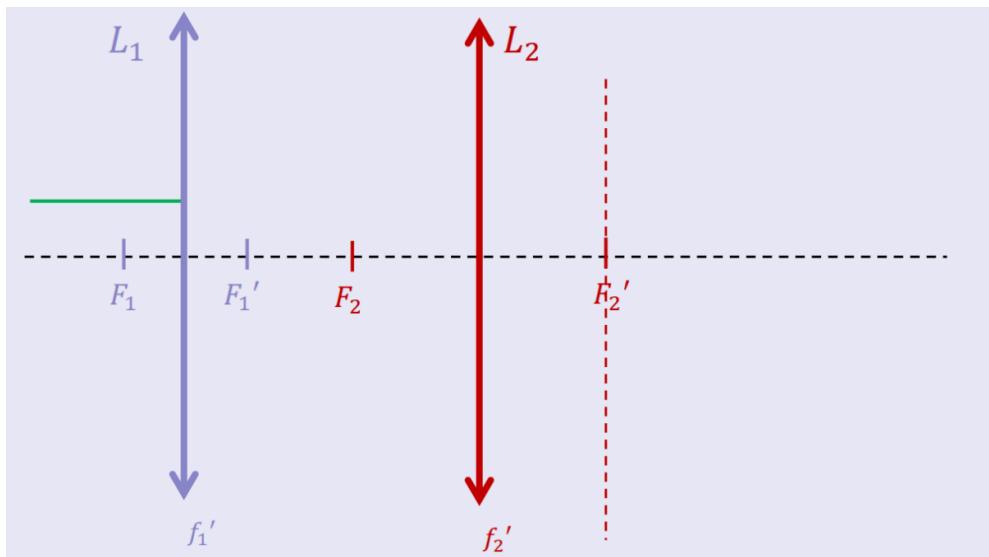


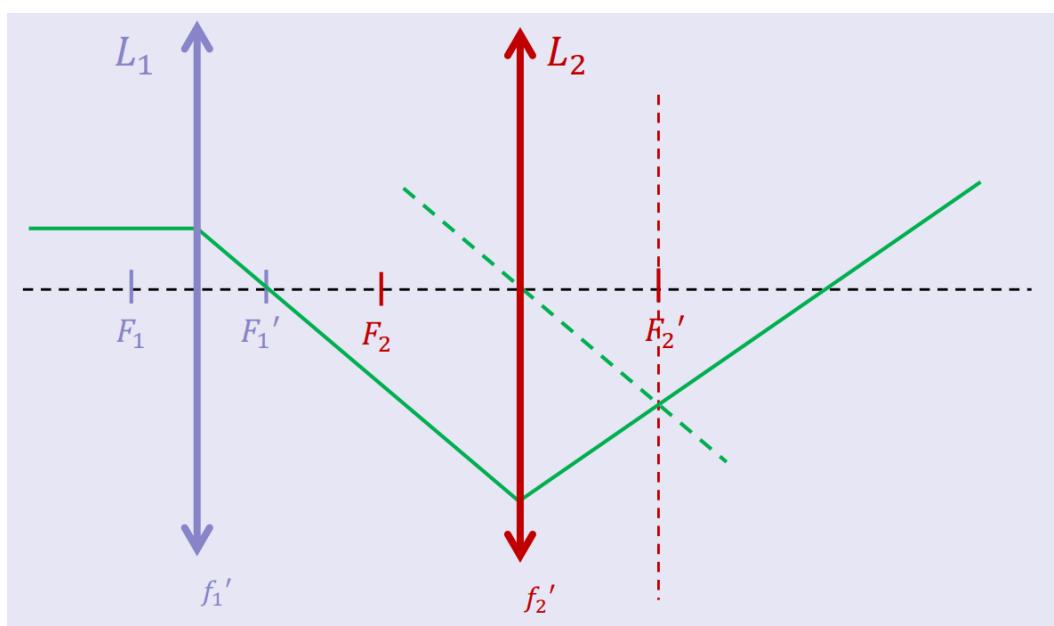
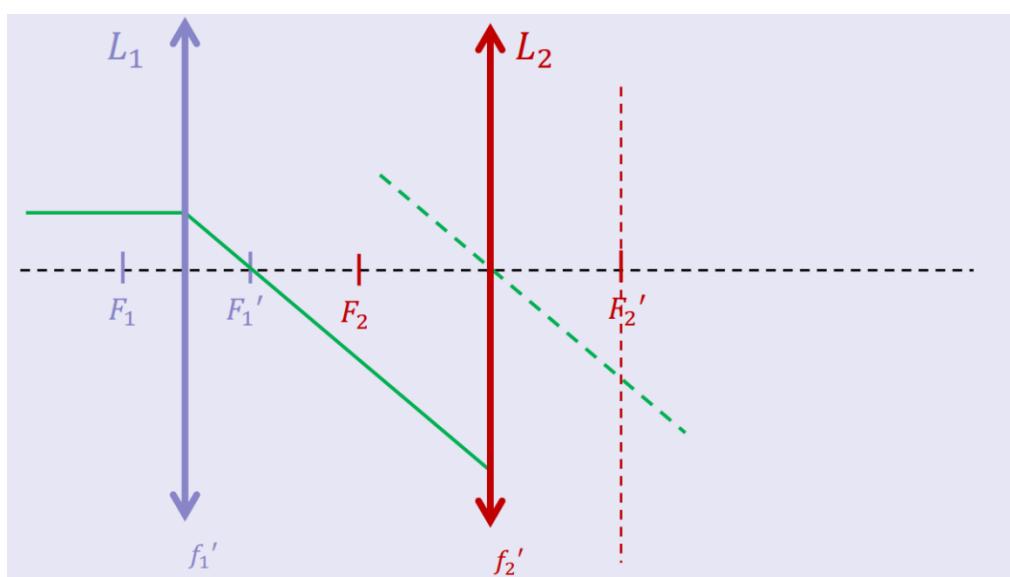
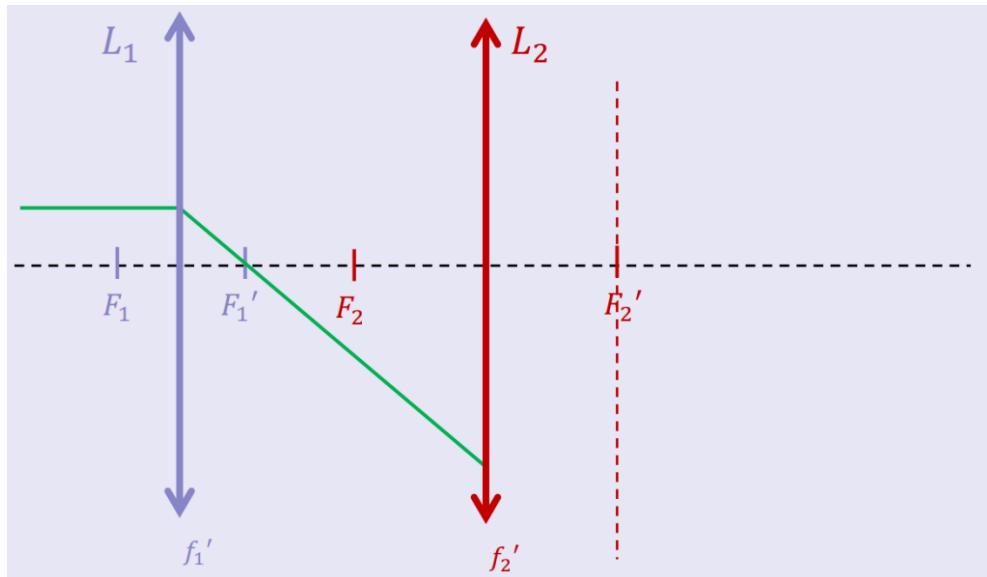
b) Modèle

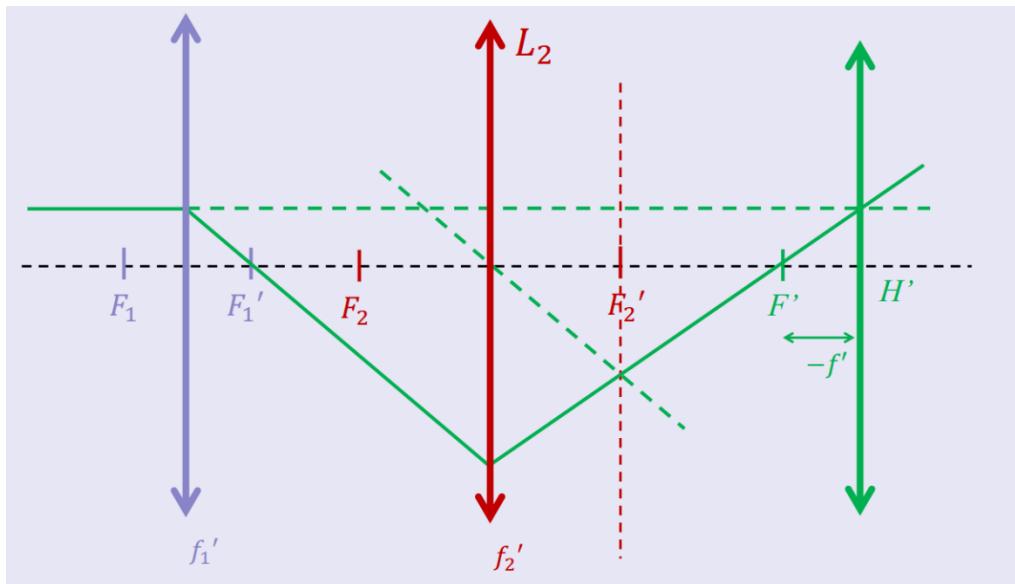
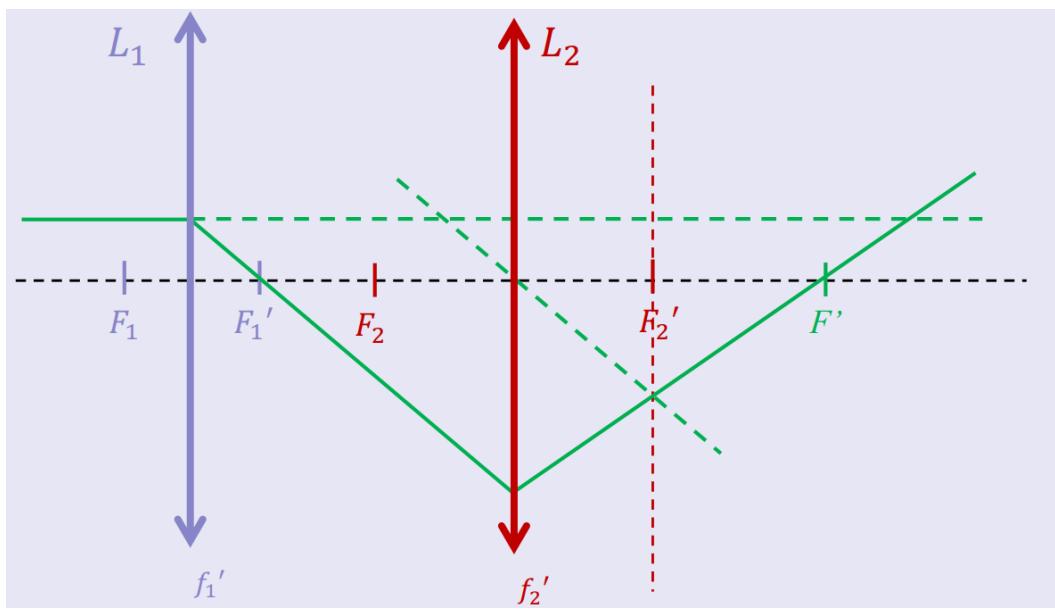
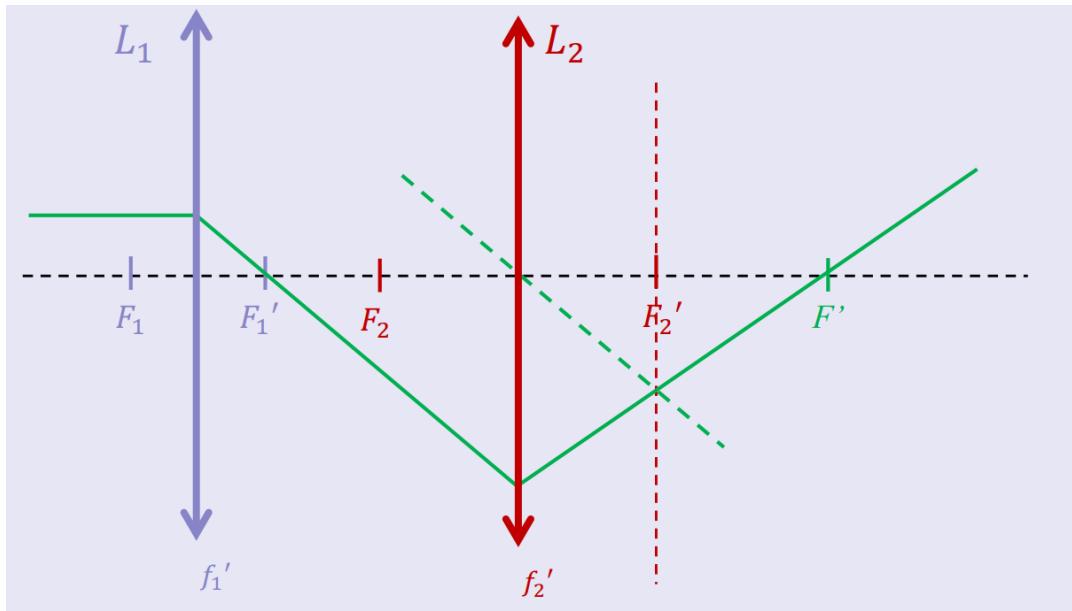
L'objectif est constitué de 14 lentilles. On va commencer par considérer une association de 2 lentilles convergentes de focales différentes.

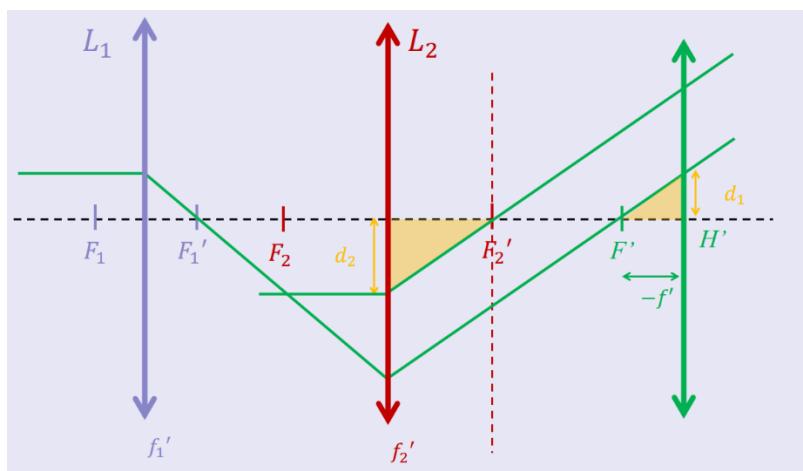
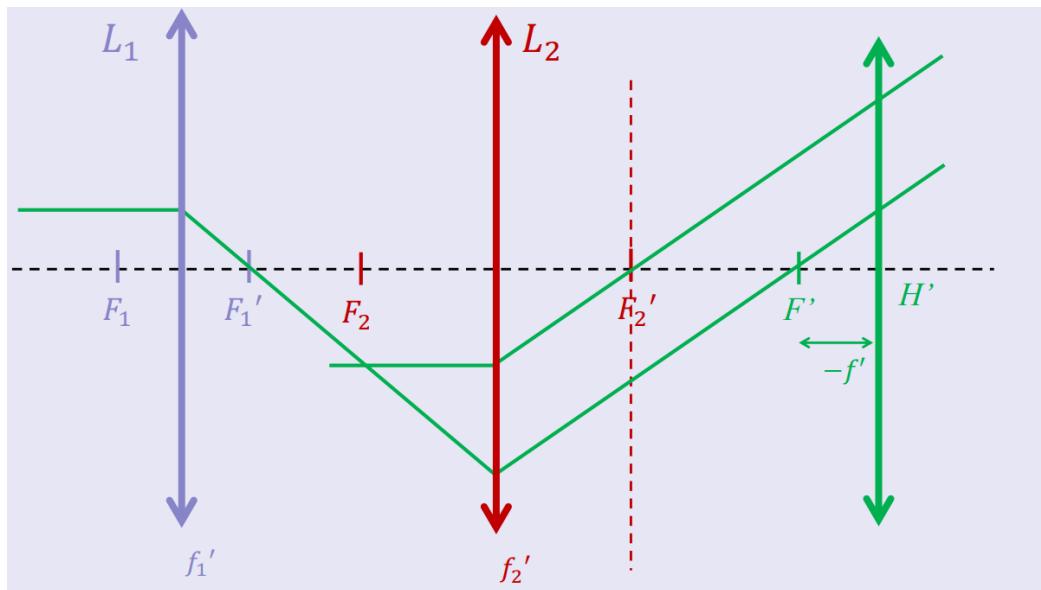
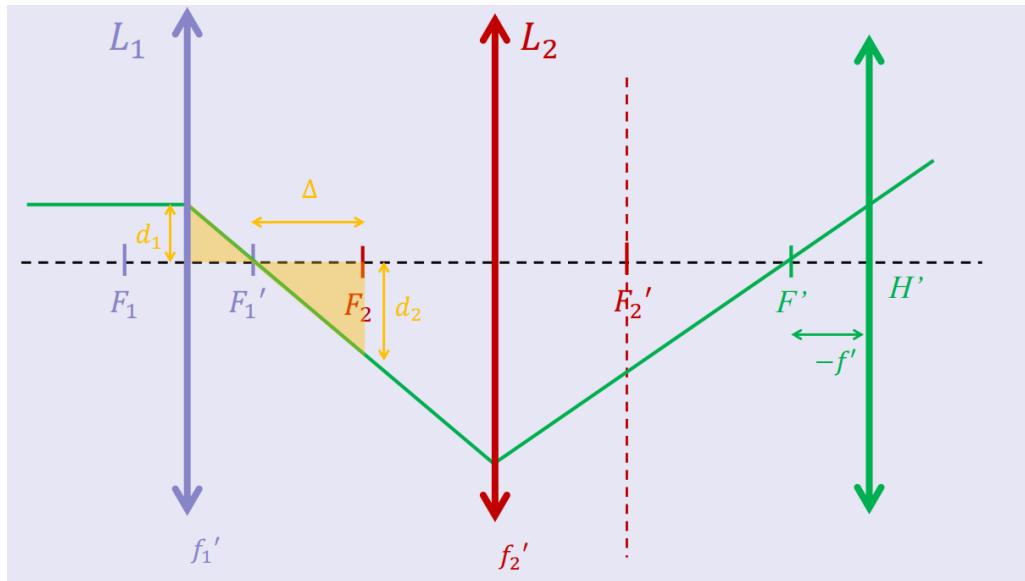


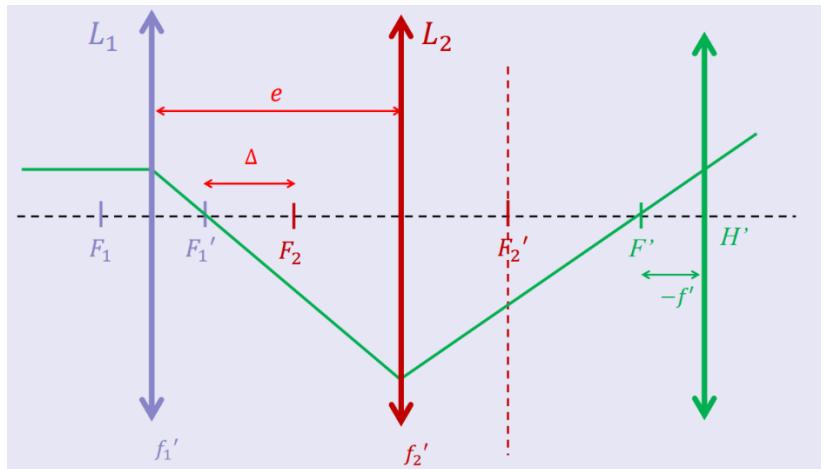
Pour trouver la focale image équivalente : un rayon parallèle entrant sort en croisant le foyer image, les rayons entrant et sortant se croisent au niveau du plan principale image.





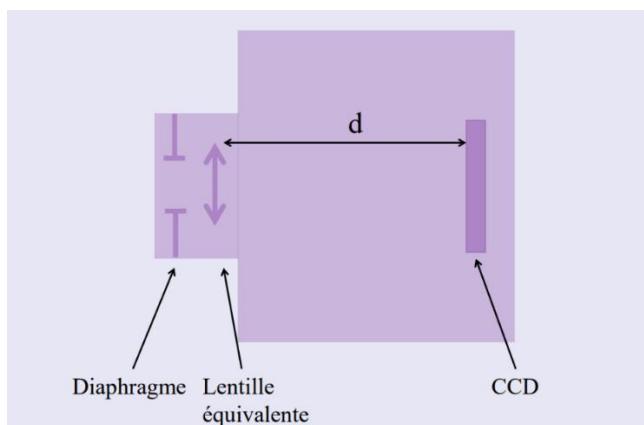






On peut définir la focale de ce système : $\frac{1}{f'} = \frac{1}{f_1'} + \frac{1}{f_2'} - \frac{e}{f_1'f_2'}$ (formule de Gullstrand)

En associant deux lentilles convergentes, on obtient un système divergent. Si on avait pris une lentille convergente et une lentille divergente on aurait obtenu un système convergent. En associant deux lentilles, on peut faire varier finement la focale en les déplaçant les unes par rapport aux autres. Dans l'appareil photo étudié, il y a 14 lentilles, on peut faire un réglage très fin. Par souci de simplification, on modélise ce système de 14 lentilles par une seule lentille mince convergente de focale f' variable. On modélise donc l'appareil photo par un diaphragme, une lentille convergente et un capteur.



Pour obtenir une image correcte, il va falloir que l'image du sujet photographié se forme sur le capteur (mise au point) et que la quantité de lumière reçue par les éléments sensibles du capteur soit « convenable ».

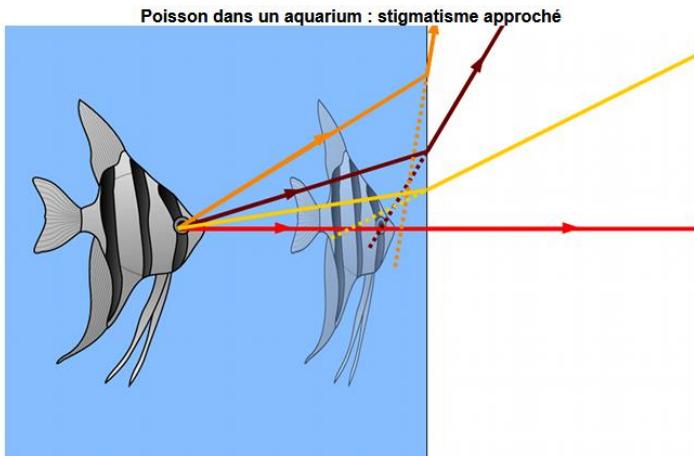
2) Mise au point et netteté

a) Définitions

Mise au point : On dit que l'on fait la mise au point sur un objet A si l'image de l'objet par l'objectif se forme sur le capteur de l'appareil. Pour faire la mise au point on déplace l'objectif par rapport au capteur, de manière à ce que l'image soit nette.

Si l'image d'un point est une petite tache, on parle de stigmatisme approché.

Ex :



Si on trace plusieurs rayons issus d'un même point (l'oeil par exemple), tous ne convergent pas au même point. L'image du poisson est floue ! Le stigmatisme ne peut être qu'approché.

Il est d'usage de caractériser l'ouverture par ce qu'on appelle le nombre d'ouverture : $N = \frac{f'}{D}$, f' est la focale de l'objectif, D est le diamètre d'ouverture du diaphragme.

Le nombre d'ouverture caractérise l'ouverture d'un objectif photographique, il s'agit du réglage permettant d'ajuster le diamètre d'ouverture du diaphragme.

Pour un photographe, l'important est de connaître l'impact du diaphragme sur l'exposition de sa photo. Or pour un même diamètre d'ouverture et un temps de pose donné, la quantité de lumière qui va atteindre le capteur va varier en fonction de la longueur de la focale : **plus la focale sera longue moins la quantité de lumière atteignant le capteur sera importante.** Il faut donc compenser la perte de lumière par une plus grande ouverture.

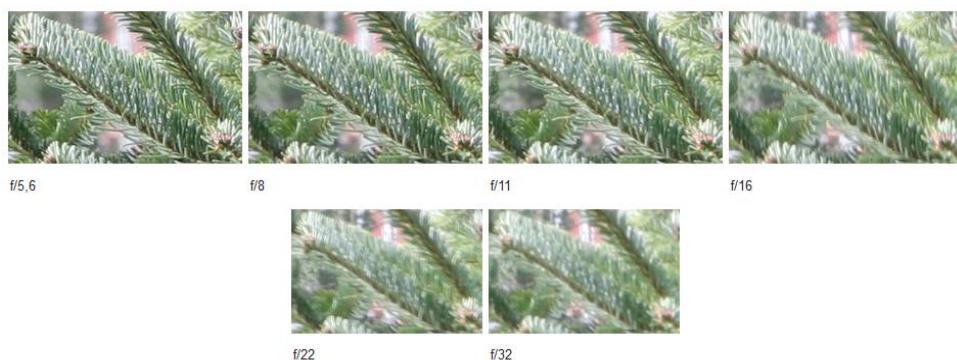
b) Diffraction

Lorsque N augmente, la diffraction n'est plus négligeable. Elle est constitutive de la nature ondulatoire de la lumière. La lumière passant par l'ouverture du diaphragme est diffractée. Plus l'ouverture est faible, plus le phénomène sera sensible.

En photographie, la diffraction influe sur la netteté de l'image : si le diamètre de la tache produite est trop important, la diffraction devient perceptible et nuit à la netteté.

Le rayon de la tache due à la diffraction est donné par : $R = 1,22\lambda N$.

Ex :



L'ouverture du diaphragme permet également de contrôler l'exposition d'une photo.

3) Exposition

a) Paramètres

Exposition : le signal fourni par une cellule sensible du capteur dépend de l'énergie qu'elle reçoit. L'échelle des gris, du noir au blanc, correspond à une énergie reçue variant entre E_{\min} et E_{\max} . Pour E_{\min} , le pixel est noir et pour E_{\max} , le pixel est blanc. Si trop de capteurs reçoivent une énergie inférieure à E_{\min} , l'image est sous-exposée. A l'inverse, si trop de capteurs reçoivent une énergie supérieure à E_{\max} , l'image est surexposée.

L'exposition dépend de l'ouverture du diaphragme, mais aussi de la sensibilité ISO (International Organization of Standardization) et de la vitesse d'obturation.

La sensibilité ISO est la mesure de la sensibilité de la lumière des pellicules et des capteurs numériques. Une photographie est correctement exposée lorsque la surface sensible reçoit la bonne quantité de lumière : celle qui permet d'obtenir une image qui n'est ni trop claire ni trop sombre. Pour obtenir cette exposition correcte, le photographe doit donc savoir quelle est cette « bonne quantité ». La sensibilité ISO est un moyen d'exprimer cette information.

$S = \frac{H}{H_0}$, avec H la lamination (exposition lumineuse) nécessaire pour le résultat recherché et H_0 une constante qui permet de fixer l'échelle de sensibilité.

La vitesse d'obturation (temps d'exposition, que l'on note τ) est la durée pendant lequel l'obturateur s'ouvre au déclenchement, c'est-à-dire la durée pendant laquelle le capteur est exposé à la lumière, elle s'exprime en s. L'énergie lumineuse reçue par le capteur est proportionnelle à τ .

b) Temps d'exposition

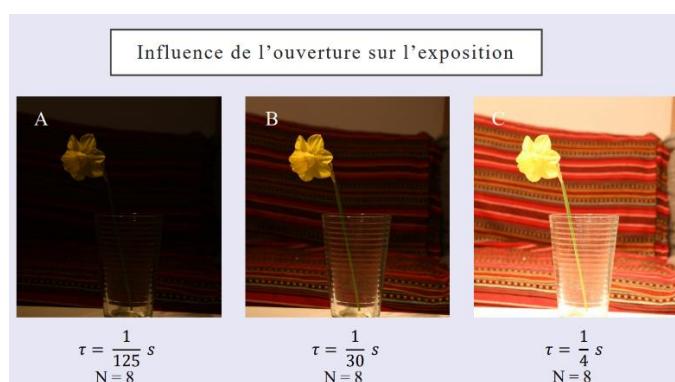
On caractérise l'onde lumineuse par son éclairement ε qui est l'énergie lumineuse reçue par unité de temps et de surface, ou bien la puissance reçue par unité de surface. Elle s'exprime en W.m^{-2} . La puissance passant à travers l'objectif est donc : $P_{\text{obj}} = \varepsilon \pi \frac{D^2}{4}$. Cette puissance est également proportionnelle à D^2 .

La puissance reçue au niveau du capteur par 1 pixel est proportionnelle à cette puissance : $P_{\text{pixel}} = \alpha P_{\text{obj}}$.

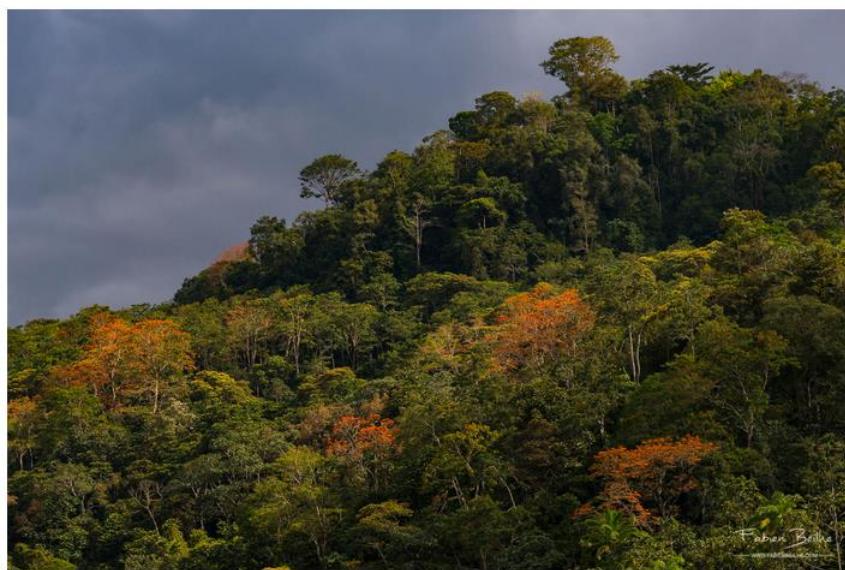
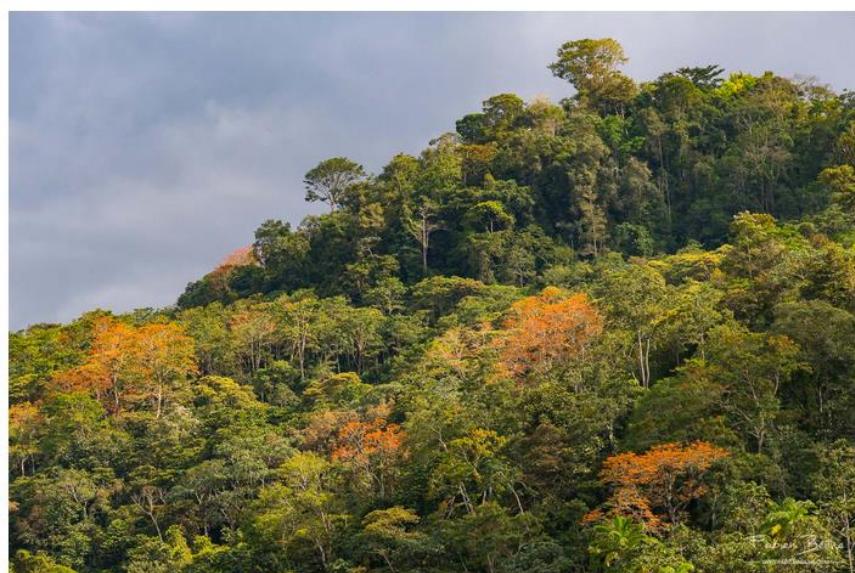
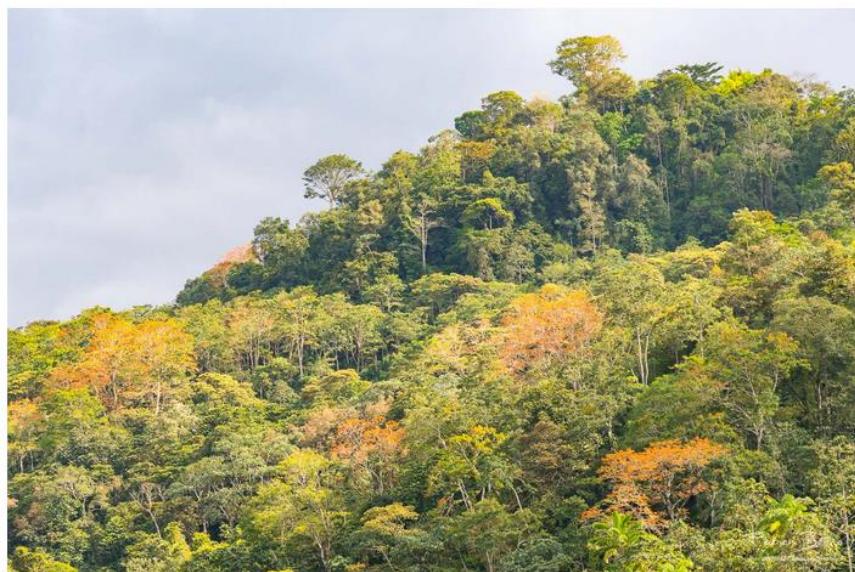
Enfin on peut exprimer l'énergie reçue par un pixel en fonction de la durée d'exposition :

$E_{\text{pixel}} = \alpha \varepsilon \tau \frac{D^2}{4}$, finalement l'énergie reçue par un pixel est proportionnelle à $D^2 \tau$.

Ex :



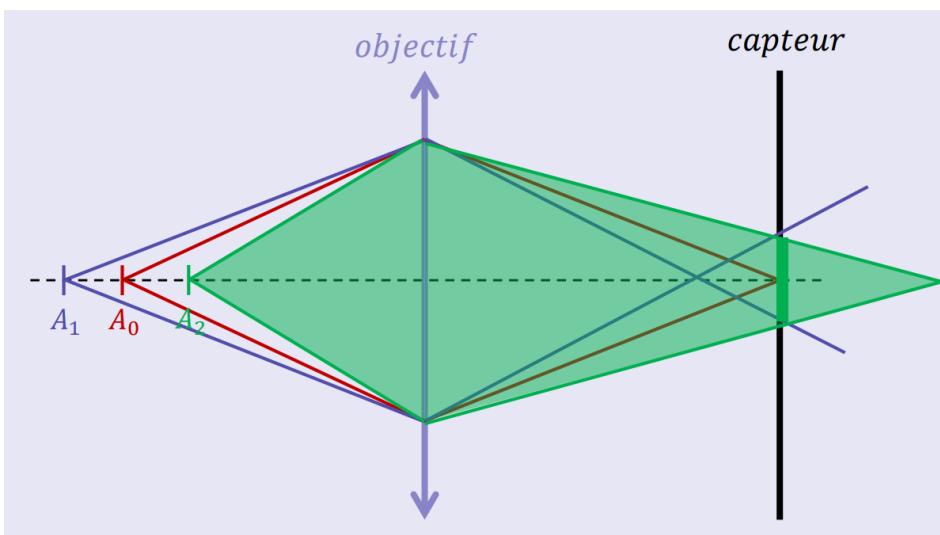
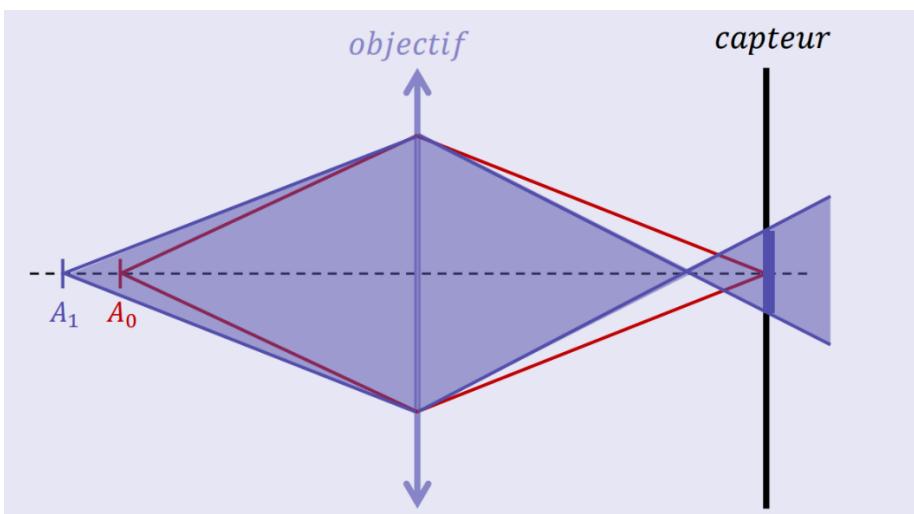
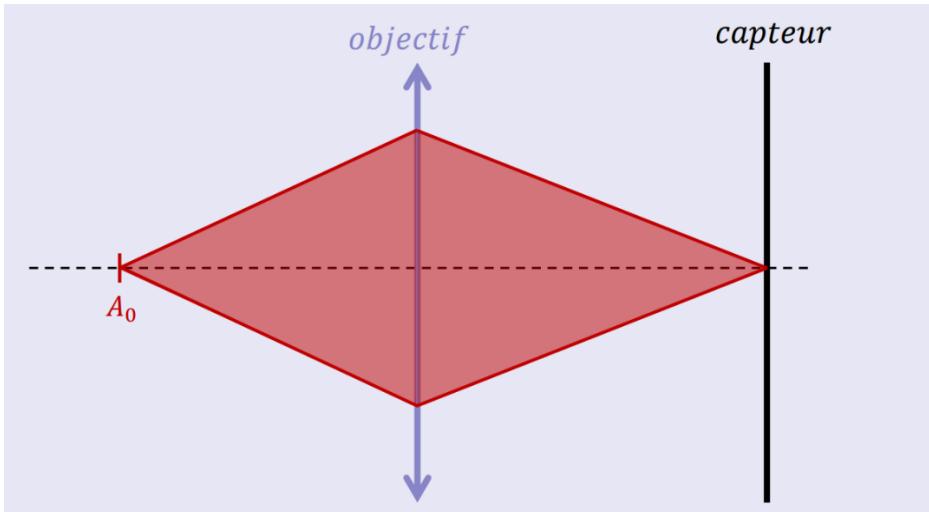
Ex : pour N = 5,6 ; N = 8 et N = 11

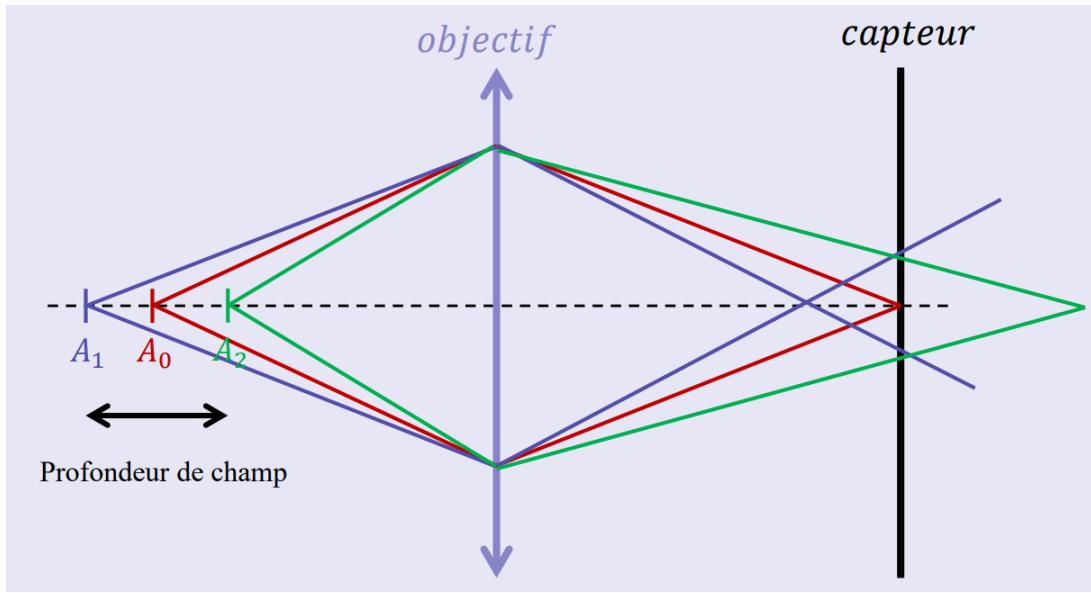


4) Profondeur de champ

a) Influence du diaphragme

Pour une mise au point donnée la profondeur de champ est la distance entre le point le plus rapproché et le point le plus éloigné de l'axe optique de l'objectif pour lesquels l'appareil fournit une image nette. Elle est liée à la nature discontinue du capteur et à sa granularité.





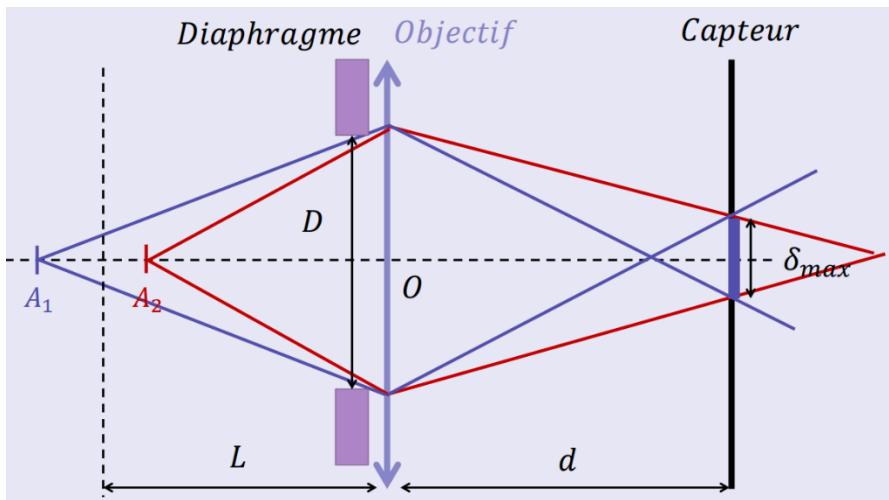
Avec une faible profondeur de champ seule une petite partie de l'image est nette. Il s'agit de la zone précise où la mise au point a été faite. Avec une grande profondeur de champ, c'est l'inverse. L'image présente une zone de netteté étendue.

Si on regarde mieux les photos précédentes, on constate des différences de netteté. Comment expliquer cela ?

Point A sur lequel la mise au point est faite, point B situé avant A. Par les formules de conjugaison de Newton : $F'B' \cdot FB = F'A' \cdot FA$ donc $F'B' = \frac{F'A' \cdot FA}{FB} < F'A'$

Ainsi la lumière issue de B fait une tache sur le capteur qui a la forme du diaphragme d'ouverture, pour un diaphragme circulaire de diamètre D, une tache circulaire de diamètre δ : $\delta = D \frac{B'A'}{OB'}$

Si D est petit, le diamètre de la tache sera petit. Si B s'éloigne de A et de l'appareil, FB augmente, donc δ augmente. Plus le point B est loin de A plus la tache sera grande. Pour que B soit net sur la photo, il faut que $\delta < \delta_{CCD}$, taille d'une cellule élémentaire du capteur. Mais en fait c'est inutilement contraignant, dans la mesure où sur une image numérique on ne distingue pas réellement les pixels. Donc la condition est plutôt $\delta < \delta_{max} = 3$ fois la taille d'un pixel.



On cherche la position d'un point de l'axe optique qui fait sur le capteur une tache du diamètre exactement égal au diamètre maximum acceptable.

$$\frac{\delta_{max}}{D} = \frac{F'H'}{OH'}$$

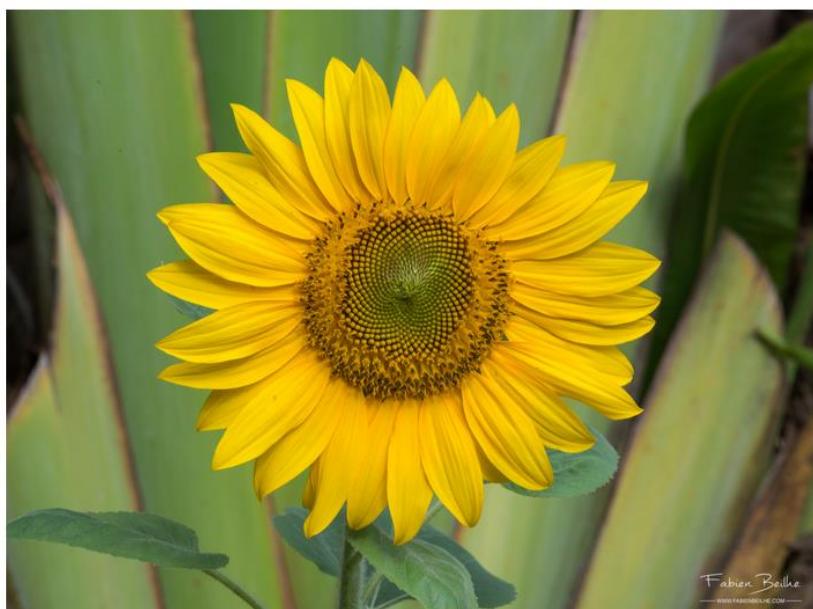
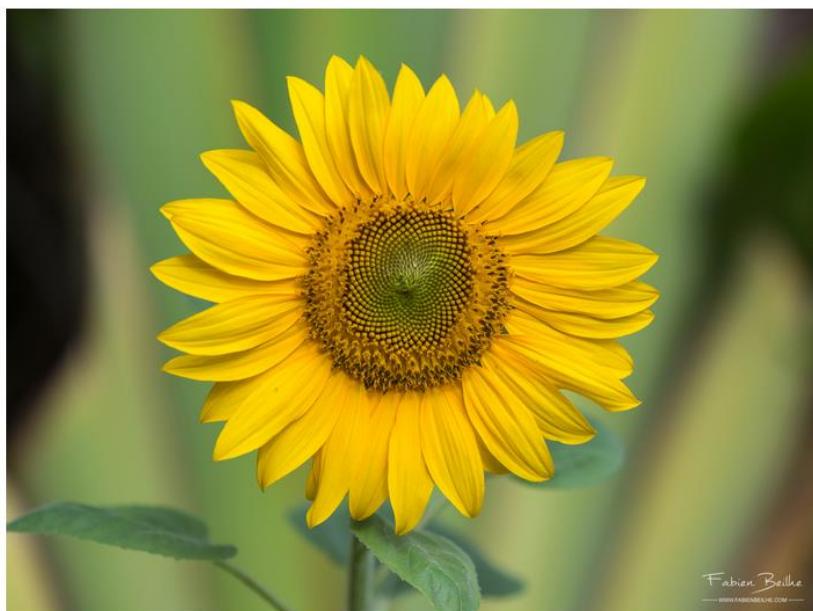
D'après la relation de conjugaison de Newton : $F'H' = \frac{-f'^2}{FH}$

D'après la relation de conjugaison de Descartes : $\frac{1}{OH'} = \frac{1}{OH} + \frac{1}{f'}$

Finalement, en posant $h = OH$, on obtient : $h = \frac{f'D}{\delta_{max}}$

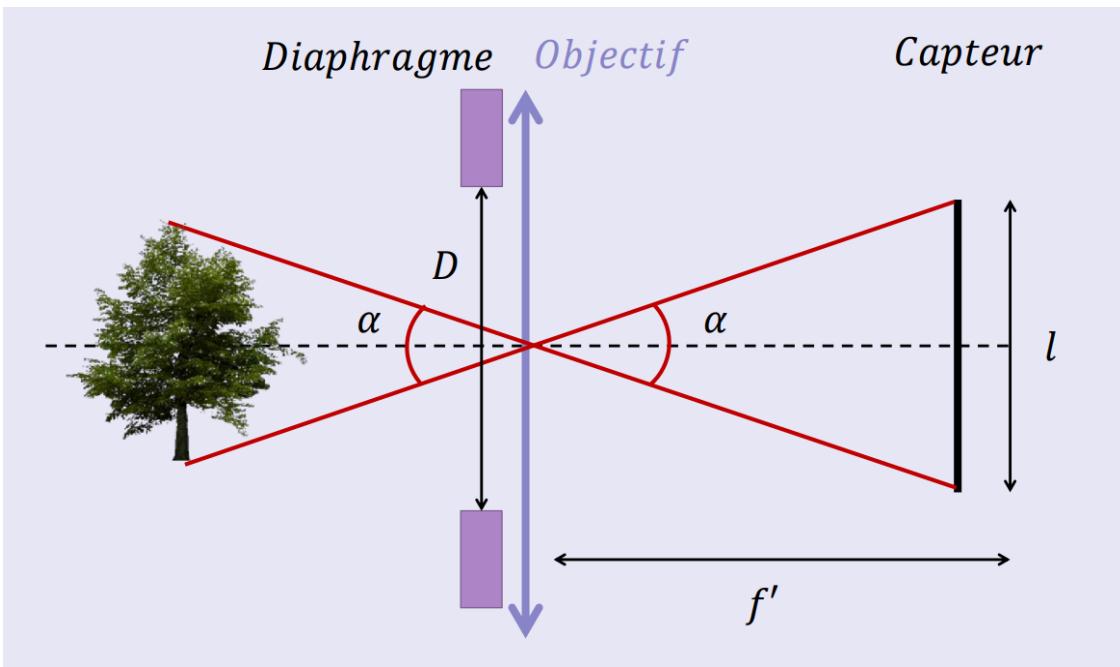
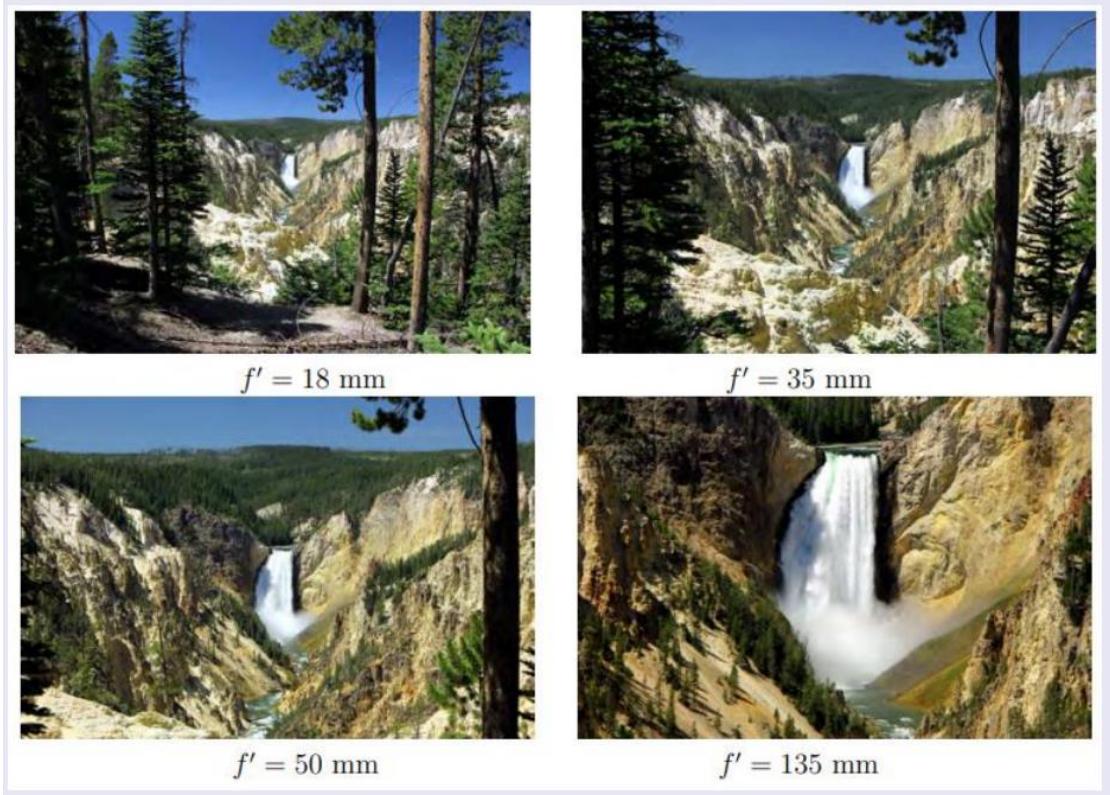
La profondeur de champ est : $PC = \frac{2f'^2}{N\delta_{max}}$

Ex : pour $N = 4$ et $N = 22$



b) Choix de la focale

La mise au point est faite à l'infini c'est-à-dire que un point à l'infini a son image sur le capteur CCD qui est donc placé à une distance $d = f'$ de l'objectif.



Finalement on voit qu'une grande focale implique un faible champ de vue. En pratique, comme on l'a vu, les objectifs sont constitués de plusieurs lentilles dont on peut modifier les paramètres pour modifier la focale. C'est en fait en ça que consiste le zoom.

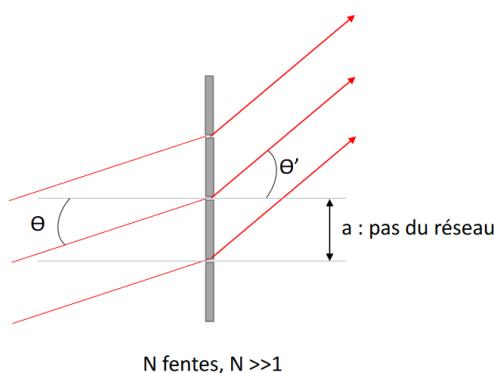
IV Spectroscopies (voir [3], [4], [5], [27])

Historiquement, la première dispersion expérimentale de la lumière blanche a été mise en œuvre par Newton en 1655 avec un prisme → le présent en direct, on peut voir la partie visible du spectre de la lampe blanche. La spectroscopie désigne l'étude expérimentale du spectre d'un phénomène physique. On va l'étudier dans le cadre de l'astronomie, comment on met en place ces méthodes et à quelles informations elles permettent de remonter.

1) Le réseau

a) Spectromètre à réseau

Réseau



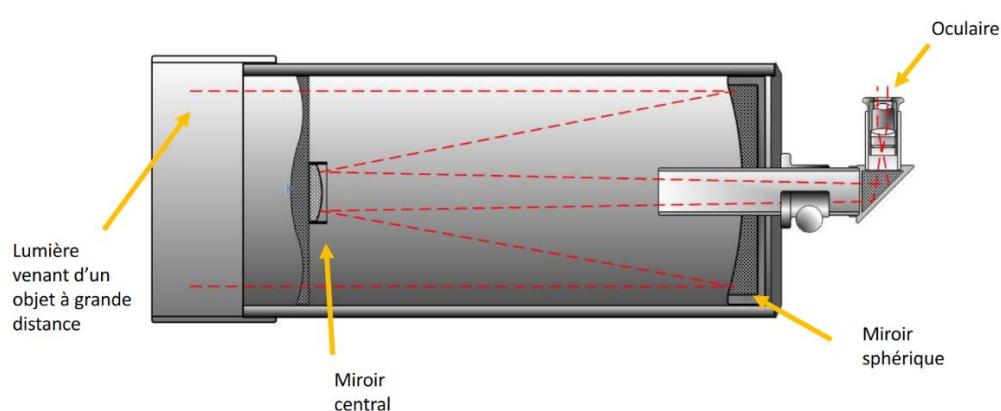
N fentes, $N \gg 1$

Les directions des interférences constructives sont données par la formule des réseaux :

$$\sin(\theta') - \sin(\theta) = p \frac{\lambda}{a}, \text{ où } p \text{ désigne l'ordre.}$$

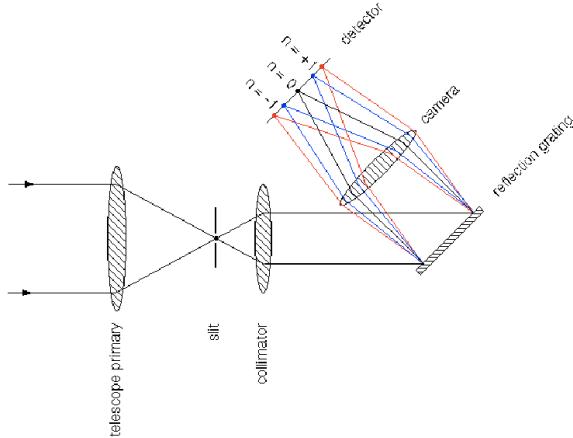
C'est ainsi qu'un réseau permet de séparer spatialement les différentes longueurs d'ondes (dispersion). Si on veut l'utiliser en astronomie il faut le combiner à un système optique : le télescope.

Télescope Schmidt-Cassegrain



La lumière venant d'un objet à très grande distance est envoyée sur un miroir sphérique, qui l'envoie sur le miroir central, qui permet une observation à l'œil à travers l'oculaire. Pour former le spectromètre, on remplace la partie avec l'oculaire par un système qui envoie la lumière sur un réseau, le spectre (étalé spatialement) est alors envoyé sur une caméra.

Réseau dans le télescope

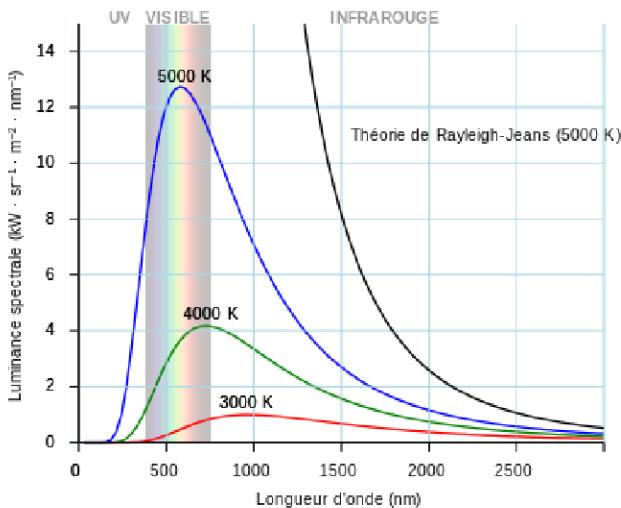


Maintenant qu'on dispose d'un spectromètre on va voir les informations qu'il peut donner.

b) Rayonnement du corps noir

Un corps noir désigne un objet idéal qui absorbe toute l'énergie électromagnétique qu'il reçoit, ce qui provoque une agitation thermique en son sein. Son rayonnement est uniquement thermique.

Rayonnement du corps noir

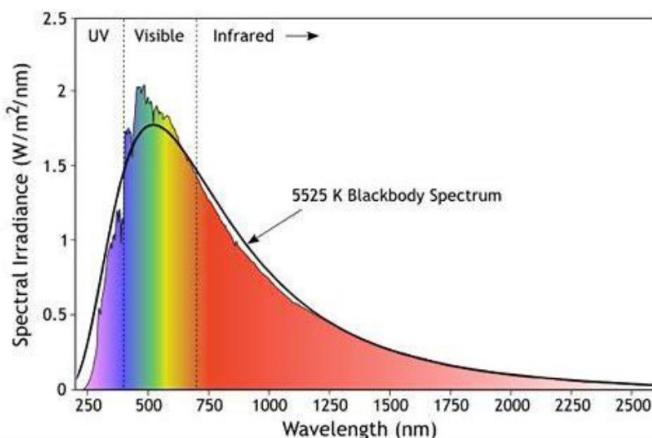


$$B_\nu(\nu, T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

Le spectre de la lumière émise par une étoile permet donc de remonter à sa température de couleur, température du corps noir rayonnant une énergie de même distribution spectrale. En pratique, les étoiles s'approximent assez bien à des corps noir, et la température de couleur est une assez bonne estimation de leur température de surface. Pour l'estimer on peut par exemple utiliser la loi de Wien : $\lambda_{\max}T = 2,898 \cdot 10^{-3} \text{ K.m}$

Exemple : le Soleil

Spectre du Soleil

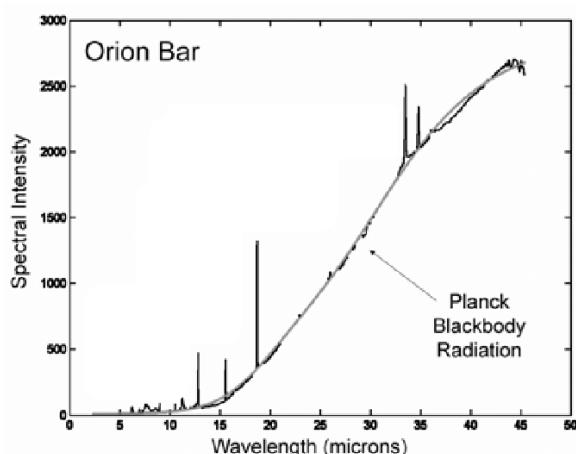


On voit qu'il y a un bon accord entre le spectre expérimental et le corps noir à 5525 K.

c) Spectre de raies

Le rayonnement du corps noir n'est pas la seule information qu'on obtient par spectroscopie. En plus du caractère continu, on peut voir sur l'exemple du spectre de la nébuleuse d'Orion l'apparition de raies.

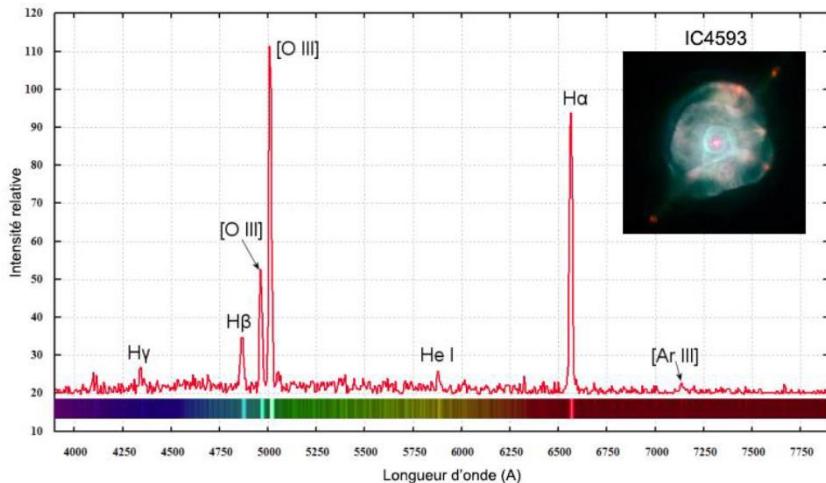
Spectre d'Orion



Ces raies correspondent à des transitions électriques, et sont centrées autour de longueurs d'ondes λ telles que $\Delta E = \frac{hc}{\lambda}$, où ΔE est l'écart énergétique entre les deux niveaux de la transition. On va pouvoir en déduire plusieurs informations.

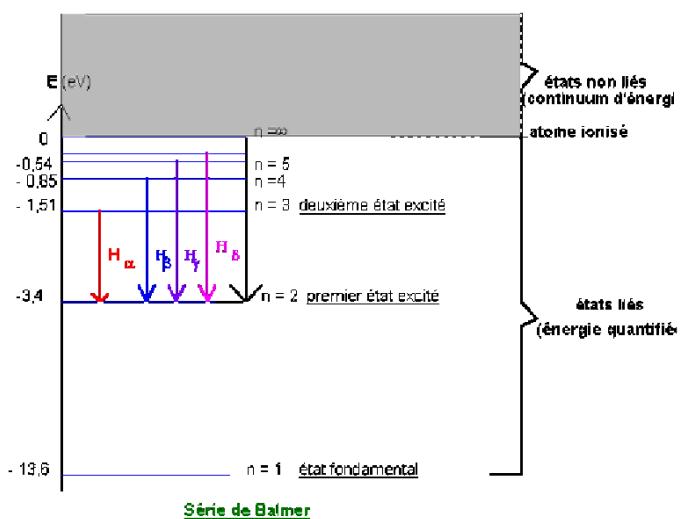
Composition chimique : C'est le plus intuitif, en remontant aux longueurs d'ondes des transitions, on peut identifier les éléments présents. Exemple de la nébuleuse IC 4593. Une nébuleuse est un objet céleste composé de gaz raréfié, de plasma ou de poussières interstellaires. On note donc pour IC4593 la présence d'hydrogène, d'oxygène, d'hélium et d'argon.

IC 4593, une nébuleuse planétaire dans la constellation d'Hercule.



Typiquement on retrouve très souvent l'hydrogène. Ce dernier est repéré grâce à la série de Balmer, qui désigne les transitions électroniques pour l'hydrogène d'un niveau $n > 2$ au niveau $n = 2$. Les longueurs d'ondes de ces transitions sont données par $\lambda = B \frac{n^2}{n^2 - 2^2}$ où B désigne la constante de Balmer.

Série de Balmer



Vitesse radiale: On peut également en déduire la vitesse radiale d'objet céleste, par effet Doppler. Celui-ci décale les longueurs d'ondes selon la relation $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v}{c}$. On voit que si l'objet s'éloigne de la Terre, le décalage s'effectue vers les plus grandes longueurs d'ondes, vers le rouge, c'est le redshift.

En prenant en compte la vitesse de la Terre autour du Soleil, $V_R = \frac{c\Delta\lambda}{\lambda} - V_{Terre}$. Pour IC 4593, $V_R = 22 \text{ km.s}^{-1}$, ce qui est assez lent. (décalage de la raie H α de 0.05 nm à vitesse de la Terre nulle, non repérable sur le graphe précédent).

Il existe d'autres quantités qui peuvent être déterminées, par exemple le champ magnétique peut être détecté par effet Zeeman (les raies se scindent et selon l'écart on remonte à la valeur du champ).

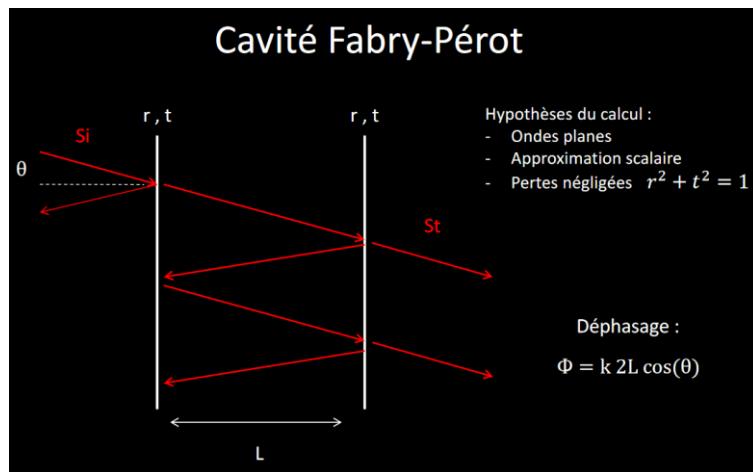
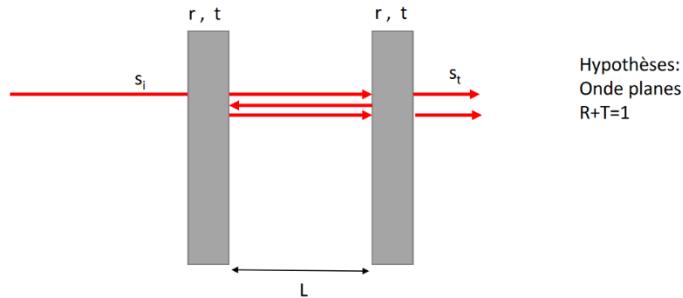
D'autres objets que les réseaux sont utilisés, c'est le cas de l'interféromètre de Fabry-Pérot. On va maintenant présenter son fonctionnement puis essayer de le comparer au réseau pour comprendre pourquoi on préférera utiliser l'un plutôt que l'autre.

2) L'interféromètre de Fabry-Pérot

a) Principe

L'interféromètre de Farby-Pérot est constitué de 2 miroirs parallèles éloignés d'une distance L . On considérera que les deux miroirs ont des coefficients de réflexion et transmission en amplitude identiques et réels. On fera l'hypothèse que la lumière envoyée est sous forme d'une onde plane progressive monochromatique $s(x, t) = so \times \exp(kx - wt)$. Le déphasage pour un aller retour dans la cavité est $\Phi = k \times 2Ln$

Interféromètre de Fabry-Pérot



$$\underline{s}_t = \frac{t^2 \underline{s}_i e^{i\frac{\phi}{2}}}{1 - r^2 e^{i\phi}}$$

Comme on suppose que ces ondes sont planes : $P_t = S \times \langle I_t \rangle = \varepsilon_0 c S |\underline{s}_t|^2$

Après calculs, on trouve que l'intensité transmise est :

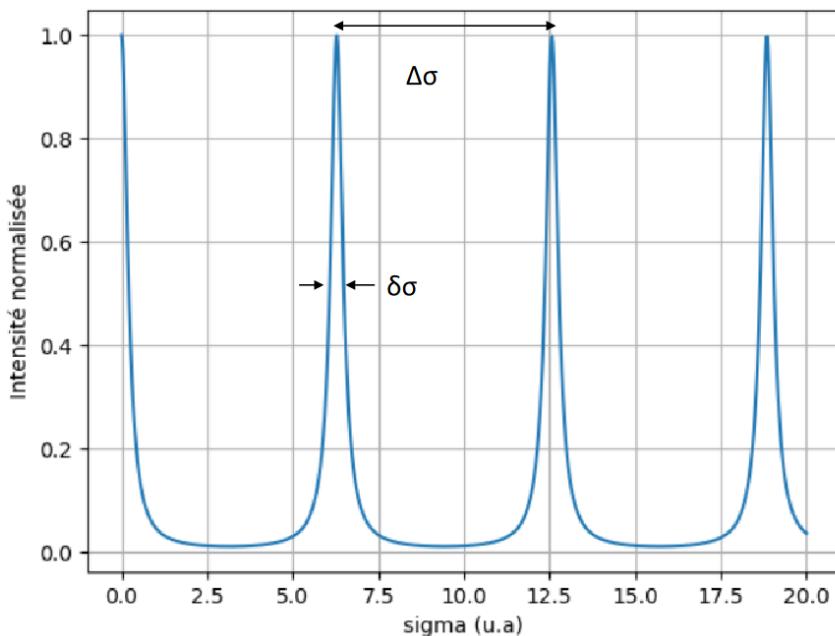
Cavité Fabry-Pérot

$$\begin{aligned}
 P_t &= \frac{t^4 P_i}{(1 - r^2 e^{i\Phi})(1 - r^2 e^{-i\Phi})} = \frac{t^4 P_i}{1 + r^4 - r^2(e^{i\Phi} + e^{-i\Phi})} \\
 &= \frac{t^4 P_i}{1 + r^4 - 2r^2 \cos(\Phi)} = \frac{t^4 P_i}{1 + r^4 - 2r^2(1 - 2\sin^2(\Phi/2))} \\
 &= \frac{t^4 P_i}{(1 - r^2)^2 + 4r^2 \sin^2(\Phi/2)} = \frac{P_i}{1 + \frac{4r^2}{(1 - r^2)^2} \sin^2(\Phi/2)}
 \end{aligned}$$

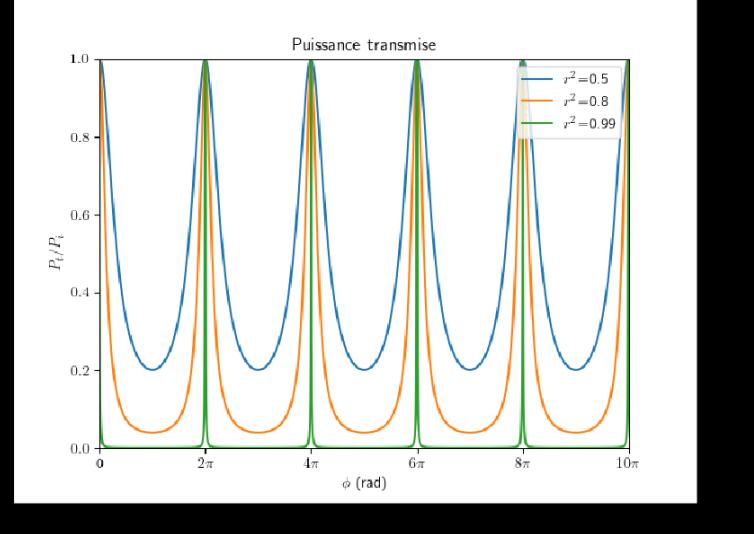
Il y a résonance pour $\Phi = 2p\pi$, or $\Phi = k \times 2Ln = 2\pi\sigma 2Ln$.

Il y a donc résonance pour les nombres d'ondes tels que $\sigma_p = \frac{p}{2Ln}$. L'interféromètre de Fabry-Pérot permet de sélectionner des nombres d'ondes (et donc des longueurs d'ondes).

Fabry-Pérot



Réponse Cavité Fabry-Pérot



On introduit la finesse : $F = \frac{\Delta\sigma}{\delta\sigma} \approx \frac{\pi r}{1-r^2}$, elle est liée au facteur de qualité par : $Q = F \frac{\omega}{\delta\omega}$

Moins la cavité a de pertes, plus les résonances sont piquées : forte sélection fréquentielle

Ordre de grandeur :

Laser He-Ne $r=0.97 \rightarrow F=50$

$L=10\text{cm} \rightarrow ISL : 2\pi \times 3\text{GHz}$ Donc $\Delta\omega \approx 2\pi 60 \text{ MHz}$

Pour $\lambda = 630 \text{ nm}$ on trouve alors $Q=10^7$! Grande sélectivité mais nombre très élevé dépendant du mode (peu pratique)

Application au laser : Monochromatiques ($\approx \text{MHz}$)

Remarque : Notion généralisable en 3D avec les caisses de résonance acoustiques.

On vient de voir que le Fabry-Pérot sélectionne les longueurs d'onde, mais comment peut-on l'utiliser en tant que spectromètre ?

b) Exploitation du spectre

La condition de résonance, $\sigma_p = \frac{p}{2Ln}$ dépend de la longueur de l'interféromètre, ainsi que de l'indice optique. On a ainsi deux moyens de jouer sur les longueurs d'ondes sélectionnées.

Variation de L : La longueur est contrôlée en accolant des cales piézo-électriques contre un des miroirs, qui devra être fixée sur une monture élastique pour permettre le déplacement.

Variation de n : L'indice est typiquement contrôlé en faisant varier la pression, avec une pompe pour faire le vide.

En pratique les deux se font. On peut remarquer qu'ici, le balayage du spectre sera temporel, tandis que pour un réseau, il est spatial.

c) Comparaison entre le réseau et le Fabry-Pérot

Intervalle spectral libre :

Pour le réseau, dans une direction θ' , on trouve les longueurs d'ondes telles que $\lambda_p = \frac{a}{p}(\sin \theta' - \sin \theta)$.

En nombre d'onde, $\sigma_p = \frac{p}{a(\sin \theta' - \sin \theta)}$. Pour qu'il n'y ait pas de recouvrement entre des ordres différents, il faut que l'étalement spectral de la lumière incidente $\Delta\sigma$ soit tel que $\Delta\sigma < \frac{1}{a(\sin \theta' - \sin \theta)}$. On note cette dernière quantité l'intervalle spectral libre, et on peut remarquer ici qu'il est l'inverse de la différence de marche.

Pour le Fabry-Pérot, pour qu'il n'y ait pas recouvrement, comme $\sigma_p = \frac{p}{2Ln}$, il faut que $\Delta\sigma < \frac{1}{2Ln}$. Dans ce cas on voit que l'intervalle spectral libre est encore l'inverse de la différence de marche, c'est un résultat qui peut se généraliser.

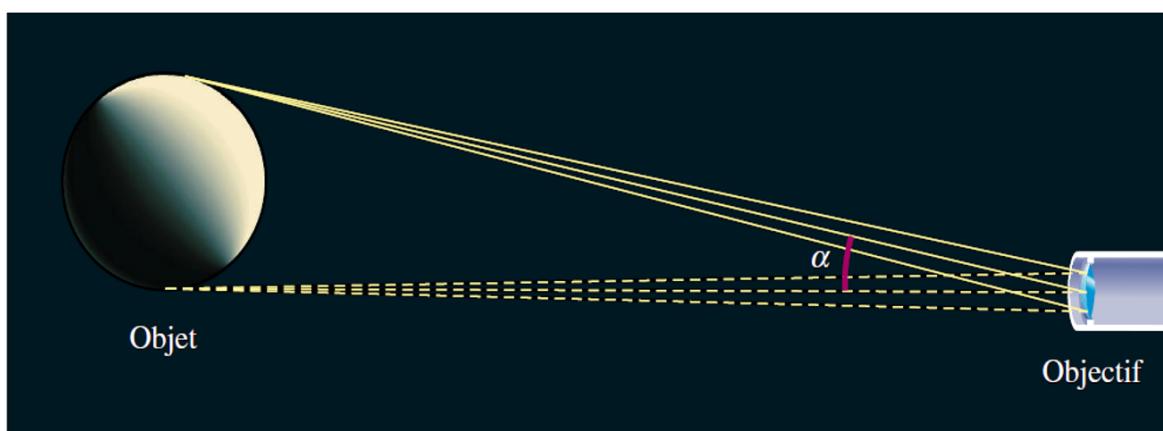
Si théoriquement on peut faire en sorte que l'intervalle spectral libre soit aussi grand qu'on veut, on est limité en pratique. Actuellement, l'intervalle spectral libre maximal atteignable pour un Fabry-Pérot est toujours inférieur à celui qu'on peut atteindre avec un réseau. Un réseau permet d'avoir un étalement spectral de la source plus grand sans problème de recouvrement par rapport au Fabry-Pérot.

L'avantage du Fabry-Pérot en revanche est qu'il a une luminosité plus forte que le réseau. Cela permet d'être plus précis, et c'est plutôt avec un Fabry-Pérot que la raie H_α est repérée pour regarder le décalage par effet Doppler.

La spectroscopie présente de nombreuses applications, rien qu'en astronomie. Il existe d'autres types de spectroscopie, utilisées en chimie notamment.

V Méthodes optiques pour l'étude céleste (voir [6]) (**À REPRENDRE**)

Observations « à l'infini »



I Instruments d'observation

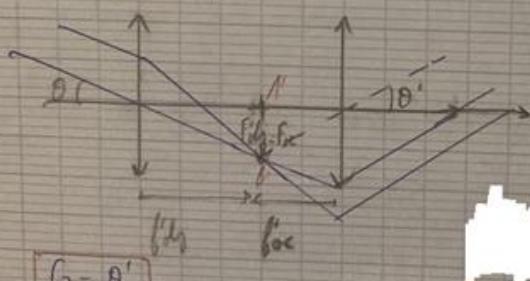
1) Lunette

$$E_{\text{rel}} = 1'$$

→ nécessité d'instruments d'optique
systèmes apicaux : $f_{\text{objectif}} = F_{\text{oculaire}}$

$$\infty \xrightarrow{\text{(objectif)}} f_{\text{obj}} = F_{\text{oc}} \longrightarrow \infty$$

Lunette astronomique:

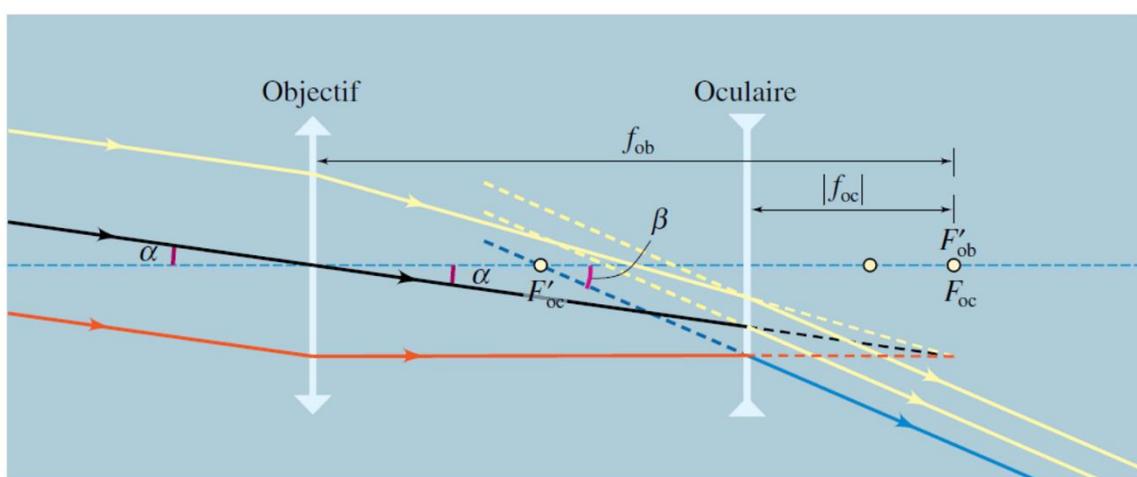


$$G = \frac{D'}{D}$$

$$\tan \theta' \approx \theta' = -\frac{AB}{f_{\text{obj}}} \quad \text{et} \quad \tan \theta \approx 0 = \frac{A'B'}{f_{\text{oc}}} \Rightarrow G = -\frac{f_{\text{obj}}}{f_{\text{oc}}}$$

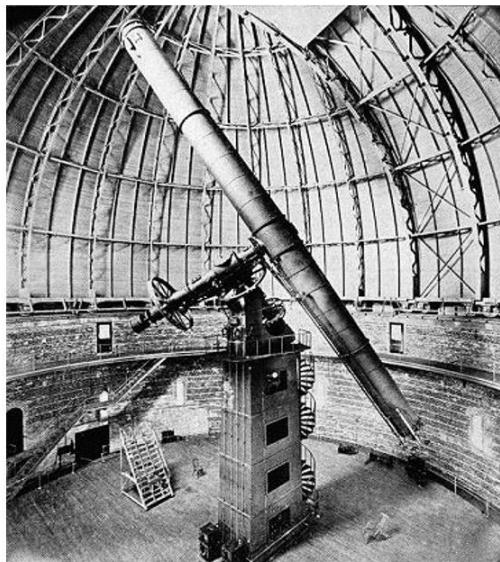
application numérique: distance inter-lentille, $f_{\text{obj}} = 16 \text{ mm}$, $f_{\text{oc}} = 2 \text{ cm}$ $\Rightarrow G = 800$

Première lunette



Lunette de Hans Lippershey (1608) et Galilée (1610)

Observatoire de Yerkes (USA)

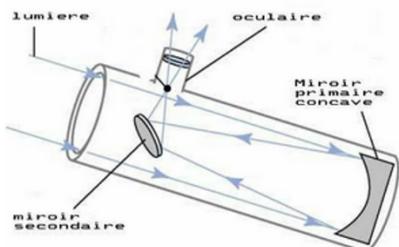


$$f'_{obj} = 19,4 \text{ m}$$

$$D = 1,02 \text{ m}$$

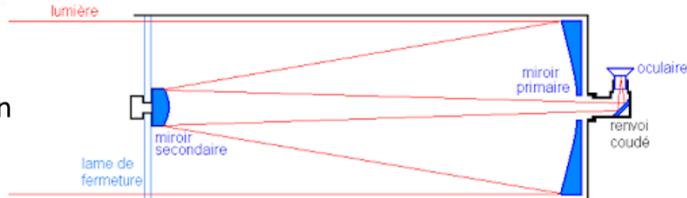
Masse de la lunette : 20 tonnes

Télescopes

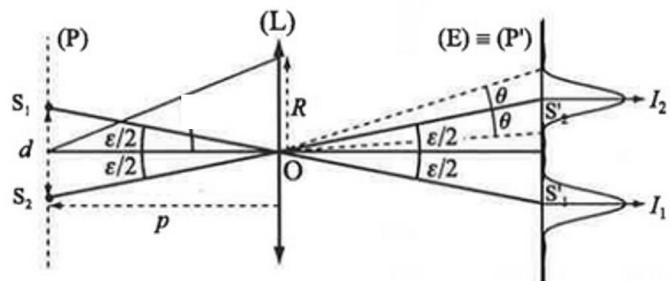


Télescope de Newton

Télescope de Cassegrain



Diffraction – taches d'Airy



2) Limite de résolution

Une image est limitée par la diffraction des molécules de l'objectif/la buse

critère de Rayleigh: $d > d_{lm} = \frac{1,22\lambda}{2R}$

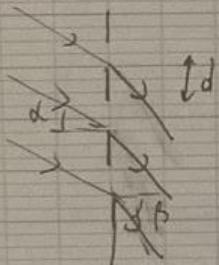
application numérique : $E = \frac{\lambda}{R} = 1,22\lambda$

$$\begin{aligned}\lambda = 0,55\mu m, R = 30 cm \Rightarrow E = 0,2'' \\ R = 5 m \Rightarrow E = 0,006''\end{aligned}$$

autres limitations: perturbations atmosphériques

II Spectrométrie

1) Réseau



$$\sin \beta = \sin \lambda + \frac{\rho \lambda}{d} \quad (\text{formule des réseaux})$$

2) Interprétation des spectres

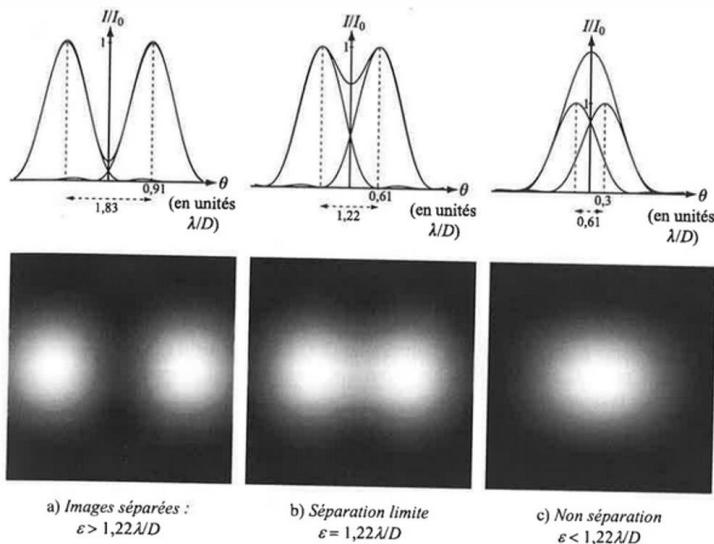
On étudie le spectre d'une étoile (le Soleil) :

→ position des raies → liée à une transition énergétique caractéristique des éléments qui composent l'étoile

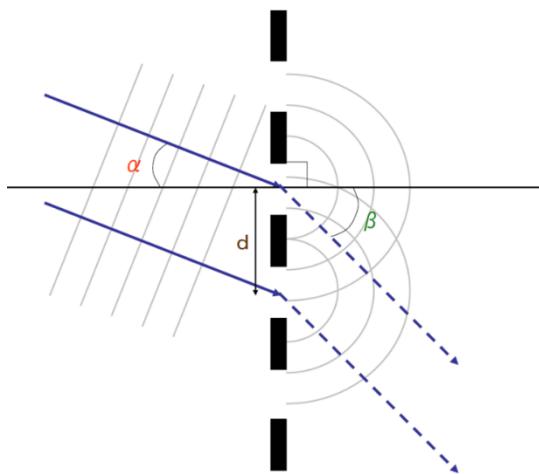
- fond continu du spectre : law de Wien : $\lambda_{max} = \frac{2,9 \times 10^3}{T}$
- distribution d'exoplanètes : par effet Doppler

$$\frac{\Delta \lambda}{\lambda} = \frac{v}{c}$$

Limite de résolution



Rappel : réseau

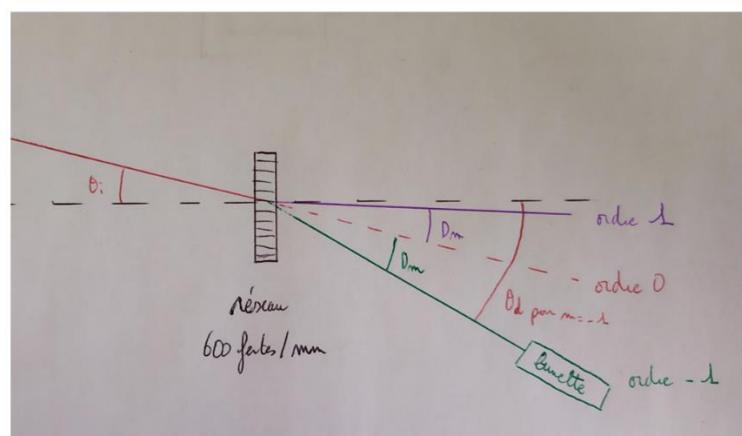


Formule des réseaux :

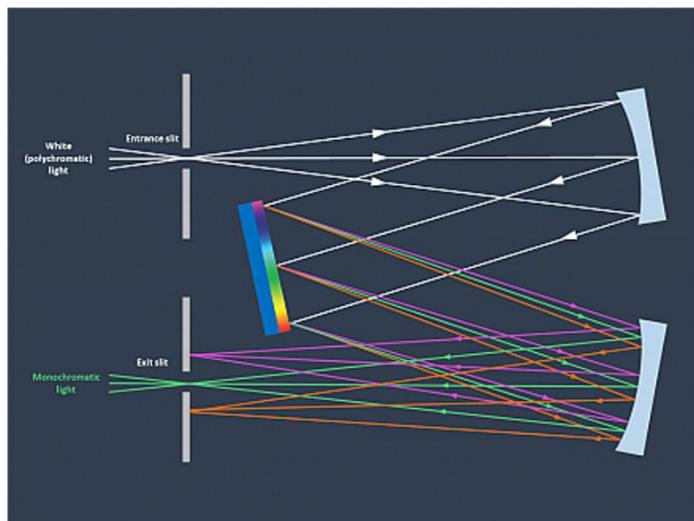
$$\sin(\beta) = \sin(\alpha) + m \frac{\lambda}{d}$$

Spectromètre par réseau en transmission : goniomètre

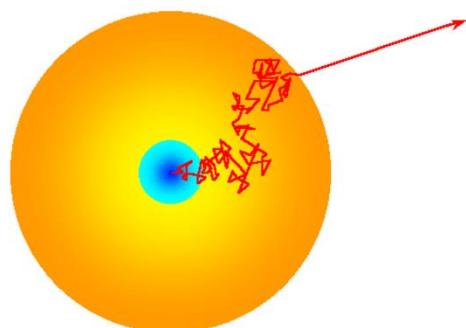
Source lumineuse
à l'infini



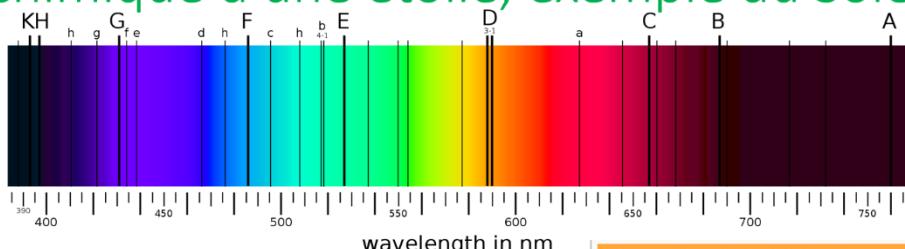
Spectromètre par réseau en réflexion : monochromateur



Interprétation du spectre : composition chimique d'une étoile



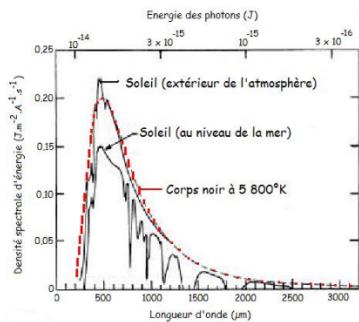
Interprétation du spectre : composition chimique d'une étoile, exemple du Soleil



Liste des principales raies		
Désignation	Élément	Longueur d'onde (nm)
y	O ₂	898,765
Z	O ₂	822,696
A	O ₂	759,370
B	O ₂	686,719
C	H α	656,281
a	O ₂	627,661
D ₁	Na	589,592
D ₂	Na	588,996
D ₃ ou d	He	587,562

Composition photosphérique (en masse)	
Hydrogène	73,46 %
Hélium	24,85 %
Oxygène	0,77 %
Carbone	0,29 %
Fer	0,16 %
Néon	0,12 %
Azote	0,09 %
Silicium	0,07 %
Magnésium	0,05 %
Soufre	0,04 %

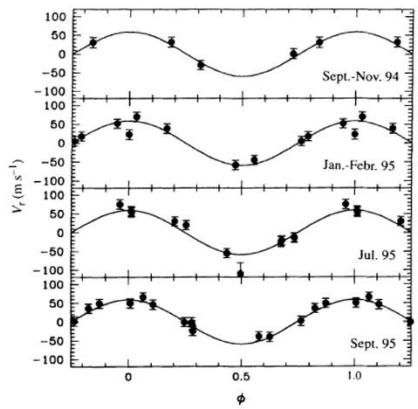
Température d'une étoile



$$\text{Loi de Wien : } \lambda_{max}(\text{en m}) = \frac{2,9 \cdot 10^{-3} (\text{en } \frac{m}{K})}{T \text{ (en K)}}$$

Pour le Soleil : $\lambda_{max} \sim 500\text{nm}$
 $T \sim 5780 \text{ K}$

Détection d'une exoplanète par effet Doppler 51 Pegasi (1995)



Méthodes optiques pour l'objectif relativiste

I Instruments d'optique

1) Limite de résolution

Maurice

Lyman

oral

diaphragme d'ouverture \rightarrow limitation de la luminosité réelle

(L) est limitée par le diaphragme d'ouverture de la monture du projecteur
 \rightarrow chaque image est une entente d'une tache de diffraction, appelée tache d'Airy.

Pour distinguer les deux taches, la distance entre les deux sources doit être assez grande.

On définit alors le critère de Rayleigh: si la distance entre les deux taches est inférieure au rayon du premier minimum nul d'une tache d'Airy,
les taches d'Airy et les images ne sont plus séparées.

On note θ l'angle sur lequel sont mis les segments S_1S_2 et $S_1'S_2'$.

O l'angle angulaire entre le centre du maximum principal et le premier minimum nul d'une tache d'Airy.

La séparation est obtenue si $\theta > \delta$ où $\delta = \frac{1.22\lambda/l_p}{\theta}$

à la limite de résolution, $\theta=0$: $| \Delta m \approx \frac{1.22\lambda/l_p}{\theta} | \rightarrow$ meilleure que dans l'approximation de Gauss

avantages de l'objectif par rapport à la lunette:

- méthodes sphériques \Rightarrow entre les phénomènes de dispersion et les aberrations chromatiques

- diaphragme d'ouverture plus grand (jusqu'à 10 mm contre 50 mm pour une lunette)

Pour 2 objets séparés dans le ciel ou 2 points en surface d'un objet,
 la limite de résolution ne peut être qu'astigmate
 Le magnétisme astigmatisme de la monture de l'objectif et seul responsable
 de la diffraction

$$\text{limite de résolution: } \text{Em} = \frac{1,22}{\lambda R}$$

pour $\lambda = 0,55 \mu\text{m}$, $R = 30 \text{ cm}$, $\text{Em} \approx 1,12 \times 10^{-4} \text{ rad.} \approx 0,2'' \text{ d'arc.}$
 limite pratique

Avec un télescope de 100 m de diamètre : $\text{Em} \approx 0,006'' \text{ d'arc.}$

limites pratiques : • limite due aux perturbations atmosphériques
 (traversée de zones d'air froid ...)

En l'absence de turbulences, le télescope peut résoudre des détails environ
 100 fois plus fins qu'en présence de turbulences.

• limite due à la structure granulaire du récepteur
 (sil, CCD...)

oral

objet ponctuel \rightarrow tache d'Airy (fonctionnement principal)

Si la tache d'Airy d'une image se forme sur plusieurs pixels, la
 limite de résolution est imposée par l'instrument optique ; si elle se
 forme sur un seul pixel, le récepteur impose la limite de résolution

2 images sont séparées si la distance entre les centres des images
 est supérieure à la distance entre deux pixels adjacents.

VI Propagation guidée des ondes (voir [7] à [11])

Le nombre de fibres optiques déployées chaque années explose actuellement. Celle-ci permettent un transfert d'information rapide sur de longues distances grâce aux ondes électromagnétiques. En effet elles permettent d'éviter l'atténuation géométrique des onde en espace libre ainsi que les fluctuations qu'elle peuvent subir.

Le but de ce cours est de s'intéresser à cet enjeu sociétal actuel. Nous allons chercher à comprendre comment il est possible de guider une onde (de manière générale), de découvrir les caractéristiques particulières d'une propagation guidée (dans le cadre d'un modèle simple) et de comprendre les enjeux technologiques que cela implique.

Le principe de fonctionnement d'une fibre optique peut être décrit par l'optique géométrique. Ce modèle simpliste a le mérite de donner une intuition sur le fonctionnement réel d'une fibre.

1) Approche géométrique du guidage

a) Réflexion totale (**À COMPLÉTER**)

Fibre à saut d'indice, réflexion totale et angle limite (**voir Garing**)

$$\theta_{lim} = \arccos\left(\frac{n_1}{n_0}\right) = 6,6^\circ$$

Incidences multiples réfléchies : qu'est-ce que ça implique ?

b) Temps de propagation (**À COMPLÉTER**)

Calcul de la différence temporelle de propagation entre les angles extrêmes (**voir Garing**).

$$\Delta t = \frac{n_0 l}{c} \left(\frac{1}{\cos \theta} - 1 \right)$$

On trouve $\Delta t = 3,4 \mu s$ si $l = 100 \text{ km}$, ceci limite la fréquence à laquelle on peut envoyer de l'information (élargissement d'impulsions)

Dans ce modèle simple la propagation d'un nombre important d'incidence semble possible. Nous avons vu que ceci limite la fréquence d'information. Dans la réalité, seul un certain nombre de ces incidences va pouvoir se propager. Afin de comprendre ce phénomène, il est nécessaire de prendre en compte le caractère ondulatoire de la lumière.

2) Guidage d'une onde électromagnétique

Le traitement du problème de la fibre optique est complexe. Afin de comprendre les principales caractéristiques du guidage, nous allons étudier un cas simplifié de propagation.

a) Champ électrique entre deux armatures (**À COMPLÉTER**)

Hypothèses : Propagation dans le vide (équation de d'Alembert) et métal parfait (champ E nul).

Calcul en incidence nulle pour E, influence des conditions aux limites importantes.

En partant d'un solution particulière $\vec{E} = E(x, y, z)e^{i(\omega t - kz)}\vec{e}_y$, on arrive à :

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kz) \sin(p \frac{\pi x}{a}) \vec{e}_y$$

b) Structure de l'onde (**À COMPLÉTER**)

L'onde se propage selon \vec{e}_z et est stationnaire selon \vec{e}_x , elle est non plane.

Modes transverses électriques, modes transverses magnétiques

Décomposition en onde plane, angles quantifiés et lien avec l'approche géométrique. Les angles qui se propagent dans une fibre sont donc discrets et correspondent aux modes de propagation : $\theta_p = \frac{p\pi}{ak}$.

Discussion énergétique dans un guide

Calcul du champ B : $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ 0 \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{0p} k \sin\left(\frac{p\pi}{a}x\right) \sin(\omega t - kz) \\ 0 \\ -E_{0p} \frac{p\pi}{a} \cos\left(\frac{p\pi}{a}x\right) \cos(\omega t - kz) \end{pmatrix}$$

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} E_{0p} \frac{k}{\omega} \sin\left(\frac{p\pi}{a}x\right) \cos(\omega t - kz) \\ 0 \\ E_{0p} \frac{p\pi}{a\omega} \cos\left(\frac{p\pi}{a}x\right) \sin(\omega t - kz) \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \text{Non transverse !}$$

Discussion énergétique dans un guide

Calcul du champ B : $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} E_{0p} \frac{k}{\omega} \sin\left(\frac{p\pi}{a}x\right) \cos(\omega t - kz) \\ 0 \\ E_{0p} \frac{p\pi}{a\omega} \cos\left(\frac{p\pi}{a}x\right) \sin(\omega t - kz) \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \text{Non transverse !}$$

Vecteur de Poynting moyen : $\langle \vec{\Pi} \rangle = \left\langle \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right\rangle$

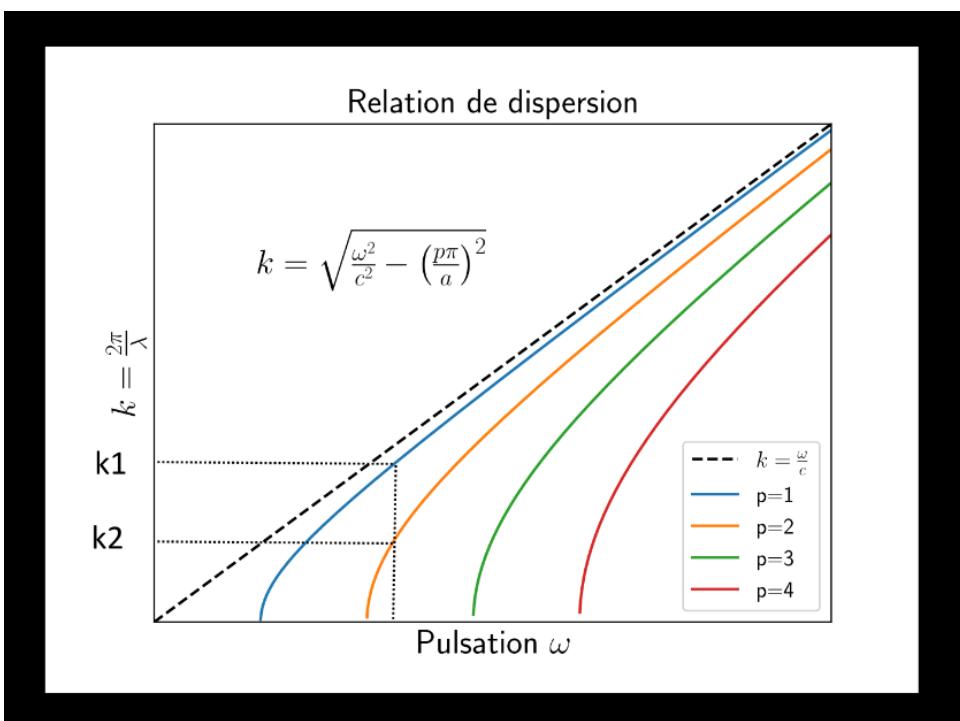
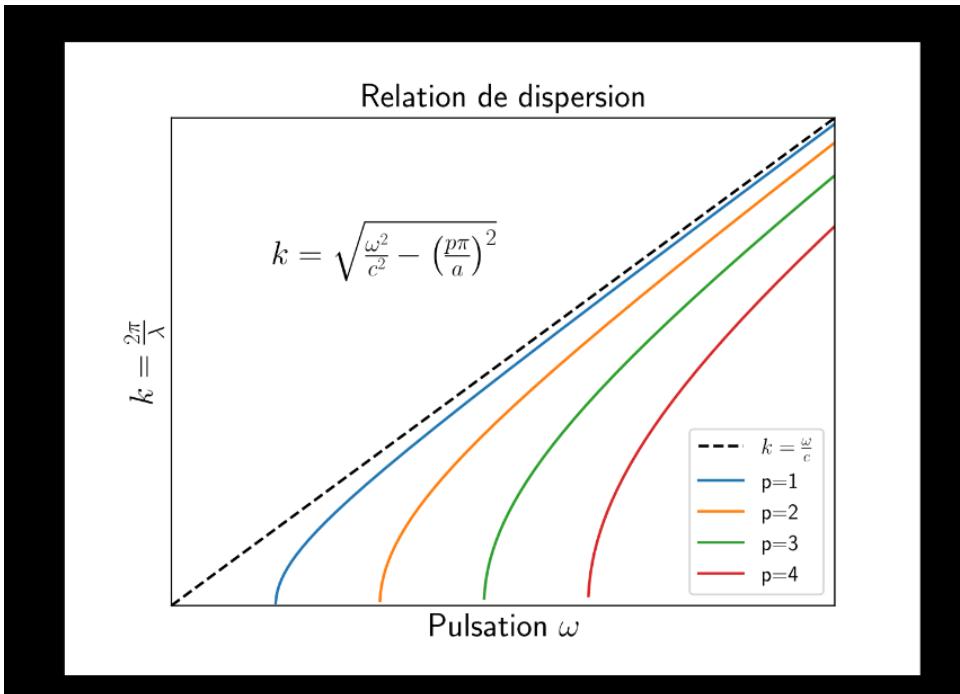
$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_{0p}^2 \frac{k}{2\mu_0\omega} \sin^2\left(\frac{p\pi}{a}x\right) \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \text{Energie selon z !}$$

On a vu comment des conditions aux limites transverses permettent de propager l'énergie dans la direction souhaitée. Cela se fait au prix d'une propagation modale des ondes électromagnétiques. Retrouve-t-on le fait que ces différents modes se propagent à des vitesses différentes (comme intuité dans la 1^e partie) ?

3) Conséquences de la dispersion

a) Relation de dispersion (**À COMPLÉTER**)

Après calculs, on trouve : $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{p^2\pi^2}{a^2}$



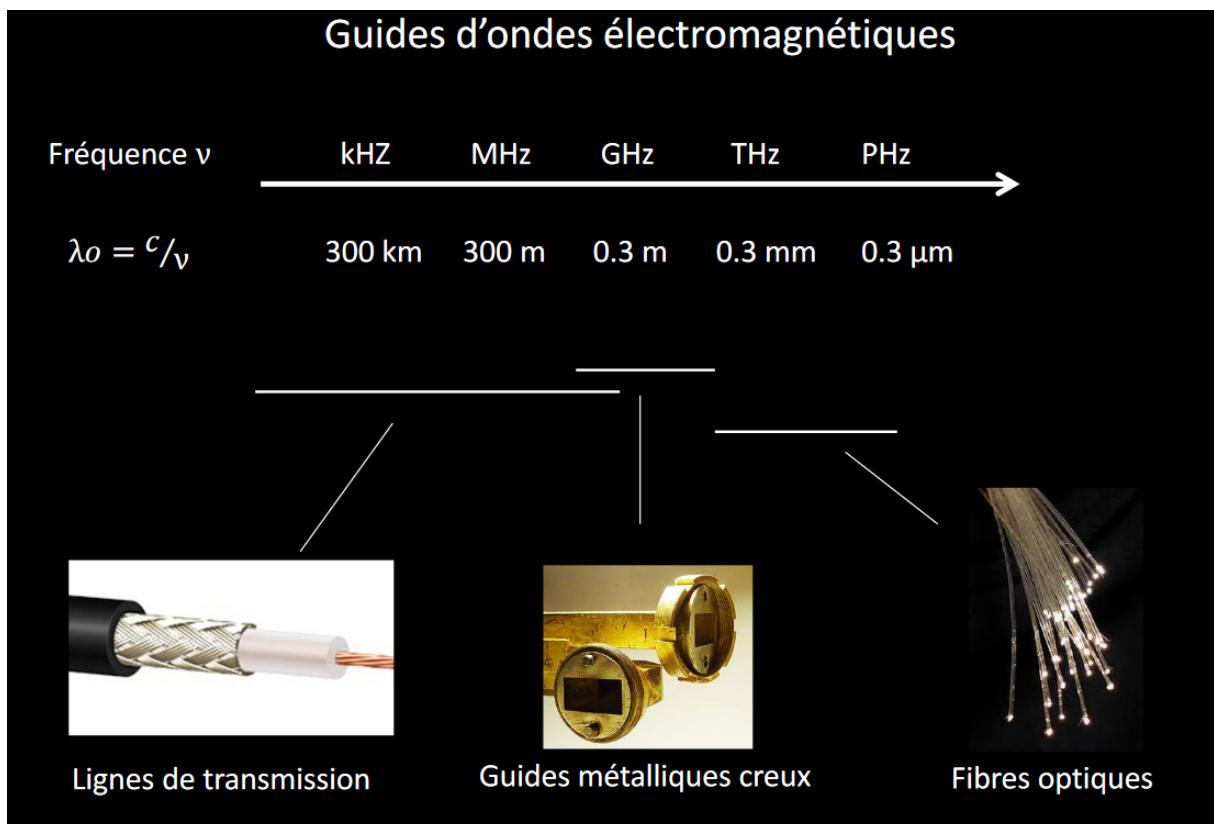
Les conditions aux limites impliques une dispersion même si l'on se propage dans le vide.

La vitesse de groupe s'écrit : $v_g = \frac{c^2 k}{\omega} \rightarrow$ Plusieurs vitesses possibles pour un même ω en entrée. La limitation en fréquence du transfert d'information est donc due à la dispersion intermodale.

b) Pulsion de coupure

Observation des fréquences de coupure sur le graphe. $\lambda \leq \lambda_c = \frac{2a}{p}$. Pour être monomode, il faut être de l'ordre de la longueur d'onde !

c) Contraintes technologiques



En basse fréquence, trop grandes dimensions : autres conditions aux limites nécessaires. En haute fréquence, les réflexions métalliques entraînent trop de pertes pour une propagation longue distance. Utiliser deux diélectriques et réflexion totale : fibre optique.

Le calcul pour la fibre est bien plus compliqué : conditions aux limites non strictes, géométrie cylindrique (fonctions de Bessel). Mais sans se lancer dans des lignes d'équation nous en avons vu les principes et les enjeux.

On a vu que des conditions aux limites permettaient de guider une onde mais que ceci impliquait une propagation modale et de la dispersion intermodale dans le guide. Le problème que nous avons résolu s'applique à toutes les ondes guidées de manière générale, qu'elles soient électromagnétiques, acoustiques ou mécaniques, avec de nombreuses applications à la clé.

Applications : lignes bifilaires (téléphone), coaxial (réseau urbain), métallique (radars aérien), optique (internet)

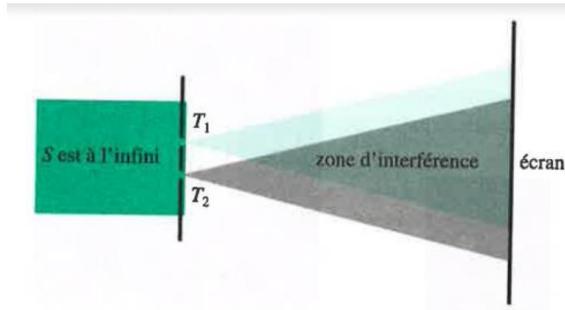
Absorption dans une fibre : vibration de la silice (IR) et électronique (UV)

Autres ondes guidées : acoustique => radar sous-marin dans les bas-fonds. Modélisation de la propagation du bruit dans une ville, mécanique => phonons dans un solide, propagation de fluide.

VII Interférences à deux ondes en optique (voir [1], [12], [13])

Un débat règne au XVIIe siècle concernant la nature corpusculaire ou ondulatoire de la lumière. En 1801, Thomas Young réalise une expérience qui permet de démontrer le caractère ondulatoire de la lumière.

Expérience introductory



On voit ici que la superposition de lumière donne des zones d'obscurité, alors que si on prenait deux lasers différents on aurait un éclairement différent. C'est un phénomène d'interférences, que l'on va essayer d'expliquer dans ce cours.

1) Observation des interférences

a) Grandeur accessible : éclairement

On veut étudier des interférences, mais à quoi a-t-on accès lors de ces expériences?

En optique, on utilise des capteurs qui sont sensibles à l'intensité, donc une grandeur énergétique. C'est une grosse différence avec des domaines comme l'acoustique où les capteurs sont sensibles à la pression (amplitude des champs donc).

La grandeur intéressante ici est l'éclairement, qui pour une onde plane s'écrit $\mathcal{E} = A < \vec{E} \parallel^2 >_{\tau}$ où τ est le temps de réponse du capteur. Pour l'oeil (capteur utilisé quand on regarde directement l'écran), $\tau = 10^{-2}s$, tandis que pour une photodiode on a plutôt $\tau = 10^{-6}s$.

Or en optique, les fréquences sont de l'ordre de $\nu = 10^{15} Hz$, en fait on a accès à des grandeurs moyennées sur des temps bien plus longs que les périodes des ondes. C'est un aspect essentiel pour comprendre les calculs qui vont être faits par la suite, et ce que l'on observe effectivement.

Maintenant que l'on s'est donné un cadre d'étude, on va étudier la superposition de deux ondes et dans ces conditions, calculer l'éclairement donné par le capteur.

b) Superposition de deux ondes

On parle d'interférences lorsque l'éclairement total observé est différent de la somme des éclairements de chaque source prise individuellement.

Superposition de deux ondes planes progressives

$$\begin{aligned}\vec{E}_1(M, t) &= \vec{E}_{01} \cos(\omega_1 t - \phi_1(M, t)) \\ \vec{E}_2(M, t) &= \vec{E}_{02} \cos(\omega_1 t - \phi_2(M, t)) \\ \phi_{1,2}(M, t) &= \psi_{1,2}(M) + \Phi_{source}(t)\end{aligned}$$

Définition: On parle d'interférences lorsque l'éclairement total observé est différent de la somme des éclairements de chaque source prise individuellement.

L'éclairement total en M s'écrit :

$$\mathcal{E}(M) = A < \|\vec{E}_1 + \vec{E}_2\|^2 >_\tau$$

On aboutit à

$$\mathcal{E}(M) = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + 2A \vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02} (< \cos((\omega_1 + \omega_2)t - \phi_1(M, t) - \phi_2(M, t)) >_\tau + < \cos((\Delta\omega t - \phi_1(M, t) + \phi_2(M, t)) >_\tau)$$

On en déduit :

1. Il faut $\omega_1 = \omega_2$
2. Même source
3. Il faut des ondes non polarisées perpendiculairement.
4. Le terme en $\omega_1 + \omega_2$ saute car la somme est toujours de l'ordre de grandeur de ω

Remarque : On a utilisé la polarisation des ondes et on l'a supposée inchangée. Pour que cela soit valable tout le temps, on se place dans l'approximation de Gauss, c'est-à-dire que l'on n'aura pas de composante du champ selon l'axe optique (petits angles) et les polarisations rectilignes ici ne bougeront pas, c'est important pour les prochaines parties. On va d'ailleurs dès à présent poser que les polarisations sont alignées, donc $A \vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02} = AE_{01}^2 = \mathcal{E}_1$

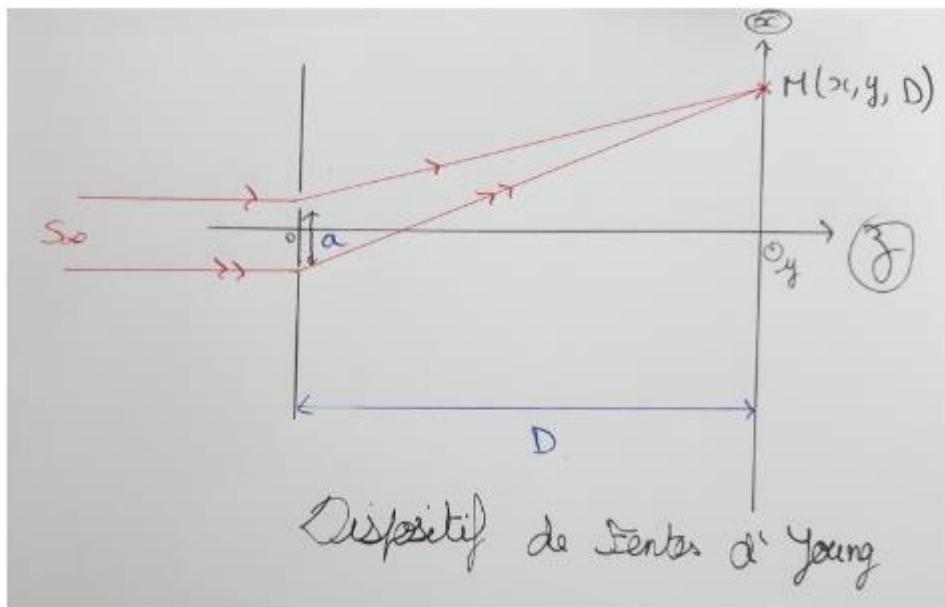
En introduisant la différence de marche, on obtient la formule de Fresnel :

$$\mathcal{E}(M) = 2\mathcal{E}_1 \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \delta(M)\right) \right)$$

Le terme d'interférence fait apparaître le chemin optique. De façon générale, la méthode sera d'identifier les sources secondaires, et de calculer cette différence de marche. On utilise ensuite la formule de Fresnel pour caractériser la figure d'interférences observée. C'est ce que l'on s'apprête à faire sur le dispositif de fentes d'Young.

2) Obtention expérimentale d'interférences

a) Dispositif de fentes d'Young



On note $a = S_1 S_2$ distance entre les deux fentes, D la distance fentes-écran, x, y les coordonnées du point d'observation, l'axe optique est selon Oz .

$$S_1 M = (x - \frac{a}{2}, y, D); S_2 M = (x + \frac{a}{2}, y, D)$$

b) Calcul d'interfrange

Avec la formule de Fresnel, l'hypothèse $D \gg x, y$ on trouve la différence de marche, l'éclairement et l'interfrange :

$$\delta(M) = \frac{nax}{D}$$

$$\mathcal{E}(M) = 2\mathcal{E}_1 \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{nax}{D}\right) \right)$$

$$i = \frac{\lambda D}{na}$$

On peut remarquer que l'éclairement ne dépend plus de y : on a une figure d'interférences modulée uniquement selon x . On peut définir l'ordre des franges $p = \frac{\delta}{\lambda}$, qui étiquette chaque frange.

Depuis le début, on considère une source ponctuelle à l'infini. Mais en réalité, les sources utilisées ont une extension spatiale. On peut les considérer comme des sources ponctuelles qui émettent chacune une onde plane, et cela aura des conséquences sur la figure d'interférences.

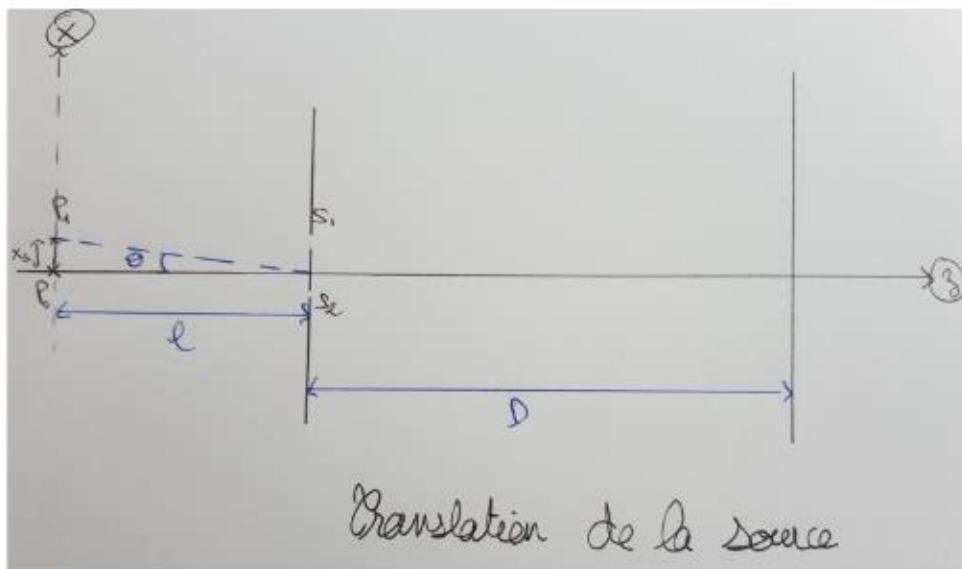
3) Cohérence spatiale

a) Éclairement dû à une source étendue

Considérons deux points distincts d'une source. Pour rappel, l'expression de l'éclairement en un point M de l'écran est : $\mathcal{E}(M) = 2\mathcal{E}_1(1 + \langle \cos(\phi_2(M, t) - \phi_1(M, t)) \rangle_\tau)$. La dépendance en temps des déphasages est propre à chaque source, et on admet qu'ici elle varie sur une durée caractéristique courte devant τ . Donc pour deux points différents de la source, la valeur moyenne du cosinus sera nulle, et l'éclairement total sera uniquement la somme des éclairements produits par chaque source (qui eux dépendent de l'espace!). On dit que les deux sources sont **incohérentes**. Plus précisément, on parle de cohérence spatiale dans cet exemple.

On va essayer de quantifier ce phénomène : en fait, il faut d'abord connaître l'éclairement dû à une source qui n'est pas sur l'axe optique. Pour le reste de cette partie, on va considérer uniquement deux points différents pour comprendre le phénomène.

b) Translation d'une source par rapport à l'axe optique



On translate un point perpendiculairement à l'axe optique d'une distance X_s , on obtient une différence de marche δ_0 qui s'ajoute à la différence de marche entre les deux rayons sortant des fentes, par relation de Chasles :

$$\delta(M) = (SS_2 M) - (SS_1 M) = (SS_2) - (SS_1) + \frac{nax}{D}$$

On obtient alors en notant identifiant $\delta_0 = (SS_2) - (SS_1) = \frac{nax_s}{l}$ avec l la distance entre les fentes et le plan de la source. On a en fait la même figure d'interférences translatée d'une distance $x_0 = \frac{-DX_s}{nl}$ qui est la nouvelle position de la frange centrale (définie pour une différence de marche nulle).

On a alors tous les outils : on sait qu'il faut sommer les éclairements de deux sources ponctuelles non cohérentes, et on connaît l'expression de l'éclairement dû à un point n'importe où dans le plan de la source. On va alors appliquer cela à l'étude d'un système binaire.

c) Somme incohérente des éclairements

Considérons un système d'étoiles binaires proches l'une de l'autre : une sur l'axe optique notée P_0 (que l'on vise) située à la distance l de la Terre, l'autre perpendiculaire à l'axe optique notée P_1 , distante de X_s de P_0 . On utilise un système de fentes d'Young pour évaluer la distance qui les sépare : on vient de voir qu'il faut sommer les deux éclairements, donc on aura en supposant qu'elles émettent des ondes planes avec la même intensité

$$\mathcal{E}(M) = 2\mathcal{E}_1 \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{nax}{D}\right) \right) + 2\mathcal{E}_1 \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{nax}{D} + \frac{naX_s}{l} \right)\right) \right)$$

Pour obtenir :

$$\mathcal{E}(M) = 4\mathcal{E}_1 \left(1 + \cos\left(\frac{\pi}{\lambda} \frac{naX_s}{l}\right) \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{nax}{D} + \frac{\pi naX_s}{l\lambda}\right) \right)$$

Ce qui est important est le terme en $\cos\left(\frac{\pi}{\lambda} \frac{naX_s}{l}\right)$: on qualifie ce terme de contraste. Il affecte l'amplitude de l'éclairement dans les interférences. Donc pour des valeurs particulières de a , cette

amplitude sera nulle, on parle alors d'**anticoïncidences**. On observe alors à l'écran un éclairement uniforme puisque $\mathcal{E}(M) = 4\mathcal{E}_1$.

Remarque: Ce terme de contraste ne dépend pas de la coordonnée d'espace sur l'écran, c'est typique de la cohérence spatiale.

On peut ainsi, en faisant varier a et en trouvant les $a_k = \frac{\lambda l}{2naX_s} + k \frac{\lambda l}{naX_s}$, k entier, on peut remonter à l'angle $\theta \simeq \frac{X_s}{l}$ sous lequel sont vues les deux étoiles, ce qui ne serait pas possible avec un télescope au vu de sa résolution maximale.

VIII Interférométrie à division d'amplitude (voir [14] à [18])



L'extension spatiale d'une source induit une perte de contraste pour l'expérience des fentes d'Young. C'est problématique car si on veut gagner en intensité en sortie il faut augmenter le nombre de sources ponctuelles, donc avoir une grande source. Une source de l'ordre du millimètre provoque déjà un brouillage. Comment s'en affranchir ?

1) Théorème de localisation

a) Cohérence spatiale (**voir plus haut**)

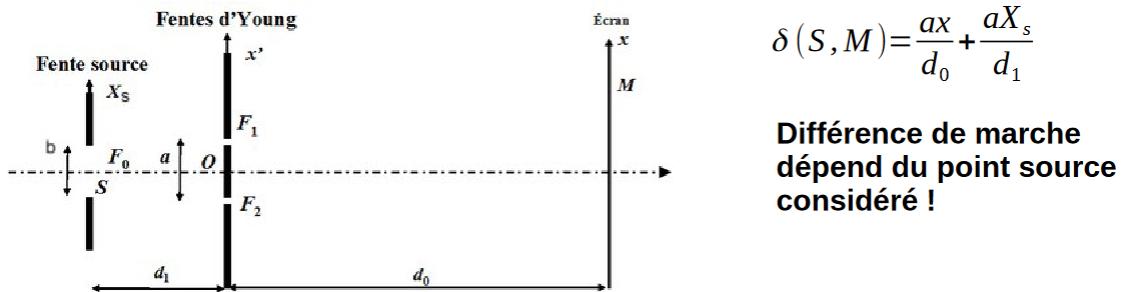
L'extension spatiale de la source peut induire une perte de contraste : on parle de cohérence spatiale de la source.

Comment s'en affranchir pour gagner en intensité sans perdre en contraste ? Quel type d'interféromètre utiliser ?

Fentes d'Young : brouillage en source étendue

Source étendue : ensemble de sources ponctuelles incohérentes entre elles :

$$I(M) = \sum_{S \in \text{source}} 2I_0(1 + \cos(2\pi \delta(S, M)/\lambda))$$



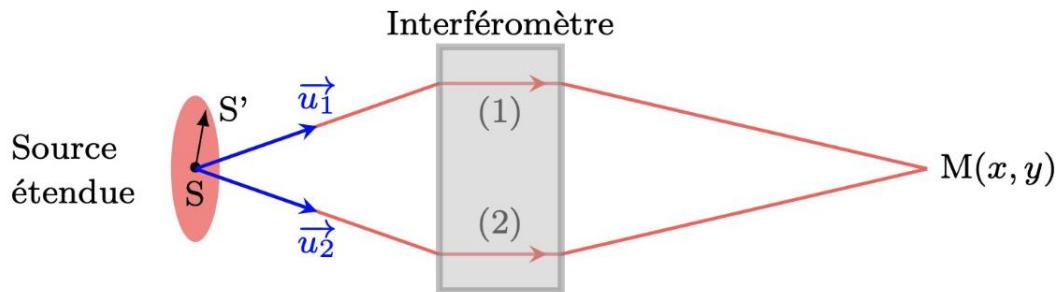
Brouillage en source étendue

- Si deux points sources distants de b vérifient : $ab/D = \lambda/2$ → brouillage
- Pour une source continue, brouillage chaque point a un voisin vérifiant la condition ci-dessus, d'où :

$$ab/D = \lambda$$

b) Théorème de localisation

Théorème de localisation



On considère un interféromètre à deux voies. On cherche les points M tels que $\delta(S, M) \simeq \delta(S', M)$ pour tout point $S, S' \in$ source.

En notant \vec{u}_1 et \vec{u}_2 les directions des rayons entrant dans la voie 1 et 2, on montre que :

$$\boxed{\delta(S, M) - \delta(S', M) \simeq (\vec{u}_2 - \vec{u}_1) \cdot \vec{SS'}}$$

C'est un calcul à l'ordre un en la dimension de la source (**voir [18] p79**).

A quelle condition a-t-on $\delta(S, M) \simeq \delta(S', M)$

- $(\vec{u}_2 - \vec{u}_1)$ orthogonal à $\vec{SS'}$: on ne s'y intéresse pas ici, condition sur la source
- $\vec{u}_2 = \vec{u}_1$: Les rayons qui interfèrent proviennent du même rayon entrant dans l'interféromètre. Il s'agit d'interféromètres à division d'amplitude.

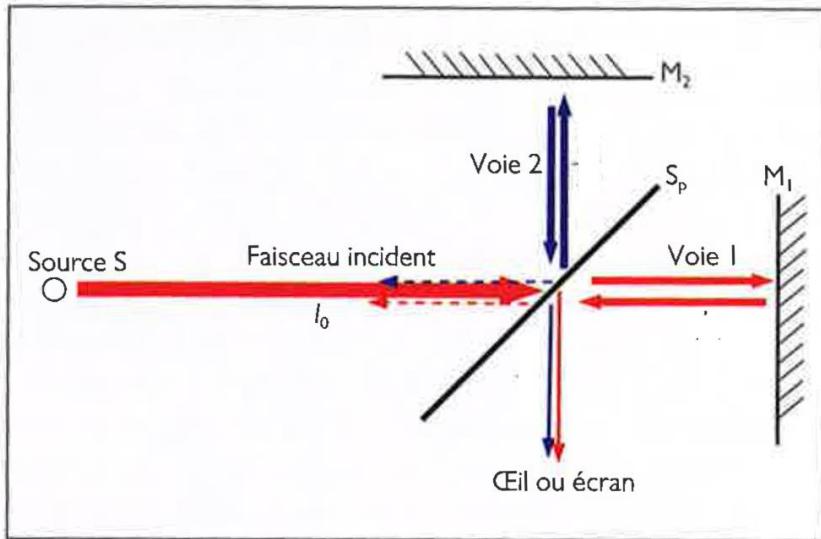
Théorème de localisation

Pour un interféromètre à division d'amplitude, éclairé par une source étendue, les **interférences sont localisées au voisinage des points où les rayons qui interfèrent proviennent du même rayon entrant dans l'interféromètre**.

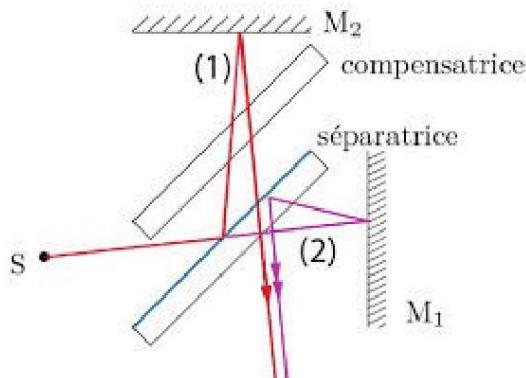
On s'affranchit de la cohérence spatiale de la source au prix de la localisation des interférences.

Remarque : lorsque $\vec{u}_1 \neq \vec{u}_2$, on parle d'interféromètre à division du front d'onde.

c) Présentation de l'interféromètre de Michelson



Rôle de la compensatrice



Il y a deux configurations possibles, chacune ayant son intérêt.

2) Configuration en « lame d'air »

a) Disposition des miroirs et localisation

Miroirs équivalents parallèles. On utilise une source étendue avec beaucoup d'angles d'incidence i . On utilise également un objectif de microscope après le laser.

Où sont localisées les interférences ? Pour que ce soit issu du même rayon, il faut qu'on regarde à une incidence i donné, autrement dit, elles sont localisées à l'infini.

Quelle est la figure d'interférences ? La différence de marche dépend géométriquement de l'angle i , on s'attend à des anneaux d'égale inclinaison.

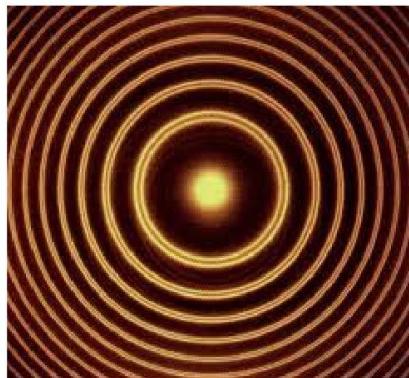
b) Figure d'interférences (**À COMPLÉTER**)

Calcul de la différence de marche : on applique le principe du retour inverse et le théorème de Malus (**voir [15]**). On trouve $\delta = 2n_0 \cos(i)$, avec n_0 l'indice de l'air.

c) Application à la spectrométrie (**À COMPLÉTER**)

Expérience : doublet du sodium (**voir [16]**)

Résolution du doublet du sodium



Après calcul (**voir [15]**), on trouve :

$$I(M) = 4I_0 \left[1 + \cos \left(\frac{\pi \Delta \lambda}{\lambda_m^2} \delta(M) \right) \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_m} \delta(M) \right) \right]$$

En traçant $I(M)$, on voit que le contraste est nul à certains endroits, c'est ici qu'on a les anti-coïncidences. Entre deux anti-coïncidences, le miroir s'est déplacé de :

$$\Delta e = \frac{\lambda_m^2}{2\Delta\lambda}$$

On a donc directement accès à $\Delta\lambda$, qui vaut $0,597 \pm 0,002$ nm.

On peut mesurer des choses très fines, notamment des variations d'indice optique, on peut le faire avec l'autre configuration de manière plus simple.

3) Configuration en coin d'air

a) Figure d'interférences et localisation (**À COMPLÉTER**)

Il s'agit de franges d'égale épaisseur, localisées au niveau des miroirs (là où les rayons se croisent).

b) Application à la mesure d'indice optique (**À COMPLÉTER**)

On place une cuve de longueur l dans un des bras, avec une pompe qui permet de contrôler la pression, cela fait varier l'indice optique. On ajoute alors une différence de marche $\delta' = 2(n - n_0)l$. On peut mesurer des variations de n de l'ordre de 10^{-5} .

L'intérêt de l'interférométrie à division d'amplitude est de s'affranchir de la cohérence spatiale de la source, on a donc directement accès à la cohérence temporelle de celle-ci. On peut donc en particulier étudier la densité spectrale de puissance de la source, le lien est fait avec le théorème de Wiener-Khintchine ([voir plus bas](#)).

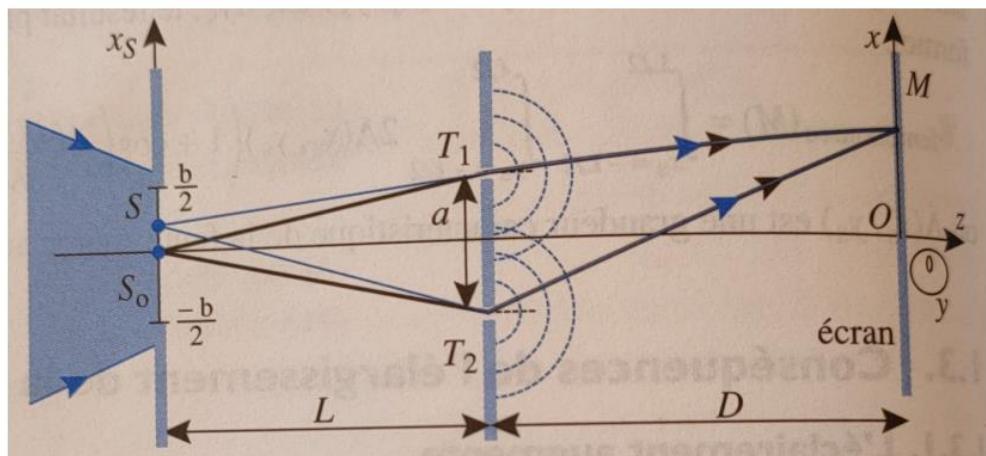
IX Cohérence en optique (voir [1], [14], [18]) (**À COMPLÉTER**)

On va revenir sur la notion de cohérence, avec une approche plus calculatoire cette fois. Le modèle de sources ponctuelles monochromatiques est idéal, il n'existe pas dans la réalité. Nous allons rappeler ce qu'est la cohérence spatiale et nous allons introduire la cohérence temporelle.

1) Cohérence spatiale

a) Effet de l'élargissement d'une source

Exemple : les fentes d'Young



Si on élargit progressivement les fentes, on constate que les interférences disparaissent et la luminosité augmente. La perte de contraste est due à l'extension spatiale. L'expérience des fentes d'Young repose sur la cohérence spatiale : c'est la capacité de chacun des points du front d'onde à interférer avec n'importe quel autre point. En effet, si la source est étendue, il y aura addition d'ondes incohérentes émises par chaque point source, ce qui peut brouiller l'illumination et générer des interférences.

b) Mise en équation

$$I = \sum_{s \in \text{source}} 2I_0(1 + \cos(\frac{2\pi}{\lambda} \delta(S, M))) = I_0 \int \frac{dx}{b} (1 + \cos(\frac{2\pi}{\lambda} \delta(x_1, M)))$$

Avec $\delta = \frac{ax_1}{L} + \frac{ax}{D}$, on trouve :

$$I(M) = 2I_0(1 + \cos(\frac{2\pi ax}{\lambda D}) \operatorname{sinc}(\frac{\pi ab}{\lambda L}))$$

On a alors brouillage lorsque :

$$\begin{aligned}\frac{b}{\lambda L} &\sim 1 \\ b &\sim \frac{\lambda L}{a} \sim 6mm\end{aligned}$$

Remarques :

La perte de contraste est globale. C'est la caractéristique de la cohérence spatiale.

Brouillage en source étendue

- Si deux points sources distants de b vérifient :
 $a b / L = \lambda / 2 \rightarrow$ brouillage
- Pour une source continue, brouillage chaque point a un voisin vérifiant la condition ci-dessus, d'où :

$$a b / D = \lambda$$

c) Théorème de Van Cittert – Zernike (**À COMPLÉTER**)

2) Cohérence temporelle

a) Origine physique

Ex : battements

L'extension fréquentielle de la source induit un brouillage : on parle de cohérence temporelle : la cohérence temporelle d'une onde est liée à la largeur de bande spectrale de la source. Une onde

réellement monochromatique (une seule fréquence) aurait, en théorie, un temps et une longueur de cohérence infinis. On définit le temps de cohérence et la longueur de cohérence par $\tau_c = \frac{1}{\Delta\nu}$ et $L_c = \tau_c c$.

Si les différents chemins suivis par l'onde diffèrent d'une longueur supérieure à L_c , alors il n'y aura pas d'interférences.

Ex : lampe à vapeur de sodium : $\Delta\nu = 10\text{MHz}$.

En réalité, il y a deux effets à prendre en compte : l'élargissement dû aux mouvements chaotiques des atomes (il y a un effet Doppler) et les collisions entre ceux-ci.

b) Retour sur l'interférence à deux ondes

On note S l'amplitude lumineuse : $S_{1,2}$ l'amplitude du champ passant par la voie 1/2.

$I = \langle |S_1 + S_2|^2 \rangle_{\tau_d} = \langle |S_1|^2 \rangle + \langle |S_2|^2 \rangle + 2\text{Re}(\langle S_1 S_2^* \rangle)$, avec τ_d le temps de réponse du capteur (de l'ordre 10^{-12}s).

On note δ la différence de marche introduite par l'interféromètre.

$S_1(t) = S(t)$ et $S_2(t) = S(t - \tau)$, avec $\tau = \frac{\delta}{c}$

$$\langle S_1 S_2^* \rangle_{\tau_d} = \Gamma(\tau)$$

Γ est la fonction d'autocorrélation de la source

$$I = I_1 + I_2 + 2 \text{Re}(\Gamma(\tau))$$

Ex : source monochromatique

$$\begin{aligned} S(t) &= e^{(-2i\pi\nu_0 t)} \\ \Gamma(\tau) &= \frac{1}{\tau} \dots \\ \Gamma(\tau) &= e^{(-2i\pi\nu_0 \tau)} \end{aligned}$$

Cas de la radiation quasi-sinusoidale

$$S(t) = A(t) \exp(-2i\pi\nu_0 t)$$

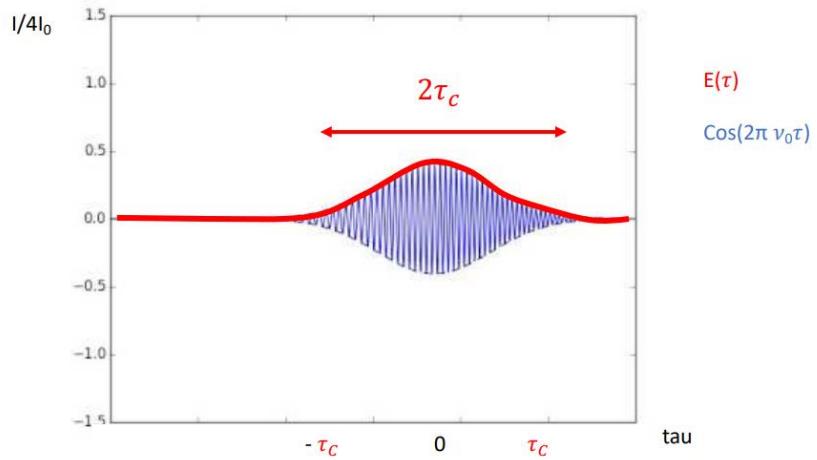
Lentement variable
devant ν_0

$$\Gamma(\tau) = \exp(-2i\pi\nu_0 \tau) \int A(t) A^*(t - \tau) dt = \exp(-2i\pi\nu_0 \tau) E(\tau) e^{i\phi(\tau)}$$

Fonction lentement variable (devant ν_0)

$$I = 2I_0(1 + \cos(2\pi\nu_0 \tau) E(\tau))$$

Cas de la radiation quasi-sinusoidale



c) Théorème de Wiener-Khintchine

Rappel: densité spectrale

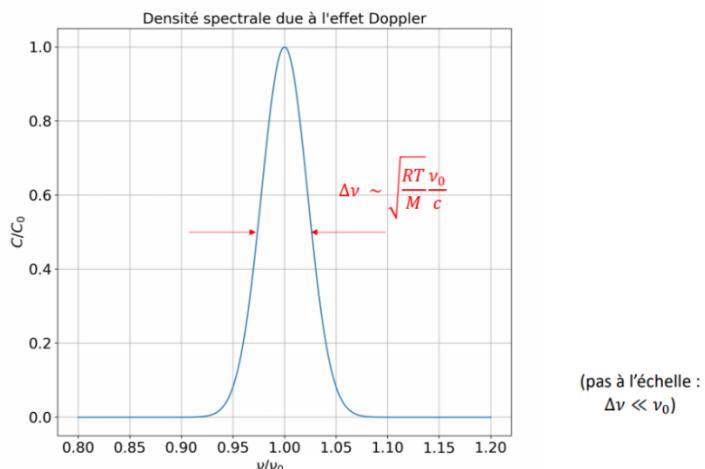
$$\text{Energie comprise entre } \nu_0 \text{ et } \nu_0 + d\nu : \quad du = C(\nu) d\nu$$

$$\text{Lien avec l'amplitude temporelle :} \quad S(t) = \int \tilde{S}(\nu) e^{-2i\pi\nu t} d\nu$$

$$C(\nu) = \tilde{S}(\nu) \tilde{S}(\nu)^*$$

La fonction d'autocorrélation n'est rien d'autre que la transformée de Fourier de la densité spectrale évaluée au même instant τ . On associe τ_c à Γ et $\Delta\nu$ à C . Avec les propriétés de la transformée de Fourier, on en déduit : $\Delta\nu\tau_c \sim 1$.

Ex : élargissement par effet Doppler



Décalage en fréquence : $\nu' = \nu_0(1 + \frac{v}{c})$

Répartition des vitesses : $dN \exp(-\frac{mv^2}{2k_B T})$

On trouve : $\Delta\nu \sim \sqrt{\frac{RT}{M}} \frac{\nu_0}{c}$

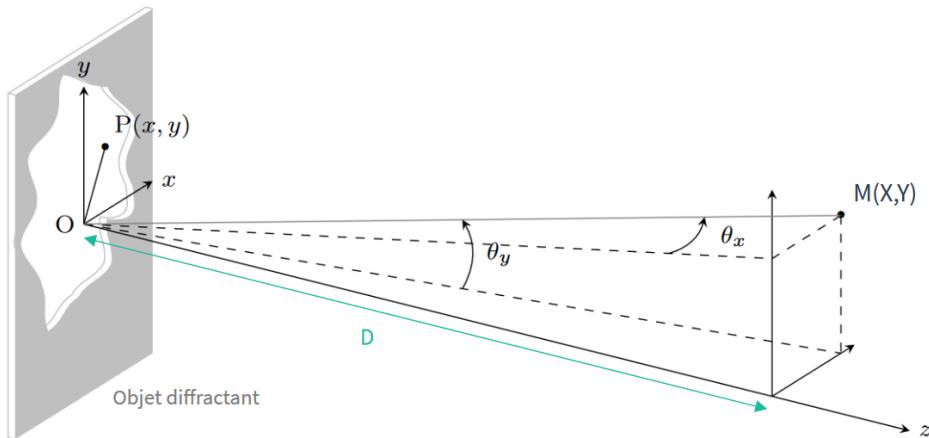
La cohérence spatiale induit un brouillage global, alors que la cohérence temporelle induit un brouillage local. A partir de l'interférogramme on peut remonter aux caractéristiques de la source.

X Diffraction de Fraunhofer (voir [1], [9], [15], [16], [19] à [22])

1) Régime de Fraunhofer

a) Condition de Fraunhofer

Diffraction de Fraunhofer



Principe de Huygens-Fresnel

$$\Psi(M) = \frac{\Psi_0}{i\lambda} \iint_{P \in \text{Ouverture}} \frac{e^{ikr}}{r} dx dy$$

où $r = \|\vec{PM}\|$

où $r=PM$.

- Approximation paraxiale :

(i) $D \gg (X, Y)$

(ii) $D \gg a$ où a est la taille caractéristique de l'ouverture

- On développe PM :

$$PM \sim D + \frac{X^2 + Y^2}{2D} + \frac{x^2 + y^2}{2D} - \frac{xX + yY}{D}$$

- Terme d'amplitude varie lentement donc : $\frac{1}{PM} \sim \frac{1}{D}$

- Terme de phase varie lentement donc on garde juste l'ordre 1. Pour pouvoir négliger l'ordre devant λ il faut : $\frac{x^2 + y^2}{2D} \ll \lambda$, soit :

$$D \gg \frac{a^2}{\lambda}$$

C'est la **condition de Fraunhofer**

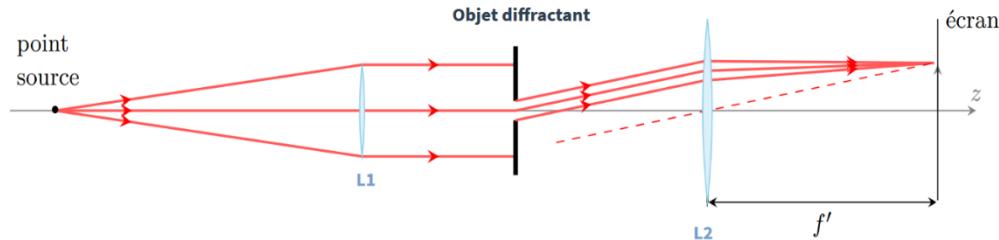
- En utilisant (3) et en négligeant les termes de phase constants résultant du développement de PM (car on s'intéresse à l'intensité par la suite), on a :

$$\Psi(M)\alpha \iint_{P \in O} \exp\left[-\frac{2i\pi}{\lambda D}(xX + yY)\right] dx dy$$

On vient de formuler une approximation, on peut se demander si elle est contraignante. Ordre de grandeur : pour $\lambda = 500 \text{ nm}$ et $a=500 \mu\text{m}$, pour satisfaire la condition de Fraunhofer il faudrait $D \gg 50 \text{ cm}$ ce qui peut devenir vite contraignant en termes d'encombrement et de perte de luminosité. On va donc utiliser une "astuce expérimentale" : les lentilles.

b) Dispositif expérimental

Dispositif expérimental



Avec ce montage on a $D \rightarrow +\infty$ et donc la condition de Fraunhofer est vérifiée.

De plus, on a :

$$\Psi(M)\alpha \iint_{P \in O} \exp\left[-\frac{2i\pi}{\lambda f'}(xX + yY)\right] dx dy$$

2) Exemple de figure de diffraction

a) Notion de transmittance

- On introduit $t(x,y)$ la transmittance de l'objet diffractant. Elle caractérise l'objet et est définie comme :

$$t(x, y) = \frac{\Psi_{avec\ objet}(x, y)}{\Psi_{sans\ objet}(x, y)}$$

Remarque : on peut définir une transmittance pour des objets minces (devant λ) uniquement

- Ainsi, on peut réécrire :

$$\Psi(M) \propto \iint_{-\infty}^{+\infty} \exp[-2i\pi(f_X x + f_Y y)] dx dy$$

où on définit les fréquences spatiales :

$$\begin{cases} f_X = \frac{X}{\lambda f'} \\ f_Y = \frac{Y}{\lambda f'} \end{cases}$$

On remarque que $\Psi(M) \propto TF[t(x, y)]$

Rappels : Transformée de Fourier

Transformée de Fourier directe

$$F(u) = TF[f(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(X) e^{2i\pi u X} dX$$

$$F(u, v) = TF[f(X, Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(X, Y) e^{2i\pi(uX + vX)} dX dY$$

Transformée de Fourier inverse

$$f(X) = TF^{-1}[F(u)] = \int_{-\infty}^{+\infty} F(u) e^{-2i\pi u X} du$$

$$f(X, Y) = TF^{-1}[F(u, v)] = \int_{-\infty}^{+\infty} F(u, v) e^{-2i\pi(uX + vX)} du$$

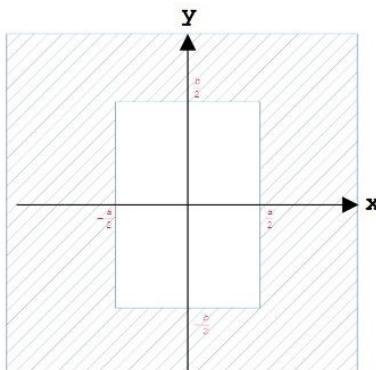
Rappels : Transformée de Fourier

Produit de convolution

$$(f * g)(X, Y) = \iint f(X', Y') g(X - X', Y - Y') dX' dY'$$

$$TF[f * g] = TF[f] \times TF[g]$$

b) Fente rectangulaire



- on a facilement :

$$t(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| < \frac{a}{2} \text{ et } |y| < \frac{b}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

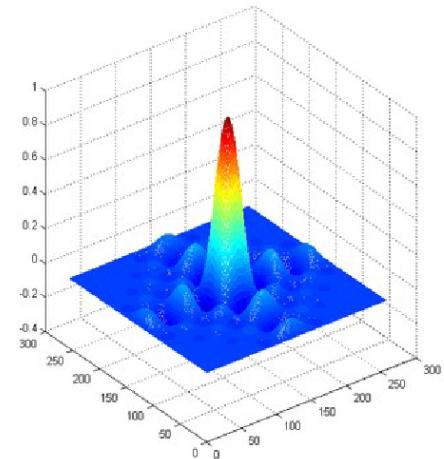
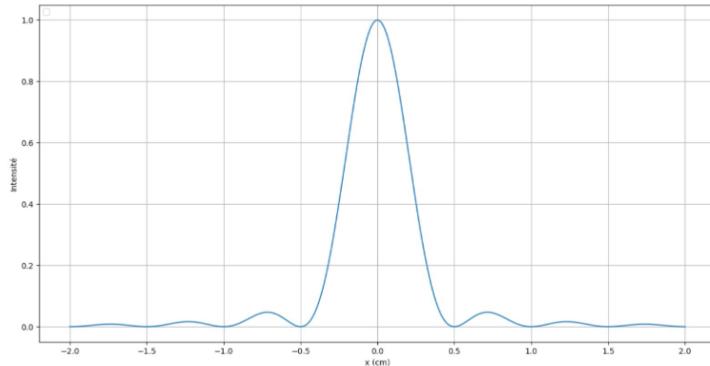
En utilisant la dernière relation, on trouve :

$$\Psi(f_X, f_Y) \propto ab \sin_c(\pi f_X a) \sin_c(\pi f_Y b)$$

Remarques : → on aura une intensité diffractée différente des prédictions de l'optique géométrique : manifestations de la diffraction

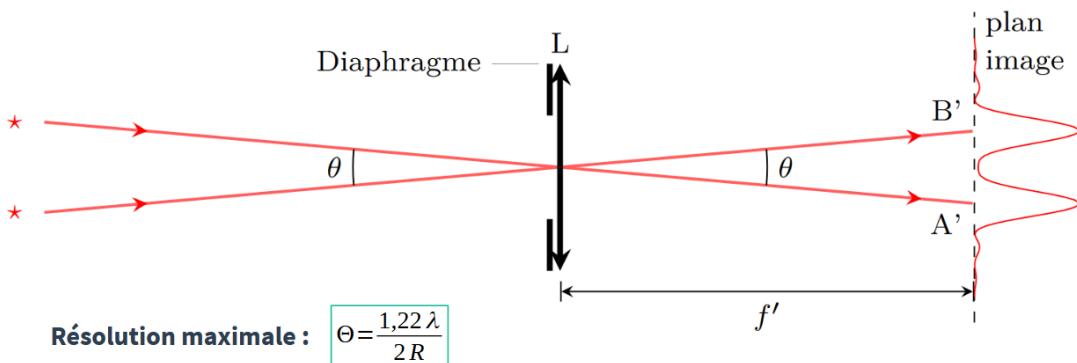
→ on peut écrire $t(x, y) = \prod\left(\frac{x}{a}\right) \prod\left(\frac{y}{b}\right)$, on retrouve alors bien $\Psi(M) \propto TF[t(x, y)]$

Intensité diffractée par une fente

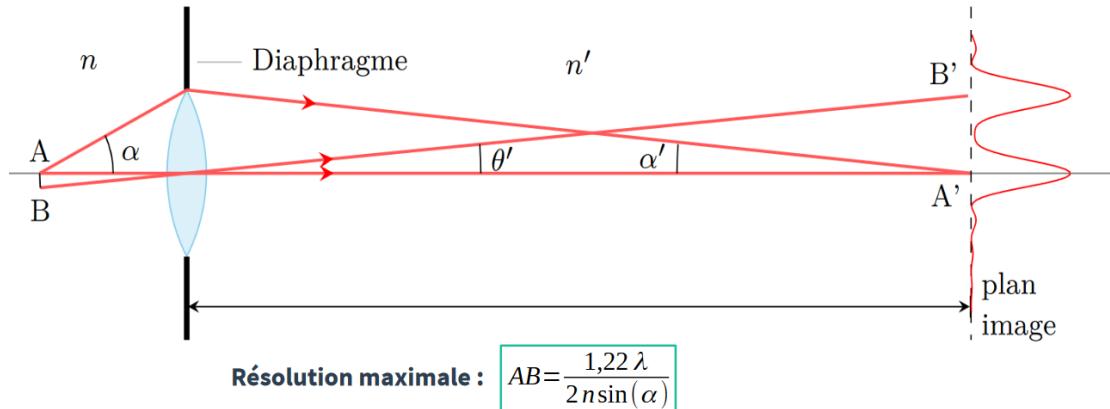


Il s'agit d'un cas classique et simple qui n'a d'intérêt que pédagogique. On va maintenant étudier un outil optique puissant qui repose sur le régime de diffraction de Fraunhofer.

Limite de résolution (angulaire)



Limite de résolution (spatiale)



3) Application au filtrage optique

Voir [15] p332

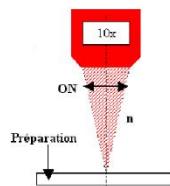
Ernst Abbe (1866)



Ouverture numérique

$$ON = n \sin(u)$$

*u : angle de demi ouverture
n : indice de réfraction du milieu d'observation*



a) Principe

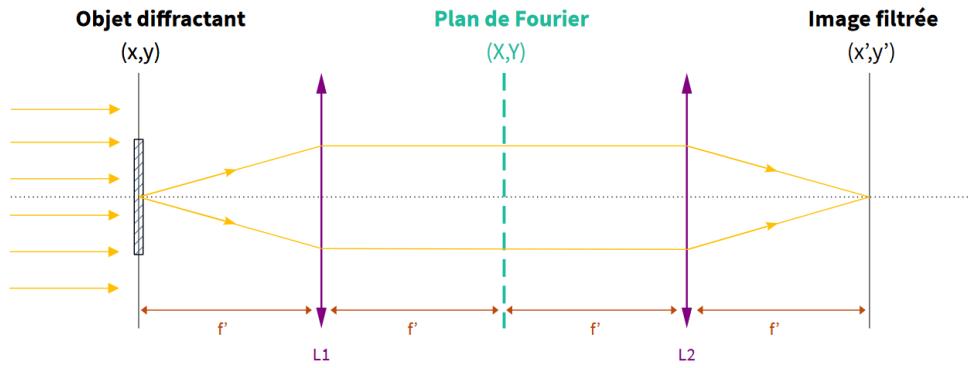
L'objectif est de modifier une image optique en filtrant certaines de ses fréquences spatiales.

Plan de Fourier



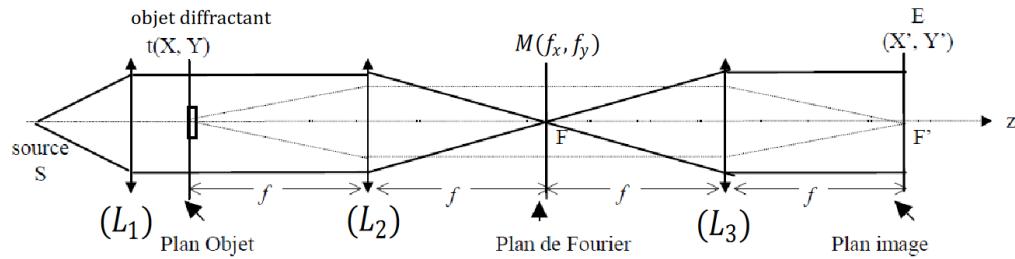
T(X,Y) est le filtre spatial

Montage expérimental : montage 4f



On appelle ce montage ainsi car on place une troisième lentille L_3 de même distance focale que $f_2 = f$ et donc la distance f se répète 4 fois dans le montage.

Montage 4f de filtrage spatial



$$\begin{aligned} \psi_0 \longrightarrow \psi_{PO}(x, y) &= \psi_0 t(X, Y) \rightarrow \psi_{PF}(x, y) = \psi_0 TF[t](f_x, f_y) \longrightarrow \psi_{IM}(X', Y') = \\ &\psi_0 t(-X', -Y') \\ &= TF[\psi_{PF}](X', Y') \end{aligned}$$

$$\Psi_{PF}(x, y) = \Psi_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} t(X, Y) e^{2i\pi(f_x X + f_y Y)} dXdY = \Psi_0 TF[t](f_x, f_y)$$

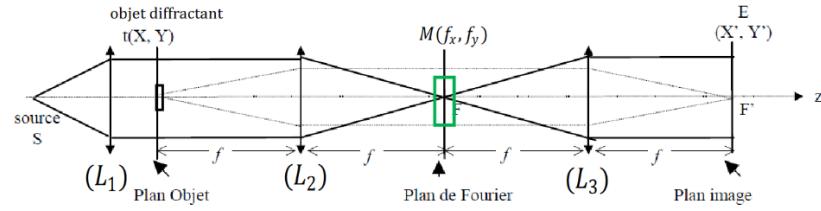
$$\Psi_{IM}(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_{PF}(x, y) e^{2i\pi(f_{X'} x + f_{Y'} y)} dx dy = TF[\Psi_{PF}](f_{X'}, f_{Y'})$$

$$\Psi_{IM}(x, y) = \Psi_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} t(X, Y) dXdY \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi(\frac{x}{\lambda f}(X+X') + \frac{y}{\lambda f}(Y+Y'))} dxdy$$

$$\Psi_{IM}(x, y) = \Psi_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} t(X, Y) dXdY \delta(X + X') \delta(Y + Y') = \Psi_0 t(-X', -Y')$$

Appliquons maintenant un filtre spatial dans le plan de Fourier, c'est-à-dire un deuxième objet diffractant de transmittance connue $\tau(x, y)$:

Montage 4f de filtrage spatial



$$\psi_0 \longrightarrow \psi_{PF}(x, y) = \psi_0 \tau(x, y) TF[t](f_x, f_y) \longrightarrow \psi_{IM}(X', Y') = \psi_0 t(-X', -Y') * TF[\tau](\frac{X'}{\lambda f}, \frac{Y'}{\lambda f})$$

$\tau(x, y)$ fonction de transfert du filtre dans l'espace des fréquences spatiales

L'amplitude de l'onde diffractée dans le plan de Fourier devient alors :

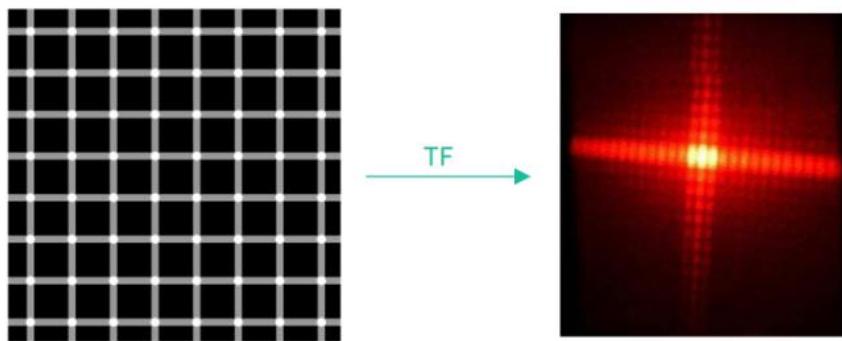
$$\Psi_{PF}(x, y) = \Psi_0 \tau(x, y) TF[t](f_x, f_y)$$

avec $\tau(x, y)$ la fonction de transfert du filtre dans l'espace des fréquences spatiales.

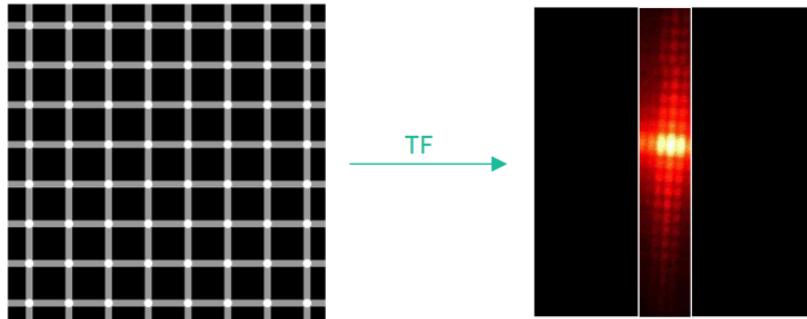
On retrouve alors l'amplitude filtrée de l'onde dans le plan image (en faisant la transformée de Fourier de celle dans le plan de Fourier et en appliquant les propriétés sur le produit de convolution) qui est l'image renversée et modifiée par le facteur $TF[\tau](f_{X'}, f_{Y'})$.

b) Exemple du filtrage d'une grille

Exemple de filtrage fréquentiel

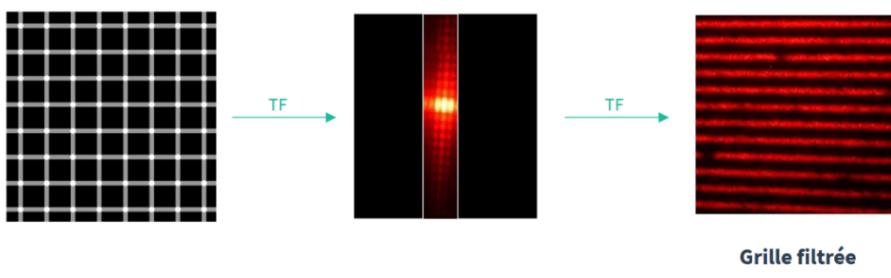


Exemple de filtrage fréquentiel



Filtre

Exemple de filtrage fréquentiel



Grille filtrée

c) Filtre passe-bas

Si on regarde l'expression des fréquences spatiales, $f_x = \frac{x}{\lambda f}$ et $f_y = \frac{y}{\lambda f}$. On comprend donc que les basses fréquences correspondent ici aux petites positions et donc au centre de l'image.

On place une ouverture au centre du plan de Fourier qui ne laisse donc passer que les basses fréquences spatiales, inférieures à une pulsation de coupure (qui correspond aux bordures de l'ouverture). Cela permet de supprimer les variations à petite échelle de l'image c'est-à-dire les détails fins.

Applications :

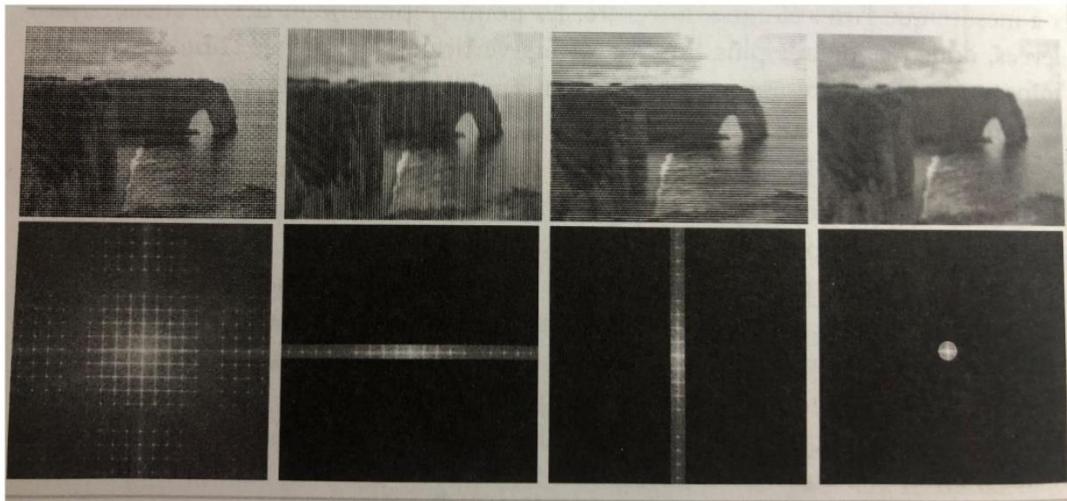
- Voir expérience d'Abbe (voir [15] p334)

Dans le cas du microscope, la grille est remplacée par la lame échantillon (objet diffusif) et la lentille par l'objectif du microscope. Les détails de l'échantillon les plus fins sont associés aux rayons diffractés dans les directions angulaires les plus élevées. Si ces rayons ne peuvent pas pénétrer dans l'objectif, il s'ensuit une perte de résolution spatiale. Le pouvoir de résolution du microscope est donc lié à son ouverture numérique $\omega = n \sin(u)$ d'où l'angle de demi ouverture u doit être grand.

- Détramage des images/photographies :

Avant l'avènement des technologies numériques, sur certains tirages anciens ou très agrangés, la trame de la photographie, constituée d'un réseau régulier de points ou de carrés noirs est visible et nuit à l'aspect esthétique des images. On réalisait alors un filtrage passe bas pour nettoyer les images. Lorsque l'on ajoute un filtre constitué d'une ouverture rectangulaire verticale, seules les modulations verticales (c'est-à-dire des traits horizontaux) sont visibles. Le raisonnement et les résultats sont similaires avec une ouverture horizontale. Ce nettoyage des images s'accompagne cependant d'une perte notable de résolution spatiale.

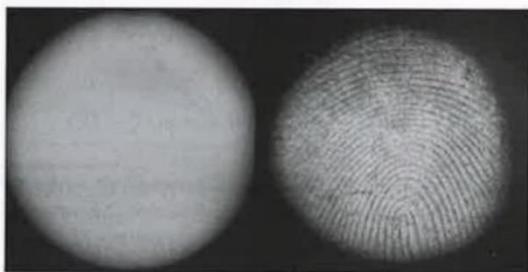
Filtrage passe bas : Détramage d'une image



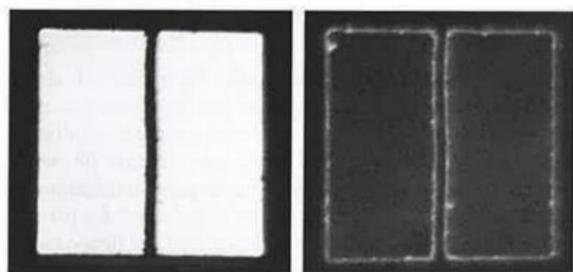
d) Filtre passe-haut

Strioscopie : On peut au contraire éliminer les basses fréquences en plaçant un petit disque opaque au centre du plan de Fourier.(image trou opaque quelconque dans un carré). Cette fois ci ce sont les variations de luminosité sur les grandes échelles qui sont atténuées mais pas les détails fins. On peut ainsi améliorer sensiblement la visibilité des détails sur un fond uniformément éclairé.

Filtrage passe haut : Strioscopie

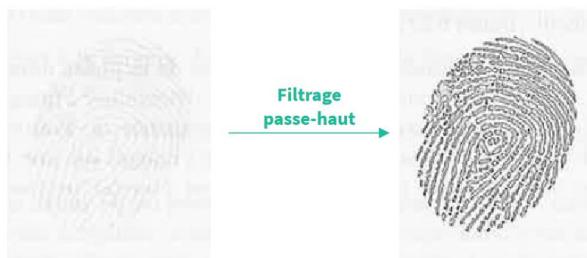


a) Image de l'empreinte digitale avant (à gauche) et après (à droite) filtrage



b) Image de l'ouverture avant (à gauche) et après (à droite) filtrage

Exemple de strioscopie



e) Microscopie à contraste de phase

On place dans le plan de Fourier une pastille transparente d'indice n et d'épaisseur e qui induit un déphasage $\delta\phi = \frac{2\pi n e}{\lambda}$ soit $\tau(x, y) = e^{i\delta\phi}$. Alors, $\Psi_{PF} = \Psi_0 e^{i\delta\phi} TF[t](f_x, f_y)$ avec $\delta\phi$ un déphasage faible introduit par l'objet transparent dont on veut faire l'image, soit $\Psi_{PF} = \Psi_0(1 + i\delta\phi)TF[t](f_x, f_y)$. D'où, $\Psi_{IM}(x, y) = \Psi_0 t(-X', -Y') * TF1 + i\delta\phi$.

Or l'objet de phase est choisi (on s'arrange pour cela en plaçant une lame quart d'onde) tel que $\delta\phi = \frac{\pi}{2}$, soit $\tau(x, y) = i$.

$\Psi_{IM}(x, y) = \Psi_0 t(-X', -Y') * 2\delta(\frac{X'}{\lambda_f}, \frac{Y'}{\lambda_f})$. Alors, les variations de phase deviennent des variations d'amplitude que l'on peut distinguer facilement.

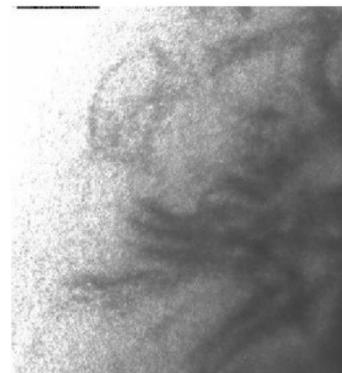
(voir [9] p154)

Microscopie à contraste de phase



Cellules des joues

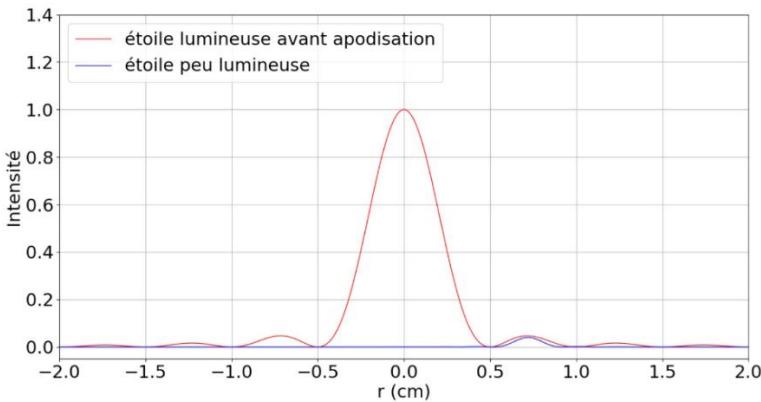
Microscopie à contraste de phase



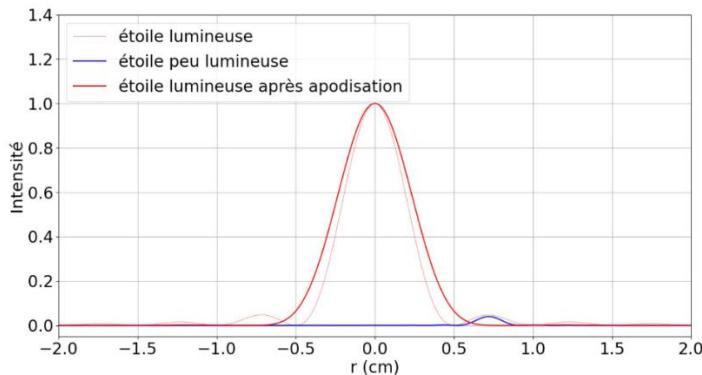
f) Apodisation

Apodisation : concentration de la lumière dans le maximum de diffraction. L'apodisation est un procédé destiné à restructurer la tache de diffraction produite par un instrument d'optique (par exemple, en plaçant dans le faisceau lumineux une lame à transparence variable) afin de réduire l'intensité gênante de son deuxième maximum.

Exemple d'apodisation



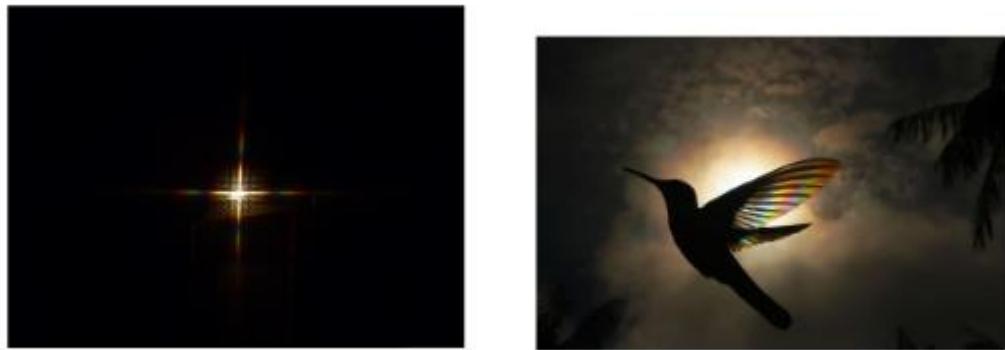
Exemple d'apodisation



	Filtrage optique	Filtrage électronique
Grandeur considérée	Amplitude $\psi_{PF}(x, y)$	Tension $u_s(t)$
Fonction de transfert du filtre	$\tau(f_x, f_y) = \frac{\psi_{PF}}{\psi_{PO}}$	$H(\omega) = \frac{u_s}{u_e}$
Filtrage passe-bas	Ouverture	
Filtrage passe-haut	Disque opaque	

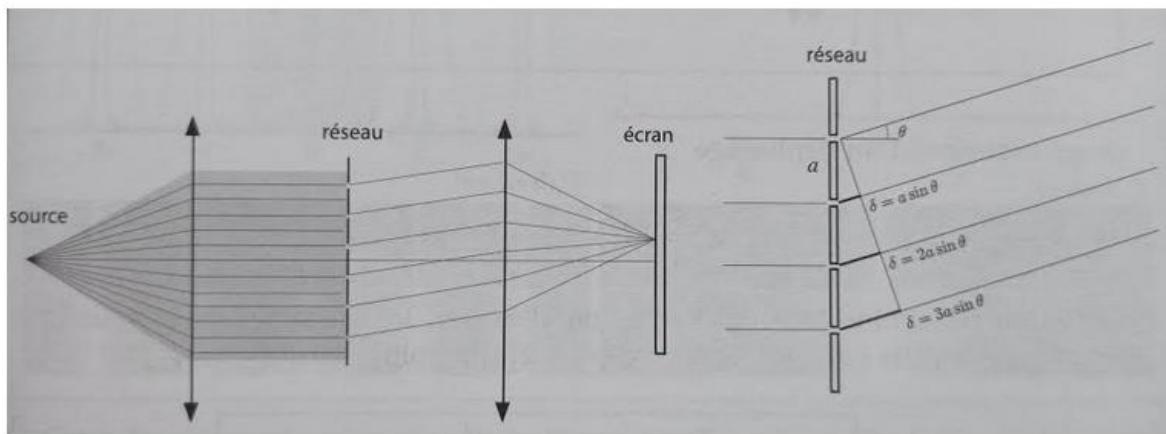
XI Diffraction par des structures périodiques (voir [9], [14], [23], [24], [25], [26])

Dans la nature il existe tout un tas de phénomènes d'irisations, certains sont dus à la diffraction, comme les irisations à la surface d'un CD ou celles qu'on voit en regardant les ailes d'un colibri.



Comment cela s'explique ?

1) Réseau optique diffractant



L'idée de cette partie est d'arriver à la description de la figure de diffraction optique à partir du facteur de forme et du facteur de structure.

On part de l'expression connue de $\delta = a \sin(\theta)$. A la fin nous verrons quelques applications/phénomènes sympas pour montrer l'intérêt de la diffraction dans la mesure de pas de réseau.

a) Interférences à N ondes

(voir Taillet, Optique physique, chapitre 4)

On calcule la figure de diffraction dans le cas simple du réseau à N fentes infinie.

L'onde résultante s est la superposition des N ondes déphasées par le réseau de $\Delta\phi$ chacune.

$$\begin{aligned}
 s &= s_o \sum_{n=0}^{N-1} e^{in\Delta\phi} = s_o \frac{1 - e^{iN\Delta\phi}}{1 - e^{i\Delta\phi}} \\
 &= s_o \exp(i\frac{(N-1)\Delta\phi}{2}) \frac{e^{-i\frac{N\Delta\phi}{2}} - e^{i\frac{N\Delta\phi}{2}}}{e^{-i\frac{\Delta\phi}{2}} - e^{i\frac{\Delta\phi}{2}}} \\
 &= s_o \exp(i\frac{(N-1)\Delta\phi}{2}) \frac{\sin(\frac{N\Delta\phi}{2})}{\sin(\frac{\Delta\phi}{2})} \\
 I &= |s|^2 = I_o \frac{\sin^2(\frac{N\Delta\phi}{2})}{\sin^2(\frac{\Delta\phi}{2})}
 \end{aligned}$$

Or $\Delta\phi = \frac{2\pi\delta}{\lambda} = \frac{\pi a \sin\theta}{\lambda}$

Donc on a :

$$I = I_o \frac{\sin^2(\frac{N\pi a \sin\theta}{2\lambda})}{\sin^2(\frac{\pi a \sin\theta}{2\lambda})}$$

On sent assez facilement qu'il y aura une anisotropie typique de la diffraction, puisque le numérateur varie beaucoup plus vite que le dénominateur. Mais on y reviendra dans la partie suivante.

On peut aussi calculer la finesse du pic : $F = \frac{\Delta\lambda}{\delta\lambda}$, avec $\delta\lambda$ la largeur à mi-hauteur d'un pic et $\Delta\lambda$ l'écart entre 2 pics. On a alors $F = \frac{\Delta\lambda}{\delta\lambda} = \frac{\frac{N\lambda}{a}}{\frac{\lambda}{a}} = N$.

Donc plus il y a de fentes, plus F est grand et mieux on distingue les pics.

Pour l'instant notre modèle est incomplet, car on ne prend pas en compte ce qui permet de diffracter à chaque étape du réseau. On va maintenant chercher à l'appliquer.

b) Facteurs de forme et de structure

(voir Champeau, Ondes lumineuses, chapitre 13)

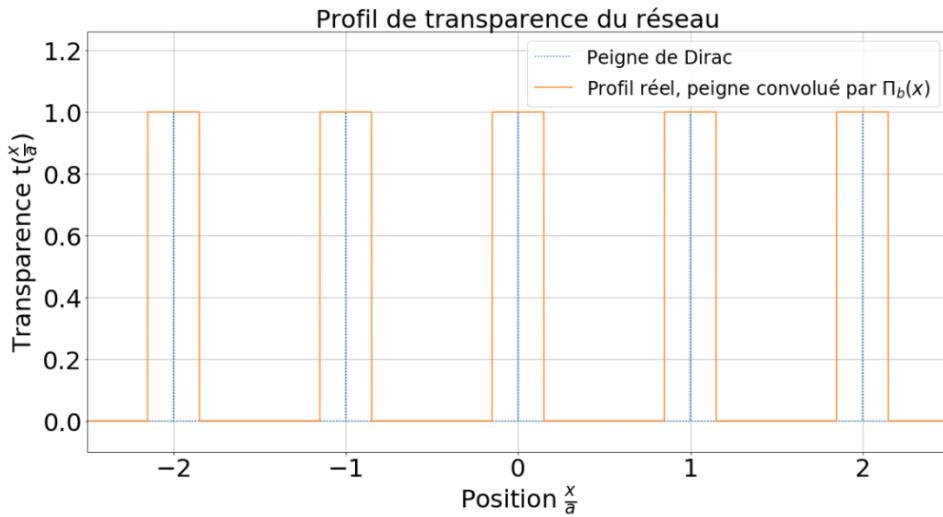
Maintenant, prenons en compte la largeur b de chaque fente du réseau.

On applique les résultats de la diffraction de Fraunhofer.

On modélise la fonction de transmittance du réseau comme suit :

$$t(x) = III_{a,N}(x) \otimes II_b(x)$$

Avec $III_{a,N}(b) = \sum_{n=0}^{N-1} \delta(x - na)$ et $II_b(x) = 1$ si $|x| < \frac{b}{2}$ et 0 sinon



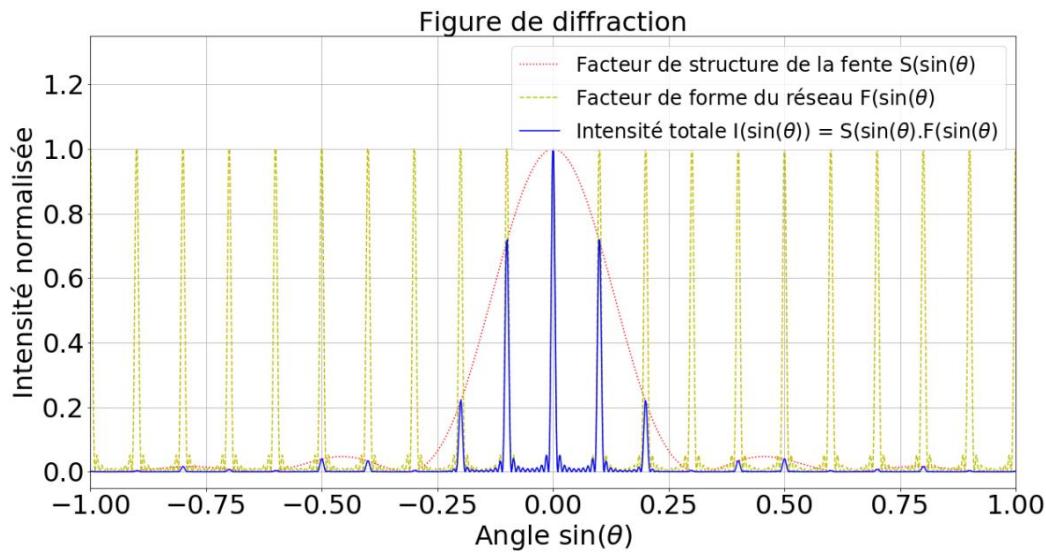
Remarque : Les valeurs numériques ne sont pas « réalistes » et sont choisis pour que ce soit visible, ici $b = 0.3 a$

En appliquant les résultats de Fraunhofer, on sait que :

$$\begin{aligned}
 A(\theta) &\propto TF(\text{III}_{a,N}(x) \circledast \Pi_b(x)) \\
 &\propto \underbrace{TF(\text{III}_{a,N}(x))}_{\text{Déjà calculé en I.1}} \cdot \underbrace{TF(\Pi_b(x))}_{\text{En prérequis}} \\
 &\propto \frac{\sin(\frac{N\pi a \sin\theta}{2\lambda})}{\sin(\frac{\pi a \sin\theta}{2\lambda})} \cdot \text{sinc}(\frac{\pi b \sin\theta}{2\lambda})
 \end{aligned}$$

On obtiens donc la formule finale de la figure de diffraction :

$$I(\theta) = I_o \underbrace{\frac{\sin^2(\frac{N\pi a \sin\theta}{2\lambda})}{\sin^2(\frac{\pi a \sin\theta}{2\lambda})}}_{\text{Facteur de forme}} \cdot \underbrace{\text{sinc}^2(\frac{\pi b \sin\theta}{2\lambda})}_{\text{Facteur de structure}}$$



On peut isoler ici un facteur de forme et un facteur de structure. Le premier est la contribution de l'interférence à N ondes provoquées par la structure périodique. Le second est la contribution du contenu de chaque point du réseau, à savoir une fente ici, qui va moduler la figure obtenue juste grâce au réseau.

$$F(\theta) = \frac{\sin^2\left(\frac{N\pi a \sin\theta}{2\lambda}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi a \sin\theta}{2\lambda}\right)}$$

Provient de la forme du réseau, et donne la position des pics

$$S(\theta) = \text{sinc}^2\left(\frac{\pi b \sin\theta}{2\lambda}\right)$$

Provient de la structure des fentes, et donne l'intensité des pics

On voit directement ici, notamment grâce au tracé du profil d'intensité, qu'on a l'anisotropie typique de la diffraction.

Remarque : Les valeurs numériques du tracé précédent ne sont pas « réalistes » et sont choisies pour que ce soit visible, ici $a = 5\mu\text{m}$, $b = 500\text{nm}$, $N = 10$

Connaissant notre réseau, on peut décrire la forme de la figure de diffraction. Maintenant regardons quelques applications, qui nous permettent à l'aide de la figure de diffraction, d'obtenir des infos sur le pas d'un réseau.

c) Applications : pas d'un réseau

Détermination du pas d'un CD-rom

Formule des réseaux en réflexion :

$$a = p \lambda / \sin(\theta_p)$$

Ici : $p = 1$

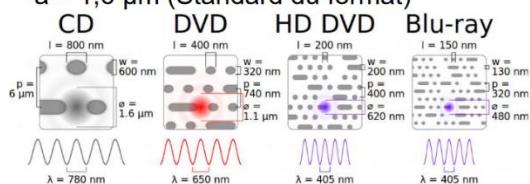
$$\lambda = 532 \text{ nm}$$

$$\sin(\theta_p) \approx 0,34$$

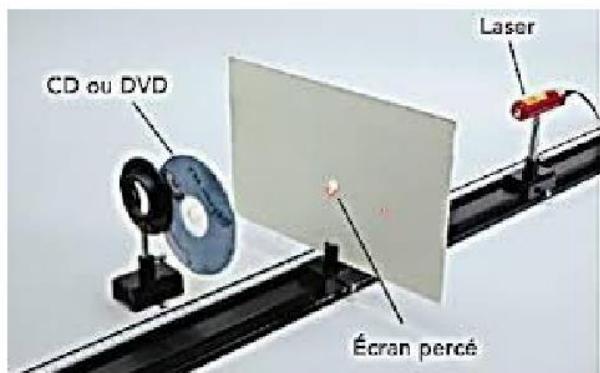


Crédit photo : Laurent Douek

$a \approx 1,6 \mu\text{m}$ (Standard du format)



Crédit illustration : Cmglee



(voir [23])

On a en incidence normale : $a = \frac{p\lambda}{\sin \theta_p}$. Pour l'ordre $p = 1$ et un laser à $\lambda = 532$ nm, on mesure un angle de $\sin \theta_p = 0.34$.

Donc $a \approx 1.6 \mu\text{m}$ ce qui est le standard du format CD.

La quantité de données stockée est inversement proportionnelle à a , donc si on veut stocker plus on doit diminuer a , mais on se retrouve alors à avoir de l'ordre des longueurs d'onde optiques, donc pour essayer de limiter les brouillages à cause de la tache d'Airy, il faut diminuer λ .

Détermination du pas de l'aile du colibri

Formule des réseaux :

$$a = \lambda / \sin(\theta)$$

$$\text{Avec } \sin(\theta) = \frac{l}{\sqrt{f'^2 + l^2}}$$

Ici : $f' \sim 50$ mm

$L \sim 10$ cm

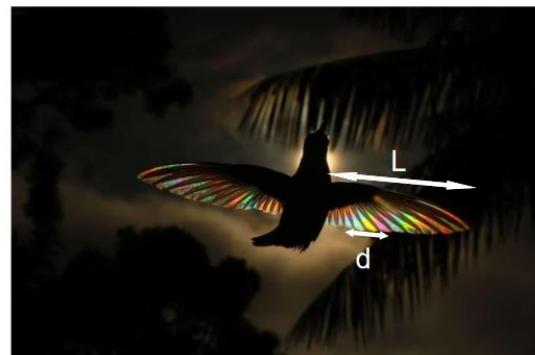
$l \sim L/4 \sim 2$ cm

Donc $\sin(\theta) \sim 0,37$

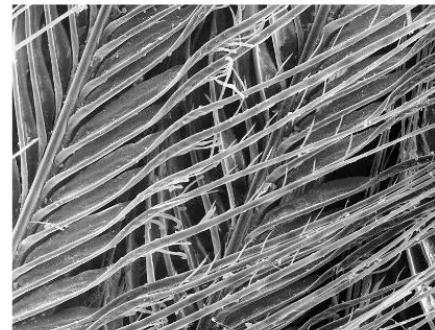
$\lambda \sim 400$ nm

$a \sim 1 \mu\text{m}$ (Cohérent avec la littérature)

Crédit photo : Dennis Kunkel Microscopy



Crédit photo : Laurent Douek



En estimant un peu en ordre de grandeur, sachant que la focale de l'appareil doit être de l'ordre de 50 mm (en tout cas très certainement entre 15 et 150 mm) et que l'aile d'un colibri fait en moyenne un peu moins de 10 cm, l'écart entre les deux ordres doit être de 2 cm. Donc $\sin(\theta) \sim 0,37$. Par ailleurs, on suppose $\lambda = 400$ nm. On obtient $a \sim 1 \mu\text{m}$, ce qui est cohérent avec des mesures microscopiques de l'aile.

Mais à quoi correspond ce réseau ? En fait une plume d'oiseau est composée de petits faisceaux nommés barbules. Ces barbules sont écartées de quelques μm dans le cas général, mais avec la bonne inclinaison, on peut les voir écartées de moins, et font donc ces irisations pleines de poésie sur le plumage de l'oiseau.

On va maintenant étudier un milieu à 3 dimensions. Nous allons voir une méthode de diffraction permettant de sonder la matière cristalline à l'échelle atomique : la diffraction X.

2) Diffraction X

Ici l'optique de Fraunhofer n'est plus valable car on travaille avec des objets qui ne sont plus plan. Par ailleurs, on cherche à sonder la matière à l'échelle de l'Angstrom. donc on doit avoir : $\lambda \sim 1 \text{ \AA}$. Ce qui équivaut à une énergie de l'ordre de la centaine de keV, ce qui équivaut à des rayons X.

a) Rappels de cristallographie

(voir [24] chapitres 4 et 5)

Réseaux de Bravais direct

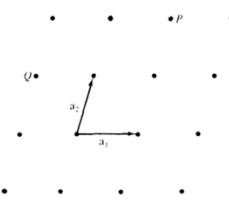
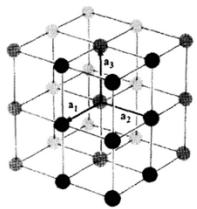
Soit trois vecteurs ($\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$).

Un réseau de Bravais est l'ensemble des points de position :

$\mathbf{R}_{u,v,w} = u\mathbf{a} + v\mathbf{b} + w\mathbf{c}$ avec (u,v,w) entiers relatifs.

Il est décrit par la fonction :

$$S(\mathbf{r}) = \sum_{u,v,w} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_{u,v,w})$$



Le RD est décrit par :

un vecteur $\overrightarrow{R}_{u,v,w} = u\vec{a} + v\vec{b} + w\vec{c}$ lui appartenant et la fonction :

$$S(\vec{r}) \propto \sum_{u,v,w} \delta(\vec{r} - \overrightarrow{R}_{u,v,w})$$

Le RR est décrit par :

un vecteur $\overrightarrow{K}_{h,k,l} = h\vec{a}^* + k\vec{b}^* + l\vec{c}^*$ lui appartenant et la fonction :

$$S(\vec{r}) \propto \sum_{h,k,l} \delta(\vec{q} - \overrightarrow{K}_{h,k,l}) = TF(S(\vec{r}))$$

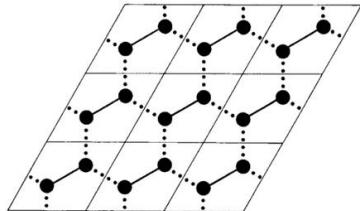
Un vecteur $\overrightarrow{K}_{h,k,l}$ appartient au RR si il décrit un vecteur d'onde de périodicité égal au RR.
C'est à dire $\forall (u,v,w) : \overrightarrow{K}_{h,k,l} \cdot \overrightarrow{R}_{u,v,w} = 2\pi m$ avec m un entier relatif.

À chaque famille réticulaire on associe un vecteur du réseau réciproque $\overrightarrow{K}_{h,k,l}$ tel que ce vecteur est orthogonal aux plans (ou droites dans le cas du réseau 2D) et tel que $\|\overrightarrow{K}_{h,k,l}\| = \frac{2\pi}{d}$ avec d la distance entre ces plans.

Motif et Réseau

Motif : Unité physique répétée à chaque nœud de réseau

Une structure cristalline est formé de l'union du motif et du réseau

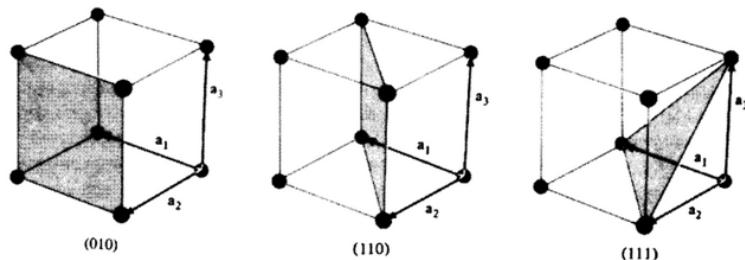


Plan réticulaire

Plan donné par trois points du réseau non alignés.
Engendre une famille de plan parallèles espacés
de la distance d

Un plan réticulaire est toujours orthogonal à un vecteur $\mathbf{K}_{h,k,l}$ du réseau réciproque, tel que :

$$\|\mathbf{K}_{h,k,l}\| = \frac{2\pi}{d}$$



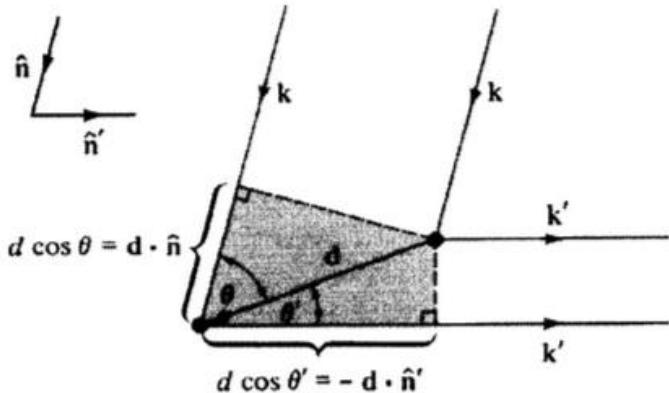
Maintenant, voyons comment la structure du réseau induit nécessairement certaines formes sur la figure de diffraction.

b) Vecteur de diffusion, construction de Von Laue

(voir [24] chapitre 6)

On envoie une onde incidente \vec{k} sur deux sites du réseau obtenu par une translation \vec{d} . On essaye de récupérer l'onde retransmise \vec{k}' . La différence de marche entre les deux rayons est

$$\begin{aligned}\delta &= d\cos(\theta) + d\cos(\theta') = \vec{d} \cdot \vec{n} - \vec{d} \cdot \vec{n}' \\ &= \vec{d} \cdot (\vec{n} - \vec{n}')\end{aligned}$$



On fait l'hypothèse que l'onde est retransmise par collision élastique, ie $\lambda = \lambda'$. De plus on pose $\vec{q} = \vec{k} - \vec{k}'$

$$\delta = \frac{\lambda}{2\pi} \vec{d} \cdot (\vec{k} - \vec{k}')$$

On récupère du signal si l'interférence est constructive, ie si $\delta = m\lambda$. Donc si

$$\begin{aligned}m\lambda &= \frac{\lambda}{2\pi} \vec{d} \cdot (\vec{k} - \vec{k}') \\ 2\pi m &= \vec{d} \cdot \vec{q}\end{aligned}$$

Puisque \vec{d} appartient au RD, on reconnaît ici la définition d'un vecteur du RR. Donc on a une interférence constructive et donc un pic si et seulement si \vec{q} appartient au RR

On retrouve que comme pour la diffraction optique, seules certaines directions de diffusion permettent d'avoir un signal non nul. On a dès lors des pics typiques de la diffraction, maintenant voyons comment on peut obtenir la figure de diffraction.

c) Densité de diffuseurs, facteurs de structure et de forme

(voir [25] chapitre 10)

Ici, ce n'est pas $t(\vec{r})$ mais $\rho(\vec{r})$ la densité d'objets diffusants (généralement les nuages électro-niques) qui pilotent la diffraction

On a : $\rho(\vec{r}) = \rho_{motif}(\vec{r}) \circledast \sum_{u,v,w} \delta(\vec{r} - \overrightarrow{R_{u,v,w}})$

Avec : $\rho_{motif}(\vec{r}) = \sum_{\substack{\text{atome } i \text{ de} \\ \text{la maille}}} \rho_{at}^{(i)}(\vec{r}) \circledast \delta(\vec{r} - \vec{r}_i)$

On peut raisonner par analogie avec l'optique de Fraunhofer, en supposant que la transformée de Fourier de la densité d'objets diffusants donnera l'intensité.

$$\begin{aligned} A(\vec{q}) &\propto \int \rho(\vec{r}) e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}} d\vec{r} \\ A(\vec{q}) &\propto \sum_{h,k,l} \left[\sum_i \left(\int \rho_{at}^{(i)}(\vec{r}) e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}} d\vec{r} \right) e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}_i} \right] \delta(\vec{q} - \overrightarrow{K_{h,k,l}}). \end{aligned}$$

On pose $f_i = \int \rho_{at}^{(i)}(\vec{r}) e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}} d\vec{r}$ la facteur de diffusion atomique.

$$A(\vec{q}) = A_o \underbrace{\sum_{h,k,l} \delta(\vec{q} - \overrightarrow{K_{h,k,l}})}_{\text{Facteur de forme}} \underbrace{\left[\sum_i f_i e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}_i} \right]}_{\text{facteur de structure}}$$

On retrouve ici les facteurs de forme et de structure, comme en optique. Le facteur de forme donne la position des pics de la figure de diffraction (dont la position est donnée par un Dirac car on a ici un réseau où $N \rightarrow \infty$) et donne des informations sur la géométrie du réseau. Tandis que le facteur de structure donne l'intensité du pic et permet d'en venir à sa constitution.

Voir [26]

d) Loi de Bragg et construction d'Ewald

(voir [24] chapitre 6)

On a $||\vec{q}|| = ||\vec{k}_r - \vec{k}_i|| = \frac{2\pi}{\lambda} 2 \sin \theta = \frac{4\pi}{\lambda} \sin \theta$

Par ailleurs : \vec{q} appartient au RR, donc il existe (h,k,l) tel que $\vec{q} = \overrightarrow{K_{h,k,l}}$. donc il existe une

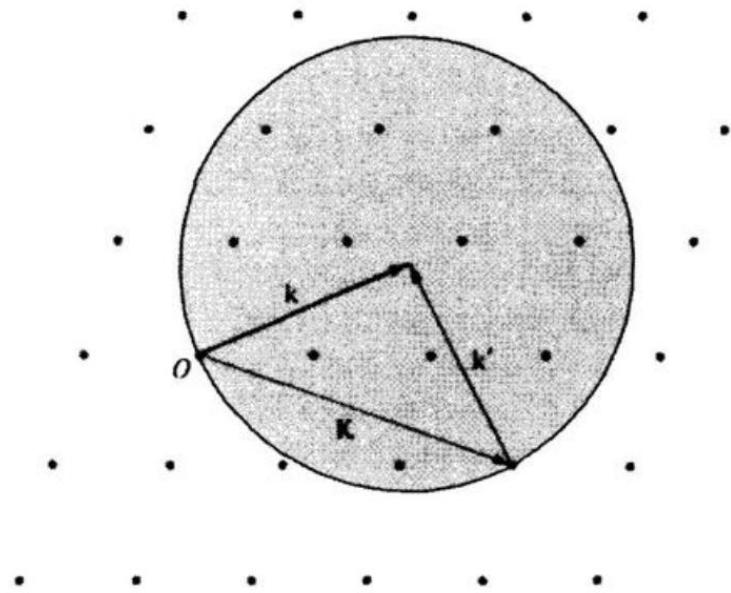
famille de plan réticulaire tel que $||\vec{q}|| = ||\overrightarrow{K_{h,k,l}}|| = \frac{2\pi}{d_{h,k,l}}$. Donc :

$$2d_{h,k,l} \sin \theta = \pi \lambda$$

Il s'agit de la loi de Bragg, qui permet sur un spectre X d'identifier les pics à des familles de plans

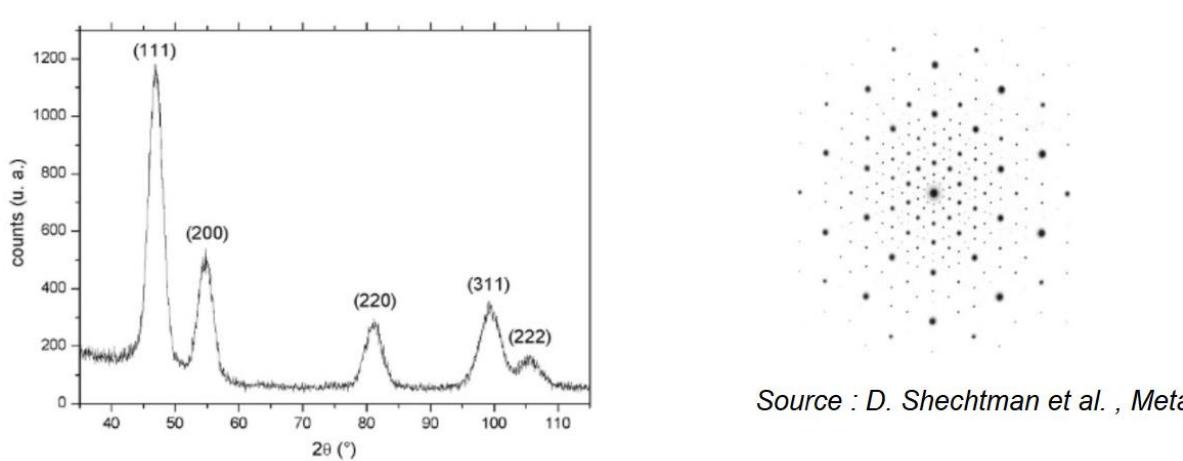
Maintenant qu'on sait (à peu près) identifier un spectre, comment l'acquérir ? Comme on a $||\vec{k}_r|| = ||\vec{k}_i|| = \frac{2\pi}{\lambda}$, on trace une sphère de rayon \vec{k}_r et \vec{k}_i . On a dès lors $||\vec{q}||$ qui relis deux points de la sphère.

Construction d'Ewald, mesure des pics



On place la sphère de telles sortes qu'un point du RR appartient à sa surface, et dès lors qu'on arrive à obtenir un deuxième point sur cette surface (ce qui est peu probable à obtenir spontanément), il existe un \vec{q} qui relie ces deux points et qui appartient dès lors au réseau réciproque et donne une interférence constructive. Pour réussir à obtenir deux points sur la surface, on peut utiliser la méthode du cristal tournant et la méthode de Van Laue.

Maintenant on sait raccorder la structure périodique d'un système à sa figure de diffraction, et comment déduire des informations de l'une sur l'autre. Typiquement on peut essayer de tirer quelques conclusions sur le spectre aux rayons X du cristal de Fe-Pt. La dualité onde-corpuscule permet d'étudier la diffraction de particules comme les neutrons, qui permettent par leur interaction différente avec les objets diffuseurs, d'observer la transition ferro-para dans un métal.



Source : D. Shechtman et al., Metal

Source : M. Delalande et al., Journal of Materials Chemistry, 2007, 17, 1579-1588.