Jaakko Reinvall

Ostajille edullisimpien hintojen ja bijektiivisten allokaatioiden rakenne ja etsiminen

Perustieteiden korkeakoulu

Kandidaatintyö
Espoo 20. kesäkuuta 2011

Vastuuopettaja:

prof. Harri Ehtamo

Työn ohjaaja:

dos. Petteri Kaski

Aalto-yliopisto
Teknillinen korkeakoulu

AALTO-YLIOPISTO
PERUSTIETEIDEN KORKEAKOULU

KANDIDAATINTYÖN
TIIVISTELMÄ

Tekijä: Jaakko Reinvall

Työn nimi: Ostajille edullisimpien hintojen ja bijektiivisten allokaatioiden rakenne ja etsiminen

Päivämäärä: 20. kesäkuuta 2011 Kieli: Suomi Sivumäärä: 5+19

Tutkinto-ohjelma: Teknillinen fysiikka ja matematiikka

Vastuuopettaja: prof. Harri Ehtamo

Ohjaaja: dos. Petteri Kaski

Tämän työn tarkastelun kohteena ovat kaksijakoiset pariutusmarkkinat, jossa ostajat ja myyjät toimivat. Pariutusongelmaa lähestytään ostajan kannalta eli rajoitutaan ostajan hyödyn maksimointiin. Tämän ongelman eri muotoihin on löydetty suurelta osin ratkaisut 60-luvulta alkaen. Työssä luodaan katsaus muutamaan ongelmaa koskevaan ja kirjallisuudesta löytyvään tulokseen.

Kaksijakoisten pariutusmarkkinoiden tehtävällä tunnetaan olevan yhteys maksimipainoisen pariutuksen tehtävään. Näiden tehtävien suhdetta analysoidaan lineaarisen ohjelmoinnin avulla.

Työssä tutkitaan myös ostajien ja myyjien välisiä bijektiivisiä allokaatioita ja niihin liittyvien käypien hintojen joukkoa. Tämän joukon rakenteen perusteella tiedetään kirjallisuuteen nojaten, että ostajille voidaan löytää yksikäsitteiset edullisimmat hinnat kaikkien käypien ratkaisujen joukossa. Tämä esitetään eräänä työn tuloksena.

Lisäksi työssä esitellään tunnettu unkarilainen algoritmi, joka löytää tarkastellulle tehtävälle bijektiivisen allokaation ja käyvän hinnan.

Avainsanat: pariutusmarkkinat, bijektiiviset allokaatiot, hinnat

Esipuhe

Haluan kiittää ohjaajaani dosentti Petteri Kaskea Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulun tietojenkäsittelytieteen laitokselta ideoista ja kommenteista kandidaatintyöhöni liittyen.

Otaniemi, 20. kesäkuuta 2011

Jaakko Reinvall

Sisältö

Symbolit

I	myyjien joukko
J	ostajien joukko
(i,j)	alkioiden i ja j välinen pari
x	primaalin käypä ratkaisu
x^*	primaalin optimiratkaisu
y	duaalin käypä ratkaisu
y^*	duaalin optimiratkaisu
w	ei-negatiivinen painofunktio
M	joukkojen I ja J välisistä pareista koostuva pariutus
$M(i)$	alkion i kanssa pariutuksessa M pariutettu joukon J alkio
$M(j)$	alkion j kanssa pariutuksessa M pariutettu joukon I alkio
φ	potentiaali
(M,φ)	pariutuksen M ja potentiaalin φ pariutettu potentiaali
p	hinta joukon I alkioille
(M,p)	pariutuksen M ja hinnan p hinnoiteltu pariutus
π	myyjän i hyöty
φ^I	potentiaalin rajoittuminen joukkoon I
φ^J	potentiaalin rajoittuminen joukkoon J
$\wedge$	reaaliluvuista otettu minimi
$\vee$	reaaliluvuista otettu maksimi
P	lineaarisen ohjelmoinnin tehtävä
P^*	lineaarisen ohjelmoinnin tehtävä, jonka ratkaisut ovat optimiratkaisuja
G	verkko
V	verkon alkiot
E	verkon parit/kaaret
$N_G(j)$	solmun j naapurusto verkossa G
$N_G(S)$	joukon S naapurusto verkossa G

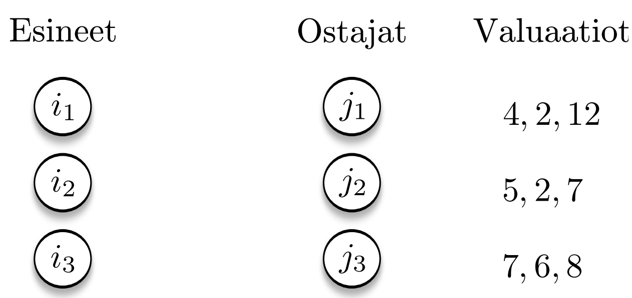
1 Johdanto

Useiden markkinaprosessien eräs pääominaisuus on niiden kaksijakoinen rakenne ja tarve pariuttaa markkinoiden eri puolet keskenään optimaalisella tavalla. Näillä pariutusmarkkinoilla on merkittävä osa talousteoriassa ja käytännön elämässä. Työntekijät ja yritykset työmarkkinoilla [6], opiskelijat ja korkeakoulut opiskelijahauissa, miehet ja naiset deittisivustoilla, ja mainostajat ja mainospaikat sponsoroitujen hakutulosten markkinoilla [4] ovat muutamia esimerkkejä pariutusmarkkinoista. Sopivan pariutuksen löytämiseen on kehitetty huutokauppa-algoritmeja. Usein niiden etuna on, että ne antavat ostajille kannustimen paljastaa todelliset preferenssinsä.

Stabiilin pariutuksen löytämistä kaksijakoisessa verkossa voidaan pitää perustavaa laatua olevana kaksijakoisen pariutusmarkkinan tehtävänä. Siinä jokaisella ostajalla on preferenssijärjestys esineiden yli ja jokaisella esineen myyjällä on preferenssijärjestys ostajien yli. Tämän mallin esittelivät ensimmäisen kerran Gale ja Shapley vuonna 1962 opiskelijahaun muodossa [3]. Kuitenkin alkuperäinen malli on melko yleinen ja se voidaan helposti sopeuttaa muihin kaksijakoisiin pariutusmarkkinoihin. Näin on esimerkiksi tehnyt National Resident Matching Program (NRMP) [7] organisaatio, joka auttaa pariuttamaan lääketieteen opiskelijat erikoistumispaikkoihin Yhdysvalloissa.

Edellistä yleisemmässä mallissa [5], jokaisella ostajalla on lineaarinen hyötyfunktio jokaiselle esineelle, joka riippuu esineen hinnasta ja jokaisella esineellä on pohjahinta eli hinta, jonka alle esinettä ei myydä. Siinä halutaan löytää ostajille edullisimmat hinnat eli hinnat, jotka ovat jokaisessa komponentissa pienimmät mahdolliset kaikkien käypien hintojen yli otettuna. Tämän lisäksi allokaatioiden tulee olla bijektiiviset, so. jokainen ostaja voi ostaa täsmälleen yhden esineen ja jokainen esine voi päätyä täsmälleen yhdelle ostajalle.

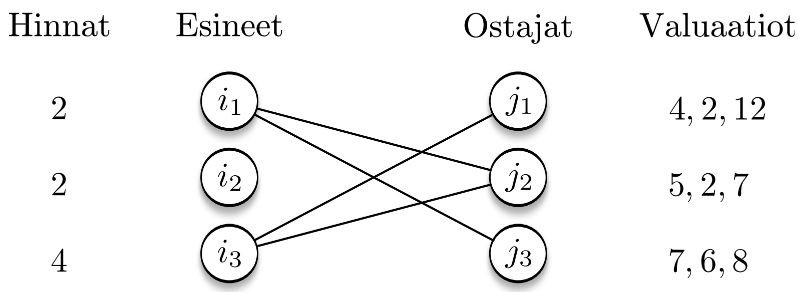
Tehtävän kaksijakoinen verkko voisi olla esimerkiksi ostajien ja myytävien esineiden muodostamat markkinat. Kuvassa 1 on kuvatun esimerkin mukainen tilanne.



Kuva 1: Esimerkki markkinoista

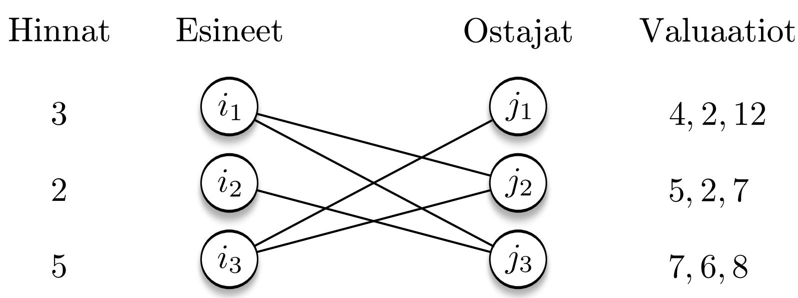
Tarkastellaan markkinoita kolmen ostajan ja esineen kannalta. Merkitään esineiden joukkoa $I = \{i_1, i_2, i_3\}$ ja ostajien joukkoa $J = \{j_1, j_2, j_3\}$. Oletetaan, että jokainen ostaja voi ostaa korkeintaan yhden esineen ja jokainen esine voidaan myydä korkeintaan yhdelle ostajalle. Jokaisella ostajalla on *valuaatio* kullekin esineelle, se kuvaa ostajan mieltymystä esinettä kohtaan numeerisessa mielessä. Merkitään ostajan $j \in J$ valuaatiota esinettä $i \in I$ kohtaan funktiolla $v(i, j)$. Valuaatiorivi kunkin ostajan kohdalla tarkoittaa valuaatioita esineitä kohtaan järjestyksessä: ensimmäinen arvo esineelle i_1, toinen arvo esineelle i_2 ja kolmas arvo esineelle i_3. Täten esimerkiksi ostajan j_1 valuaatiot esineille $i \in I$ ovat $v(i_1, j_1) = 4$, $v(i_2, j_1) = 2$ ja $v(i_3, j_1) = 12$.

Esineen $i \in I$ hinta $p(i) \geq 0$ määrää ostajan $j \in J$ hyötyfunktion $u(i, j) = v(i, j) - p(i)$. Esimerkki jatkuu kuvassa 2 ja hinnat ovat nyt mukana. Jokaiselle ostajalle lasketaan hyödyt jokaisesta esineestä ja niistä valitaan kunkin ostajan hyödyn maksimoivat esineet. Näitä merkitään yhtenäisillä viivoilla. Selvitetään esimerkin vuoksi ostajan j_2 hyödyn maksimoivat esineet. Ostajan j_2 hyödyt esineistä ovat $u(i_1, j_2) = 3$, $u(i_2, j_2) = 0$ ja $u(i_3, j_2) = 3$, joten esineet i_1 ja i_3 maksimoivat ostajan j_2 hyödyn. Kuvasta 2 nähdään, että markkinoilla on ylikysyntää, koska kolme ostajaa on kiinnostunut vain kahdesta esineestä. Kysyntä ylittää tarjonnan ja markkinat epäonnistuvat.



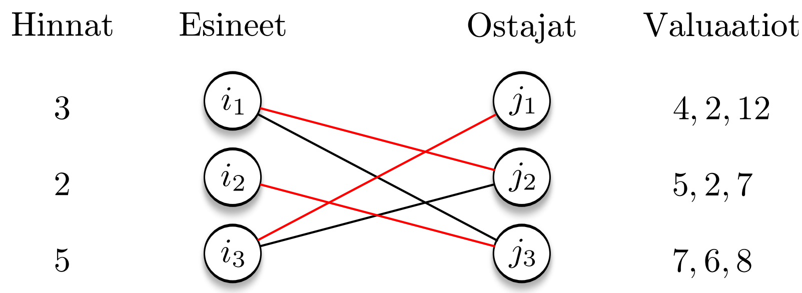
Kuva 2: Esimerkki markkinoista hinnoiteltuna

Muutetaan esimerkkiä niin, että ostajien valuaatiot pysyvät samana, mutta esineet hinnoitellaan uudestaan. Kuvassa 3 esitetään tilanne uusilla hinnoilla. Kuvan 3



Kuva 3: Toinen esimerkki

esineiden ja ostajien pariutusta tarkastelemalla huomataan nyt, että kaikki ostajat saavat hyötynsä maksimoivan esineen. Ostajalle j_1 kelpaa vain esine i_3, joten hän saa sen ellei siitä synny kiistaa. Koska ostajalle j_2 esine i_1 on yhtä hyvä kuin i_3, niin hän valitkoon tässä vaiheessa kiistan välttämiseksi esineen i_1. Nyt tarkastelussa on enää jäljellä ostaja j_3, jolle esineet i_1 ja i_2 tuottavat yhtä suuren hyödyn. Täten hän voi välttää kiistan ostajan j_2 kanssa esineestä i_1 ja päätyä yhtä hyvään vaihtoehtoon eli esineeseen i_2. Päättelyn tuloksena saatu pariutus esitetään punaisilla viivoilla kuvassa 4. Näillä hinnoilla tarjonta tyydytti kysynnän ja markkina pääsi tasapainoon.



Kuva 4: Toisen esimerkin pariutukset

Työn tavoitteena on tutkia bijektiivisen allokaation mahdollistavien käypien hintojen joukkoa sekä osoittaa ostajien kannalta edullisimpien hintojen olemassaolo. Lisäksi tutustutaan ja analysoidaan tehtävän yhteyttä maksimipainoisen pariutuksen tehtävään.

Työn rakenne on seuraava. Toisessa kappaleessa tutustutaan itse tehtävän teoreettiseen taustaan ja analysoidaan sen yhteyttä maksimipainoisen pariutuksen tehtävään. Kolmannessa kappaleessa määritellään pariutusmarkkinoiden stabiloitumінen. Neljännessä kappaleessa tutkitaan bijektiivisen allokaation mahdollistavien käypien hintojen joukkoa sekä näytetään, että tästä joukosta löytyy ostajien kannalta edullisimmat hinnat. Viidennessä kappaleessa esitellään tehtävän ratkaisuun liittyviä huutokauppa-algoritmeja. Kuudennessa kappaleessa tehdään yhteenveto työstä.

2 Teoreettinen tausta

2.1 Lineaarisen ohjelmoinnin tehtävä

Lineaarisen kohdefunktion minimointia tai maksimointia lineaaristen rajoitusehtojen suhteen kutsutaan *lineaarisen ohjelmoinnin tehtäväksi*. Olkoon I ja J äärelliset joukot, joille pätee $|I| = m$ ja $|J| = n$. Yleisessä muodossa lineaarisen ohjelmoinnin tehtävä voidaan esittää maksimointitehtävänä,

$$\begin{aligned} \text{maksimoi} \quad & \sum_{j \in J} c(j)x(j) \\ \text{s.e.} \quad & \sum_{j \in J} a(i,j)x(j) \leq b(i), \quad \forall i \in I, \end{aligned} \tag{1}$$

missä $x : J \to \mathbb{R}$ on ratkaistava funktio, ja $c : J \to \mathbb{R}$, $b : I \to \mathbb{R}$ ja $a : I \times J \to \mathbb{R}$ ovat tehtävässä annettuja funktiota. Rajoitusehdot toteuttavaa funktiota x kutsutaan *käyväksi ratkaisuksi* ja maksimoitavaa funktiota $\sum_{j \in J} c(j)x(j)$ *kohdefunktioksi*. Kohdefunktion maksimoivaa käypää ratkaisua kutsutaan *optimiratkaisuksi* x^*. Optimiratkaisua x^* vastaavaa kohdefunktion arvoa $\sum_{j \in J} c(j)x^*(j)$ sanotaan *optimikustannukseksi*. Lineaarisen ohjelmoinnin tehtävä voidaan esittää myös muodossa

$$\begin{aligned} \text{maksimoi} \quad & \sum_{j \in J} c(j)x(j) \\ \text{s.e.} \quad & \sum_{j \in J} a(i,j)x(j) \leq b(i), \quad && \forall i \in I, \\ & x(j) \geq 0, && \forall j \in J, \end{aligned} \tag{2}$$

jota kutsutaan *standardimuodoksi*. Se on käytännöllinen eri ratkaisualgoritmien kuten Simplex-menetelmän kannalta [2]. Tehtävien (1) ja (2) tiedetään olevan ekvivalentteja keskenään, joten jokainen yleisessä muodossa oleva lineaarisen ohjelmoinnin tehtävä voidaan muuttaa standardimuotoon ja päinvastoin [1].

Standardimuotoisesta lineaarisen ohjelmoinnin tehtävästä voidaan muodostaa duaalitehtävä eli duaali. Tällöin alkuperäistä lineaarisen ohjelmoinnin tehtävää sanotaan *primaaliksi*. Tehtävää (2) vastaava *duaali* on

$$\begin{aligned} \text{minimoi} \quad & \sum_{i \in I} b(i)y(i) \\ \text{s.e.} \quad & \sum_{i \in I} a(i,j)y(i) \geq c(j), \quad && \forall j \in J, \\ & y(i) \geq 0, && \forall i \in I, \end{aligned} \tag{3}$$

missä $y : I \to \mathbb{R}$ on duaalin ratkaistava funktio. Merkitään duaalin optimiratkaisua y^* [1].

Duaaliteorian keskeisiä tuloksia ovat seuraavat teoreemat [1].

Lause 1 (Heikko duaalisuus). *Jos x on käypä ratkaisu primaalille ja y on käypä ratkaisu duaalille, niin*

$$\sum_{j\in J} c(j)x(j) \leq \sum_{i\in I} b(i)y(i).$$

Teoreema 2 (Vahva duaalisuus). *Jos lineaarisen ohjelmoinnin tehtävällä on optimiratkaisu, niin on myös sen duaalilla, ja vastaavat optimikustannukset ovat samat.*

Teoreema 3 (Täydentyvyysehdot). *Olkoon x primaalin käypä ratkaisu ja y duaalin käypä ratkaisu. Tällöin x on primaalin ja y duaalin optimiratkaisu jos ja vain jos*

$$y(i)\Big(\sum_{j\in J} a(i,j)x(j) - b(i)\Big) = 0, \quad \forall i \in I,$$

$$\Big(c(j) - \sum_{i\in I} a(i,j)y(i)\Big)x(j) = 0, \quad \forall j \in J.$$

2.2 Maksimipainoisen pariutuksen tehtävä

Oletetaan tässä erilliset joukot I ja J yhtäsuuriksi eli $|I| = |J| = n$, ja olkoon $w : I \times J \to \mathbb{R}$ ei-negatiivinen painofunktio. Parien joukko $M \subseteq I \times J$ on *pariutus*, jos jokainen alkio $i \in I$ ja $j \in J$ esiintyy korkeintaan yhdessä joukon M parissa. Lineaarisen ohjelmoinnin tehtävä

$$\begin{aligned}
\text{maksimoi} \quad & \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} w(i,j)m(i,j) \\
\text{s.e.} \quad & \sum_{j\in J} m(i,j) \leq 1, \quad \forall i \in I, \\
& \sum_{i\in I} m(i,j) \leq 1, \quad \forall j \in J, \\
& m(i,j) \geq 0, \qquad \forall i \in I, j \in J,
\end{aligned} \tag{4}$$

missä $m : I \times J \to \mathbb{R}$ on ratkaistava funktio, tunnetaan *maksimipainoisen pariutuksen tehtävänä*. Tällä tehtävällä on ominaisuus, että jokaiselle ei-negatiiviselle painofunktiolle w on olemassa optimiratkaisu m^*, jolle pätee $m^*(i,j) \in \{0,1\}$, kaikilla $(i,j) \in I \times J$ [1]. Liitetään tätä muotoa olevaan optimiratkaisuun m^* osajoukko $M = \{(i,j) : m^*(i,j) = 1\} \subseteq I \times J$ ja kutsutaan joukkoa M *maksimipainoiseksi pariutukseksi*.

Joukon I alkio i on *pariutettu* pariutuksessa M, jos on olemassa $j \in J$ siten, että $(i,j) \in M$. Muussa tapauksessa i on *pariuttamaton*. Vastaavasti joukon J alkio j on *pariutettu* pariutuksessa M, jos on olemassa $i \in I$ siten, että $(i,j) \in M$, ja muussa tapauksessa j on *pariuttamaton*. Pariutus M on *täydellinen*, jos jokainen joukon $I \cup J$ alkio on pariutettu pariutuksessa M. Jos $(i,j) \in M$, niin merkitään $M(i) = j$ ja $M(j) = i$.

2.3 Minimipotentiaalin tehtävä

Muodostetaan tehtävän (4) duaali. Liitetään duaalimuuttuja $\varphi(i)$ rajoitusehdon $\sum_{j\in J} m(i,j) \leq 1$ kanssa kaikilla $i \in I$ ja vastaavasti duaalimuuttuja $\varphi(j)$ rajoitusehdon $\sum_{i\in I} m(i,j) \leq 1$ kanssa kaikilla $j \in J$. Tällöin duaali on

$$\begin{aligned}
\text{minimoi} \quad & \sum_{i\in I} \varphi(i) + \sum_{j\in J} \varphi(j) & & \\
\text{s.e.} \quad & \varphi(i) + \varphi(j) \geq w(i,j), & & \forall i \in I \text{ ja } j \in J, \\
& \varphi(i) \geq 0, & & \forall i \in I, \\
& \varphi(j) \geq 0, & & \forall j \in J.
\end{aligned} \tag{5}$$

Kutsutaan tehtävää (5) *minimipotentiaalin tehtäväksi* ja sen käypää ratkaisua φ *potentiaaliksi.*

2.4 Dualiteetti ja täydentyvyysehdot

Tarkastellaan primaalia (4) ja duaalia (5). Oletetaan, että M on käypä ratkaisu primaaliin (4) ja φ käypä ratkaisu duaaliin (5). Heikon duaalisuuden perusteella pätee

$$\sum_{(i,j)\in M} w(i,j) \leq \sum_{i\in I} \varphi(i) + \sum_{j\in J} \varphi(j)\,, \tag{6}$$

missä yhtäsuuruus on voimassa vahvan duaalisuuden perusteella jos ja vain jos M on maksimipainoinen pariutus ja φ on minimipotentiaali.

Sanotaan, että pari (M, φ) on *pariutettu potentiaali*, jos yhtäsuuruus on voimassa epäyhtälössä (6).

Lemma 4. *Täydentyvyysehtojen perusteella, (M, φ) on pariutettu potentiaali jos ja vain jos*

(a) $\varphi(i) + \varphi(j) = w(i,j)$ pätee kaikilla $(i,j) \in M$;

(b) $\varphi(i) = 0$ pätee kaikilla joukossa M pariuttamattomilla $i \in I$; ja

(c) $\varphi(j) = 0$ pätee kaikilla joukossa M pariuttamattomilla $j \in J$.

Lemman 4 ehdoista (b) ja (c) seuraa, että voidaan yleisyyttä rajoittamatta olettaa pariutetun potentiaalin (M, φ) pariutuksen M olevan täydellinen. Tarkastellaan mielivaltaista paria (i,j), jossa i ja j ovat pariuttamattomia pariutuksessa M. Tällöin täytyy päteä $w(i,j) \leq \varphi(i) + \varphi(j) = 0$, joten pariutukseen M voidaan aina lisätä tällaiset parit ja täydentää pariutus M täydelliseksi.

3 Stabiilit hinnoitellut pariutukset

Olkoon joukon I alkiot myyjiä ja joukon J alkiot ostajia. Esimerkiksi jokainen joukon I alkio voidaan ajatella työntekijäksi, joka myy osaamistaan joukon J työnantajille.

Oletetaan, että jokainen ostaja voi tehdä kaupat enintään yhden myyjän kanssa ja toisinpäin. Tavoitteena on muodostaa pariutus ostajien ja myyjien välillä.

Jokaisella ostajalla j on valuaatio $w(i, j)$ jokaista myyjää i kohtaan. Ostajan j tehdessä kaupat myyjän i kanssa hinnalla $\pi \geq 0$, määritellään ostajan j *hyödyksi* $w(i, j) - \pi$. Samoin määritellään myyjän i *hyöty* π. Myyjän i hyöty π voidaan tulkita esimerkiksi palkkana, jonka i saa työnantajalta j. Vastaavasti ostajan j hyöty $w(i, j) - \pi$ voidaan tulkita työnantajan saavuttamana tuottona, jonka hän hyötyy työntekijän i tekemästä työstä.

Hinnoiteltu pariutus on pari (M, p), missä $M \subseteq I \times J$ on pariutus (ei välttämättä täydellinen) ja $p : I \to \mathbb{R}$ on funktio, joka liittää hinnan jokaiseen pariutuksen M pariin.

Määritelmä 5. *Hinnoiteltu pariutus* (M, p) *on käypä, jos*

(a) jokaisella pariutuksessa M *pariuttamattomalla* $i \in I$ *pätee* $p(i) = 0$*;*

(b) jokaisella pariutuksessa M *pariutetulla* $i \in I$ *pätee* $p(i) \geq 0$*; ja*

(c) jokaisella pariutuksessa M *pariutetulla* $j \in J$ *pätee* $w(M(j), j) - p(M(j)) \geq 0$*.*

Toisin sanoen, kaupantekoon osallistuvan ostajan tai myyjän saaman hyödyn täytyy olla ei-negatiivinen, ja kaupanteon ulkopuolelle jääville myyjille asetetaan yleisen käytännön mukaan nollahinnat.

Määritelmä 6. *Olkoon* (M, p) *käypä hinnoiteltu pariutus. Sanotaan, että pari* $(i, j) \in I \times J \setminus M$ *on* epästabiili *suhteessa hinnoiteltuun pariutukseen* (M, p)*, jos on olemassa* $\pi \in \mathbb{R}$ *siten, että*

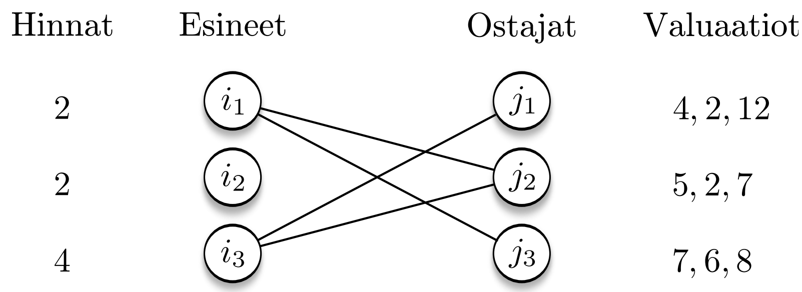
(a) joko i *on pariuttamaton pariutuksessa* M *ja* $\pi > 0$*, tai*
i on pariutetttu pariutuksessa M ja $\pi > p(i)$; ja

(b) joko j *on pariuttamaton pariutuksessa* M *ja* $w(i, j) - \pi > 0$*, tai*
j on pariutettu pariutuksessa M ja $w(i, j) - \pi > w(M(j), j) - p(M(j))$.

Pari (i, j) on siis epästabiili, jos sekä myyjän i että ostajan j on kannattavampaa tehdä kaupat toistensa kanssa hinnalla π verrattuna hinnoiteltuun pariutukseen (M, p).

Hinnoiteltu pariutus (M, p) on *stabiili*, jos se on käypä, eikä siinä ole epästabiileja pareja. Sanotaan, että hinta $p : I \to \mathbb{R}$ on *käypä*, jos on olemassa pariutus M siten, että (M, p) on stabiili hinnoiteltu pariutus.

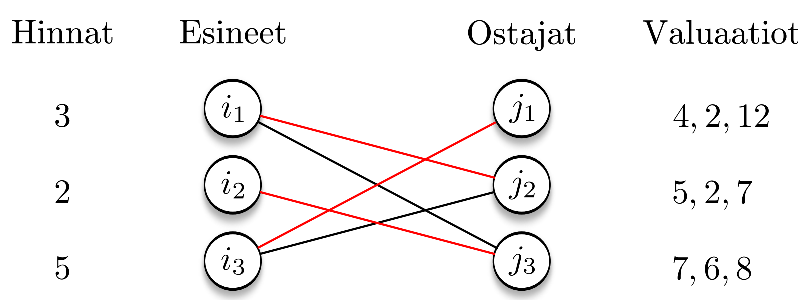
Palataan johdannon ensimmäiseen esimerkkiin, joka on esitetty kuvassa 5. Otetaan nyt huomioon ostajien hyötyjen lisäksi myös esineiden myyjien hyödyt, jotka määritellään kuten tässä kappaleessa. Esimerkissä päädyttiin ylikysyntätilanteeseen, jossa kolme ostajaa kilpailee kahdesta esineestä. Valitaan nyt pariutus, joka tulee mahdollisimman lähelle kaikkien ostajien hyötyjen maksimoivaa tilannetta ja näytetään,



Kuva 5: Johdannon ensimmäinen esimerkki

että pariutuksesta löytyy epästabiili pari. Koska ostajalle j_1 on vain yksi hyödyn maksimoiva vaihtoehto eli esine i_3, niin valitaan pari (i_3, j_1) pariutukseen M_1. Nyt ostajalle j_2 jää ainoaksi vaihtoehdoksi esine i_1, joten valitaan pari (i_1, j_2) pariutukseen M_1. Viimeinen ostaja j_3 saa nyt hyötynsä minimoivan esineen i_2, josta hänen saamansa hyöty on kuitenkin nollaa suurempi eli lisätään pari (i_2, j_3) pariutukseen M_1. Asetetaan hinnoiksi $(p_1(i_1), p_1(i_2), p_1(i_3)) = (2, 2, 4)$ ja havaitaan, että (M_1, p_1) on käypä hinnoiteltu pariutus. Huomataan, että on olemassa hinta $\pi = \frac{5}{2}$ ja pari (i_1, j_3) siten, että i_1 on pariutettu pariutuksessa M_1 ja $\pi > p(i_1)$, ja j_3 on pariutettu pariutuksessa M_1 ja $w(i_1, j_3) - \pi > w(i_2, j_3) - p(i_2)$. Täten pari (i_1, j_3) on, Määritelmän 6 nojalla, epästabiili suhteessa hinnoiteltuun pariutukseen (M_1, p_1), joka ei siis ole stabiili. On siis olemassa myyjä, joka voisi pyytää korkeampaa hintaa myymästään esineestä ja hyötyisi siitä enemmän kuin tällä hetkellä. Samaan aikaan esineelle löytyisi ostaja, joka hyötyisi kyseessä olevasta esineestä enemmän kuin tällä hetkellä.

Tarkastellaan vielä johdannon toista esimerkkiä ja siihen liittyvää kuvaa 6. Tässä esimerkissä kukin ostaja sai hyötynsä maksimoivan esineen. Otetaan tässäkin



Kuva 6: Toisen esimerkin pariutukset

huomioon ostajien hyötyjen lisäksi myös esineiden myyjien hyödyt. Esimerkissä on pariutus $M_2 = \{(i_1, j_2), (i_2, j_3), (i_3, j_1)\}$ ja hinta $(p_2(i_1), p_2(i_2), p_2(i_3)) = (3, 2, 5)$, jotka muodostavat hinnoitellun pariutuksen (M_2, p_2). Hinnoiteltu pariutus (M_2, p_2) on selvästi käypä, koska kaikkien ostajien ja myyjien hyödyt ovat positiiviset. Lisäksi tarkastelemalla kaikki parit $(i, j) \in I \times J \setminus M_2$ läpi havaitaan, että kyseessä oleva hinnoiteltu pariutus on stabiili, koska siinä ei ole epästabiileja pareja. Hinta p_2 on näin ollen käypä.

Lemma 7. *Olkoon* (M, p) *stabiili hinnoiteltu pariutus. Silloin on olemassa täydellinen pariutus* $M' \supseteq M$ *siten, että* (M', p) *on stabiili. Lisäksi jokaiselle parille* $(i, j) \in M' \setminus M$ *pätee* $w(i, j) = 0$.

Todistus. Jos M on täydellinen pariutus, niin todistus on valmis. Oletetaan siis, että M ei ole täydellinen pariutus. Kasvatetaan pariutusta M yhdellä parilla siten, että kasvatettu pariutus M' pysyy stabiilina suhteessa hintoihin p. Olkoot $i \in I$ ja $j \in J$ pariuttamattomia pariutuksessa M. Koska (i, j) on stabiili suhteessa hinnoiteltuun pariutukseen (M, p), niin täytyy päteä $w(i, j) = 0$. Olkoon $M' = M \cup \{(i, j)\}$. Koska (M, p) on käypä, niin täytyy päteä $p(i) = 0$, joten ehto $p(i) \geq 0$ toteutuu. Lisäksi $w(i, j) - p(i) = 0 - 0 = 0$, joten myös ehto $w(i, j) - p(i) \geq 0$ toteutuu ja siten (M', p) on käypä. Hinnoitellun pariutuksen (M', p) stabiiliuden osoittamiseksi, tarkastellaan paria (i', j) ja huomataan, että $w(M'(j), j) - p(M'(j)) = w(i, j) - p(i) = 0$. Näin ollen (i', j) on stabiili hinnoitellussa pariutuksessa (M', p), koska se on stabiili hinnoitellussa pariutuksessa (M, p). Seuraavaksi tarkastellaan paria (i, j') ja huomataan, että $p(i) = 0$. Näin ollen (i, j') on stabiili hinnoitellussa pariutuksessa (M', p) koska se on stabiili hinnoitellussa pariutuksessa (M, p). Tästä seuraa, että (M', p) on stabiili. □

Erityisesti voidaan yleisyyttä rajoittamatta olettaa, että pariutus M stabiilissa hinnoitellussa pariutuksessa (M, p) on täydellinen pariutus.

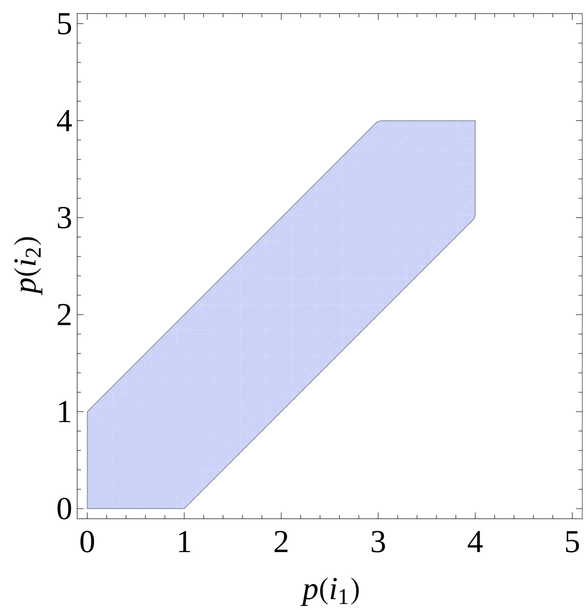
Lemma 8. *Olkoon* (M, p) *käypä hinnoiteltu pariutus, missä* M *on täydellinen pariutus. Silloin* (M, p) *on stabiili jos ja vain jos kaikilla* $(i, j) \in I \times J$ *ja kaikilla* $\pi \in \mathbb{R}$ *pätee* $p(i) \geq \pi$ *tai* $w(M(j), j) - p(M(j)) \geq w(i, j) - \pi$.

Todistus. "$\Rightarrow$": Oletetaan, että (M, p) on stabiili. Jos $(i, j) \in M$, niin kaikilla $\pi \in \mathbb{R}$ pätee $p(i) \geq \pi$ tai $p(i) < \pi$, jolloin $w(M(j), j) - p(M(j)) = w(i, j) - p(i) > w(i, j) - \pi$. Jos $(i, j) \in I \times J \setminus M$, niin kaikilla $\pi \in \mathbb{R}$ pätee Määritelmän 6 perusteella $p(i) \geq \pi$ tai $w(M(j), j) - p(M(j)) \geq w(i, j) - \pi$.

"$\Leftarrow$": Oletetaan, että kaikilla $(i, j) \in I \times J$ ja kaikilla $\pi \in \mathbb{R}$ pätee $p(i) \geq \pi$ tai $w(M(j), j) - p(M(j)) \geq w(i, j) - \pi$. Määritelmän 6 nojalla hinnoitellussa pariutuksessa (M, p) ei ole epästabiileja pareja, joten se on stabiili. □

4 Käypien hintojen rakenne

Tarkastellaan kahden ostajan ja kahden myyjän pariutusmarkkinoita. Myyjät asettavat myymilleen esineille i_1 ja i_2 hinnat $p(i_1) \geq 0$ ja $p(i_2) \geq 0$. Ostajan j_1 valuaatiot esineitä kohtaan ovat $v(i_1, j_1) = 4$ ja $v(i_2, j_1) = 3$. Ostajan j_2 valuaatiot esineitä kohtaan ovat $v(i_1, j_2) = 3$ ja $v(i_2, j_2) = 4$. Etsitään kaikkien käypien hintojen joukko näillä pariutusmarkkinoilla. Ostajien valuaatioista johtuen ei voi löytyä sellaisia hintoja, joilla ostaja j_1 pariutuisi myyjän i_2 kanssa ja samaan aikaan ostaja j_2 pariutuisi myyjän i_1 kanssa. Nyt siis etsitään hintoja, joilla ostaja j_1 pariutuisi myyjän i_1 kanssa ja ostaja j_2 pariutuu myyjän i_2 kanssa. Seuraavien epäyhtälöiden tulee siis olla voimassa $p(i_2) \geq p(i_1) - 1$ ja $p(i_2) \leq p(i_1) + 1$. Koska ostajien hyötyjen tulee olla ei-negatiivisia, tulee päteä $v(i_1, j_1) - p(i_1) \geq 0$ eli $p(i_1) \leq 4$ ja $v(i_2, j_2) - p(i_2) \geq 0$ eli $p(i_2) \leq 4$. Piirretään kuvaan 7 edellä mainittujen ehtojen rajaama joukko, joka siis koostuu käyvistä hinnoista.



Kuva 7: Esimerkki käypien hintojen rakenteesta

4.1 Vastaavuus pariutettuihin potentiaaleihin

Merkitään φ^I, kun halutaan ilmaista potentiaalin φ rajoittuminen joukkoon I.

Lause 9. *Olkoon M täydellinen pariutus ja φ potentiaali. Silloin (M, φ) on pariutettu potentiaali jos ja vain jos (M, φ^I) on stabiili hinnoiteltu pariutus.*

Todistus. "$\Rightarrow$": Oletetaan, että (M, φ) on pariutettu potentiaali. Huomataan, että täydentyvyysehtojen perusteella jokaiselle $(i, j) \in M$ ostajan j saama hyöty on $\varphi(j) = w(i, j) - \varphi(i)$. Koska $\varphi(i) \geq 0$ ja $\varphi(j) \geq 0$, saadaan, että (M, φ^I) on käypä hinnoiteltu pariutus. Tarkastellaan mielivaltaista $(i, j) \in I \times J$ ja $\pi \in \mathbb{R}$. Oletetaan, että $\varphi(i) < \pi$. Silloin sovellettaessa täydentyvyysehtoja pariin $(M(j), j)$, ja tehtävää (5) pariin (i, j) saadaan, että

$$w(M(j), j) - \varphi(M(j)) = \varphi(j) \geq w(i, j) - \varphi(i) > w(i, j) - \pi\,.$$

Nyt Lemman 8 perusteella (M, φ^I) on stabiili hinnoiteltu pariutus.

"$\Leftarrow$": Oletetaan, että (M, φ^I) on stabiili hinnoiteltu pariutus. Määritellään φ^J asettamalla $\varphi(j) = w(M(j), j) - \varphi(M(j))$ jokaiselle $j \in J$. Potentiaali φ^J on hyvin määritelty, koska M on täydellinen pariutus. Koska (M, φ^I) on käypä hinnoiteltu pariutus, $\varphi \geq 0$. Lisäksi $\sum_{(i,j)\in M} w(i, j) = \sum_{i\in I} \varphi(i) + \sum_{j\in J} \varphi(j)$. Jotta voidaan osoittaa (M, φ) pariutetuksi potentiaaliksi, täytyy vielä näyttää, että $\varphi(i) + \varphi(j) \geq w(i, j)$ pätee kaikilla $(i, j) \in I \times J$. Osoitetaan ensin Lemman 8 avulla, että jokaiselle $(i, j) \in I \times J$ on olemassa $\pi \in \mathbb{R}$ siten, että $\varphi(i) \geq \pi$ ja $w(M(j), j) - \varphi(M(j)) \geq w(i, j) - \pi$. Oletetaan, että $\varphi(i) \geq \pi$ ja $w(M(j), j) - \varphi(M(j)) < w(i, j) - \pi$. Tällöin molempien epäyhtälöiden oikealta puolelta voidaan vähentää $\delta > 0$ siten, että $\varphi(i) > \pi - \delta = \pi'$ ja $w(M(j), j) - \varphi(M(j)) = w(i, j) - \pi - \delta = w(i, j) - \pi'$. Samaan tapaan oletetaan, että $\varphi(i) < \pi$ ja $w(M(j), j) - \varphi(M(j)) \geq w(i, j) - \pi$. Tällöin molempien epäyhtälöiden oikealta puolelta voidaan vähentää $\delta > 0$ siten, että $\varphi(i) = \pi - \delta = \pi'$ ja $w(M(j), j) - \varphi(M(j)) > w(i, j) - \pi - \delta = w(i, j) - \pi'$. Nyt jokaisella $(i, j) \in I \times J$ on olemassa $\pi \in \mathbb{R}$ siten, että $\varphi(i) \geq \pi$ ja $\varphi(j) = w(M(j), j) - \varphi(M(j)) \geq w(i, j) - \pi$, joten $\varphi(j) \geq w(i, j) - \varphi(i)$. Näin ollen (5) pätee ja (M, φ) on pariutettu potentiaali. □

4.2 Hilarakenne ja pienimmät hinnat

Olkoot M_1 ja M_2 täydellisiä maksimipainoisia pariutuksia joukkojen I ja J välillä. Merkitään pariutuksille minimipotentiaalit φ_1 ja φ_2 vastaavasti. Nyt pätee, kun $k = 1, 2$:

$$\varphi_k(i) + \varphi_k(j) \geq w(i, j), \quad \forall i \in I, j \in J, \tag{7}$$

$$\varphi_k(i) + \varphi_k(j) = w(i, j), \quad \forall (i, j) \in M_k, \tag{8}$$

$$\varphi_k(i), \varphi_k(j) \geq 0, \qquad \forall i \in I, j \in J. \tag{9}$$

Jaetaan joukot I ja J kolmeen osaan kumpikin seuraavasti:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \{i \in I : \varphi_1(i) > \varphi_2(i)\}, \quad J_1 = \{j \in J : \varphi_1(j) > \varphi_2(j)\},\\
I_0 &= \{i \in I : \varphi_1(i) = \varphi_2(i)\}, \quad J_0 = \{j \in J : \varphi_1(j) = \varphi_2(j)\},\\
I_2 &= \{i \in I : \varphi_2(i) > \varphi_1(i)\}, \quad J_2 = \{j \in J : \varphi_2(j) > \varphi_1(j)\}.
\end{aligned}$$

Lemma 10. *Pariutuksille M_1 ja M_2 pätee seuraavaa:*

(a) M_1 ei voi pariuttaa joukon I_1 alkiota joukon $J_0 \cup J_1$ alkiolle.

Todistus. Jos parille $(i, j) \in M_1$ pätee $i \in I_1$ ja $j \in J_0 \cup J_1$, seuraa yhtälön (8) perusteella $w(i, j) = \varphi_1(i) + \varphi_1(j) > \varphi_2(i) + \varphi_2(j)$. Tämä on ristiriidassa epäyhtälön (7) kanssa, kun $k = 2$ eli $\varphi_2(i) + \varphi_2(j) \geq w(i, j)$. □

(b) M_2 ei voi pariuttaa joukon J_2 alkiota joukon $I_0 \cup I_2$ alkiolle.

Todistus. Jos parille $(i,j) \in M_2$ pätee $j \in J_2$ ja $i \in I_0 \cup I_2$, seuraa yhtälön (8) perusteella $w(i,j) = \varphi_2(i) + \varphi_2(j) > \varphi_1(i) + \varphi_1(j)$. Tämä on ristiriidassa epäyhtälön (7) kanssa, kun $k = 1$ eli $\varphi_1(i) + \varphi_1(j) \geq w(i,j)$. □

(c) M_1 ei voi pariuttaa joukon I_0 alkiota joukon J_1 alkiolle.

Todistus. Jos parille $(i,j) \in M_1$ pätee $i \in I_0$ ja $j \in J_1$, seuraa yhtälön (8) perusteella $w(i,j) = \varphi_1(i) + \varphi_1(j) > \varphi_2(i) + \varphi_2(j)$. Tämä on ristiriidassa epäyhtälön (7) kanssa, kun $k = 2$ eli $\varphi_2(i) + \varphi_2(j) \geq w(i,j)$. □

(d) M_2 ei voi pariuttaa joukon J_0 alkiota joukon I_2 alkiolle.

Todistus. Jos parille $(i,j) \in M_2$ pätee $j \in J_0$ ja $i \in I_2$, seuraa yhtälön (8) perusteella $w(i,j) = \varphi_2(i) + \varphi_2(j) > \varphi_1(i) + \varphi_1(j)$. Tämä on ristiriidassa epäyhtälön (7) kanssa, kun $k = 1$ eli $\varphi_1(i) + \varphi_1(j) \geq w(i,j)$. □

Lemma 11. *Sekä M_1 että M_2 pariuttavat joukot I_1 ja J_2 keskenään, joukot I_0 ja J_0 keskenään, sekä joukot I_2 ja J_1 keskenään.*

Todistus. Jokainen I_1 alkio saa pariutuksessa M_1 yksikäsitteisen parin, Lemmasta 10(a) seuraa $|I_1| \leq |J_2|$. Lemmasta 10(b) taas seuraa $|J_2| \leq |I_1|$. Näin ollen $|I_1| = |J_2|$. Erityisesti mikään joukon I_0 alkioista ei voi olla pariutuksessa M_1 joukon J_2 alkion pari, koska kaikki J_2 alkiot on jo käytetty I_1 alkioiden pareiksi. Lemmasta 10(c) seuraa siis, että jokainen joukon I_0 alkio on pariutettu joukon J_0 alkion kanssa pariutuksessa M_1, joten $|I_0| \leq |J_0|$. Vastaavasti Lemman 10(d) ja $|I_1| = |J_2|$ perusteella päättelemme, että $|J_0| \leq |I_0|$. Näin ollen $|I_0| = |J_0|$. Koska M_1 ja M_2 ovat täydellisiä pariutuksia, on oltava $|I_0| + |I_1| + |I_2| = |J_0| + |J_1| + |J_2|$, ja siten $|I_2| = |J_2|$. □

Oletetaan, että $a, b \in \mathbb{R}$ ja määritellään symbolit $\vee$ ja $\wedge$ seuraavasti

$$a \vee b = \begin{cases} a, & \text{kun } a \geq b, \\ b, & \text{kun } a < b, \end{cases}$$

$$a \wedge b = \begin{cases} a, & \text{kun } a \leq b, \\ b, & \text{kun } a > b. \end{cases}$$

Seuraava teoreema on luotu lähteen [11] perusteella.

Teoreema 12. *Olkoot (M_1, φ_1) ja (M_2, φ_2) pariutettuja potentiaaleja. Silloin funktio $\varphi : I \cup J \to \mathbb{R}$, joka määritellään*

$$\begin{aligned} \varphi(i) &= \varphi_1(i) \wedge \varphi_2(i), \quad \forall i \in I, \\ \varphi(j) &= \varphi_1(j) \vee \varphi_2(j), \quad \forall j \in J. \end{aligned} \tag{10}$$

on minimipotentiaali.

Todistus. Muodostetaan täydellinen pariutus M niin, että lisätään siihen joukkojen I_1 ja J_2 väliset parit pariutuksesta M_2, joukkojen I_0 ja J_0 väliset parit pariutuksesta M_1 ja joukkojen I_2 ja J_1 väliset parit pariutuksesta M_1.

Sekä joukkojen I_0,I_1,I_2 että J_0,J_1,J_2, ja potentiaalin φ määritelmien perusteella saadaan, että:

$$\varphi(i) = \begin{cases} \varphi_2(i), & \forall i \in I_1, \\ \varphi_1(i), & \forall i \in I_0, \\ \varphi_1(i), & \forall i \in I_2, \end{cases}$$

$$\varphi(j) = \begin{cases} \varphi_2(j), & \forall j \in J_2, \\ \varphi_1(j), & \forall j \in J_0, \\ \varphi_1(j), & \forall j \in J_1. \end{cases}$$

Yllä olevan perusteella huomataan, että täydellinen pariutus M ja potentiaali φ toteuttavat sekä epäyhtälön (7) että (9), ja yhtälön (8). Nyt potentiaali φ on minimipotentiaali, koska se on muodostettu ottamalla mielivaltaisista potentiaaleista φ_1 ja φ_2 minimi joukon I alkioittain. □

Potentiaalit φ_1 ja φ_2 rajoitettuna joukkoon I voidaan Lauseen 9 perusteella mieltää käyviksi hinnoiksi ja tästä seuraa edellisen perusteella, että minimipotentiaali φ on myös käypä hinta.

Teoreema 13. *On olemassa käypä hinta $\varphi^* : I \cup J \to \mathbb{R}$, jolle pätee $\varphi^*(i) \leq \varphi(i)$ kaikilla $i \in I$ ja $\varphi^*(j) \geq \varphi(j)$ kaikilla $j \in J$ yli kaikkien käypien hintojen $\varphi : I \cup J \to \mathbb{R}$.*

Todistus. Tarkastellaan minimipotentiaalin tehtävää (11) ja annetaan sille merkintä P.

$$\begin{aligned} \text{minimoi} \quad & \sum_{i \in I} \varphi(i) + \sum_{j \in J} \varphi(j) \\ \text{s.e.} \quad & \varphi(i) + \varphi(j) \geq w(i,j), && \forall i \in I \text{ ja } j \in J, \\ & \varphi(i) \geq 0, && \forall i \in I, \\ & \varphi(j) \geq 0, && \forall j \in J. \end{aligned} \tag{11}$$

Merkitään kohdefunktion optimiarvoa $\Phi^* = \sum_{i \in I} \varphi(i) + \sum_{j \in J} \varphi(j)$. Lisätään tämä yhtälö rajoitukseksi minimipotentiaalin tehtävään P. Olkoon uusi tehtävä nyt P^*. Nyt kaikki tehtävän P^* käyvät ratkaisut ovat tehtävän P optimiratkaisut. Muutetaan vielä tehtävän P^* kohdefunktio minimoimaan yhtä joukon I alkiota kerrallaan

$$\begin{aligned} \text{minimoi} \quad & \varphi(i_l) \\ \text{s.e.} \quad & \sum_{i \in I} \varphi(i) + \sum_{j \in J} \varphi(j) = \Phi^*, \\ & \varphi(i) + \varphi(j) \geq w(i,j), && \forall i \in I \text{ ja } j \in J, \\ & \varphi(i) \geq 0, && \forall i \in I, \\ & \varphi(j) \geq 0, && \forall j \in J, \end{aligned} \tag{12}$$

missä $i_l \in I$ kaikilla $l \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Olkoon tämä tehtävä puolestaan P_l^*. Erityisesti tehtävässä P_l^* minimoidaan yhtä käypää hintaa kerrallaan. Ratkaistaan tehtävä P_l^* n kertaa eli jokaiselle $l \in \{1, 2, \ldots, n\}$ erikseen ja merkitään ratkaisuja φ_l^*. Otetaan nyt ratkaisuista joukon I alkioittain minimi ja joukon J alkioittain maksimi, eli merkitään

$$\begin{aligned} \varphi^*(i) &= \varphi_1^*(i) \wedge \varphi_2^*(i) \wedge \ldots \wedge \varphi_n^*(i), \qquad \forall i \in I, \\ \varphi^*(j) &= \varphi_1^*(j) \vee \varphi_2^*(j) \vee \ldots \vee \varphi_n^*(j), \qquad \forall j \in J. \end{aligned} \tag{13}$$

Tällöin φ^* on Teoreeman 12 perusteella minipotentiaali, ja tehtävien P_l^* perusteella käypä hinta, jolle pätee $\varphi^*(i) \leq \varphi(i)$ kaikilla $i \in I$ ja $\varphi^*(j) \geq \varphi(j)$ kaikilla $j \in J$ yli kaikkien käypien hintojen $\varphi : I \cup J \to \mathbb{R}$. $\square$

5 Etsiminen

Ostajille edullisimpien hintojen ja bijektiivisten allokaatioiden etsimiseen on kehitetty tehokkaita ratkaisualgoritmeja. Esimerkiksi Demange, Gale ja Sotomayor ovat esittäneet kokonaislukuvaluaatiolle soveltuvan huutokauppa-algoritmin [8], ja Dütting, Henzinger ja Weber ovat esittäneet nk. unkarilaiseen algoritmiin [9, 10] perustuvan menettelyn [4] mielivaltaisille valuaatioille. Tässä kappaleessa esitellään alkuperäinen unkarilainen algoritmi.

Unkarilainen algoritmi on primaali-duaali algoritmi, joka alkaa tyhjästä pariutuksesta ja kasvattaa pariutusten määrä maksimipainoisen täydennyspolun avulla. Se löytää maksimipainoisen pariutuksen tehtävälle maksimipainoisen pariutuksen, ja tätä vastaavalle minimipotentiaalin tehtävälle minimipotentiaalin. Tämä vastaa stabiilin hinnoitellun pariutuksen löytymistä.

5.1 Unkarilainen algoritmi

Unkarilainen algoritmi laskee annetulle painofunktiolle $w : I \times J \to \mathbb{R}$ (ei välttämättä ei-negatiivinen) täydellisen pariutuksen $M \subseteq I \times J$ ja funktion $\varphi : I \cup J \to$ siten, että

(a) kaikilla $(i, j) \in I \times J$ pätee $w(i, j) \leq \varphi(i) + \varphi(j)$,

(b) kaikilla $(i, j) \in M$ pätee $w(i, j) = \varphi(i) + \varphi(j)$.

Oletetaan, että w on ei-negatiivinen ja olkoot M ja φ unkarilaisen algoritmin vasteet. Huomataan, että funktion φ ei tarvitse olla ei-negatiivinen. Kuitenkin, jos φ on ei-negatiivinen, niin φ on minimipotentiaali ja (M, φ) on pariutettu potentiaali.

Aina voidaan kuitenkin muuttaa funktiota φ siten, että siitä tulee ei-negatiivinen. Nimittäin, yleisyyttä rajoittamatta voidaan lisätä α funktioon $\varphi(i)$ kaikilla $i \in I$, jos samalla vähennetään α funktiosta $\varphi(j)$ kaikilla $j \in J$. Jotta φ olisi ei-negatiivinen, olkoon lisättävä ja vähennetävä vakio $\alpha = \min_{j \in J} \varphi(j)$. Tällöin pätee $\varphi(j) \geq 0$ kaikilla $j \in J$ ja $\varphi(j_0) = 0$ vähintään yhdelle $j_0 \in J$. Tarkastellaan nyt mielivaltaista $i \in I$ ja huomataan, että $0 \leq w(i, j_0) \leq \varphi(i) + \varphi(j_0) = \varphi(i)$. Näin ollen $\varphi \geq 0$.

Käsitellään nyt unkarilaista algoritmia. Tätä varten määritellään uusia käsitteitä. Aloitetaan kaksijakoisesta verkosta $G = (V, E)$, missä $V = I \cup J$ ja $E \subseteq I \times J$. Parille $(i, j) \in E$ käytetään nyt nimitystä *kaari*, ja sekä alkiolle $i \in I$ että $j \in J$ käytetään nimitystä *solmu*. Tarkastellaan solmua $j \in J$. Tällöin $N_G(j) = \{i : (i, j) \in E\}$ on solmun j *naapurusto*. Vastaavasti joukolle $S \subseteq J$, joukko $N_G(S) = \bigcup_{j \in S} N_G(j)$ on joukon S *naapurusto*.

Verkon *kulku* on vuorotteleva jono solmuista ja kaarista, alkaa ja loppuu solmuun, ja jossa jokainen kaari muodostuu kaarta välittömästi edeltävästä ja seuraavasta solmusta. Kulussa solmujen ja kaarien esiintyminen useita kertoja on sallittua. *Polku* on kulun erikoistapaus, jossa kaaret ja solmut eivät esiinny useita kertoja mahdollisesti päätesolmuja lukuunottamatta, kun ne ovat samat. Olkoon $M \subseteq E$ verkon G pariutus. Tällöin polku, jossa sen kaaret kuuluvat vuorotellen pariutukseen M ja joukkoon $E \setminus M$ on *M-vuorotteleva polku*. Jos M-vuorottelevan polun ensimmäinen ja viimeinen solmu ovat pariuttamattomia pariutuksessa M, niin polkua kutsutaan *M-täydennyspoluksi.*

Verkko on *yhtenäinen*, jos sen jokaisesta solmusta päästään polkua pitkin sen jokaiseen toiseen solmuun. *Puu* on yhtenäinen verkko, jossa kahden solmun välillä on vain yksi polku. Puun solmuista voidaan valita yksi solmu *juureksi*. *M-vuorotteleva puu* on puu, jonka juuri on pariutuksessa M pariuttamaton solmu, ja kaikki polut puussa ovat M-vuorottelevia.

Jos φ on ei-negatiivinen potentiaali, niin olkoon $G_\varphi = (V, E_\varphi)$, missä $E_\varphi = \{(i,j) \in E : \varphi(i) + \varphi(j) = w(i,j)\}$. Tarkastellaan nyt itse algoritmin toimintaa. Aluksi valitaan ei-negatiiviset potentiaalit seuraavasti: $\varphi(i) = 0$ kaikilla $i \in I$ ja $\varphi(j) = \max_{i \in I} w(i,j)$ kaikilla $j \in J$. Näin varmistetaan, että kaikilla $(i,j) \in E$ pätee $w(i,j) \leq \varphi(i) + \varphi(j)$. Määrätään E_φ ja valitaan mielivaltainen pariutus $M \subseteq E_\varphi$.

Unkarilainen algoritmi toimii seuraavalla tavalla.

(a) Jos M on täydellinen pariutus, niin pysäytetään algoritmi. Muussa tapauksessa on olemassa pariuttamaton $j \in J$. Asetetaan $S = \{j\}$ ja $T = \emptyset$.

(b) Jos $N_{G_\varphi}(S) \neq T$, niin siirrytään kohtaan (c). Muussa tapauksessa $N_{G_\varphi}(S) = T$. Määritellään $\overline{S} = J \setminus S$ ja $\overline{T} = I \setminus T$. Etsitään $\alpha_\varphi = \min_{j \in S, i \in \overline{T}} \{\varphi(i) + \varphi(j) - w(i,j)\}$. Laaditaan uusi ei-negatiivinen potentiaali φ' seuraavasti

$$\varphi'(i) = \begin{cases} \varphi(i) + \alpha_\varphi, & \text{kaikilla } i \in T, \\ \varphi(i), & \text{kaikilla } i \in \overline{T}, \end{cases}$$

$$\varphi'(j) = \begin{cases} \varphi(j) - \alpha_\varphi, & \text{kaikilla } j \in S, \\ \varphi(j), & \text{kaikilla } j \in \overline{S}. \end{cases}$$

Korvataan φ funktiolla φ' ja G_φ verkolla $G_{\varphi'}$. Nyt $N_{G_{\varphi'}}(S) \neq T$.

(c) Valitaan solmu $i \in N_{G_\varphi}(S) \setminus T$. Jos i on pariutettu pariutuksessa M solmun $j_0 \in J$ kanssa, niin kasvatetaan M-vuorottelevaa puuta korvaamalla S joukolla $S \cup \{j_0\}$ ja T joukolla $T \cup \{i\}$, ja siirrytään kohtaan (b). Muussa tapauksessa on olemassa M-täydennyspolku solmusta j solmuun i, ja tätä polkua voidaan käyttää hyväksi suuremman pariutuksen M' löytämiseksi. Korvataan M pariutuksella M' ja siirrytään kohtaan (a).

Analysoidaan algoritmin eri vaiheita tarkemmin. Kohdassa (b) päivitetään potentiaali φ ja sen seurauksena verkko G_φ. Koska joukon S solmujen potentiaalia vähennetään ja joukon T solmujen potentiaalia kasvatetaan α_φ verran, M-vuorottelevan puun solmujen $i \in T$ ja $j \in S$ välisille kaarille pätee edelleen $\varphi'(i) + \varphi'(j) = w(i,j)$. Täten ne esiintyvät myös joukossa $G_{\varphi'}$. Potentiaalin päivitys ei vaikuta solmujen $i \in \overline{T}$ ja $j \in \overline{S}$ välisiin kaariin $(i,j) \in E_\varphi$. Näin ollen myös tällaiset kaaret esiintyvät verkossa $G_{\varphi'}$. Pariutuksessa M pariutetuille kaarille pätee $(i,j) \in T \times S$ tai $(i,j) \in \overline{T} \times \overline{S}$, ja $(i,j) \in E_\varphi$. Täten ne esiintyvät myös verkossa $G_{\varphi'}$. Potentiaalien päivityksen seurauksena ei siis tapahdu kaarien vähenemistä pariutuksesta M tai M-vuorottelevasta puusta. Sen sijaan vähintään yksi kaari $(i,j) \in S \times \overline{T}$ päätyy verkkoon $G_{\varphi'}$.

Jossain algoritmin vaiheessa verkkoon $G_{\varphi'}$ tulee siis uusi kaari ja tällöin $N_{G_{\varphi'}}(S) \neq T$. Siirrytään tarkastelemaan kohtaa (c). Jos verkkoon G_φ lisätty solmu $i \in \overline{T}$ on pariutettu pariutuksessa M solmun $j \in \overline{S}$ kanssa, niin kasvatetaan M-vuorottelevaa puuta algoritmin mukaan. Tämä voi tapahtua kuitenkin vain $|I|$ kertaa, joten jossain vaiheessa solmun $i \in \overline{T}$ täytyy olla pariuttamaton pariutuksessa M. Jos solmu $i \in \overline{T}$ on pariuttamaton pariutuksessa M, niin on olemassa M-täydennyspolku, jonka avulla löydetään suurempi pariutus M'. Sen jälkeen algoritmi alkaa uudestaan kohdasta (a). Algoritmi lisää pariutuksen kokoa aina tietyin välein, joten lopulta se päätyy täydelliseen pariutukseen. Koska kaikilla $(i, j) \in M$ pätee $w(i, j) = \varphi(i) + \varphi(j)$, algoritmin antama täydellinen pariutus on myös maksimipainoinen pariutus.

6 Yhteenveto

Eri osapuolien pariuttaminen keskenään optimaalisella tavalla on kiintoisa tehtävä sekä talousteorian että käytännön elämän näkökulmasta. Tässä työssä tutkimuksen kohteena olivat kaksijakoisen rakenteen muodostamat pariutusmarkkinat, joilla ostajat ja myyjät toimivat. Työn aluksi tarkasteltiin lineaarisen ohjelmoinnin tehtävää ja duaaliteorian päätuloksia. Ne olivat olennainen osa maksimipainoisen pariutuksen ja minipotentiaalin tehtävien tarkasteluissa. Nämä tehtävät loivat pohjaa stabiilien hinnoiteltujen pariutusten määrittelyä varten.

Pariutusmarkkinoilla toimijoiden välinen kiistattomuus määriteltiin stabiilien hinnoiteltujen pariutusten kautta. Niiden ja pariutetttujen potentiaalien välinen vastaavuus todettiin jäljempänä. Tämän vastaavuuden perusteella osoitettiin bijektiivisen allokaation mahdollistavien käypien hintojen joukon muodostavan hilarakenteen. Lisäksi näytettiin, että tästä joukosta löytyy ostajille edullisimmat hinnat.

Työn lopuksi esiteltiin unkarilainen algoritmi, joka löytää pariutetun potentiaalin vastaten stabiilia hinnoiteltua pariutusta.

Viitteet

[1] D. Bertsimas, J. N. Tsitsiklis, *Introduction to Linear Optimization*, Athena Scientific (1997).

[2] G. Dantzig, *Programming in a linear structure*, US Air Force Comptroller, USAF (1948).

[3] D. Gale, L. S. Shapley, *College admissions and the stability of marriage*, American Mathematical Monthly 69 (1962) 9–15.

[4] P. Dütting, M. Henzinger, I. Weber, *Sponsored Search, Market Equilibria, and the Hungarian Method*, Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science (2010) 287–298.

[5] L. Shapley, M. Shubik, *The assignment game: The core I*, International Journal of Game Theory (1971) 111–130.

[6] E. Arcaute, S. Vassilvitskii, *Social Networks and Stable Matchings in the Job Market*, Workshop on Internet and Network Economics (2009) 220–231.

[7] National Resident Matching Program (NRMP), http://www.nrmp.org/

[8] G. Demange, D. Gale, M. Sotomayor, *Multi-item auctions*, J. Political Economy 94 (1986) 863–872.

[9] H. Kuhn, *The Hungarian method for the assignment problem*, Naval Research Logistic Quarterly 2 (1955) 83–97.

[10] J. Munkres, *Algorithms for the assignment and transportation problems*, Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics 5 (1957) 32–38.

[11] G. Demange, D. Gale, *The strategy structure of two-sided matching markets*, Econometrica 53 (1985) 873–888.