

CalcuIemus

(Vol. 2: Demostraciones con Lean4)

José A. Alonso Jiménez

Grupo de Lógica Computacional
Dpto. de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial
Universidad de Sevilla
Sevilla, 10 de julio de 2023 (versión del 5 de agosto de 2023)

Esta obra está bajo una licencia Reconocimiento-NoComercial-CompartirIgual 2.5 Spain de Creative Commons.

Se permite:

- copiar, distribuir y comunicar públicamente la obra
- hacer obras derivadas

Bajo las condiciones siguientes:

Reconocimiento. Debe reconocer los créditos de la obra de la manera especificada por el autor.



No comercial. No puede utilizar esta obra para fines comerciales.



Compartir bajo la misma licencia. Si altera o transforma esta obra, o genera una obra derivada, sólo puede distribuir la obra generada bajo una licencia idéntica a ésta.

- Al reutilizar o distribuir la obra, tiene que dejar bien claro los términos de la licencia de esta obra.
- Algunas de estas condiciones pueden no aplicarse si se obtiene el permiso del titular de los derechos de autor.

Esto es un resumen del texto legal (la licencia completa). Para ver una copia de esta licencia, visite <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.5/es/> o envíe una carta a Creative Commons, 559 Nathan Abbott Way, Stanford, California 94305, USA.

Índice general

1. Introducción	5
2. Demostraciones de una propiedad de los números enteros	7
2.1. $\forall m, n \in \mathbb{N}, \text{Even } n \rightarrow \text{Even } (m * n)$	7
3. Propiedades elementales de los números reales	11
3.1. En \mathbb{R} , $(ab)c = b(ac)$	11
3.2. En \mathbb{R} , $(cb)a = b(ac)$	12
3.3. En \mathbb{R} , $a(bc) = b(ac)$	13
3.4. En \mathbb{R} , si $ab = cd$ y $e = f$, entonces $a(be) = c(df)$	14
3.5. En \mathbb{R} , si $bc = ef$, entonces $((ab)c)d = ((ae)f)d$	16
3.6. En \mathbb{R} , si $c = ba-d$ y $d = ab$, entonces $c = 0$	17
3.7. En \mathbb{R} , $(a+b)(a+b) = aa+2ab+bb$	18
3.8. En \mathbb{R} , $(a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd$	20
3.9. En \mathbb{R} , $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$	22
3.10. En \mathbb{R} , si $c = da+b$ y $b = ad$, entonces $c = 2ad$	24
3.11. En \mathbb{R} , si $a+b = c$, entonces $(a+b)(a+b) = ac+bc$	26
4. Propiedades elementales de los anillos	29
4.1. Si R es un anillo y $a \in R$, entonces $a + 0 = a$	29
4.2. Si R es un anillo y $a \in R$, entonces $a + -a = 0$	30
4.3. Si R es un anillo y $a, b \in R$, entonces $-a + (a + b) = b$	32
4.4. Si R es un anillo y $a, b \in R$, entonces $(a + b) + -b = a$	33
4.5. Si R es un anillo y $a, b, c \in R$ tales que $a+b=a+c$, entonces $b=c$	34
4.6. Si R es un anillo y $a, b, c \in R$ tales que $a+b=c+b$, entonces $a=c$	37
4.7. Si R es un anillo y $a \in R$, entonces $a.0 = 0$	39
4.8. Si R es un anillo y $a \in R$, entonces $0.a = 0$	41
Bibliografía	42

Capítulo 1

Introducción

Este libro es una recopilación de los ejercicios de demostración con Lean4 que se han ido publicando, desde el 10 de julio de 20023, en el blog [Calculemus](#).

La ordenación de los ejercicios es simplemente temporal según su fecha de publicación en Calculemus y el orden de los ejercicios en Calculemus responde a los que me voy encontrando en mis [lecturas](#).

En cada ejercicio, se comienza proponiendo soluciones en lenguaje natural y, a continuación, se exponen distintas demostraciones con Lean4 ordenadas desde las más detalladas a las más automáticas. Al final de cada ejercicio hay un enlace para interactuar con sus soluciones en [Lean4 Web](#).

Las soluciones del libro están en [este repositorio de GitHub](#).

El libro se irá actualizando periódicamente con los nuevos ejercicios que se proponen diariamente en [Calculemus](#).

Este libro es una continuación de

- [DAO \(Demostración Asistida por Ordenador\) con Lean](#) que es una introducción a la demostración con Lean3 y
- [Calculemus \(Vol. 1: Demostraciones con Isabelle/HOL y Lean3\)](#) que es la recopilación de la primera parte de los ejercicios del blog con demostraciones en Isabelle/HOL y Lean3.

Capítulo 2

Demostraciones de una propiedad de los números enteros

2.1. $\forall m n \in \mathbb{N}, \text{Even } n \rightarrow \text{Even } (m * n)$

```
-----  
-- Demostrar que los productos de los números naturales por números  
-- pares son pares.  
-----  
  
-- Demostración en lenguaje natural  
-- =====  
  
-- Si n es par, entonces (por la definición de 'Even') existe un k tal que  
--   n = k + k          (1)  
-- Por tanto,  
--   mn = m(k + k)      (por (1))  
--       = mk + mk       (por la propiedad distributiva)  
-- Por consiguiente, mn es par.  
  
-- Demostraciones en Lean4  
-- =====  
  
import Mathlib.Data.Nat.Basic  
import Mathlib.Data.Nat.Parity  
import Mathlib.Tactic  
  
open Nat
```

```

-- 1ª demostración
-- =====

example : ∀ m n : ℕ, Even n → Even (m * n) := by
  rintro m n ⟨k, hk⟩
  use m * k
  rw [hk]
  ring

-- 2ª demostración
-- =====

example : ∀ m n : ℕ, Even n → Even (m * n) := by
  rintro m n ⟨k, hk⟩
  use m * k
  rw [hk]
  rw [mul_add]

-- 3ª demostración
-- =====

example : ∀ m n : ℕ, Even n → Even (m * n) := by
  rintro m n ⟨k, hk⟩
  use m * k
  rw [hk, mul_add]

-- 4ª demostración
-- =====

example : ∀ m n : Nat, Even n → Even (m * n) := by
  rintro m n ⟨k, hk⟩; use m * k; rw [hk, mul_add]

-- 5ª demostración
-- =====

example : ∀ m n : ℕ, Even n → Even (m * n) := by
  rintro m n ⟨k, hk⟩
  exact ⟨m * k, by rw [hk, mul_add]⟩

-- 6ª demostración
-- =====

example : ∀ m n : Nat, Even n → Even (m * n) :=
fun m n ⟨k, hk⟩ ↦ ⟨m * k, by rw [hk, mul_add]⟩

```



```

-- 7ª demostración
-- =====

example :  $\forall m n : \mathbb{N}, \text{Even } n \rightarrow \text{Even } (m * n) := \text{by}$ 
  rintro m n ⟨k, hk⟩
  use m * k
  rw [hk]
  exact mul_add m k k

-- 8ª demostración
-- =====

example :  $\forall m n : \mathbb{N}, \text{Even } n \rightarrow \text{Even } (m * n) := \text{by}$ 
  intros m n hn
  unfold Even at *
  cases hn with
  | intro k hk =>
    use m * k
    rw [hk, mul_add]

-- 9ª demostración
-- =====

example :  $\forall m n : \mathbb{N}, \text{Even } n \rightarrow \text{Even } (m * n) := \text{by}$ 
  intros m n hn
  unfold Even at *
  cases hn with
  | intro k hk =>
    use m * k
    calc m * n
      = m * (k + k) := by exact congrArg (HMul.hMul m) hk
      _ = m * k + m * k := by exact mul_add m k k

-- 10ª demostración
-- =====

example :  $\forall m n : \text{Nat}, \text{Even } n \rightarrow \text{Even } (m * n) := \text{by}$ 
  intros; simp [*, parity_simps]

```

Se puede interactuar con las pruebas anteriores en [Lean 4 Web](#).

Capítulo 3

Propiedades elementales de los números reales

3.1. En \mathbb{R} , $(ab)c = b(ac)$

```
-- Demostrar que los números reales tienen la siguiente propiedad
-- (a * b) * c = b * (a * c)
```

```
-- Demostración en lenguaje natural
-- =====
```

```
-- Por la siguiente cadena de igualdades
-- (ab)c = (ba)c [por la conmutativa]
-- = b(ac) [por la asociativa]
```

```
-- Demostraciones con Lean4
-- =====
```

```
import Mathlib.Tactic
import Mathlib.Data.Real.Basic
```

```
-- 1ª demostración
```

```
example
```

```
(a b c : ℝ)
: (a * b) * c = b * (a * c) :=
```

```
calc
```

```
(a * b) * c = (b * a) * c := by rw [mul_comm a b]
_ = b * (a * c) := by rw [mul_assoc b a c]
```

```
-- 2ª demostración
example (a b c : ℝ) : (a * b) * c = b * (a * c) :=
by
  rw [mul_comm a b]
  rw [mul_assoc b a c]

-- 3ª demostración
example (a b c : ℝ) : (a * b) * c = b * (a * c) :=
by ring
```

Se puede interactuar con las pruebas anteriores en [Lean 4 Web](#).

3.2. En \mathbb{R} , $(cb)a = b(ac)$

```
-- -----
-- Demostrar que los números reales tienen la siguiente propiedad
--   (c * b) * a = b * (a * c)
-- -----

-- Demostración en lenguaje natural
-- =====

-- Por la siguiente cadena de igualdades:
--   (c * b) * a
--   = (b * c) * a   [por la conmutativa]
--   = b * (c * a)   [por la asociativa]
--   = b * (a * c)   [por la conmutativa]

-- Demostraciones con Lean4
-- =====

import Mathlib.Tactic
import Mathlib.Data.Real.Basic

-- 1ª demostración
example
  (a b c : ℝ)
  : (c * b) * a = b * (a * c) :=
calc
  (c * b) * a
  = (b * c) * a := by rw [mul_comm c b]
_ = b * (c * a) := by rw [mul_assoc]
_ = b * (a * c) := by rw [mul_comm c a]
```

```

-- 2ª demostración
example
  (a b c : ℝ)
  : (c * b) * a = b * (a * c) :=
by
  rw [mul_comm c b]
  rw [mul_assoc]
  rw [mul_comm c a]

-- 3ª demostración
example
  (a b c : ℝ)
  : (c * b) * a = b * (a * c) :=
by ring

```

Se puede interactuar con las pruebas anteriores en [Lean 4 Web](#).

3.3. En \mathbb{R} , $a(bc) = b(ac)$

```

-----
-- Demostrar que los números reales tienen la siguiente propiedad
--   a * (b * c) = b * (a * c)
-- -----

-- Demostración en lenguaje natural
-- =====

-- Por la siguiente cadena de igualdades:
--   a(bc)
--   = (ab)c    [por la asociativa]
--   = (ba)c    [por la conmutativa]
--   = b(ac)    [por la asociativa]

-- Demostraciones en Lean4
-- =====

import Mathlib.Tactic
import Mathlib.Data.Real.Basic

-- 1ª demostración
example
  (a b c : ℝ) : a * (b * c) = b * (a * c) :=
calc

```

```

a * (b * c)
  = (a * b) * c := by rw [←mul_assoc]
_ = (b * a) * c := by rw [mul_comm a b]
_ = b * (a * c) := by rw [mul_assoc]

-- 2ª demostración
example
  (a b c : ℝ) : a * (b * c) = b * (a * c) :=
by
  rw [←mul_assoc]
  rw [mul_comm a b]
  rw [mul_assoc]

-- 3ª demostración
example
  (a b c : ℝ) : a * (b * c) = b * (a * c) :=
by ring

```

Se puede interactuar con las pruebas anteriores en [Lean 4 Web](#).

3.4. En \mathbb{R} , si $ab = cd$ y $e = f$, entonces $a(be) = c(df)$

```

-- -----
-- Demostrar que si a, b, c, d, e y f son números reales tales que
--   a * b = c * d y
--   e = f,
-- entonces
--   a * (b * e) = c * (d * f)
-- -----

-- Demostración en lenguaje natural
-- =====

-- Por la siguiente cadena de igualdades
--   a(be)
--   = a(bf)    [por la segunda hipótesis]
--   = (ab)f    [por la asociativa]
--   = (cd)f    [por la primera hipótesis]
--   = c(df)    [por la asociativa]

-- Demostraciones en Lean4

```

```

-- =====

import Mathlib.Tactic
import Mathlib.Data.Real.Basic

-- 1ª demostración
example
  (a b c d e f : ℝ)
  (h1 : a * b = c * d)
  (h2 : e = f)
  : a * (b * e) = c * (d * f) :=
calc
  a * (b * e)
    = a * (b * f) := by rw [h2]
_   = (a * b) * f := by rw [←mul_assoc]
_   = (c * d) * f := by rw [h1]
_   = c * (d * f) := by rw [mul_assoc]

-- 2ª demostración
example
  (a b c d e f : ℝ)
  (h1 : a * b = c * d)
  (h2 : e = f)
  : a * (b * e) = c * (d * f) :=
by
  rw [h2]
  rw [←mul_assoc]
  rw [h1]
  rw [mul_assoc]

-- 3ª demostración
example
  (a b c d e f : ℝ)
  (h1 : a * b = c * d)
  (h2 : e = f)
  : a * (b * e) = c * (d * f) :=
by
  simp [*, ←mul_assoc]

```

Se puede interactuar con las pruebas anteriores en [Lean 4 Web](#).

3.5. En \mathbb{R} , si $bc = ef$, entonces $((ab)c)d = ((ae)f)d$

```

-- -----
-- Demostrar que si a, b, c, d, e y f son números reales tales que
--   b * c = e * f
-- entonces
--   ((a * b) * c) * d = ((a * e) * f) * d
-- -----

-- Demostración en lenguaje natural
-- =====

-- Por la siguiente cadena de igualdades
--   ((ab)c)d
--   = (a(bc))d    [por la asociativa]
--   = (a(ef))d    [por la hipótesis]
--   = ((ae)f)d    [por la asociativa]

-- Demostraciones con Lean4
-- =====

import Mathlib.Data.Real.Basic
import Mathlib.Tactic

-- 1ª demostración
example
  (a b c d e f : ℝ)
  (h : b * c = e * f)
  : ((a * b) * c) * d = ((a * e) * f) * d :=
calc
  ((a * b) * c) * d
    = (a * (b * c)) * d := by rw [mul_assoc a]
  _ = (a * (e * f)) * d := by rw [h]
  _ = ((a * e) * f) * d := by rw [←mul_assoc a]

-- 2ª demostración
example
  (a b c d e f : ℝ)
  (h : b * c = e * f)
  : ((a * b) * c) * d = ((a * e) * f) * d :=
by
  rw [mul_assoc a]
  rw [h]
  rw [←mul_assoc a]

```



```
-- 3ª demostración
example
  (a b c d e f : ℝ)
  (h : b * c = e * f)
  : ((a * b) * c) * d = ((a * e) * f) * d :=
by
  rw [mul_assoc a, h, ←mul_assoc a]
```

Se puede interactuar con las pruebas anteriores en [Lean 4 Web](#).

3.6. En \mathbb{R} , si $c = ba - d$ y $d = ab$, entonces $c = 0$

```
-----
-- Demostrar que si a, b, c y d son números reales tales que
--   c = b * a - d
--   d = a * b
-- entonces
--   c = 0
--
-- Demostración en lenguaje natural
-- =====

-- Por la siguiente cadena de igualdades
--   c = ba - d      [por la primera hipótesis]
--   = ab - d        [por la conmutativa]
--   = ab - ab        [por la segunda hipótesis]
--   = 0

-- Demostraciones en Lean4
-- =====

import Mathlib.Data.Real.Basic
import Mathlib.Tactic

-- 1ª demostración
example
  (a b c d : ℝ)
  (h1 : c = b * a - d)
  (h2 : d = a * b)
  : c = 0 :=
calc
```

```

c = b * a - d      := by rw [h1]
_ = a * b - d      := by rw [mul_comm]
_ = a * b - a * b  := by rw [h2]
_ = 0              := by rw [sub_self]

-- 2ª demostración
example
  (a b c d : ℝ)
  (h1 : c = b * a - d)
  (h2 : d = a * b)
  : c = 0 :=
by
  rw [h1]
  rw [mul_comm]
  rw [h2]
  rw [sub_self]

-- 3ª demostración
example
  (a b c d : ℝ)
  (h1 : c = b * a - d)
  (h2 : d = a * b)
  : c = 0 :=
by
  rw [h1, mul_comm, h2, sub_self]

```

Se puede interactuar con las pruebas anteriores en [Lean 4 Web](#).

3.7. En \mathbb{R} , $(a+b)(a+b) = aa+2ab+bb$

```

-----
-- Demostrar que si a y b son números reales, entonces
--   (a + b) * (a + b) = a * a + 2 * (a * b) + b * b
-----

-- Demostración en lenguaje natural
-- =====

-- Por la siguiente cadena de igualdades
--   (a + b)(a + b)
--   = (a + b)a + (a + b)b    [por la distributiva]
--   = aa + ba + (a + b)b    [por la distributiva]
--   = aa + ba + (ab + bb)   [por la distributiva]

```

```

--      = aa + ba + ab + bb      [por la asociativa]
--      = aa + (ba + ab) + bb    [por la asociativa]
--      = aa + (ab + ab) + bb    [por la conmutativa]
--      = aa + 2(ab) + bb        [por def. de doble]

-- Demostraciones con Lean4
-- =====

import Mathlib.Data.Real.Basic
import Mathlib.Tactic

variable (a b c : ℝ)

-- 1ª demostración
example :
  (a + b) * (a + b) = a * a + 2 * (a * b) + b * b :=
calc
  (a + b) * (a + b)
    = (a + b) * a + (a + b) * b      := by rw [mul_add]
  _ = a * a + b * a + (a + b) * b    := by rw [add_mul]
  _ = a * a + b * a + (a * b + b * b) := by rw [add_mul]
  _ = a * a + b * a + a * b + b * b   := by rw [←add_assoc]
  _ = a * a + (b * a + a * b) + b * b := by rw [add_assoc (a * a)]
  _ = a * a + (a * b + a * b) + b * b := by rw [mul_comm b a]
  _ = a * a + 2 * (a * b) + b * b     := by rw [←two_mul]

-- 2ª demostración
example :
  (a + b) * (a + b) = a * a + 2 * (a * b) + b * b :=
calc
  (a + b) * (a + b)
    = a * a + b * a + (a * b + b * b) := by rw [mul_add, add_mul, add_mul]
  _ = a * a + (b * a + a * b) + b * b := by rw [←add_assoc, add_assoc (a * a)]
  _ = a * a + 2 * (a * b) + b * b     := by rw [mul_comm b a, ←two_mul]

-- 3ª demostración
example :
  (a + b) * (a + b) = a * a + 2 * (a * b) + b * b :=
calc
  (a + b) * (a + b)
    = a * a + b * a + (a * b + b * b) := by ring
  _ = a * a + (b * a + a * b) + b * b := by ring
  _ = a * a + 2 * (a * b) + b * b     := by ring

-- 4ª demostración

```

```

example :
  (a + b) * (a + b) = a * a + 2 * (a * b) + b * b :=
by ring

-- 5ª demostración
example :
  (a + b) * (a + b) = a * a + 2 * (a * b) + b * b :=
by
  rw [mul_add]
  rw [add_mul]
  rw [add_mul]
  rw [←add_assoc]
  rw [add_assoc (a * a)]
  rw [mul_comm b a]
  rw [←two_mul]

-- 6ª demostración
example :
  (a + b) * (a + b) = a * a + 2 * (a * b) + b * b :=
by
  rw [mul_add, add_mul, add_mul]
  rw [←add_assoc, add_assoc (a * a)]
  rw [mul_comm b a, ←two_mul]

-- 7ª demostración
example :
  (a + b) * (a + b) = a * a + 2 * (a * b) + b * b :=
by linarith

```

Se puede interactuar con las pruebas anteriores en [Lean 4 Web](#).

3.8. En \mathbb{R} , $(a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd$

```

-- -----
-- Demostrar que si a, b, c y d son números reales, entonces
--   (a + b) * (c + d) = a * c + a * d + b * c + b * d
-- -----

-- Demostración en lenguaje natural
-- =====

-- Por la siguiente cadena de igualdades
--   (a + b)(c + d)

```

```

--      = a(c + d) + b(c + d)      [por la distributiva]
--      = ac + ad + b(c + d)      [por la distributiva]
--      = ac + ad + (bc + bd)     [por la distributiva]
--      = ac + ad + bc + bd       [por la asociativa]

-- Demostraciones con Lean4
-- =====

import Mathlib.Data.Real.Basic
import Mathlib.Tactic

variable (a b c d : ℝ)

-- 1ª demostración
example
  : (a + b) * (c + d) = a * c + a * d + b * c + b * d :=
calc
  (a + b) * (c + d)
    = a * (c + d) + b * (c + d)      := by rw [add_mul]
_   = a * c + a * d + b * (c + d)    := by rw [mul_add]
_   = a * c + a * d + (b * c + b * d) := by rw [mul_add]
_   = a * c + a * d + b * c + b * d  := by rw [←add_assoc]

-- 2ª demostración
example
  : (a + b) * (c + d) = a * c + a * d + b * c + b * d :=
calc
  (a + b) * (c + d)
    = a * (c + d) + b * (c + d)      := by ring
_   = a * c + a * d + b * (c + d)    := by ring
_   = a * c + a * d + (b * c + b * d) := by ring
_   = a * c + a * d + b * c + b * d  := by ring

-- 3ª demostración
example : (a + b) * (c + d) = a * c + a * d + b * c + b * d :=
by ring

-- 4ª demostración
example
  : (a + b) * (c + d) = a * c + a * d + b * c + b * d :=
by
  rw [add_mul]
  rw [mul_add]
  rw [mul_add]
  rw [← add_assoc]

```

```
-- 5ª demostración
example : (a + b) * (c + d) = a * c + a * d + b * c + b * d :=
by rw [add_mul, mul_add, mul_add, ←add_assoc]
```

Se puede interactuar con las pruebas anteriores en [Lean 4 Web](#).

3.9. En \mathbb{R} , $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

```
-----
-- Demostrar que si a y b son números reales, entonces
-- (a + b) * (a - b) = a^2 - b^2
-----

-- Demostración en lenguaje natural
-- =====

-- Por la siguiente cadena de igualdades:
-- (a + b)(a - b)
-- = a(a - b) + b(a - b)           [por la distributiva]
-- = (aa - ab) + b(a - b)         [por la distributiva]
-- = (a^2 - ab) + b(a - b)         [por def. de cuadrado]
-- = (a^2 - ab) + (ba - bb)         [por la distributiva]
-- = (a^2 - ab) + (ba - b^2)        [por def. de cuadrado]
-- = (a^2 + -(ab)) + (ba - b^2)     [por def. de resta]
-- = a^2 + (-(ab) + (ba - b^2))     [por la asociativa]
-- = a^2 + ((-(ab) + ba) + -b^2)    [por def. de resta]
-- = a^2 + ((-(ab) + ba) + -b^2)    [por la asociativa]
-- = a^2 + ((-(ab) + ab) + -b^2)    [por la conmutativa]
-- = a^2 + (0 + -b^2)               [por def. de opuesto]
-- = (a^2 + 0) + -b^2               [por asociativa]
-- = a^2 + -b^2                     [por def. de cero]
-- = a^2 - b^2                      [por def. de resta]

-- Demostraciones con Lean4
-- =====

import Mathlib.Data.Real.Basic
import Mathlib.Tactic

variable (a b : ℝ)

-- 1ª demostración
```

```
-- =====
example : (a + b) * (a - b) = a^2 - b^2 :=
calc
  (a + b) * (a - b)
    = a * (a - b) + b * (a - b)           := by rw [add_mul]
  _ = (a * a - a * b) + b * (a - b)       := by rw [mul_sub]
  _ = (a^2 - a * b) + b * (a - b)         := by rw [← pow_two]
  _ = (a^2 - a * b) + (b * a - b * b)      := by rw [mul_sub]
  _ = (a^2 - a * b) + (b * a - b^2)        := by rw [← pow_two]
  _ = (a^2 + -(a * b)) + (b * a - b^2)     := by ring
  _ = a^2 + (-(a * b) + (b * a - b^2))     := by rw [add_assoc]
  _ = a^2 + (-(a * b) + (b * a + -b^2))    := by ring
  _ = a^2 + ((-(a * b) + b * a) + -b^2)    := by rw [← add_assoc
    (-(a * b)) (b * a) (-b^2)]
  _ = a^2 + ((-(a * b) + a * b) + -b^2)    := by rw [mul_comm]
  _ = a^2 + (0 + -b^2)                    := by rw [neg_add_self (a * b)]
  _ = (a^2 + 0) + -b^2                    := by rw [← add_assoc]
  _ = a^2 + -b^2                          := by rw [add_zero]
  _ = a^2 - b^2                           := by linarith

-- 2ª demostración
-- =====
example : (a + b) * (a - b) = a^2 - b^2 :=
calc
  (a + b) * (a - b)
    = a * (a - b) + b * (a - b)           := by ring
  _ = (a * a - a * b) + b * (a - b)       := by ring
  _ = (a^2 - a * b) + b * (a - b)         := by ring
  _ = (a^2 - a * b) + (b * a - b * b)      := by ring
  _ = (a^2 - a * b) + (b * a - b^2)        := by ring
  _ = (a^2 + -(a * b)) + (b * a - b^2)     := by ring
  _ = a^2 + (-(a * b) + (b * a - b^2))     := by ring
  _ = a^2 + (-(a * b) + (b * a + -b^2))    := by ring
  _ = a^2 + ((-(a * b) + b * a) + -b^2)    := by ring
  _ = a^2 + ((-(a * b) + a * b) + -b^2)    := by ring
  _ = a^2 + (0 + -b^2)                    := by ring
  _ = (a^2 + 0) + -b^2                    := by ring
  _ = a^2 + -b^2                          := by ring
  _ = a^2 - b^2                           := by ring

-- 3ª demostración
-- =====
```

```

example : (a + b) * (a - b) = a^2 - b^2 :=
by ring

-- 4ª demostración
-- =====

-- El lema anterior es
lemma aux : (a + b) * (c + d) = a * c + a * d + b * c + b * d :=
by ring

-- La demostración es
example : (a + b) * (a - b) = a^2 - b^2 :=
by
  rw [sub_eq_add_neg]
  rw [aux]
  rw [mul_neg]
  rw [add_assoc (a * a)]
  rw [mul_comm b a]
  rw [neg_add_self]
  rw [add_zero]
  rw [← pow_two]
  rw [mul_neg]
  rw [← pow_two]
  rw [← sub_eq_add_neg]

```

Se puede interactuar con las pruebas anteriores en [Lean 4 Web](#).

3.10. En \mathbb{R} , si $c = da + b$ y $b = ad$, entonces $c = 2ad$

```

-----
-- Demostrar que si a, b, c y d son números reales tales que
--   c = d * a + b
--   b = a * d
-- entonces
--   c = 2 * a * d
-----

-- Demostración en lenguaje natural
-- =====

-- Por la siguiente cadena de igualdades

```



```

--      c = da + b      [por la primera hipótesis]
--      = da + ad      [por la segunda hipótesis]
--      = ad + ad      [por la conmutativa]
--      = 2(ad)        [por la def. de doble]
--      = 2ad          [por la asociativa]

-- Demostraciones con Lean4
-- =====

import Mathlib.Data.Real.Basic
import Mathlib.Tactic

variable (a b c d : ℝ)

-- 1ª demostración
example
  (h1 : c = d * a + b)
  (h2 : b = a * d)
  : c = 2 * a * d :=
calc
  c = d * a + b      := by rw [h1]
  _ = d * a + a * d := by rw [h2]
  _ = a * d + a * d := by rw [mul_comm d a]
  _ = 2 * (a * d)    := by rw [← two_mul (a * d)]
  _ = 2 * a * d      := by rw [mul_assoc]

-- 2ª demostración
example
  (h1 : c = d * a + b)
  (h2 : b = a * d)
  : c = 2 * a * d :=
by
  rw [h2] at h1
  clear h2
  rw [mul_comm d a] at h1
  rw [← two_mul (a*d)] at h1
  rw [← mul_assoc 2 a d] at h1
  exact h1

-- 3ª demostración
example
  (h1 : c = d * a + b)
  (h2 : b = a * d)
  : c = 2 * a * d :=
by rw [h1, h2, mul_comm d a, ← two_mul (a * d), mul_assoc]

```

```

-- 4ª demostración
example
  (h1 : c = d * a + b)
  (h2 : b = a * d)
  : c = 2 * a * d :=
by
  rw [h1]
  rw [h2]
  ring

-- 5ª demostración
example
  (h1 : c = d * a + b)
  (h2 : b = a * d)
  : c = 2 * a * d :=
by
  rw [h1, h2]
  ring

-- 6ª demostración
example
  (h1 : c = d * a + b)
  (h2 : b = a * d)
  : c = 2 * a * d :=
by rw [h1, h2] ; ring

-- 7ª demostración
example
  (h1 : c = d * a + b)
  (h2 : b = a * d)
  : c = 2 * a * d :=
by linarith

```

Se puede interactuar con las pruebas anteriores en [Lean 4 Web](#).

3.11. En \mathbb{R} , si $a+b = c$, entonces $(a+b)(a+b) = ac+bc$

```

-- -----
-- Demostrar que si a, b y c son números reales tales que
--   a + b = c,
-- entonces

```

```

--      (a + b) * (a + b) = a * c + b * c
--      -----

-- Demostración en lenguaje natural
-- =====

-- Por la siguiente cadena de igualdades
--      (a + b)(a + b)
--      = (a + b)c      [por la hipótesis]
--      = ac + bc       [por la distributiva]

-- Demostraciones con Lean4
-- =====

import Mathlib.Data.Real.Basic
import Mathlib.Tactic

variable (a b c : ℝ)

-- 1ª demostración
example
  (h : a + b = c)
  : (a + b) * (a + b) = a * c + b * c :=
calc
  (a + b) * (a + b)
    = (a + b) * c      := by exact congrArg (HMul.hMul (a + b)) h
  _ = a * c + b * c := by rw [add_mul]

-- 2ª demostración
example
  (h : a + b = c)
  : (a + b) * (a + b) = a * c + b * c :=
by
  nth_rewrite 2 [h]
  rw [add_mul]

```

Se puede interactuar con las pruebas anteriores en [Lean 4 Web](#).

Capítulo 4

Propiedades elementales de los anillos

4.1. Si R es un anillo y $a \in R$, entonces $a + 0 = a$

```
-- Demostrar en Lean4 que si R es un anillo, entonces
--    $\forall a : R, a + 0 = a$ 
--
-- Demostración en lenguaje natural
-- =====

-- Por la siguiente cadena de igualdades
--    $a + 0 = 0 + a$  [por la conmutativa de la suma]
--    $= a$  [por el axioma del cero por la izquierda]

import Mathlib.Algebra.Ring.Defs

variable {R : Type _} [Ring R]
variable (a : R)

-- Demostraciones con Lean4
-- =====

-- 1ª demostración
example : a + 0 = a :=
calc a + 0
    = 0 + a := by rw [add_comm]
```

```

_ = a      := by rw [zero_add]

-- 2ª demostración
example : a + 0 = a :=
by
  rw [add_comm]
  rw [zero_add]

-- 3ª demostración
example : a + 0 = a :=
by rw [add_comm, zero_add]

-- 4ª demostración
example : a + 0 = a :=
by exact add_zero a

-- 5ª demostración
example : a + 0 = a :=
  add_zero a

-- 5ª demostración
example : a + 0 = a :=
by simp

```

Se puede interactuar con las pruebas anteriores en [Lean 4 Web](#).

4.2. Si R es un anillo y $a \in R$, entonces $a + -a = 0$

```

-- -----
-- Demostrar en Lean4 que si R es un anillo, entonces
--    $\forall a : R, a + -a = 0$ 
-- -----

-- Demostración en lenguaje natural
-- =====

-- Por la siguiente cadena de igualdades
--    $a + -a = -a + a$       [por la conmutativa de la suma]
--    $= 0$                   [por el axioma de inverso por la izquierda]

import Mathlib.Algebra.Ring.Defs

```

```

variable {R : Type _} [Ring R]
variable (a : R)

-- 1ª demostración
-- =====

example : a + -a = 0 :=
calc a + -a = -a + a := by rw [add_comm]
      _ = 0      := by rw [add_left_neg]

-- 2ª demostración
-- =====

example : a + -a = 0 :=
by
  rw [add_comm]
  rw [add_left_neg]

-- 3ª demostración
-- =====

example : a + -a = 0 :=
by rw [add_comm, add_left_neg]

-- 4ª demostración
-- =====

example : a + -a = 0 :=
by exact add_neg_self a

-- 5ª demostración
-- =====

example : a + -a = 0 :=
  add_neg_self a

-- 6ª demostración
-- =====

example : a + -a = 0 :=
by simp

```

Se puede interactuar con las pruebas anteriores en [Lean 4 Web](#).

4.3. Si R es un anillo y $a, b \in R$, entonces $-a + (a + b) = b$

```

-----
-- Demostrar en Lean4 que si R es un anillo, entonces
--    $\forall a, b : R, -a + (a + b) = b$ 
-----

-- Demostración en lenguaje natural
-- =====

-- Por la siguiente cadena de igualdades
--    $-a + (a + b) = (-a + a) + b$  [por la asociativa]
--                    $= 0 + b$       [por inverso por la izquierda]
--                    $= b$           [por cero por la izquierda]

import Mathlib.Algebra.Ring.Defs

variable {R : Type _} [Ring R]
variable (a b : R)

-- Demostraciones con Lean4
-- =====

-- 1ª demostración
example : -a + (a + b) = b :=
calc -a + (a + b) = (-a + a) + b := by rw [← add_assoc]
      _ = 0 + b      := by rw [add_left_neg]
      _ = b          := by rw [zero_add]

-- 2ª demostración
example : -a + (a + b) = b :=
by
  rw [←add_assoc]
  rw [add_left_neg]
  rw [zero_add]

-- 3ª demostración
example : -a + (a + b) = b :=
by rw [←add_assoc, add_left_neg, zero_add]

-- 4ª demostración
example : -a + (a + b) = b :=
by exact neg_add_cancel_left a b

```



```
-- 5ª demostración
example : -a + (a + b) = b :=
  neg_add_cancel_left a b

-- 6ª demostración
example : -a + (a + b) = b :=
by simp
```

Se puede interactuar con las pruebas anteriores en [Lean 4 Web](#).

4.4. Si R es un anillo y $a, b \in R$, entonces $(a + b) + -b = a$

```
-----
-- Demostrar en Lean4 que si R es un anillo, entonces
--    $\forall a, b : R, (a + b) + -b = a$ 
--
-----

-- Demostración en lenguaje natural
-- =====

-- Por la siguiente cadena de igualdades
--    $(a + b) + -b = a + (b + -b)$       [por la asociativa]
--            $= a + 0$                     [por suma con opuesto]
--            $= a$                         [por suma con cero]

-- Demostraciones con Lean4
-- =====

import Mathlib.Algebra.Ring.Defs

variable {R : Type _} [Ring R]
variable (a b : R)

-- 1ª demostración
example : (a + b) + -b = a :=
calc
  (a + b) + -b = a + (b + -b) := by rw [add_assoc]
  _ = a + 0           := by rw [add_right_neg]
  _ = a               := by rw [add_zero]

-- 2ª demostración
```

```

example : (a + b) + -b = a :=
by
  rw [add_assoc]
  rw [add_right_neg]
  rw [add_zero]

-- 3ª demostración
example : (a + b) + -b = a :=
by rw [add_assoc, add_right_neg, add_zero]

-- 4ª demostración
example : (a + b) + -b = a :=
  add_neg_cancel_right a b

-- 5ª demostración
example : (a + b) + -b = a :=
  add_neg_cancel_right _ _

-- 6ª demostración
example : (a + b) + -b = a :=
by simp

```

Se puede interactuar con las pruebas anteriores en [Lean 4 Web](#).

4.5. Si R es un anillo y $a, b, c \in R$ tales que $a+b=a+c$, entonces $b=c$

```

-----
-- Demostrar que si  $R$  es un anillo y  $a, b, c \in R$  tales que
--    $a + b = a + c$ 
-- entonces
--    $b = c$ 
-----

-- Demostraciones en lenguaje natural (LN)
-- =====

-- 1ª demostración en LN
-- =====

-- Por la siguiente cadena de igualdades
--    $b = 0 + b$  [por suma con cero]

```

```

--      = (-a + a) + b      [por suma con opuesto]
--      = -a + (a + b)      [por asociativa]
--      = -a + (a + c)      [por hipótesis]
--      = (-a + a) + c      [por asociativa]
--      = 0 + c              [por suma con opuesto]
--      = c                  [por suma con cero]

-- 2ª demostración en LN
-- =====

-- Por la siguiente cadena de implicaciones
--      a + b = a + c
--      ==> -a + (a + b) = -a + (a + c)      [sumando -a]
--      ==> (-a + a) + b = (-a + a) + c      [por la asociativa]
--      ==> 0 + b = 0 + c                    [suma con opuesto]
--      ==> b = c                            [suma con cero]

-- 3ª demostración en LN
-- =====

-- Por la siguiente cadena de igualdades
--      b = -a + (a + b)
--      = -a + (a + c)      [por la hipótesis]
--      = c

-- Demostraciones con Lean4
-- =====

import Mathlib.Algebra.Ring.Defs
import Mathlib.Tactic

variable {R : Type _} [Ring R]
variable {a b c : R}

-- 1ª demostración
example
  (h : a + b = a + c)
  : b = c :=
calc
  b = 0 + b          := by rw [zero_add]
  _ = (-a + a) + b := by rw [add_left_neg]
  _ = -a + (a + b) := by rw [add_assoc]
  _ = -a + (a + c) := by rw [h]
  _ = (-a + a) + c := by rw [←add_assoc]
  _ = 0 + c          := by rw [add_left_neg]

```

```

_ = c                := by rw [zero_add]

-- 2ª demostración
example
  (h : a + b = a + c)
  : b = c :=
by
  have h1 : -a + (a + b) = -a + (a + c) :=
    congrArg (HAdd.hAdd (-a)) h
  clear h
  rw [← add_assoc] at h1
  rw [add_left_neg] at h1
  rw [zero_add] at h1
  rw [← add_assoc] at h1
  rw [add_left_neg] at h1
  rw [zero_add] at h1
  exact h1

-- 3ª demostración
example
  (h : a + b = a + c)
  : b = c :=
calc
  b = -a + (a + b) := by rw [neg_add_cancel_left a b]
  _ = -a + (a + c) := by rw [h]
  _ = c           := by rw [neg_add_cancel_left]

-- 4ª demostración
example
  (h : a + b = a + c)
  : b = c :=
by
  rw [← neg_add_cancel_left a b]
  rw [h]
  rw [neg_add_cancel_left]

-- 5ª demostración
example
  (h : a + b = a + c)
  : b = c :=
by
  rw [← neg_add_cancel_left a b, h, neg_add_cancel_left]

-- 6ª demostración
example

```

```

(h : a + b = a + c)
: b = c :=
add_left_cancel h

```

Se puede interactuar con las pruebas anteriores en [Lean 4 Web](#).

4.6. Si R es un anillo y $a, b, c \in R$ tales que $a+b=c+b$, entonces $a=c$

```

-- -----
-- Demostrar que si R es un anillo y a, b, c ∈ R tales que
--   a + b = c + b
-- entonces
--   a = c
-- -----

-- Demostraciones en lenguaje natural (LN)
-- =====

-- 1ª demostración en LN
-- =====

-- Por la siguiente cadena de igualdades
--   a = a + 0           [por suma con cero]
--   = a + (b + -b)      [por suma con opuesto]
--   = (a + b) + -b       [por asociativa]
--   = (c + b) + -b       [por hipótesis]
--   = c + (b + -b)       [por asociativa]
--   = c + 0             [por suma con opuesto]
--   = c                 [por suma con cero]

-- 2ª demostración en LN
-- =====

-- Por la siguiente cadena de igualdades
--   a = (a + b) + -b
--   = (c + b) + -b      [por hipótesis]
--   = c

-- Demostraciones con Lean4
-- =====

```

```

import Mathlib.Algebra.Ring.Defs
import Mathlib.Tactic

variable {R : Type _} [Ring R]
variable {a b c : R}

-- 1ª demostración con Lean4
-- =====

example
  (h : a + b = c + b)
  : a = c :=
calc
  a = a + 0           := by rw [add_zero]
  _ = a + (b + -b)    := by rw [add_right_neg]
  _ = (a + b) + -b    := by rw [add_assoc]
  _ = (c + b) + -b    := by rw [h]
  _ = c + (b + -b)    := by rw [← add_assoc]
  _ = c + 0           := by rw [← add_right_neg]
  _ = c               := by rw [add_zero]

-- 2ª demostración con Lean4
-- =====

example
  (h : a + b = c + b)
  : a = c :=
calc
  a = (a + b) + -b := (add_neg_cancel_right a b).symm
  _ = (c + b) + -b := by rw [h]
  _ = c           := add_neg_cancel_right c b

-- 3ª demostración con Lean4
-- =====

example
  (h : a + b = c + b)
  : a = c :=
by
  rw [← add_neg_cancel_right a b]
  rw [h]
  rw [add_neg_cancel_right]

-- 4ª demostración con Lean4
-- =====

```

```

example
  (h : a + b = c + b)
  : a = c :=
by
  rw [← add_neg_cancel_right a b, h, add_neg_cancel_right]

-- 5ª demostración con Lean4
-- =====

example
  (h : a + b = c + b)
  : a = c :=
add_right_cancel h

```

Se puede interactuar con las pruebas anteriores en [Lean 4 Web](#).

4.7. Si R es un anillo y $a \in R$, entonces $a \cdot 0 = 0$

```

-- -----
-- Demostrar que si  $R$  es un anillo y  $a \in R$ , entonces
--    $a \cdot 0 = 0$ 
-- -----

-- Demostración en lenguaje natural
-- =====

-- Basta aplicar la propiedad cancelativa a
--    $a \cdot 0 + a \cdot 0 = a \cdot 0 + 0$ 
-- que se demuestra mediante la siguiente cadena de igualdades
--    $a \cdot 0 + a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0)$    [por la distributiva]
--                    $= a \cdot 0$            [por suma con cero]
--                    $= a \cdot 0 + 0$        [por suma con cero]

-- Demostraciones con Lean4
-- =====

import Mathlib.Algebra.Ring.Defs
import Mathlib.Tactic

variable {R : Type _} [Ring R]
variable (a : R)

```

```

-- 1ª demostración
-- =====

example : a * 0 = 0 :=
by
  have h : a * 0 + a * 0 = a * 0 + 0 :=
    calc a * 0 + a * 0 = a * (0 + 0) := by rw [mul_add a 0 0]
          _ = a * 0 := by rw [add_zero 0]
          _ = a * 0 + 0 := by rw [add_zero (a * 0)]
  rw [add_left_cancel h]

-- 2ª demostración
-- =====

example : a * 0 = 0 :=
by
  have h : a * 0 + a * 0 = a * 0 + 0 :=
    calc a * 0 + a * 0 = a * (0 + 0) := by rw [← mul_add]
          _ = a * 0 := by rw [add_zero]
          _ = a * 0 + 0 := by rw [add_zero]
  rw [add_left_cancel h]

-- 3ª demostración
-- =====

example : a * 0 = 0 :=
by
  have h : a * 0 + a * 0 = a * 0 + 0 :=
    by rw [← mul_add, add_zero, add_zero]
  rw [add_left_cancel h]

-- 4ª demostración
-- =====

example : a * 0 = 0 :=
by
  have : a * 0 + a * 0 = a * 0 + 0 :=
    calc a * 0 + a * 0 = a * (0 + 0) := by simp
          _ = a * 0 := by simp
          _ = a * 0 + 0 := by simp
  simp

-- 5ª demostración
-- =====

```



```

example : a * 0 = 0 :=
  mul_zero a

-- 6ª demostración
-- =====

example : a * 0 = 0 :=
by simp

```

Se puede interactuar con las pruebas anteriores en [Lean 4 Web](#).

4.8. Si R es un anillo y $a \in R$, entonces $0.a = 0$

```

-----
-- Demostrar que si R es un anillo y a ∈ R, entonces
--   0 * a = 0
-- -----

-- Demostración en lenguaje natural
-- =====

-- Basta aplicar la propiedad cancelativa a
--   0.a + 0.a = 0.a + 0
-- que se demuestra mediante la siguiente cadena de igualdades
--   0.a + 0.a = (0 + 0).a   [por la distributiva]
--               = 0.a       [por suma con cero]
--               = 0.a + 0   [por suma con cero]

-- Demostraciones con Lean4
-- =====

import Mathlib.Algebra.Ring.Defs
import Mathlib.Tactic

variable {R : Type _} [Ring R]
variable (a : R)

-- 1ª demostración
example : 0 * a = 0 :=
by
  have h : 0 * a + 0 * a = 0 * a + 0 :=
    calc 0 * a + 0 * a = (0 + 0) * a := by rw [add_mul]
         _ = 0 * a      := by rw [add_zero]

```

```

      _ = 0 * a + 0 := by rw [add_zero]
    rw [add_left_cancel h]

-- 2ª demostración
example : 0 * a = 0 :=
by
  have h : 0 * a + 0 * a = 0 * a + 0 :=
    by rw [←add_mul, add_zero, add_zero]
  rw [add_left_cancel h]

-- 3ª demostración
example : 0 * a = 0 :=
by
  have : 0 * a + 0 * a = 0 * a + 0 :=
    calc 0 * a + 0 * a = (0 + 0) * a := by simp
          _ = 0 * a := by simp
          _ = 0 * a + 0 := by simp
  simp

-- 4ª demostración
example : 0 * a = 0 :=
by
  have : 0 * a + 0 * a = 0 * a + 0 := by simp
  simp

-- 5ª demostración
example : 0 * a = 0 :=
by simp

-- 6ª demostración
example : 0 * a = 0 :=
zero_mul a

```

Se puede interactuar con las pruebas anteriores en [Lean 4 Web](#).

Bibliografía

- [1] J. A. Alonso. [Lean para matemáticos](#) ¹, 2021.
- [2] J. A. Alonso. [Matemáticas en Lean](#) ², 2021.
- [3] J. A. Alonso. [DAO \(Demostración Asistida por Ordenador\) con Lean](#) ³, 2021.
- [4] J. A. Alonso. [Calculus \(Vol. 1: Demostraciones con Isabelle/HOL y Lean3\)](#) ⁴, 2021.
- [5] J. Avigad, L. de Moura, and S. Kong. [Theorem Proving in Lean4](#) ⁵, 2021.
- [6] J. Avigad, G. Ebner, and S. Ullrich. [The Lean4 Manual](#) ⁶, 2021.
- [7] J. Avigad, M. J. H. Heule, and W. Nawrocki. [Logic and mechanized reasoning](#) ⁷, 2023.
- [8] J. Avigad, R. Y. Lewis, and F. van Doorn. [Logic and proof](#) ⁸, 2021.
- [9] J. Avigad and P. Massot. [Mathematics in Lean](#) ⁹, 2023.
- [10] A. Baanen, A. Bentkamp, J. Blanchette, J. Hölzl, and J. Limperg. [The Hitchhiker's Guide to Logical Verification](#) ¹⁰, 2020.

¹https://github.com/jaalonso/Lean_para_matematicos

²https://github.com/jaalonso/Matematicas_en_Lean

³https://raw.githubusercontent.com/jaalonso/DAO_con_Lean/master/DAO_con_Lean.pdf

⁴<https://raw.githubusercontent.com/jaalonso/Calculus/master/Calculus.pdf>

⁵https://leanprover.github.io/theorem_proving_in_lean4/

⁶<https://leanprover.github.io/lean4/doc/>

⁷https://avigad.github.io/lamr/logic_and_mechanized_reasoning.pdf

⁸https://leanprover.github.io/logic_and_proof/logic_and_proof.pdf

⁹https://leanprover-community.github.io/mathematics_in_lean/

¹⁰https://raw.githubusercontent.com/blanchette/logical_verification_2020/master/hitchhikers_guide.pdf

- [11] M. Ballard. [Transition to advanced mathematics \(Thinking and communicating like a mathematician\)](#) ¹¹.
- [12] K. Buzzard. [Sets and logic \(in Lean\)](#) ¹².
- [13] K. Buzzard. [Functions and relations \(in Lean\)](#) ¹³.
- [14] K. Buzzard. [Course on formalising mathematics](#) ¹⁴, 2021.
- [15] K. Buzzard. [Course on formalising mathematics](#) ¹⁵, 2023.
- [16] K. Buzzard and M. Pedramfar. [The Natural Number Game, version 1.3.3](#) ¹⁶.
- [17] D. T. Christiansen. [Functional programming in Lean](#) ¹⁷, 2023.
- [18] M. Dvořák. [Lean 4 Cheatsheet](#) ¹⁸.
- [19] S. Hazratpour. [Introduction to proofs](#) ¹⁹, 2022.
- [20] S. Hazratpour. [Introduction to proofs with Lean proof assistant](#) ²⁰, 2022.
- [21] R. Lewis. [Formal proof and verification, 2022](#) ²¹, 2022.
- [22] R. Lewis. [Discrete structures and probability](#) ²², 2023.
- [23] C. Löb. [Exploring formalisation \(A primer in human-readable mathematics in Lean 3 with examples from simplicial topology\)](#) ²³, 2022.
- [24] H. Macbeth. [The mechanics of proof](#) ²⁴, 2023.
- [25] P. Massot. [Introduction aux mathématiques formalisées](#) ²⁵.

¹¹<https://300.f22.matthewrobertballard.com/>

¹²https://www.ma.imperial.ac.uk/~buzzard/M4000x_html/M40001/M40001_C1.html

¹³https://www.ma.imperial.ac.uk/~buzzard/M4000x_html/M40001/M40001_C2.html

¹⁴<https://github.com/ImperialCollegeLondon/formalising-mathematics>

¹⁵<https://github.com/ImperialCollegeLondon/formalising-mathematics-2023>

¹⁶https://www.ma.imperial.ac.uk/~buzzard/xena/natural_number_game/

¹⁷https://leanprover.github.io/functional_programming_in_lean/

¹⁸<https://raw.githubusercontent.com/madvorak/lean4-cheatsheet/main/lean-tactics.pdf>

¹⁹<https://introproofs.github.io/s22/>

²⁰<https://sinhp.github.io/teaching/2022-introduction-to-proofs-with-Lean>

²¹<https://github.com/BrownCS1951x/fpv2022>

²²<https://github.com/brown-cs22/CS22-Lean-2023>

²³<https://loeh.app.uni-regensburg.de/mapa/main.pdf>

²⁴<https://hrmacbeth.github.io/math2001/index.html>

²⁵<https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~pmassot/enseignement/math114/>

- [26] F. L. Roux. [Code Lean contenant les preuves d'un cours standard sur les espaces métriques](#) ²⁶, 2020.
- [27] W. Schulze. [Learning LeanProver](#) ²⁷.
- [28] Varios. [LFTCM 2020: Lean for the Curious Mathematician 2020](#) ²⁸.
- [29] D. J. Velleman. [How to prove it with Lean](#) ²⁹.

²⁶https://github.com/FredericLeRoux/LEAN_ESPACES_METRIQUES

²⁷https://youtube.com/playlist?list=PLYwF9EIrl42RFQgbmcR_LSCwRIx2WKbXs

²⁸<https://leanprover-community.github.io/lftcm2020/schedule.html>

²⁹<https://djvelleman.github.io/HTPIwL/>