

Exercitium (curso 2018–19)
Ejercicios de programación funcional con Haskell
(hasta el 18 de enero de 2019)

José A. Alonso Jiménez

Grupo de Lógica Computacional
Dpto. de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial
Universidad de Sevilla
Sevilla, 1 de febrero de 2019

Esta obra está bajo una licencia Reconocimiento–NoComercial–CompartirIgual 2.5 Spain de Creative Commons.

Se permite:

- copiar, distribuir y comunicar públicamente la obra
- hacer obras derivadas

Bajo las condiciones siguientes:

Reconocimiento. Debe reconocer los créditos de la obra de la manera especificada por el autor.



No comercial. No puede utilizar esta obra para fines comerciales.



Compartir bajo la misma licencia. Si altera o transforma esta obra, o genera una obra derivada, sólo puede distribuir la obra generada bajo una licencia idéntica a ésta.

- Al reutilizar o distribuir la obra, tiene que dejar bien claro los términos de la licencia de esta obra.
- alguna de estas condiciones puede no aplicarse si se obtiene el permiso del titular de los derechos de autor.

Esto es un resumen del texto legal (la licencia completa). Para ver una copia de esta licencia, visite <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.5/es/> o envíe una carta a Creative Commons, 559 Nathan Abbott Way, Stanford, California 94305, USA.

“Sorpresas tiene la vida,
Guiomar, del alma y del cuerpo;
que nadie guarde hasta el fin
el nombre que le pusieron;
nadie crea ser quien dicen
que es, ni que pueda serlo.”

De Antonio Machado

Para Guiomar

Índice general

1	Listas equidigitales	13
2	Distancia de Hamming	17
3	Último dígito no nulo del factorial	21
4	Diferencia simétrica	25
5	Números libres de cuadrados	27
6	Capicúas productos de dos números de dos dígitos	31
7	Números autodescriptivos	33
8	Número de parejas	35
9	Reconocimiento de particiones	39
10	Relación definida por una partición	43
11	Ceros finales del factorial	45
12	Números primos sumas de dos primos	49
13	Suma de inversos de potencias de cuatro	53
14	Elemento solitario	57
15	Números colinas	63
16	Raíz cúbica entera	67
17	Numeración de los árboles binarios completos	71

18 Posiciones en árboles binarios	73
19 Posiciones en árboles binarios completos	79
20 Elemento del árbol binario completo según su posición	85
21 Aproximación entre π y e	91
22 Menor contenedor de primos	93
23 Árbol de computación de Fibonacci	95
24 Entre dos conjuntos	101
25 Expresiones aritméticas generales	107
26 Superación de límites	109
27 Intercambio de la primera y última columna de una matriz	111
28 Números primos de Pierpont	113
29 Grado exponencial	115
30 Divisores propios maximales	119
31 Árbol de divisores	123
32 Divisores compuestos	127
33 Número de divisores compuestos	133
34 Tablas de operaciones binarias	137
35 Reconocimiento de conmutatividad	141
36 Árbol de subconjuntos	147
37 El teorema de Navidad de Fermat	151
38 El 2019 es apocalíptico	157
39 El 2019 es malvado	161
40 El 2019 es semiprimo	167

41 El 2019 es un número de la suerte	171
42 Cadena descendiente de subnúmeros	175
43 Mínimo producto escalar	179
44 Numeración de ternas de naturales	183
45 Subárboles monovalorados	189
46 Mayor prefijo con suma acotada	193
47 Ofertas 3 por 2	197
48 Representación de conjuntos mediante intervalos	201
49 Números altamente compuestos	203
50 Posiciones del 2019 en el número pi	209
51 Mínimo número de operaciones para transformar un número en otro	213
52 Intersección de listas infinitas crecientes	217
53 Soluciones de $x^2 = y^3 = k$	219
54 Sucesión triangular	223
55 Números primos en pi	227
56 Recorrido de árboles en espiral	231

Introducción

"The chief goal of my work as an educator and author is to help people learn to write beautiful programs."

(Donald Knuth en [Computer programming as an art](#))

Este libro es una recopilación de las soluciones de los ejercicios propuestos en el blog [Exercitium](#) ¹ durante el curso 2018-19.

El principal objetivo de Exercitium es servir de complemento a la asignatura de [Informática](#) ² de 1º del Grado en Matemáticas de la Universidad de Sevilla.

Con los problemas de Exercitium, a diferencia de los de las [relaciones](#) ³, se pretende practicar con los conocimientos adquiridos durante todo el curso, mientras que con las relaciones están orientadas a los nuevos conocimientos.

Habitualmente de cada ejercicio se muestra distintas soluciones y se compara sus eficiencias.

La dinámica del blog es la siguiente: cada día, de lunes a viernes, se propone un ejercicio para que los alumnos escriban distintas soluciones en los comentarios. Pasado 7 días de la propuesta de cada ejercicio, se cierra los comentarios y se publica una selección de sus soluciones.

Para conocer la cronología de los temas explicados se puede consultar el [diario de clase](#) ⁴.

En el libro se irán añadiendo semanalmente las soluciones de los ejercicios del curso.

¹<https://www.glc.us.es/~jalonso/exercitium>

²<https://www.cs.us.es/~jalonso/cursos/ilm-18>

³<https://www.cs.us.es/~jalonso/cursos/ilm-18/ejercicios/ejercicios-I1M-2018.pdf>

⁴<https://www.glc.us.es/~jalonso/vestigium/category/curso/ilm/ilm2018>

El código del libro se encuentra en [GitHub](#) ⁵

Cuaderno de bitácora

En esta sección se registran los cambios realizados en las sucesivas versiones del libro.

Versión del 16 de diciembre de 2018

Se han añadido los ejercicios resueltos de la primera semana de diciembre:

- Numeración de los árboles binarios completos
- Posiciones en árboles binarios
- Posiciones en árboles binarios completos
- Elemento del árbol binario completo según su posición
- Aproximación entre π y e

Versión del 22 de diciembre de 2018

Se han añadido los ejercicios resueltos de la primera semana de diciembre:

- Menor contenedor de primos
- Árbol de computación de Fibonacci
- Entre dos conjuntos
- Expresiones aritméticas generales
- Superación de límites

⁵<https://github.com/jaalonso/Exercitium2018>

Versión del 29 de diciembre de 2018

Se han añadido los ejercicios resueltos de la primera semana de diciembre:

- Intercambio de la primera y última columna de una matriz
- Números primos de Pierpont
- Grado exponencial
- Divisores propios maximales
- Árbol de divisores

Versión del 29 de diciembre de 2018

Se han añadido los ejercicios resueltos del 24 al 28 de diciembre:

- Divisores compuestos
- Número de divisores compuestos
- Tablas de operaciones binarias
- Reconocimiento de conmutatividad
- Árbol de subconjuntos

Versión del 12 de enero de 2019

Se han añadido los ejercicios resueltos del 31 de diciembre al 4 de enero:

- El teorema de Navidad de Fermat
- El 2019 es apocalíptico
- El 2019 es malvado
- El 2019 es semiprimo
- El 2019 es un número de la suerte

Versión del 19 de enero de 2019

Se han añadido los ejercicios resueltos hasta el 11 de enero:

- Cadena descendiente de subnúmeros
- Mínimo producto escalar
- Numeración de ternas de naturales
- Subárboles monovalorados
- Mayor prefijo con suma acotada

Versión del 26 de enero de 2019

Se han añadido los ejercicios resueltos hasta del 14 al 18 de enero:

- Ofertas 3 por 2
- Representación de conjuntos mediante intervalos
- Números altamente compuestos
- Posiciones del 2019 en el número π
- Mínimo número de operaciones para transformar un número en otro

Ejercicio 1

Listas equidigitales

*Se miente más de la cuenta
por falta de fantasía:
también la verdad se inventa.*

Antonio Machado

Enunciado

Una lista de números naturales es equidigital si todos sus elementos tienen el mismo número de dígitos.

Definir la función

```
equidigital :: [Int] -> Bool
```

tal que (equidigital xs) se verifica si xs es una lista equidigital. Por ejemplo,

```
equidigital [343,225,777,943] == True  
equidigital [343,225,777,94,3] == False
```

Soluciones

```
-- 1ª definición
-- =====

equidigital :: [Int] -> Bool
equidigital xs = todosIguales (numerosDeDigitos xs)

-- (numerosDeDigitos xs) es la lista de los números de dígitos de
-- los elementos de xs. Por ejemplo,
--     numerosDeDigitos [343,225,777,943] == [3,3,3,3]
--     numerosDeDigitos [343,225,777,94,3] == [3,3,3,2,1]
numerosDeDigitos :: [Int] -> [Int]
numerosDeDigitos xs = [numeroDeDigitos x | x <- xs]

-- (numeroDeDigitos x) es el número de dígitos de x. Por ejemplo,
--     numeroDeDigitos 475 == 3
numeroDeDigitos :: Int -> Int
numeroDeDigitos x = length (show x)

-- (todosIguales xs) se verifica si todos los elementos de xs son
-- iguales. Por ejemplo,
--     todosIguales [3,3,3,3] == True
--     todosIguales [3,3,3,2,1] == False
todosIguales :: Eq a => [a] -> Bool
todosIguales (x:y:zs) = x == y && todosIguales (y:zs)
todosIguales _        = True

-- 2ª definición
-- =====

equidigital2 :: [Int] -> Bool
equidigital2 [] = True
equidigital2 (x:xs) = and [numeroDeDigitos y == n | y <- xs]
    where n = numeroDeDigitos x

-- 3ª definición
-- =====

equidigital3 :: [Int] -> Bool
```

```
equidigital3 (x:y:zs) = numeroDeDigitos x == numeroDeDigitos y &&  
                      equidigital3 (y:zs)  
equidigital3 _       = True
```


Ejercicio 2

Distancia de Hamming

Enunciado

*En mi soledad
he visto cosas muy claras,
que no son verdad.*

Antonio Machado

La distancia de Hamming entre dos listas es el número de posiciones en que los correspondientes elementos son distintos. Por ejemplo, la distancia de Hamming entre romaz "loba.es" es 2 (porque hay 2 posiciones en las que los elementos correspondientes son distintos: la 1ª y la 3ª).

Definir la función

```
distancia :: Eq a => [a] -> [a] -> Int
```

tal que (distancia xs ys) es la distancia de Hamming entre xs e ys. Por ejemplo,

```
distancia "romano" "comino" == 2
distancia "romano" "camino" == 3
distancia "roma"    "comino" == 2
distancia "roma"    "camino" == 3
distancia "romano"  "ron"    == 1
distancia "romano"  "cama"   == 2
distancia "romano"  "rama"   == 1
```

Comprobar con QuickCheck si la distancia de Hamming tiene la siguiente propiedad: $\text{distancia}(xs,ys) = 0$ si, y sólo si, $xs = ys$ y, en el caso de que no se verifique, modificar ligeramente la propiedad para obtener una condición necesaria y suficiente de $\text{distancia}(xs,ys) = 0$.

Soluciones

```
import Test.QuickCheck
```

```
-- 1ª definición:
```

```
distancia :: Eq a => [a] -> [a] -> Int
distancia xs ys = length [(x,y) | (x,y) <- zip xs ys, x /= y]
```

```
-- 2ª definición:
```

```
distancia2 :: Eq a => [a] -> [a] -> Int
distancia2 [] _ = 0
distancia2 _ [] = 0
distancia2 (x:xs) (y:ys) | x /= y = 1 + distancia2 xs ys
                        | otherwise = distancia2 xs ys
```

```
-- La propiedad es
```

```
prop_distancial :: [Int] -> [Int] -> Bool
prop_distancial xs ys =
  (distancia xs ys == 0) == (xs == ys)
```

```
-- La comprobación es
```

```
-- ghci> quickCheck prop_distancial
-- *** Failed! Falsifiable (after 2 tests and 1 shrink):
-- []
-- [1]
--
```

```
-- En efecto,
```

```
-- ghci> distancia [] [1] == 0
-- True
-- ghci> [] == [1]
-- False
--
```

```
-- La primera modificación es restringir la propiedad a lista de igual
-- longitud:
```

```
prop_distancia2 :: [Int] -> [Int] -> Property
prop_distancia2 xs ys =
  length xs == length ys ==>
  (distancia xs ys == 0) == (xs == ys)

-- La comprobación es
--   ghci> quickCheck prop_distancia2
--   *** Gave up! Passed only 33 tests.

-- Nota. La propiedad se verifica, pero al ser la condición demasiado
-- restringida sólo 33 de los casos la cumple.

-- La segunda restricción es limitar las listas a la longitud de la más
-- corta:
prop_distancia3 :: [Int] -> [Int] -> Bool
prop_distancia3 xs ys =
  (distancia xs ys == 0) == (take n xs == take n ys)
  where n = min (length xs) (length ys)

-- La comprobación es
--   ghci> quickCheck prop_distancia3
--   +++ OK, passed 100 tests.
```


Ejercicio 3

Último dígito no nulo del factorial

Incierto es, lo porvenir. ¿Quién sabe lo que va a pasar? Pero incierto es también lo pretérito. ¿Quién sabe lo que ha pasado? De suerte que ni el porvenir está escrito en ninguna parte, ni el pasado tampoco.

Antonio Machado

Enunciado

El factorial de 7 es $7! = 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 = 5040$. Por tanto, el último dígito no nulo del factorial de 7 es 4.

Definir la función

```
ultimoNoNuloFactorial :: Integer -> Integer
```

tal que (ultimoNoNuloFactorial n) es el último dígito no nulo del factorial de n. Por ejemplo,

```
ultimoNoNuloFactorial 7  == 4
ultimoNoNuloFactorial 10 == 8
ultimoNoNuloFactorial 12 == 6
```

```
ultimoNoNuloFactorial 97 == 2
ultimoNoNuloFactorial 0  == 1
```

Comprobar con QuickCheck que si n es mayor que 4, entonces el último dígito no nulo del factorial de n es par.

Solución

```
import Test.QuickCheck

-- 1ª definición
-- =====

ultimoNoNuloFactorial :: Integer -> Integer
ultimoNoNuloFactorial n = ultimoNoNulo (factorial n)

-- (ultimoNoNulo n) es el último dígito no nulo de n. Por ejemplo,
--   ultimoNoNulo 5040 == 4
ultimoNoNulo :: Integer -> Integer
ultimoNoNulo n
  | m /= 0    = m
  | otherwise = ultimoNoNulo (n `div` 10)
  where m = n `rem` 10

-- (factorial n) es el factorial de n. Por ejemplo,
--   factorial 7 == 5040
factorial :: Integer -> Integer
factorial n = product [1..n]

-- 2ª definición
-- =====

ultimoNoNuloFactorial2 :: Integer -> Integer
ultimoNoNuloFactorial2 n = ultimoNoNulo2 (factorial n)

-- (ultimoNoNulo2 n) es el último dígito no nulo de n. Por ejemplo,
--   ultimoNoNulo 5040 == 4
ultimoNoNulo2 :: Integer -> Integer
```

```
ultimoNoNulo2 n = read [head (dropWhile (=='0') (reverse (show n)))]  
  
-- Comprobación  
-- =====  
  
-- La propiedad es  
prop_ultimoNoNuloFactorial :: Integer -> Property  
prop_ultimoNoNuloFactorial n =  
  n > 4 ==> even (ultimoNoNuloFactorial n)  
  
-- La comprobación es  
-- ghci> quickCheck prop_ultimoNoNuloFactorial  
-- +++ OK, passed 100 tests.
```


Ejercicio 4

Diferencia simétrica

*Ya es broma pesada:
todo para mí,
y yo para nada.*

Antonio Machado

Enunciado

La **diferencia simétrica** de dos conjuntos es el conjunto cuyos elementos son aquellos que pertenecen a alguno de los conjuntos iniciales, sin pertenecer a ambos a la vez. Por ejemplo, la diferencia simétrica de 2,5,3 y 4,2,3,7 es 5,4,7.

Definir la función

```
diferenciaSimetrica :: Ord a => [a] -> [a] -> [a]
```

tal que (diferenciaSimetrica xs ys) es la diferencia simétrica de xs e ys. Por ejemplo,

diferenciaSimetrica [2,5,3] [4,2,3,7]	==	[4,5,7]
diferenciaSimetrica [2,5,3] [5,2,3]	==	[]
diferenciaSimetrica [2,5,2] [4,2,3,7]	==	[3,4,5,7]
diferenciaSimetrica [2,5,2] [4,2,4,7]	==	[4,5,7]
diferenciaSimetrica [2,5,2,4] [4,2,4,7]	==	[5,7]

Soluciones

```
import Data.List
```

```
-- 1ª definición
```

```
diferenciaSimetrica :: Ord a => [a] -> [a] -> [a]
```

```
diferenciaSimetrica xs ys =
```

```
  sort (nub ([x | x <- xs, x 'notElem' ys] ++ [y | y <- ys, y 'notElem' xs]))
```

```
-- 2ª definición
```

```
diferenciaSimetrica2 :: Ord a => [a] -> [a] -> [a]
```

```
diferenciaSimetrica2 xs ys =
```

```
  sort (nub (union xs ys \setminus intersect xs ys))
```

```
-- 3ª definición
```

```
diferenciaSimetrica3 :: Ord a => [a] -> [a] -> [a]
```

```
diferenciaSimetrica3 xs ys =
```

```
  [x | x <- sort (nub (xs ++ ys))  
    , x 'notElem' xs || x 'notElem' ys]
```

Ejercicio 5

Números libres de cuadrados

Algunos sentimientos perduran a través de los siglos, pero no por eso han de ser eternos. ¿Cuántos siglos durará todavía el sentimiento de la patria? ¿Y el sentimiento de la paternidad.

Antonio Machado

Enunciado

Un número entero positivo es libre de cuadrados si no es divisible por el cuadrado de ningún entero mayor que 1. Por ejemplo, 70 es libre de cuadrado porque sólo es divisible por 1, 2, 5, 7 y 70; en cambio, 40 no es libre de cuadrados porque es divisible por 2^2 .

Definir la función

```
libreDeCuadrados :: Integer -> Bool
```

tal que (libreDeCuadrados x) se verifica si x es libre de cuadrados. Por ejemplo,

libreDeCuadrados 70	==	True
libreDeCuadrados 40	==	False
libreDeCuadrados 510510	==	True
libreDeCuadrados (((10 ¹⁰) ¹⁰) ¹⁰)	==	False

Soluciones

```
import Data.List (nub)
```

```
-- 1ª definición
-- =====
```

```
libreDeCuadrados :: Integer -> Bool
libreDeCuadrados x = x == product (divisoresPrimos x)
```

```
-- (divisoresPrimos x) es la lista de los divisores primos de x. Por
-- ejemplo,
```

```
--   divisoresPrimos 40 == [2,5]
```

```
--   divisoresPrimos 70 == [2,5,7]
```

```
divisoresPrimos :: Integer -> [Integer]
divisoresPrimos x = [n | n <- divisores x, primo n]
```

```
-- (divisores n) es la lista de los divisores del número n. Por ejemplo,
--   divisores 30 == [1,2,3,5,6,10,15,30]
```

```
divisores :: Integer -> [Integer]
divisores n = [x | x <- [1..n], n `mod` x == 0]
```

```
-- (primo n) se verifica si n es primo. Por ejemplo,
```

```
--   primo 30 == False
```

```
--   primo 31 == True
```

```
primo :: Integer -> Bool
primo n = divisores n == [1, n]
```

```
-- 2ª definición
-- =====
```

```
libreDeCuadrados2 :: Integer -> Bool
libreDeCuadrados2 n =
  null [x | x <- [2..n], rem n (x^2) == 0]
```

```
-- 3ª definición
-- =====
```

```
libreDeCuadrados3 :: Integer -> Bool
libreDeCuadrados3 n =
```

```

null [x | x <- [2..floor (sqrt (fromIntegral n))]
      , rem n (x^2) == 0]

-- 4ª definición
-- =====

libreDeCuadrados4 :: Integer -> Bool
libreDeCuadrados4 x =
  factorizacion x == nub (factorizacion x)

-- (factorizacion n) es la lista de factores primos de n. Por ejemplo,
--   factorizacion 180 == [2,2,3,3,5]
factorizacion :: Integer -> [Integer]
factorizacion n | n == 1    = []
                | otherwise = x : factorizacion (div n x)
  where x = menorFactor n

-- (menorFactor n) es el menor divisor de n. Por ejemplo,
--   menorFactor 15 == 3
menorFactor :: Integer -> Integer
menorFactor n = head [x | x <- [2..], rem n x == 0]

-- Comparación de eficiencia
-- =====

--   λ> libreDeCuadrados 510510
--   True
--   (0.76 secs, 89,522,360 bytes)
--   λ> libreDeCuadrados2 510510
--   True
--   (1.78 secs, 371,826,320 bytes)
--   λ> libreDeCuadrados3 510510
--   True
--   (0.01 secs, 0 bytes)
--   λ> libreDeCuadrados4 510510
--   True
--   (0.00 secs, 153,216 bytes)

```


Ejercicio 6

Capicúas productos de dos números de dos dígitos

Ayudadme a comprender lo que os digo, y os lo explicaré más despacio.

Antonio Machado

Enunciado

El número 9009 es capicúa y es producto de dos números de dos dígitos, pues $9009 = 91 \times 99$.

Definir la lista

```
capicuasP2N2D :: [Int]
```

cuyos elementos son los números capicúas que son producto de 2 números de dos dígitos. Por ejemplo,

```
take 5 capicuasP2N2D == [121,242,252,272,323]
length capicuasP2N2D == 74
drop 70 capicuasP2N2D == [8008,8118,8448,9009]
```

Soluciones

```
import Data.List (nub, sort)

capicuasP2N2D :: [Int]
capicuasP2N2D = [x | x <- productos, esCapicua x]

-- productos es la lista de números que son productos de 2 números de
-- dos dígitos.
productos :: [Int]
productos = sort (nub [x*y | x <- [10..99], y <- [x..99]])

-- (esCapicua x) se verifica si x es capicúa.
esCapicua :: Int -> Bool
esCapicua x = xs == reverse xs
  where xs = show x
```


Ejercicio 7

Números autodescriptivos

Hay que tener los ojos muy abiertos para ver las cosas como son; aún más abiertos para verlas otras de lo que son; más abiertos todavía para verlas mejores de lo que son.

Antonio Machado

Enunciado

Un número n es autodescriptivo cuando para cada posición k de n (empezando a contar las posiciones a partir de 0), el dígito en la posición k es igual al número de veces que ocurre k en n . Por ejemplo, 1210 es autodescriptivo porque tiene 1 dígito igual a "0", 2 dígitos iguales a "1", 1 dígito igual a "2" y ningún dígito igual a "3".

Definir la función

```
autodescriptivo :: Integer -> Bool
```

tal que (autodescriptivo n) se verifica si n es autodescriptivo. Por ejemplo,

```
λ> autodescriptivo 1210
True
λ> [x | x <- [1..100000], autodescriptivo x]
[1210,2020,21200]
```

```
λ> autodescriptivo 9210000001000
True
```

Nota: Se puede usar la función `genericLength`.

Soluciones

```
import Data.List (genericLength)

autodescriptivo :: Integer -> Bool
autodescriptivo n = autodescriptiva (digitos n)

digitos :: Integer -> [Integer]
digitos n = [read [d] | d <- show n]

autodescriptiva :: [Integer] -> Bool
autodescriptiva ns =
  and [x == ocurrencias k ns | (k,x) <- zip [0..] ns]

ocurrencias :: Integer -> [Integer] -> Integer
ocurrencias x ys = genericLength (filter (==x) ys)
```

Ejercicio 8

Número de parejas

*Toda la imagería
que no ha brotado del río,
barata bisutería.*

Antonio Machado

Enunciado

Definir la función

```
nParejas :: Ord a => [a] -> Int
```

tal que (nParejas xs) es el número de parejas de elementos iguales en xs. Por ejemplo,

nParejas [1,2,2,1,1,3,5,1,2]	==	3
nParejas [1,2,1,2,1,3,2]	==	2
nParejas [1..2*10 ⁶]	==	0
nParejas2 ([1..10 ⁶] ++ [1..10 ⁶])	==	1000000

En el primer ejemplos las parejas son (1,1), (1,1) y (2,2). En el segundo ejemplo, las parejas son (1,1) y (2,2).

Comprobar con QuickCheck que para toda lista de enteros xs, el número de parejas de xs es igual que el número de parejas de la inversa de xs.

Soluciones

```

import Test.QuickCheck
import Data.List ((\\), group, sort)

-- 1ª solución
nParejas :: Ord a => [a] -> Int
nParejas [] = 0
nParejas (x:xs) | x 'elem' xs = 1 + nParejas (xs \\ [x])
                | otherwise  = nParejas xs

-- 2ª solución
nParejas2 :: Ord a => [a] -> Int
nParejas2 xs =
  sum [length ys 'div' 2 | ys <- group (sort xs)]

-- 3ª solución
nParejas3 :: Ord a => [a] -> Int
nParejas3 = sum . map ('div' 2) . map length . group . sort

-- 4ª solución
nParejas4 :: Ord a => [a] -> Int
nParejas4 = sum . map (('div' 2) . length) . group . sort

-- Equivalencia
prop_equiv :: [Int] -> Bool
prop_equiv xs =
  nParejas xs == nParejas2 xs &&
  nParejas xs == nParejas3 xs &&
  nParejas xs == nParejas4 xs

-- Comprobación:
--   λ> quickCheck prop_equiv
--   +++ OK, passed 100 tests.

-- Comparación de eficiencia
--   λ> nParejas [1..20000]
--   0
--   (2.54 secs, 4,442,808 bytes)
--   λ> nParejas2 [1..20000]

```

```
--      0
--      (0.03 secs, 12,942,232 bytes)
--      λ> nParejas3 [1..20000]
--      0
--      (0.02 secs, 13,099,904 bytes)
--      λ> nParejas4 [1..20000]
--      0
--      (0.01 secs, 11,951,992 bytes)

-- Propiedad:
prop_nParejas :: [Int] -> Bool
prop_nParejas xs =
  nParejas xs == nParejas (reverse xs)

-- Comprobación
comprueba :: IO ()
comprueba = quickCheck prop_nParejas

-- Comprobación:
--      λ> comprueba
--      +++ OK, passed 100 tests.
```


Ejercicio 9

Reconocimiento de particiones

*Sentía los cuatro vientos,
en la encrucijada
de su pensamiento.*

Antonio Machado

Enunciado

Una **partición** de un conjunto es una división del mismo en subconjuntos disjuntos no vacíos.

Definir la función

```
esParticion :: Eq a => [[a]] -> Bool
```

tal que (esParticion xss) se verifica si xss es una partición; es decir sus elementos son listas no vacías disjuntas. Por ejemplo.

```
esParticion [[1,3],[2],[9,5,7]] == True
esParticion [[1,3],[2],[9,5,1]] == False
esParticion [[1,3],[],[9,5,7]] == False
esParticion [[2,3,2],[4]] == True
```

```
-- Comprobación
-- λ> quickCheck prop_equiv
-- +++ OK, passed 100 tests.

-- Comparación de eficiencia:
-- λ> esParticion [[x] | x <- [1..3000]]
-- True
-- (4.37 secs, 3,527,956,400 bytes)
-- λ> esParticion2 [[x] | x <- [1..3000]]
-- True
-- (1.26 secs, 1,045,792,552 bytes)
-- λ> esParticion3 [[x] | x <- [1..3000]]
-- True
-- (1.30 secs, 1,045,795,272 bytes)
-- λ> esParticion3 [[x] | x <- [1..3000]]
-- True
-- (1.30 secs, 1,045,795,272 bytes)
```


Ejercicio 10

Relación definida por una partición

No hay lío político que no sea un trueque, una confusión de máscaras, un mal ensayo de comedia, en que nadie sabe su papel.

Antonio Machado

Enunciado

Dos elementos están **relacionados por una partición** xss si pertenecen al mismo elemento de xss.

Definir la función

`relacionados :: Eq a => [[a]] -> a -> a -> Bool`

tal que (relacionados xss y z) se verifica si los elementos y y z están relacionados por la partición xss. Por ejemplo,

relacionados	[[1,3],[2],[9,5,7]]	7	9	==	True
relacionados	[[1,3],[2],[9,5,7]]	3	9	==	False
relacionados	[[1,3],[2],[9,5,7]]	4	9	==	False

Soluciones

```
-- 1ª definición
-- =====
```

```
relacionados :: Eq a => [[a]] -> a -> a -> Bool
relacionados [] _ _ = False
relacionados (xs:xss) y z
  | y 'elem' xs = z 'elem' xs
  | otherwise   = relacionados xss y z
```

```
-- 2ª definición
-- =====
```

```
relacionados2 :: Eq a => [[a]] -> a -> a -> Bool
relacionados2 xss y z =
  or [elem y xs && elem z xs | xs <- xss]
```

```
-- 3ª definición
-- =====
```

```
relacionados3 :: Eq a => [[a]] -> a -> a -> Bool
relacionados3 xss y z =
  or [[y,z] 'subconjunto' xs | xs <- xss]
```

```
-- (subconjunto xs ys) se verifica si xs es un subconjunto de ys; es
-- decir, si todos los elementos de xs pertenecen a ys. Por ejemplo,
--   subconjunto [3,2,3] [2,5,3,5] == True
--   subconjunto [3,2,3] [2,5,6,5] == False
```

```
subconjunto :: Eq a => [a] -> [a] -> Bool
subconjunto xs ys = and [elem x ys | x <- xs]
```

```
-- 4ª definición
-- =====
```

```
relacionados4 :: Eq a => [[a]] -> a -> a -> Bool
relacionados4 xss y z =
  any ([y,z] 'subconjunto') xss
```

Ejercicio 11

Ceros finales del factorial

El escepticismo que, lejos de ser, como muchos creen, un afán de negarlo todo es, por el contrario, el único medio de defender algunas cosas.

Antonio Machado

Enunciado

Definir la función

```
cerosDelFactorial :: Integer -> Integer
```

tal que (cerosDelFactorial n) es el número de ceros en que termina el factorial de n. Por ejemplo,

cerosDelFactorial 24	==	4
cerosDelFactorial 25	==	6
length (show (cerosDelFactorial (1234^5678)))	==	17552

Soluciones

```
import Data.List (genericLength)
```

```

-- 1ª definición
-- =====

cerosDelFactorial :: Integer -> Integer
cerosDelFactorial n = ceros (factorial n)

-- (factorial n) es el factorial n. Por ejemplo,
--   factorial 3 == 6
factorial :: Integer -> Integer
factorial n = product [1..n]

-- (ceros n) es el número de ceros en los que termina el número n. Por
-- ejemplo,
--   ceros 320000 == 4
ceros :: Integer -> Integer
ceros n | rem n 10 /= 0 = 0
        | otherwise   = 1 + ceros (div n 10)

-- 2ª definición
-- =====

cerosDelFactorial2 :: Integer -> Integer
cerosDelFactorial2 n = ceros2 (factorial n)

-- (ceros n) es el número de ceros en los que termina el número n. Por
-- ejemplo,
--   ceros 320000 == 4
ceros2 :: Integer -> Integer
ceros2 n = genericLength (takeWhile (=='0') (reverse (show n)))

-- 3ª definición
-- =====

cerosDelFactorial3 :: Integer -> Integer
cerosDelFactorial3 n
  | n < 5      = 0
  | otherwise = m + cerosDelFactorial3 m
  where m = n `div` 5

-- Comparación de la eficiencia

```

```
-- λ> cerosDelFactorial1 (3*10^4)
-- 7498
-- (3.96 secs, 1,252,876,376 bytes)
-- λ> cerosDelFactorial2 (3*10^4)
-- 7498
-- (3.07 secs, 887,706,864 bytes)
-- λ> cerosDelFactorial3 (3*10^4)
-- 7498
-- (0.03 secs, 9,198,896 bytes)
```


Ejercicio 12

Números primos sumas de dos primos

Sed incompresivos; yo os aconsejo la incomprensión, aunque sólo sea para destripar los chistes de los tontos.

Antonio Machado

Enunciado

Definir las funciones

```
esPrimoSumaDeDosPrimos :: Integer -> Bool
primosSumaDeDosPrimos  :: [Integer]
```

tales que

-
- (esPrimoSumaDeDosPrimos x) se verifica si x es un número primo que se puede escribir como la suma de dos números primos. Por ejemplo,

```
esPrimoSumaDeDosPrimos 19 == True
esPrimoSumaDeDosPrimos 20 == False
esPrimoSumaDeDosPrimos 23 == False
```

- `primosSumaDeDosPrimos` es la lista de los números primos que se pueden escribir como la suma de dos números primos. Por ejemplo,

```
λ> take 17 primosSumaDeDosPrimos
[5,7,13,19,31,43,61,73,103,109,139,151,181,193,199,229,241]
λ> primosSumaDeDosPrimos !! (10^5)
18409543
```

Soluciones

```
import Data.Numbers.Primes (isPrime, primes)
import Test.QuickCheck

-- 1ª solución
-- =====

esPrimoSumaDeDosPrimos :: Integer -> Bool
esPrimoSumaDeDosPrimos x =
    isPrime x && isPrime (x - 2)

primosSumaDeDosPrimos :: [Integer]
primosSumaDeDosPrimos =
    [x | x <- primes
      , isPrime (x - 2)]

-- 2ª solución
-- =====

primosSumaDeDosPrimos2 :: [Integer]
primosSumaDeDosPrimos2 =
    [y | (x,y) <- zip primes (tail primes)
      , y == x + 2]

esPrimoSumaDeDosPrimos2 :: Integer -> Bool
esPrimoSumaDeDosPrimos2 x =
    x == head (dropWhile (<x) primosSumaDeDosPrimos2)

-- Equivalencias
-- =====
```

```
-- Equivalencia de esPrimoSumaDeDosPrimos
prop_esPrimoSumaDeDosPrimos_equiv :: Integer -> Property
prop_esPrimoSumaDeDosPrimos_equiv x =
  x > 0 ==>
  esPrimoSumaDeDosPrimos x == esPrimoSumaDeDosPrimos2 x

-- La comprobación es
--   λ> quickCheck prop_esPrimoSumaDeDosPrimos_equiv
--   +++ OK, passed 100 tests.

-- Equivalencia de primosSumaDeDosPrimos
prop_primosSumaDeDosPrimos_equiv :: Int -> Property
prop_primosSumaDeDosPrimos_equiv n =
  n >= 0 ==>
  primosSumaDeDosPrimos !! n == primosSumaDeDosPrimos2 !! n

-- La comprobación es
--   λ> quickCheck prop_primosSumaDeDosPrimos_equiv
--   +++ OK, passed 100 tests.

-- Comparación de eficiencia
-- =====

--   λ> primosSumaDeDosPrimos !! (10^4)
--   1261081
--   (2.07 secs, 4,540,085,256 bytes)
--
-- Se recarga para evitar memorización
--   λ> primosSumaDeDosPrimos2 !! (10^4)
--   1261081
--   (0.49 secs, 910,718,408 bytes)
```


Ejercicio 13

Suma de inversos de potencias de cuatro

*Confiamos
en que no será verdad
nada de lo que pensamos.*

Antonio Machado

Enunciado

Esta semana se ha publicado en [Twitter](#) una demostración visual de que

$$1/4 + 1/4^2 + 1/4^3 + \dots = 1/3$$

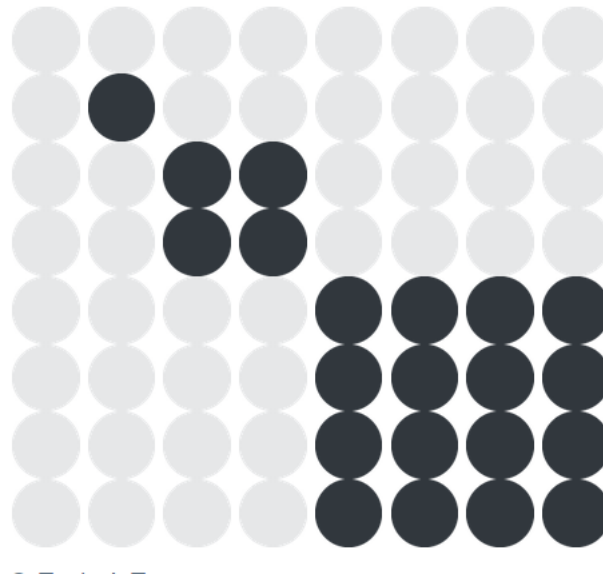
como se muestra en la siguiente imagen

Definir las funciones

```
sumaInversosPotenciasDeCuatro :: [Double]
aproximacion :: Double -> Int
```

tales que

- sumaInversosPotenciasDeCuatro es la lista de las suma de la serie de los inversos de las potencias de cuatro. Por ejemplo,



```
λ> take 6 sumaInversosPotenciasDeCuatro
[0.25,0.3125,0.328125,0.33203125,0.3330078125,0.333251953125]
```

- (aproximacion e) es el menor número de términos de la serie anterior que hay que sumar para que el valor absoluto de su diferencia con $1/3$ sea menor que e. Por ejemplo,

```
aproximacion 0.001 == 4
aproximacion 1e-3 == 4
aproximacion 1e-6 == 9
aproximacion 1e-20 == 26
sumaInversosPotenciasDeCuatro !! 26 == 0.3333333333333333
```

Soluciones

```
-- 1ª definición
sumaInversosPotenciasDeCuatro :: [Double]
sumaInversosPotenciasDeCuatro =
  [sum [1 / (4^k) | k <- [1..n]] | n <- [1..]]
```

```
-- 2ª definición
sumaInversosPotenciasDeCuatro2 :: [Double]
```

```
sumaInversosPotenciasDeCuatro2 =
  [1/4*((1/4)^n-1)/(1/4-1) | n <- [1..]]

-- 3ª definición
sumaInversosPotenciasDeCuatro3 :: [Double]
sumaInversosPotenciasDeCuatro3 =
  [(1 - 0.25^n)/3 | n <- [1..]]

-- 1ª solución
aproximacion :: Double -> Int
aproximacion e =
  length (takeWhile (≥e) es)
  where es = [abs (1/3 - x) | x <- sumaInversosPotenciasDeCuatro2]

-- 2ª solución
aproximacion2 :: Double -> Int
aproximacion2 e =
  head [n | (x,n) <- zip es [0..]
        , x < e]
  where es = [abs (1/3 - x) | x <- sumaInversosPotenciasDeCuatro2]
```


Ejercicio 14

Elemento solitario

*Sube y sube, pero ten
cuidado Nefelibata,
que entre las nubes también,
se puede meter la pata.*

Antonio Machado

Enunciado

Definir la función

```
solitario :: Ord a => [a] -> a
```

tal que (solitario xs) es el único elemento que ocurre una vez en la lista xs (se supone que la lista xs tiene al menos 3 elementos y todos son iguales menos uno que es el solitario). Por ejemplo,

```
solitario [2,2,7,2] == 7  
solitario [2,2,2,7] == 7  
solitario [7,2,2,2] == 7  
solitario (replicate (2*10^7) 1 ++ [2]) == 2
```

Soluciones

```

import Test.QuickCheck
import Data.List (group, nub, sort)

-- 1ª definición
-- =====

solitario :: Ord a => [a] -> a
solitario xs =
    head [x | x <- xs
            , cuenta xs x == 1]

cuenta :: Eq a => [a] -> a -> Int
cuenta xs x = length [y | y <- xs
                          , x == y]

-- 2ª definición
-- =====

solitario2 :: Ord a => [a] -> a
solitario2 xs = head (filter (\x -> cuenta2 xs x == 1) xs)

cuenta2 :: Eq a => [a] -> a -> Int
cuenta2 xs x = length (filter (==x) xs)

-- 3ª definición
-- =====

solitario3 :: Ord a => [a] -> a
solitario3 [x] = x
solitario3 (x1:x2:x3:xs)
    | x1 /= x2 && x2 == x3 = x1
    | x1 == x2 && x2 /= x3 = x3
    | otherwise           = solitario3 (x2:x3:xs)
solitario3 _ = error "Imposible"

-- 4ª definición
-- =====

```

```

solitario4 :: Ord a => [a] -> a
solitario4 xs
  | y1 == y2  = last ys
  | otherwise = y1
  where (y1:y2:ys) = sort xs

-- 5ª definición
-- =====

solitario5 :: Ord a => [a] -> a
solitario5 xs | null ys  = y
               | otherwise = z
  where [y:ys,z:_] = group (sort xs)

-- 6ª definición
-- =====

solitario6 :: Ord a => [a] -> a
solitario6 xs =
  head [x | x <- nub xs
          , cuenta xs x == 1]

-- 7ª definición
-- =====

solitario7 :: Ord a => [a] -> a
solitario7 (a:b:xs)
  | a == b      = solitario7 (b:xs)
  | elem a (b:xs) = b
  | elem b (a:xs) = a
solitario7 [_ ,b] = b
solitario7 _ = error "Imposible"

-- Equivalencia
-- =====

-- Propiedad de equivalencia
prop_solitario_equiv :: Property
prop_solitario_equiv =
  forAll listaSolitaria (\xs -> solitario xs == solitario2 xs &&

```

```

solitario xs == solitario3 xs &&
solitario xs == solitario4 xs &&
solitario xs == solitario5 xs &&
solitario xs == solitario6 xs &&
solitario xs == solitario7 xs)

-- Generador de listas con al menos 3 elementos y todos iguales menos
-- uno. Por ejemplo,
--   λ> sample listaSolitaria
--   [1,0,0,0,0]
--   [0,0,-1,0,0,0]
--   [4,1,1,1]
--   [6,6,4,6]
--   [8,8,8,8,8,-4,8,8,8,8,8,8]
--   ...
listaSolitaria :: Gen [Int]
listaSolitaria = do
  n <- arbitrary
  m <- arbitrary 'suchThat' (\a -> n + a > 2)
  x <- arbitrary
  y <- arbitrary 'suchThat' (\a -> a /= x)
  return (replicate n x ++ [y] ++ replicate m x)

-- Comprobación:
--   λ> quickCheck prop_solitario_equiv
--   +++ OK, passed 100 tests.

-- Comparación de eficiencia:
--   λ> solitario (replicate (5*10^3) 1 ++ [2])
--   2
--   (5.47 secs, 3,202,688,152 bytes)
--   λ> solitario2 (replicate (5*10^3) 1 ++ [2])
--   2
--   (2.08 secs, 1,401,603,960 bytes)
--   λ> solitario3 (replicate (5*10^3) 1 ++ [2])
--   2
--   (0.04 secs, 3,842,240 bytes)
--   λ> solitario4 (replicate (5*10^3) 1 ++ [2])
--   2
--   (0.02 secs, 1,566,472 bytes)

```

```
--      λ> solitario5 (replicate (5*10^3) 1 ++ [2])
--      2
--      (0.01 secs, 927,064 bytes)
--      λ> solitario6 (replicate (5*10^3) 1 ++ [2])
--      2
--      (0.01 secs, 1,604,176 bytes)
--      λ> solitario7 (replicate (5*10^3) 1 ++ [2])
--      2
--      (0.01 secs, 1,923,440 bytes)
--
--      λ> solitario3 (replicate (5*10^6) 1 ++ [2])
--      2
--      (4.62 secs, 3,720,123,560 bytes)
--      λ> solitario4 (replicate (5*10^6) 1 ++ [2])
--      2
--      (1.48 secs, 1,440,124,240 bytes)
--      λ> solitario5 (replicate (5*10^6) 1 ++ [2])
--      2
--      (1.40 secs, 1,440,125,936 bytes)
--      λ> solitario6 (replicate (5*10^6) 1 ++ [2])
--      2
--      (2.65 secs, 1,480,125,032 bytes)
--      λ> solitario7 (replicate (5*10^6) 1 ++ [2])
--      2
--      (2.21 secs, 1,800,126,224 bytes)
--
--      λ> solitario5 (2 : replicate (5*10^6) 1)
--      2
--      (1.38 secs, 1,520,127,864 bytes)
--      λ> solitario6 (2 : replicate (5*10^6) 1)
--      2
--      (1.18 secs, 560,127,664 bytes)
--      λ> solitario7 (2 : replicate (5*10^6) 1)
--      2
--      (0.29 secs, 280,126,888 bytes)
```


Ejercicio 15

Números colinas

*Si me tengo que morir
poco me importa aprender.
Y si no puedo saber,
poco me importa vivir.*

Antonio Machado

Enunciado

Se dice que un número natural n es una colina si su primer dígito es igual a su último dígito, los primeros dígitos son estrictamente creciente hasta llegar al máximo, el máximo se puede repetir y los dígitos desde el máximo al final son estrictamente decrecientes.

Definir la función

```
esColina :: Integer -> Bool
```

tal que (esColina n) se verifica si n es un número colina. Por ejemplo,

```
esColina 12377731 == True
esColina 1237731  == True
esColina 123731   == True
esColina 12377730 == False
esColina 12377730 == False
```

```

esColina 10377731 == False
esColina 12377701 == False
esColina 33333333 == True

```

Soluciones

```

import Data.Char (digitToInt)
import Test.QuickCheck

-- 1ª definición
-- =====

esColina :: Integer -> Bool
esColina n =
    head ds == last ds &&
    esCreciente xs &&
    esDecreciente ys
    where ds = digitos n
          m  = maximum ds
          xs = takeWhile (<m) ds
          ys = dropWhile (==m) (dropWhile (<m) ds)

-- (digitos n) es la lista de los dígitos de n. Por ejemplo,
--     digitos 425 == [4,2,5]
digitos :: Integer -> [Int]
digitos n = map digitToInt (show n)

-- (esCreciente xs) se verifica si la lista xs es estrictamente
-- creciente. Por ejemplo,
--     esCreciente [2,4,7] == True
--     esCreciente [2,2,7] == False
--     esCreciente [2,1,7] == False
esCreciente :: [Int] -> Bool
esCreciente xs = and [x < y | (x,y) <- zip xs (tail xs)]

-- (esDecreciente xs) se verifica si la lista xs es estrictamente
-- decreciente. Por ejemplo,
--     esDecreciente [7,4,2] == True

```



```

--     esDecreciente [7,2,2] == False
--     esDecreciente [7,1,2] == False
esDecreciente :: [Int] -> Bool
esDecreciente xs = and [x > y | (x,y) <- zip xs (tail xs)]

-- 2ª definición
-- =====

esColina2 :: Integer -> Bool
esColina2 n =
    head ds == last ds &&
    null (dropWhile (==(-1)) (dropWhile (==0) (dropWhile (==1) xs)))
    where ds = digitos n
          xs = [signum (y-x) | (x,y) <- zip ds (tail ds)]

-- Equivalencia
-- =====

-- La propiedad de equivalencia es
prop_esColina :: Integer -> Property
prop_esColina n =
    n >= 0 ==> esColina n == esColina2 n

-- La comprobación es
--     λ> quickCheck prop_esColina
--     +++ OK, passed 100 tests.

```


Ejercicio 16

Raíz cúbica entera

*Tras el vivir y el soñar,
está lo que más importa:
despertar.*

Antonio Machado

Enunciado

Un número x es un cubo si existe un y tal que $x = y^3$. Por ejemplo, 8 es un cubo porque $8 = 2^3$.

Definir la función

```
raizCubicaEntera :: Integer -> Maybe Integer.
```

tal que (raizCubicaEntera x n) es justo la raíz cúbica del número natural x, si x es un cubo y Nothing en caso contrario. Por ejemplo,

raizCubicaEntera 8	==	Just 2
raizCubicaEntera 9	==	Nothing
raizCubicaEntera 27	==	Just 3
raizCubicaEntera 64	==	Just 4
raizCubicaEntera (2^30)	==	Just 1024
raizCubicaEntera (10^9000)	==	Just (10^3000)
raizCubicaEntera (5 + 10^9000)	==	Nothing

Soluciones

```

import Data.Numbers.Primes (primeFactors)
import Data.List           (group)
import Test.QuickCheck

-- 1ª definición
-- =====

raizCubicaEntera :: Integer -> Maybe Integer
raizCubicaEntera x = aux 0
  where aux y | y^3 > x    = Nothing
             | y^3 == x   = Just y
             | otherwise  = aux (y+1)

-- 2ª definición
-- =====

raizCubicaEntera2 :: Integer -> Maybe Integer
raizCubicaEntera2 x
  | y^3 == x   = Just y
  | otherwise  = Nothing
  where (y:_) = dropWhile (\z -> z^3 < x) [0..]

-- 3ª definición
-- =====

raizCubicaEntera3 :: Integer -> Maybe Integer
raizCubicaEntera3 1 = Just 1
raizCubicaEntera3 x = aux (0,x)
  where aux (a,b) | d == x    = Just c
                 | c == a     = Nothing
                 | d < x      = aux (c,b)
                 | otherwise  = aux (a,c)
  where c = (a+b) `div` 2
        d = c^3

-- 4ª definición
-- =====

```

```

raizCubicaEntera4 :: Integer -> Maybe Integer
raizCubicaEntera4 x
  | y^3 == x  = Just y
  | otherwise = Nothing
  where y = floor ((fromIntegral x)**(1 / 3))

-- Nota. La definición anterior falla para números grandes. Por ejemplo,
--   λ> raizCubicaEntera4 (2^30)
--   Nothing
--   λ> raizCubicaEntera (2^30)
--   Just 1024

-- 5ª definición
-- =====

raizCubicaEntera5 :: Integer -> Maybe Integer
raizCubicaEntera5 x
  | all (==0) [length as 'mod' 3 | as <- ass] =
    Just (product [a^((1 + length as) 'div' 3) | (a:as) <- ass])
  | otherwise = Nothing
  where ass = group (primeFactors x)

-- Equivalencia
-- =====

-- La propiedad es
prop_raizCubicaEntera :: Integer -> Property
prop_raizCubicaEntera x =
  x >= 0 ==>
  and [raizCubicaEntera x == f x | f <- [ raizCubicaEntera2
                                           , raizCubicaEntera3]]

-- La comprobación es
--   λ> quickCheck prop_raizCubicaEntera
--   +++ OK, passed 100 tests.

-- Comparación de eficiencia
-- =====

--   λ> raizCubicaEntera (10^18)

```

```
-- Just 1000000
-- (1.80 secs, 1,496,137,192 bytes)
-- λ> raizCubicaEntera2 (10^18)
-- Just 1000000
-- (0.71 secs, 712,134,128 bytes)
-- λ> raizCubicaEntera3 (10^18)
-- Just 1000000
-- (0.01 secs, 196,424 bytes)
--
-- λ> raizCubicaEntera2 (5^27)
-- Just 1953125
-- (1.42 secs, 1,390,760,920 bytes)
-- λ> raizCubicaEntera3 (5^27)
-- Just 1953125
-- (0.00 secs, 195,888 bytes)
--
-- λ> raizCubicaEntera3 (10^9000) == Just (10^3000)
-- True
-- (2.05 secs, 420,941,368 bytes)
-- λ> raizCubicaEntera3 (5 + 10^9000) == Nothing
-- True
-- (2.08 secs, 420,957,576 bytes)
-- λ> raizCubicaEntera5 (5 + 10^9000) == Nothing
-- True
-- (0.03 secs, 141,248 bytes)
```

Ejercicio 17

Numeración de los árboles binarios completos

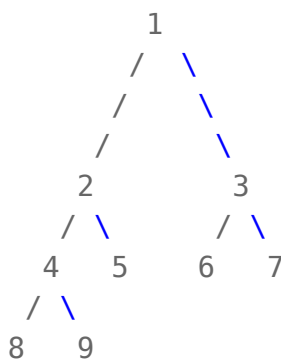
- Ya se oyen palabras viejas.
- Pues aguzad las orejas.

Antonio Machado

Enunciado

Un **árbol binario completo** es un árbol binario que tiene todos los nodos posibles hasta el penúltimo nivel, y donde los elementos del último nivel están colocados de izquierda a derecha sin dejar huecos entre ellos.

La numeración de los árboles binarios completos se realiza a partir de la raíz, recorriendo los niveles de izquierda a derecha. Por ejemplo,



Los árboles binarios se puede representar mediante el siguiente tipo

```
data Arbol = H
           | N Int Arbol Arbol
deriving (Show, Eq)
```

Definir la función

```
arbolBinarioCompleto :: Int -> Arbol
```

tal que (arbolBinarioCompleto n) es el árbol binario completo con n nodos. Por ejemplo,

```
λ> arbolBinarioCompleto 4
N 1 (N 2 (N 4 H H) H) (N 3 H H)
λ> pPrint (arbolBinarioCompleto 9)
N 1
  (N 2
    (N 4
      (N 8 H H)
      (N 9 H H))
    (N 5 H H))
  (N 3
    (N 6 H H)
    (N 7 H H))
```

Soluciones

```
data Arbol = H
           | N Int Arbol Arbol
deriving (Eq, Show)

arbolBinarioCompleto :: Int -> Arbol
arbolBinarioCompleto n = aux 1
  where aux i | i <= n    = N i (aux (2*i)) (aux (2*i+1))
            | otherwise = H
```


Ejercicio 18

Posiciones en árboles binarios

*Nunca traces tu frontera,
ni cuides de tu perfil;
todo eso es cosa de fuera.*

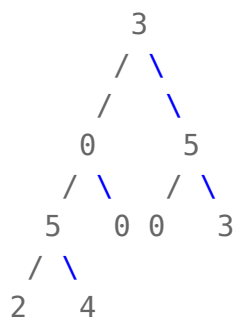
Antonio Machado

Enunciado

Los árboles binarios con datos en los nodos se definen por

```
data Arbol a = H
              | N a (Arbol a) (Arbol a)
deriving (Eq, Show)
```

Por ejemplo, el árbol



se representa por

```
ejArbol :: Arbol Int
ejArbol = N 3
          (N 0
            (N 5
              (N 2 H H)
              (N 4 H H))
            (N 0 H H))
          (N 5
            (N 0 H H)
            (N 3 H H))
```

Cada posición de un elemento de un árbol es una lista de movimientos hacia la izquierda o hacia la derecha. Por ejemplo, la posición de 4 en el árbol anterior es [I,I,D].

Los tipos de los movimientos y de las posiciones se definen por

```
data Movimiento = I | D deriving (Show, Eq)
type Posicion   = [Movimiento]
```

Definir la función

```
posiciones :: Eq b => b -> Arbol b -> [Posicion]
\end{solucion}
tal que (posiciones n a) es la lista de las posiciones del elemento n
en el árbol a. Por ejemplo,
\begin{descripcion}
posiciones 0 ejArbol == [[I],[I,D],[D,I]]
posiciones 2 ejArbol == [[I,I,I]]
posiciones 3 ejArbol == [[],[D,D]]
posiciones 4 ejArbol == [[I,I,D]]
posiciones 5 ejArbol == [[I,I],[D]]
posiciones 1 ejArbol == []
```

Soluciones

```
import Data.List (nub)
import Test.QuickCheck
```

```
data Arbol a = H
              | N a (Arbol a) (Arbol a)
  deriving (Eq, Show)
```

```
ejArbol :: Arbol Int
```

```
ejArbol = N 3
          (N 0
            (N 5
              (N 2 H H)
              (N 4 H H))
            (N 0 H H))
          (N 5
            (N 0 H H)
            (N 3 H H))
```

```
data Movimiento = I | D deriving (Show, Eq, Ord)
```

```
type Posicion = [Movimiento]
```

```
-- 1ª solución
```

```
-- =====
```

```
posiciones :: Eq b => b -> Arbol b -> [Posicion]
```

```
posiciones n a = aux n a [[]]
```

```
  where aux _ H _ = []
        aux n' (N x i d) cs | x == n' = cs ++
                                [I:xs | xs <- aux n' i cs] ++
                                [D:xs | xs <- aux n' d cs]
                                | otherwise = [I:xs | xs <- aux n' i cs] ++
                                                [D:xs | xs <- aux n' d cs]
```

```
-- 2ª solución
```

```
-- =====
```

```
posiciones2 :: Eq b => b -> Arbol b -> [Posicion]
```

```
posiciones2 n a = aux n a [[]]
```

```
  where aux _ H _ = []
        aux n' (N x i d) cs | x == n' = cs ++ ps
                                | otherwise = ps
```

```

        where ps = [I:xs | xs <- aux n' i cs] ++
                   [D:xs | xs <- aux n' d cs]

-- 3ª solución
-- =====

posiciones3 :: Eq b => b -> Arbol b -> [Posicion]
posiciones3 n a = aux n a [[]]
  where aux _ H _ = []
        aux n' (N x i d) cs | x == n' = cs ++ ps
                             | otherwise = ps
        where ps = map (I:) (aux n' i cs) ++
                  map (D:) (aux n' d cs)

-- Equivalencia
-- =====

-- Generador de árboles
instance Arbitrary a => Arbitrary (Arbol a) where
  arbitrary = sized genArbol

genArbol :: (Arbitrary a, Integral a1) => a1 -> Gen (Arbol a)
genArbol 0 = return H
genArbol n | n > 0 = N <$> arbitrary <*> subarbol <*> subarbol
  where subarbol = genArbol (div n 2)
genArbol _ = error "Imposible"

-- La propiedad es
prop_posiciones_equiv :: Arbol Int -> Bool
prop_posiciones_equiv a =
  and [posiciones n a == posiciones2 n a | n <- xs] &&
  and [posiciones n a == posiciones3 n a | n <- xs]
  where xs = take 3 (elementos a)

-- (elementos a) son los elementos del árbol a. Por ejemplo,
--   elementos ejArbol == [3,0,5,2,4]
elementos :: Eq b => Arbol b -> [b]
elementos H = []
elementos (N x i d) = nub (x : elementos i ++ elementos d)

```

```
-- La comprobación es
--   λ> quickCheck prop_posiciones_equiv
--   +++ OK, passed 100 tests.
```


Ejercicio 19

Posiciones en árboles binarios completos

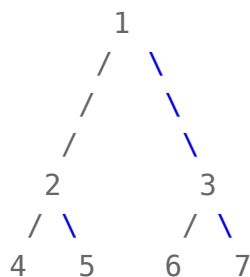
*El ojo que ves no es
ojo porque tú lo veas;
es ojo porque te ve.*

Antonio Machado

Enunciado

Un **árbol binario completo** es un árbol binario que tiene todos los nodos posibles hasta el penúltimo nivel, y donde los elementos del último nivel están colocados de izquierda a derecha sin dejar huecos entre ellos.

La numeración de los árboles binarios completos se realiza a partir de la raíz, recorriendo los niveles de izquierda a derecha. Por ejemplo,



```

      / \
     8   9

```

Los árboles binarios se puede representar mediante el siguiente tipo

```

data Arbol = H
           | N Integer Arbol Arbol
  deriving (Show, Eq)

```

Cada posición de un elemento de un árbol es una lista de movimientos hacia la izquierda o hacia la derecha. Por ejemplo, la posición de 9 en el árbol anterior es [I,I,D].

Los tipos de los movimientos y de las posiciones se definen por

```

data Movimiento = I | D deriving (Show, Eq)
type Posicion   = [Movimiento]

```

Definir la función

```

posicionDeElemento :: Integer -> Posicion

```

tal que (posicionDeElemento n) es la posición del elemento n en el árbol binario completo. Por ejemplo,

```

posicionDeElemento 6 == [D,I]
posicionDeElemento 7 == [D,D]
posicionDeElemento 9 == [I,I,D]
posicionDeElemento 1 == []

length (posicionDeElemento (10^50000)) == 166096

```

Soluciones

```

import Test.QuickCheck

data Arbol = H
           | N Integer Arbol Arbol

```



```

deriving (Eq, Show)

data Movimiento = I | D deriving (Show, Eq)

type Posicion = [Movimiento]

-- 1ª solución
-- =====

posicionDeElemento :: Integer -> Posicion
posicionDeElemento n =
    head (posiciones n (arbolBinarioCompleto n))

-- (arbolBinarioCompleto n) es el árbol binario completo con n
-- nodos. Por ejemplo,
--   λ> arbolBinarioCompleto 4
--   N 1 (N 2 (N 4 H H) H) (N 3 H H)
--   λ> pPrint (arbolBinarioCompleto 9)
--   N 1
--     (N 2
--       (N 4
--         (N 8 H H)
--         (N 9 H H))
--       (N 5 H H))
--     (N 3
--       (N 6 H H)
--       (N 7 H H))
arbolBinarioCompleto :: Integer -> Arbol
arbolBinarioCompleto n = aux 1
  where aux i | i <= n    = N i (aux (2*i)) (aux (2*i+1))
            | otherwise = H

-- (posiciones n a) es la lista de las posiciones del elemento n
-- en el árbol a. Por ejemplo,
--   posiciones 9 (arbolBinarioCompleto 9) == [[I,I,D]]
posiciones :: Integer -> Arbol -> [Posicion]
posiciones n a = aux n a [[]]
  where aux _ H _ = []
        aux n' (N x i d) cs | x == n' = cs ++ ps
                           | otherwise = ps

```

```

        where ps = map (I::) (aux n' i cs) ++
                  map (D::) (aux n' d cs)

-- 2ª solución
-- =====

posicionDeElemento2 :: Integer -> Posicion
posicionDeElemento2 1 = []
posicionDeElemento2 n
  | even n    = posicionDeElemento2 (n `div` 2) ++ [I]
  | otherwise = posicionDeElemento2 (n `div` 2) ++ [D]

-- 3ª solución
-- =====

posicionDeElemento3 :: Integer -> Posicion
posicionDeElemento3 = reverse . aux
  where aux 1 = []
        aux n | even n    = I : aux (n `div` 2)
              | otherwise = D : aux (n `div` 2)

-- 4ª solución
-- =====

posicionDeElemento4 :: Integer -> Posicion
posicionDeElemento4 n =
  [f x | x <- tail (reverse (binario n))]
  where f 0 = I
        f 1 = D
        f _ = error "Imposible"

-- (binario n) es la lista de los dígitos de la representación binaria
-- de n. Por ejemplo,
--   binario 11 == [1,1,0,1]
binario :: Integer -> [Integer]
binario n
  | n < 2    = [n]
  | otherwise = n `mod` 2 : binario (n `div` 2)

-- Equivalencia

```

```

-- =====

-- La propiedad es
prop_posicionDeElemento_equiv :: Positive Integer -> Bool
prop_posicionDeElemento_equiv (Positive n) =
  posicionDeElemento n == posicionDeElemento2 n &&
  posicionDeElemento n == posicionDeElemento3 n &&
  posicionDeElemento n == posicionDeElemento4 n

-- La comprobación es
--   λ> quickCheck prop_posicionDeElemento_equiv
--   +++ OK, passed 100 tests.

-- Comparación de eficiencia
-- =====

--   λ> posicionDeElemento (10^7)
--   [I,I,D,D,I,I,I,D,I,I,D,I,D,D,I,D,I,I,I,I,I,I,I]
--   (5.72 secs, 3,274,535,328 bytes)
--   λ> posicionDeElemento2 (10^7)
--   [I,I,D,D,I,I,I,D,I,I,D,I,D,D,I,D,I,I,I,I,I,I,I]
--   (0.01 secs, 189,560 bytes)
--   λ> posicionDeElemento3 (10^7)
--   [I,I,D,D,I,I,I,D,I,I,D,I,D,D,I,D,I,I,I,I,I,I,I]
--   (0.01 secs, 180,728 bytes)
--   λ> posicionDeElemento4 (10^7)
--   [I,I,D,D,I,I,I,D,I,I,D,I,D,D,I,D,I,I,I,I,I,I,I]
--   (0.01 secs, 184,224 bytes)
--
--   λ> length (posicionDeElemento2 (10^4000))
--   13287
--   (2.80 secs, 7,672,011,280 bytes)
--   λ> length (posicionDeElemento3 (10^4000))
--   13287
--   (0.03 secs, 19,828,744 bytes)
--   λ> length (posicionDeElemento4 (10^4000))
--   13287
--   (0.03 secs, 18,231,536 bytes)
--
--   λ> length (posicionDeElemento3 (10^50000))

```

```
-- 166096
-- (1.34 secs, 1,832,738,136 bytes)
-- λ> length (posicionDeElemento4 (10^50000))
-- 166096
-- (1.70 secs, 1,812,806,080 bytes)
```

Ejercicio 20

Elemento del árbol binario completo según su posición

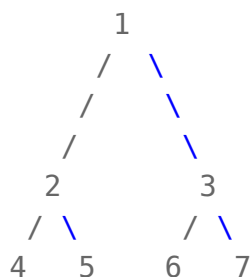
*Las más hondas palabras
del sabio nos enseñan
lo que el silbar del viento cuando sopla
o el sonar de las aguas cuando ruedan.*

Antonio Machado

Enunciado

Un **árbol binario completo** es un árbol binario que tiene todos los nodos posibles hasta el penúltimo nivel, y donde los elementos del último nivel están colocados de izquierda a derecha sin dejar huecos entre ellos.

La numeración de los árboles binarios completos se realiza a partir de la raíz, recorriendo los niveles de izquierda a derecha. Por ejemplo,



```

      / \
     8   9
  
```

Los árboles binarios se puede representar mediante el siguiente tipo

```

data Arbol = H
           | N Integer Arbol Arbol
  deriving (Show, Eq)
  
```

Cada posición de un elemento de un árbol es una lista de movimientos hacia la izquierda o hacia la derecha. Por ejemplo, la posición de 9 en el árbol anterior es [I,I,D].

Los tipos de los movimientos y de las posiciones se definen por

```

data Movimiento = I | D deriving (Show, Eq)
type Posicion   = [Movimiento]
  
```

Definir la función

```

elementoEnPosicion :: Posicion -> Integer
  
```

tal que (elementoEnPosicion ms) es el elemento en la posición ms. Por ejemplo,

```

elementoEnPosicion [D,I]    == 6
elementoEnPosicion [D,D]    == 7
elementoEnPosicion [I,I,D]  == 9
elementoEnPosicion []       == 1
  
```

Soluciones

```

import Test.QuickCheck
  
```

```

data Arbol = H
           | N Integer Arbol Arbol
  deriving (Eq, Show)
  
```

```
data Movimiento = I | D deriving (Show, Eq)
```

```
type Posicion = [Movimiento]
```

```
-- 1ª solución
```

```
-- =====
```

```
elementoEnPosicion :: Posicion -> Integer
```

```
elementoEnPosicion ms =
```

```
    aux ms (arbolBinarioCompleto (2^(1 + length ms)))
```

```
    where aux []      (N x _ _) = x
```

```
          aux (I:ms') (N _ i _) = aux ms' i
```

```
          aux (D:ms') (N _ _ d) = aux ms' d
```

```
          aux _ _ _ = error "Imposible"
```

```
-- (arbolBinarioCompleto n) es el árbol binario completo con n
```

```
-- nodos. Por ejemplo,
```

```
-- λ> arbolBinarioCompleto 4
```

```
-- N 1 (N 2 (N 4 H H) H) (N 3 H H)
```

```
-- λ> pPrint (arbolBinarioCompleto 9)
```

```
-- N 1
```

```
--   (N 2
```

```
--     (N 4
```

```
--       (N 8 H H)
```

```
--       (N 9 H H))
```

```
--     (N 5 H H))
```

```
--   (N 3
```

```
--     (N 6 H H)
```

```
--     (N 7 H H))
```

```
arbolBinarioCompleto :: Integer -> Arbol
```

```
arbolBinarioCompleto n = aux 1
```

```
    where aux i | i <= n = N i (aux (2*i)) (aux (2*i+1))
```

```
              | otherwise = H
```

```
-- 2ª solución
```

```
-- =====
```

```
elementoEnPosicion2 :: Posicion -> Integer
```

```
elementoEnPosicion2 = aux . reverse
```

```
    where aux [] = 1
```

```

    aux (I:ms) = 2 * aux ms
    aux (D:ms) = 2 * aux ms + 1

-- Equivalencia
-- =====

-- La propiedad es
prop_elementoEnPosicion_equiv :: Positive Integer -> Bool
prop_elementoEnPosicion_equiv (Positive n) =
    elementoEnPosicion ps == n &&
    elementoEnPosicion2 ps == n
    where ps = posicionDeElemento n

-- (posicionDeElemento n) es la posición del elemento n en el
-- árbol binario completo. Por ejemplo,
--     posicionDeElemento 6 == [D,I]
--     posicionDeElemento 7 == [D,D]
--     posicionDeElemento 9 == [I,I,D]
--     posicionDeElemento 1 == []
posicionDeElemento :: Integer -> Posicion
posicionDeElemento n =
    [f x | x <- tail (reverse (binario n))]
    where f 0 = I
          f 1 = D
          f _ = error "Imposible"

-- (binario n) es la lista de los dígitos de la representación binaria
-- de n. Por ejemplo,
--     binario 11 == [1,1,0,1]
binario :: Integer -> [Integer]
binario n
    | n < 2      = [n]
    | otherwise = n `mod` 2 : binario (n `div` 2)

-- La comprobación es
--     λ> quickCheck prop_elementoEnPosicion_equiv
--     +++ OK, passed 100 tests.

-- Comparación de eficiencia
-- =====

```



```
-- λ> length (show (elementoEnPosicion (replicate (3*10^5) D)))  
-- 90310  
-- (1.96 secs, 11,518,771,016 bytes)  
-- λ> length (show (elementoEnPosicion2 (replicate (3*10^5) D)))  
-- 90310  
-- (14.32 secs, 11,508,181,176 bytes)
```


Ejercicio 21

Aproximación entre pi y e

“Sólo sé que no se nada” contenía la jactancia de un excesivo saber, puesto que olvidó añadir: y aun de esto mismo no estoy completamente seguro.

Antonio Machado

Enunciado

El día 11 de noviembre, se publicó en la cuenta de Twitter de [Fermat's Library](#) la siguiente curiosa identidad que relaciona los números e y pi:

$$\frac{1}{\pi^2 + 1} + \frac{1}{4\pi^2 + 1} + \frac{1}{9\pi^2 + 1} + \frac{1}{16\pi^2 + 1} + \dots = \frac{1}{e^2 - 1}$$

Definir las siguientes funciones:

```
sumaTerminos :: Int -> Double
aproximacion :: Double -> Int
```

tales que

- (sumaTerminos n) es la suma de los primeros n términos de la serie

$$\frac{1}{\pi^2 + 1} + \frac{1}{4\pi^2 + 1} + \frac{1}{9\pi^2 + 1} + \frac{1}{16\pi^2 + 1} + \dots = \frac{1}{e^2 - 1}$$

Por ejemplo,

sumaTerminos	10	==	0.14687821811081034
sumaTerminos	100	==	0.15550948345688423
sumaTerminos	1000	==	0.15641637221314514
sumaTerminos	10000	==	0.15650751113789382

- (aproximación x) es el menor número de términos que hay que sumar de la serie anterior para que se diferencie (en valor absoluto) de $\frac{1}{e^2-1}$ menos que x . Por ejemplo,

aproximacion	0.1	==	1
aproximacion	0.01	==	10
aproximacion	0.001	==	101
aproximacion	0.0001	==	1013

Soluciones

-- 1ª definición de sumaTerminos

sumaTerminos :: Int -> Double

sumaTerminos n =

sum [1 / ((x ^ 2) * (pi ^ 2)) + 1 | x <- [1 .. fromIntegral n]]

-- 2ª definición de sumaTerminos

sumaTerminos2 :: Int -> Double

sumaTerminos2 0 = 0

sumaTerminos2 n = 1 / (m^2 * pi^2 + 1) + sumaTerminos2 (n-1)

where m = fromIntegral n

-- Definición de aproximacion

aproximacion :: Double -> Int

aproximacion x =

head [n | n <- [0..]

, abs (sumaTerminos n - 1 / (e^2 - 1)) < x]

where e = exp 1

Ejercicio 22

Menor contenedor de primos

*¡Ya hay hombres activos!
Soñaba la charca
con sus mosquitos.*

Antonio Machado

Enunciado

El n-ésimo menor contenedor de primos es el menor número que contiene como subcadenas los primeros n primos. Por ejemplo, el 6º menor contenedor de primos es 113257 ya que es el menor que contiene como subcadenas los 6 primeros primos (2, 3, 5, 7, 11 y 13).

Definir la función

```
menorContenedor :: Int -> Int
```

tal que (menorContenedor n) es el n-ésimo menor contenedor de primos. Por ejemplo,

menorContenedor 1	==	2
menorContenedor 2	==	23
menorContenedor 3	==	235
menorContenedor 4	==	2357
menorContenedor 5	==	112357
menorContenedor 6	==	113257

Soluciones

```
import Data.List           (isInfixOf)
import Data.Numbers.Primes (primes)

-- 1ª solución
-- =====

menorContenedor :: Int -> Int
menorContenedor n =
  head [x | x <- [2..]
        , and [contenido y x | y <- take n primes]]

contenido :: Int -> Int -> Bool
contenido x y =
  show x 'isInfixOf' show y

-- 2ª solución
-- =====

menorContenedor2 :: Int -> Int
menorContenedor2 n =
  head [x | x <- [2..]
        , all ('contenido' x) (take n primes)]
```

Ejercicio 23

Árbol de computación de Fibonacci

Toda visión requiere distancia.

Antonio Machado

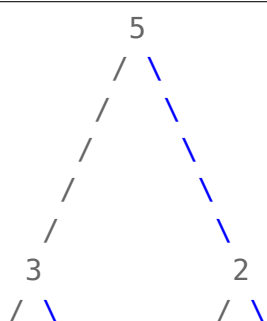
Enunciado

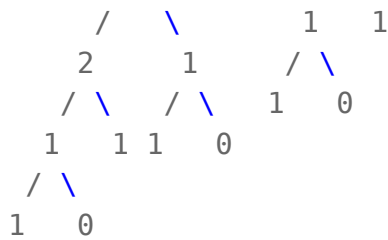
La sucesión de Fibonacci es

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, ...

cuyos dos primeros términos son 0 y 1 y los restantes se obtienen sumando los dos anteriores.

El árbol de computación de su 5º término es





que, usando los árboles definidos por

```
data Arbol = H Int
           | N Int Arbol Arbol
  deriving (Eq, Show)
```

se puede representar por

```
N 5
  (N 3
    (N 2
      (N 1 (H 1) (H 0))
      (H 1))
    (N 1 (H 1) (H 0)))
  (N 2
    (N 1 (H 1) (H 0))
    (H 1))
```

Definir las funciones

```
arbolFib      :: Int -> Arbol
nElementosArbolFib :: Int -> Int
```

tales que

- (arbolFib n) es el árbol de computación del n-ésimo término de la sucesión de Fibonacci. Por ejemplo,

```
λ> arbolFib 5
N 5
  (N 3
    (N 2
      (N 1 (H 1) (H 0))
```



```

      (H 1))
    (N 1 (H 1) (H 0)))
  (N 2
    (N 1 (H 1) (H 0))
    (H 1))
λ> arbolFib 6
N 8
  (N 5
    (N 3
      (N 2
        (N 1 (H 1) (H 0))
        (H 1))
      (N 1 (H 1) (H 0)))
    (N 2
      (N 1 (H 1) (H 0))
      (H 1)))
  (N 3
    (N 2
      (N 1 (H 1) (H 0)) (H 1))
    (N 1 (H 1) (H 0)))

```

- (nElementosArbolFib n) es el número de elementos en el árbol de computación del n-ésimo término de la sucesión de Fibonacci. Por ejemplo,

```

nElementosArbolFib 5 == 15
nElementosArbolFib 6 == 25
nElementosArbolFib 30 == 2692537

```

Soluciones

```

data Arbol = H Int
           | N Int Arbol Arbol
  deriving (Eq, Show)

```

```

-- 1ª definición
-- =====

```

```

arbolFib :: Int -> Arbol
arbolFib 0 = H 0

```

```

arbolFib 1 = H 1
arbolFib n = N (fib n) (arbolFib (n-1)) (arbolFib (n-2))

-- (fib n) es el n-ésimo elemento de la sucesión de Fibonacci. Por
-- ejemplo,
--     fib 5 == 5
--     fib 6 == 8
fib :: Int -> Int
fib 0 = 0
fib 1 = 1
fib n = fib (n-1) + fib (n-2)

-- 2ª definición
-- =====

arbolFib2 :: Int -> Arbol
arbolFib2 0 = H 0
arbolFib2 1 = H 1
arbolFib2 2 = N 1 (H 1) (H 0)
arbolFib2 3 = N 2 (N 1 (H 1) (H 0)) (H 1)
arbolFib2 n = N (a1 + a2) (N a1 i1 d1) (N a2 i2 d2)
    where (N a1 i1 d1) = arbolFib2 (n-1)
          (N a2 i2 d2) = arbolFib2 (n-2)

-- 3ª definición
-- =====

arbolFib3 :: Int -> Arbol
arbolFib3 0 = H 0
arbolFib3 1 = H 1
arbolFib3 2 = N 1 (H 1) (H 0)
arbolFib3 3 = N 2 (N 1 (H 1) (H 0)) (H 1)
arbolFib3 n = N (a + b) i d
    where i@(N a _ _) = arbolFib3 (n-1)
          d@(N b _ _) = arbolFib3 (n-2)

-- 1ª definición de nElementosArbolFib
-- =====

nElementosArbolFib :: Int -> Int

```

```
nElementosArbolFib = length . elementos . arbolFib3

-- (elementos a) es la lista de elementos del árbol a. Por ejemplo,
--   λ> elementos (arbolFib 5)
--   [5,3,2,1,1,0,1,1,1,0,2,1,1,0,1]
--   λ> elementos (arbolFib 6)
--   [8,5,3,2,1,1,0,1,1,1,0,2,1,1,0,1,3,2,1,1,0,1,1,1,0]
elementos :: Arbol -> [Int]
elementos (H x)      = [x]
elementos (N x i d) = x : elementos i ++ elementos d

-- 2ª definición de nElementosArbolFib
-- =====

nElementosArbolFib2 :: Int -> Int
nElementosArbolFib2 0 = 1
nElementosArbolFib2 1 = 1
nElementosArbolFib2 n = 1 + nElementosArbolFib2 (n-1)
                      + nElementosArbolFib2 (n-2)
```


Ejercicio 24

Entre dos conjuntos

Las razones no se transmiten, se engendran, por cooperación, en el diálogo.

Antonio Machado

Enunciado

Se dice que un x número se encuentra entre dos conjuntos xs e ys si x es divisible por todos los elementos de xs y todos los elementos de ys son divisibles por x . Por ejemplo, 12 se encuentra entre los conjuntos 2, 6 y 24, 36.

Definir la función

```
entreDosConjuntos :: [Int] -> [Int] -> [Int]
```

tal que `(entreDosConjuntos xs ys)` es la lista de elementos entre xs e ys (se supone que xs e ys son listas no vacías de números enteros positivos). Por ejemplo,

```
entreDosConjuntos [2,6] [24,36] == [6,12]
entreDosConjuntos [2,4] [32,16,96] == [4,8,16]
```

Otros ejemplos

```
λ> (xs,a) = ([1..15],product xs)
λ> length (entreDosConjuntos xs [a,2*a..10*a])
270
λ> (xs,a) = ([1..16],product xs)
λ> length (entreDosConjuntos xs [a,2*a..10*a])
360
```

Soluciones

```
import Test.QuickCheck
```

```
-- 1ª solución
```

```
-- =====
```

```
entreDosConjuntos :: [Int] -> [Int] -> [Int]
entreDosConjuntos xs ys =
  [z | z <- [a..b]
    , and [z `mod` x == 0 | x <- xs]
    , and [y `mod` z == 0 | y <- ys]]
  where a = maximum xs
        b = minimum ys
```

```
-- 2ª solución
```

```
-- =====
```

```
entreDosConjuntos2 :: [Int] -> [Int] -> [Int]
entreDosConjuntos2 xs ys =
  [z | z <- [a..b]
    , all ('divideA' z) xs
    , all (z `divideA`) ys]
  where a = mcmL xs
        b = mcdL ys
```

```
-- mcmL [2,3,18] == 18
```

```
-- mcmL [2,3,15] == 30
```

```
mcdL :: [Int] -> Int
```

```
mcdL [x] = x
```

```

mcdL (x:xs) = gcd x (mcdL xs)

--      mcmL [12,30,18] == 6
--      mcmL [12,30,14] == 2
mcmL :: [Int] -> Int
mcmL [x]      = x
mcmL (x:xs) = lcm x (mcmL xs)

divideA :: Int -> Int -> Bool
divideA x y = y `mod` x == 0

-- 3ª solución
-- =====

entreDosConjuntos3 :: [Int] -> [Int] -> [Int]
entreDosConjuntos3 xs ys =
  [z | z <- [a..b]
    , all ('divideA' z) xs
    , all (z 'divideA') ys]
  where a = mcmL2 xs
        b = mcdL2 ys

-- Definición equivalente
mcdL2 :: [Int] -> Int
mcdL2 = foldl1 gcd

-- Definición equivalente
mcmL2 :: [Int] -> Int
mcmL2 = foldl1 lcm

-- 4ª solución
-- =====

entreDosConjuntos4 :: [Int] -> [Int] -> [Int]
entreDosConjuntos4 xs ys =
  [z | z <- [a,a+a..b]
    , z 'divideA' b]
  where a = mcmL2 xs
        b = mcdL2 ys

```

```

-- 5ª solución
-- =====

entreDosConjuntos5 :: [Int] -> [Int] -> [Int]
entreDosConjuntos5 xs ys =
  filter ('divideA' b) [a,a+a..b]
  where a = mcmL2 xs
        b = mcdL2 ys

-- Equivalencia
-- =====

-- Para comprobar la equivalencia se define el tipo de listas no vacías
-- de números enteros positivos:
newtype ListaNoVaciaDePositivos = L [Int]
  deriving Show

-- genListaNoVaciaDePositivos es un generador de listas no vacías de
-- enteros positivos. Por ejemplo,
--   λ> sample genListaNoVaciaDePositivos
--   L [1]
--   L [1,2,2]
--   L [4,3,4]
--   L [1,6,5,2,4]
--   L [2,8]
--   L [11]
--   L [13,2,3]
--   L [7,3,9,15,11,12,13,3,9,6,13,3]
--   L [16,2,11,10,6,5,16,4,1,15,9,11,8,15,2,15,7]
--   L [5,4,9,13,5,6,7]
--   L [7,4,6,12,2,11,6,14,14,13,14,11,6,2,18,8,16,2,13,9]
genListaNoVaciaDePositivos :: Gen ListaNoVaciaDePositivos
genListaNoVaciaDePositivos = do
  x <- arbitrary
  xs <- arbitrary
  return (L (map ((+1) . abs) (x:xs)))

-- Generación arbitraria de listas no vacías de enteros positivos.
instance Arbitrary ListaNoVaciaDePositivos where
  arbitrary = genListaNoVaciaDePositivos

```



```

-- La propiedad es
prop_entreDosConjuntos_equiv ::
    ListaNoVacíaDePositivos
-> ListaNoVacíaDePositivos
-> Bool
prop_entreDosConjuntos_equiv (L xs) (L ys) =
    entreDosConjuntos xs ys == entreDosConjuntos2 xs ys &&
    entreDosConjuntos xs ys == entreDosConjuntos3 xs ys &&
    entreDosConjuntos xs ys == entreDosConjuntos4 xs ys &&
    entreDosConjuntos xs ys == entreDosConjuntos5 xs ys

-- La comprobación es
--    λ> quickCheck prop_entreDosConjuntos_equiv
--    +++ OK, passed 100 tests.

-- Comparación de eficiencia
-- =====

--    λ> (xs,a) = ([1..10],product xs)
--    λ> length (entreDosConjuntos xs [a,2*a..10*a])
--    36
--    (5.08 secs, 4,035,689,200 bytes)
--    λ> length (entreDosConjuntos2 xs [a,2*a..10*a])
--    36
--    (3.75 secs, 2,471,534,072 bytes)
--    λ> length (entreDosConjuntos3 xs [a,2*a..10*a])
--    36
--    (3.73 secs, 2,471,528,664 bytes)
--    λ> length (entreDosConjuntos4 xs [a,2*a..10*a])
--    36
--    (0.01 secs, 442,152 bytes)
--    λ> length (entreDosConjuntos5 xs [a,2*a..10*a])
--    36
--    (0.00 secs, 374,824 bytes)

```


Ejercicio 25

Expresiones aritméticas generales

Vivir es devorar tiempo, esperar; y por muy trascendente que quiera ser nuestra espera, siempre será espera de seguir esperando.

Antonio Machado

Enunciado

Las expresiones aritméticas. generales se contruyen con las sumas generales (sumatorios) y productos generales (productorios). Su tipo es

```
data Expression = N Int
                | S [Expression]
                | P [Expression]
deriving Show
```

Por ejemplo, la expresión $(2 * (1 + 2 + 1) * (2 + 3)) + 1$ se representa por `S [P [N 2, S [N 1, N 2, N 1], S [N 2, N 3]], N 1]`

Definir la función

```
valor :: Expression -> Int
```

tal que (valor e) es el valor de la expresión e. Por ejemplo,

```
λ> valor (S [P [N 2, S [N 1, N 2, N 1], S [N 2, N 3]], N 1])
41
```

Soluciones

```
data Expression = N Int
                | S [Expression]
                | P [Expression]
  deriving Show

valor :: Expression -> Int
valor (N x)  = x
valor (S es) = sum (map valor es)
valor (P es) = product (map valor es)
```

Ejercicio 26

Superación de límites

Todo necio confunde valor y precio.

Antonio Machado

Enunciado

Una sucesión de puntuaciones se puede representar mediante una lista de números. Por ejemplo, [7,5,9,9,4,5,4,2,5,9,12,1]. En la lista anterior, los puntos en donde se alcanzan un nuevo máximo son 7, 9 y 12 (porque son mayores que todos sus anteriores) y en donde se alcanzan un nuevo mínimo son 7, 5, 4, 2 y 1 (porque son menores que todos sus anteriores). Por tanto, el máximo se ha superado 2 veces y el mínimo 4 veces.

Definir las funciones

```
nuevosMaximos :: [Int] -> [Int]
nuevosMinimos :: [Int] -> [Int]
nRupturas      :: [Int] -> (Int,Int)
```

tales que

- (nuevosMaximos xs) es la lista de los nuevos máximos de xs. Por ejemplo,

```
nuevosMaximos [7,5,9,9,4,5,4,2,5,9,12,1] == [7,9,12]
```

- (nuevosMinimos xs) es la lista de los nuevos mínimos de xs. Por ejemplo,

```
nuevosMinimos [7,5,9,9,4,5,4,2,5,9,12,1] == [7,5,4,2,1]
```

- (nRupturas xs) es el par formado por el número de veces que se supera el máximo y el número de veces que se supera el mínimo en xs. Por ejemplo,

```
nRupturas [7,5,9,9,4,5,4,2,5,9,12,1] == (2,4)
```

Soluciones

```
import Data.List (group, inits)
```

```
nuevosMaximos :: [Int] -> [Int]
```

```
nuevosMaximos xs = map head (group (map maximum xss))
```

```
  where xss = tail (inits xs)
```

```
nuevosMinimos :: [Int] -> [Int]
```

```
nuevosMinimos xs = map head (group (map minimum xss))
```

```
  where xss = tail (inits xs)
```

```
nRupturas :: [Int] -> (Int,Int)
```

```
nRupturas [] = (0,0)
```

```
nRupturas xs =
```

```
  ( length (nuevosMaximos xs) - 1
```

```
  , length (nuevosMinimos xs) - 1)
```

Ejercicio 27

Intercambio de la primera y última columna de una matriz

*¡Que difícil es,
cuando todo baja
no bajar también!*

Antonio Machado

Enunciado

Las matrices se pueden representar mediante listas de listas. Por ejemplo, la matriz

8	9	7	6
4	7	6	5
3	2	1	8

se puede representar por la lista

```
[[8,9,7,6],[4,7,6,5],[3,2,1,8]]
```

Definir la función

```
intercambia :: [[a]] -> [[a]]
```

tal que (`intercambia xss`) es la matriz obtenida intercambiando la primera y la última columna de `xss`. Por ejemplo,

```
λ> intercambia [[8,9,7,6],[4,7,6,5],[3,2,1,8]]
[[6,9,7,8],[5,7,6,4],[8,2,1,3]]
```

Soluciones

```
intercambia :: [[a]] -> [[a]]
intercambia = map intercambiaL
```

```
-- (intercambiaL xs) es la lista obtenida intercambiando el primero y el
-- último elemento de xs. Por ejemplo,
--   intercambiaL [8,9,7,6] == [6,9,7,8]
intercambiaL :: [a] -> [a]
intercambiaL xs =
  last xs : tail (init xs) ++ [head xs]
```


Ejercicio 28

Números primos de Pierpont

*La memoria es infiel: no sólo borra y confunde,
sino que, a veces, inventa, para desorientarnos.*

Antonio Machado

Enunciado

Un **número primo de Pierpont** es un número primo de la forma $2^u 3^v + 1$, para u y v enteros no negativos.

Definir la sucesión

`primosPierpont :: [Integer]`

tal que sus elementos son los números primos de Pierpont. Por ejemplo,

```
λ> take 20 primosPierpont
[2,3,5,7,13,17,19,37,73,97,109,163,193,257,433,487,577,769,1153,1297]
λ> primosPierpont !! 49
8503057
```

Soluciones

```
import Data.Numbers.Primes (primes, primeFactors)

primosPierpont :: [Integer]
primosPierpont =
  [n | n <- primes
    , primoPierpont n]

primoPierpont :: Integer -> Bool
primoPierpont n =
  primeFactors (n-1) 'contenidoEn' [2,3]

-- (contenidoEn xs ys) se verifica si xs está contenido en ys. Por
-- ejemplo,
--   contenidoEn [2,3,2,2,3] [2,3] == True
--   contenidoEn [2,3,2,2,1] [2,3] == False
contenidoEn :: [Integer] -> [Integer] -> Bool
contenidoEn xs ys =
  all ('elem' ys) xs
```

Ejercicio 29

Grado exponencial

De cada diez novedades que pretenden descubrirnos, nueve son tonterías. La décima y última, que no es necesidad, resulta a última hora que tampoco es nueva.

Antonio Machado

Enunciado

El grado exponencial de un número n es el menor número e mayor que 1 tal que n es una subcadena de n^e . Por ejemplo, el grado exponencial de 2 es 5 ya que 2 es una subcadena de 32 (que es 2^5) y no es subcadena de las anteriores potencias de 2 (2, 4 y 16). El grado exponencial de 25 es 2 porque 25 es una subcadena de 625 (que es 25^2).

Definir la función

```
gradoExponencial :: Integer -> Integer
```

tal que (gradoExponencial n) es el grado exponencial de n . Por ejemplo,

```
gradoExponencial 2      == 5
gradoExponencial 25     == 2
gradoExponencial 15     == 26
gradoExponencial 1093   == 100
```

```
gradoExponencial 10422 == 200
gradoExponencial 11092 == 300
```

Soluciones

```
import Test.QuickCheck
import Data.List (genericLength, isInfixOf)
```

```
-- 1ª solución
-- =====
```

```
gradoExponencial :: Integer -> Integer
gradoExponencial n =
    head [e | e <- [2..]
           , show n 'isInfixOf' show (n^e)]
```

```
-- 2ª solución
-- =====
```

```
gradoExponencial2 :: Integer -> Integer
gradoExponencial2 n =
    2 + genericLength (takeWhile noSubcadena (potencias n))
    where c          = show n
          noSubcadena x = not (c 'isInfixOf' show x)
```

```
-- (potencias n) es la lista de las potencias de n a partir de n^2. Por
-- ejemplo,
--     λ> take 10 (potencias 2)
--     [4,8,16,32,64,128,256,512,1024,2048]
potencias :: Integer -> [Integer]
potencias n =
    iterate (*n) (n^2)
```

```
-- 3ª solución
-- =====
```

```
gradoExponencial3 :: Integer -> Integer
gradoExponencial3 n = aux 2
```

```
where aux x
  | cs 'isInfix0f' show (n^x) = x
  | otherwise                 = aux (x+1)
cs = show n

-- Equivalencia
-- =====

-- La propiedad es
prop_gradosExponencial_equiv :: (Positive Integer) -> Bool
prop_gradosExponencial_equiv (Positive n) =
  gradoExponencial n == gradoExponencial2 n &&
  gradoExponencial n == gradoExponencial3 n

-- La comprobación es
--    λ> quickCheck prop_gradosExponencial_equiv
--    +++ OK, passed 100 tests.
```

Referencia

Basado en la [sucesión A045537](#) de la OEIS.

Ejercicio 30

Divisores propios maximales

*Moneda que está en la mano
quizá se deba guardar;
la monedita del alma
se pierde si no se da.*

Antonio Machado

Enunciado

Se dice que a es un divisor propio maximal de un número b si a es un divisor de b distinto de b y no existe ningún número c tal que $a < c < b$, a es un divisor de c y c es un divisor de b . Por ejemplo, 15 es un divisor propio maximal de 30, pero 5 no lo es.

Definir las funciones

```
divisoresPropiosMaximales :: Integer -> [Integer]
nDivisoresPropiosMaximales :: Integer -> Integer
```

tales que

- `(divisoresPropiosMaximales x)` es la lista de los divisores propios maximales de x . Por ejemplo,

```
divisoresPropiosMaximales 30 == [6,10,15]
divisoresPropiosMaximales 420 == [60,84,140,210]
```

```
divisoresPropiosMaximales 7 == [1]
length (divisoresPropiosMaximales (product [1..3*10^4])) == 3245
```

- (nDivisoresPropiosMaximales x) es el número de divisores propios maximales de x. Por ejemplo,

```
nDivisoresPropiosMaximales 30 == 3
nDivisoresPropiosMaximales 420 == 4
nDivisoresPropiosMaximales 7 == 1
nDivisoresPropiosMaximales (product [1..3*10^4]) == 3245
```

Soluciones

```
import Data.Numbers.Primes (primeFactors)
import Data.List (genericLength, group, nub)
import Test.QuickCheck

-- 1ª definición de divisoresPropiosMaximales
-- =====

divisoresPropiosMaximales :: Integer -> [Integer]
divisoresPropiosMaximales x =
  [y | y <- divisoresPropios x
    , null [z | z <- divisoresPropios x
      , y < z
      , z `mod` y == 0]]

-- (divisoresPropios x) es la lista de los divisores propios de x; es
-- decir, de los divisores de x distintos de x. Por ejemplo,
--   divisoresPropios 30 == [1,2,3,5,6,10,15]
divisoresPropios :: Integer -> [Integer]
divisoresPropios x =
  [y | y <- [1..x-1]
    , x `mod` y == 0]

-- 2ª definición de divisoresPropiosMaximales
-- =====

divisoresPropiosMaximales2 :: Integer -> [Integer]
```



```

divisoresPropiosMaximales2 x =
  reverse [x 'div' y | y <- nub (primeFactors x)]

-- Equivalencia de las definiciones de divisoresPropiosMaximales
-- =====

-- La propiedad es
prop_divisoresPropiosMaximales_equiv :: Positive Integer -> Bool
prop_divisoresPropiosMaximales_equiv (Positive x) =
  divisoresPropiosMaximales x == divisoresPropiosMaximales2 x

-- La comprobación es
--   λ> quickCheck prop_divisoresPropiosMaximales_equiv
--   +++ OK, passed 100 tests.

-- Comparación de eficiencia de divisoresPropiosMaximales
-- =====

--   λ> length (divisoresPropiosMaximales (product [1..10]))
--   4
--   (13.33 secs, 7,037,241,776 bytes)
--   λ> length (divisoresPropiosMaximales2 (product [1..10]))
--   4
--   (0.00 secs, 135,848 bytes)

-- 1ª definición de nDivisoresPropiosMaximales
-- =====

nDivisoresPropiosMaximales :: Integer -> Integer
nDivisoresPropiosMaximales =
  genericLength . divisoresPropiosMaximales

-- 2ª definición de nDivisoresPropiosMaximales
-- =====

nDivisoresPropiosMaximales2 :: Integer -> Integer
nDivisoresPropiosMaximales2 =
  genericLength . divisoresPropiosMaximales2

-- 3ª definición de nDivisoresPropiosMaximales

```

```

-- =====

nDivisoresPropiosMaximales3 :: Integer -> Integer
nDivisoresPropiosMaximales3 =
  genericLength . group . primeFactors

-- Equivalencia de las definiciones de nDivisoresPropiosMaximales
-- =====

-- La propiedad es
prop_nDivisoresPropiosMaximales_equiv :: Positive Integer -> Bool
prop_nDivisoresPropiosMaximales_equiv (Positive x) =
  nDivisoresPropiosMaximales x == nDivisoresPropiosMaximales3 x &&
  nDivisoresPropiosMaximales2 x == nDivisoresPropiosMaximales3 x

-- La comprobación es
--   λ> quickCheck prop_nDivisoresPropiosMaximales_equiv
--   +++ OK, passed 100 tests.

-- Comparación de eficiencia de nDivisoresPropiosMaximales
-- =====

--   λ> nDivisoresPropiosMaximales2 (product [1..10])
--   4
--   (13.33 secs, 7,037,242,536 bytes)
--   λ> nDivisoresPropiosMaximales2 (product [1..10])
--   4
--   (0.00 secs, 135,640 bytes)
--   λ> nDivisoresPropiosMaximales3 (product [1..10])
--   4
--   (0.00 secs, 135,232 bytes)
--
--   λ> nDivisoresPropiosMaximales2 (product [1..3*10^4])
--   3245
--   (3.12 secs, 4,636,274,040 bytes)
--   λ> nDivisoresPropiosMaximales3 (product [1..3*10^4])
--   3245
--   (3.06 secs, 4,649,295,056 bytes)

```

Ejercicio 31

Árbol de divisores

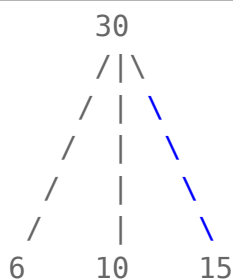
*¿Dónde está la utilidad
de nuestras utilidades?
Volvamos a la verdad:
vanidad de vanidades.*

Antonio Machado

Enunciado

Se dice que a es un divisor propio maximal de un número b si a es un divisor de b distinto de b y no existe ningún número c tal que $a < c < b$, a es un divisor de c y c es un divisor de b . Por ejemplo, 15 es un divisor propio maximal de 30, pero 5 no lo es.

El árbol de los divisores de un número x es el árbol que tiene como raíz el número x y cada nodo tiene como hijos sus divisores propios maximales. Por ejemplo, el árbol de divisores de 30 es



```

      / \   / \   / \
     2  3 2  5 3  5

```

Usando el tipo de dato

```

data Arbol = N Integer [Arbol]
deriving (Eq, Show)

```

el árbol anterior se representa por

```

N 30
  [N 6
    [N 2 [N 1 []],
     N 3 [N 1 []]],
   N 10
    [N 2 [N 1 []],
     N 5 [N 1 []]],
   N 15
    [N 3 [N 1 []],
     N 5 [N 1 []]]]

```

Definir las funciones

```

arbolDivisores      :: Integer -> Arbol
nOcurrenciasArbolDivisores :: Integer -> Integer -> Integer

```

tales que

- (arbolDivisores x) es el árbol de los divisores del número x. Por ejemplo,

```

λ> arbolDivisores 30
N 30 [N 6 [N 2 [N 1 []],N 3 [N 1 []]],
      N 10 [N 2 [N 1 []],N 5 [N 1 []]],
      N 15 [N 3 [N 1 []],N 5 [N 1 []]]]

```

- (nOcurrenciasArbolDivisores x y) es el número de veces que aparece el número x en el árbol de los divisores del número y. Por ejemplo,

```

nOcurrenciasArbolDivisores 3 30 == 2
nOcurrenciasArbolDivisores 6 30 == 1

```

```

n0currenciasArbolDivisores 30 30 == 1
n0currenciasArbolDivisores 1 30 == 6
n0currenciasArbolDivisores 9 30 == 0
n0currenciasArbolDivisores 2 (product [1..10]) == 360360
n0currenciasArbolDivisores 3 (product [1..10]) == 180180
n0currenciasArbolDivisores 5 (product [1..10]) == 90090
n0currenciasArbolDivisores 7 (product [1..10]) == 45045
n0currenciasArbolDivisores 6 (product [1..10]) == 102960
n0currenciasArbolDivisores 10 (product [1..10]) == 51480
n0currenciasArbolDivisores 14 (product [1..10]) == 25740

```

Soluciones

```

import Data.Numbers.Primes (primeFactors)
import Data.List (nub)

data Arbol = N Integer [Arbol]
  deriving (Eq, Show)

-- Definición de arbolDivisores
-- =====

arbolDivisores :: Integer -> Arbol
arbolDivisores x =
  N x (map arbolDivisores (divisoresPropiosMaximales x))

-- (divisoresPropiosMaximales x) es la lista de los divisores propios
-- maximales de x. Por ejemplo,
--   divisoresPropiosMaximales 30 == [6,10,15]
--   divisoresPropiosMaximales 420 == [60,84,140,210]
--   divisoresPropiosMaximales 7 == [1]
divisoresPropiosMaximales :: Integer -> [Integer]
divisoresPropiosMaximales x =
  reverse [x `div` y | y <- nub (primeFactors x)]

-- Definición de n0currenciasArbolDivisores
-- =====

```

```

n0currenciasArbolDivisores :: Integer -> Integer -> Integer
n0currenciasArbolDivisores x y =
    n0currencias x (arbolDivisores y)

-- (n0currencias x a) es el número de veces que aparece x en el árbol
-- a. Por ejemplo,
--     n0currencias 3 (arbolDivisores 30) == 2
n0currencias :: Integer -> Arbol -> Integer
n0currencias x (N y [])
    | x == y    = 1
    | otherwise = 0
n0currencias x (N y zs)
    | x == y    = 1 + sum [n0currencias x z | z <- zs]
    | otherwise = sum [n0currencias x z | z <- zs]

```

Ejercicio 32

Divisores compuestos

La verdad del hombre empieza donde acaba su propia tontería, pero la tontería del hombre es inagotable.

Antonio Machado

Enunciado

Definir la función

```
divisoresCompuestos :: Integer -> [Integer]
```

tal que (divisoresCompuestos x) es la lista de los divisores de x que son números compuestos (es decir, números mayores que 1 que no son primos). Por ejemplo,

```
divisoresCompuestos 30 == [6,10,15,30]
length (divisoresCompuestos (product [1..11])) == 534
length (divisoresCompuestos (product [1..14])) == 2585
length (divisoresCompuestos (product [1..16])) == 5369
length (divisoresCompuestos (product [1..25])) == 340022
```

Soluciones

```
import Data.List (group, inits, nub, sort, subsequences)
import Data.Numbers.Primes (isPrime, primeFactors)
import Test.QuickCheck

-- 1ª solución
-- =====

divisoresCompuestos :: Integer -> [Integer]
divisoresCompuestos x =
  [y | y <- divisores x
    , y > 1
    , not (isPrime y)]

-- (divisores x) es la lista de los divisores de x. Por ejemplo,
--   divisores 30 == [1,2,3,5,6,10,15,30]
divisores :: Integer -> [Integer]
divisores x =
  [y | y <- [1..x]
    , x `mod` y == 0]

-- 2ª solución
-- =====

divisoresCompuestos2 :: Integer -> [Integer]
divisoresCompuestos2 x =
  [y | y <- divisores2 x
    , y > 1
    , not (isPrime y)]

-- (divisores2 x) es la lista de los divisores de x. Por ejemplo,
--   divisores2 30 == [1,2,3,5,6,10,15,30]
divisores2 :: Integer -> [Integer]
divisores2 x =
  [y | y <- [1..x `div` 2], x `mod` y == 0] ++ [x]

-- 2ª solución
-- =====
```



```

divisoresCompuestos3 :: Integer -> [Integer]
divisoresCompuestos3 x =
  [y | y <- divisores2 x
    , y > 1
    , not (isPrime y)]

-- (divisores3 x) es la lista de los divisores de x. Por ejemplo,
--   divisores2 30 == [1,2,3,5,6,10,15,30]
divisores3 :: Integer -> [Integer]
divisores3 x =
  nub (sort (ys ++ [x 'div' y | y <- ys]))
  where ys = [y | y <- [1..floor (sqrt (fromIntegral x))]
    , x 'mod' y == 0]

-- 4ª solución
-- =====

divisoresCompuestos4 :: Integer -> [Integer]
divisoresCompuestos4 x =
  [y | y <- divisores4 x
    , y > 1
    , not (isPrime y)]

-- (divisores4 x) es la lista de los divisores de x. Por ejemplo,
--   divisores4 30 == [1,2,3,5,6,10,15,30]
divisores4 :: Integer -> [Integer]
divisores4 =
  nub . sort . map product . subsequences . primeFactors

-- 5ª solución
-- =====

divisoresCompuestos5 :: Integer -> [Integer]
divisoresCompuestos5 x =
  [y | y <- divisores5 x
    , y > 1
    , not (isPrime y)]

-- (divisores5 x) es la lista de los divisores de x. Por ejemplo,
--   divisores5 30 == [1,2,3,5,6,10,15,30]

```

```

divisores5 :: Integer -> [Integer]
divisores5 =
  sort
    . map (product . concat)
    . productoCartesiano
    . map inits
    . group
    . primeFactors

-- (productoCartesiano xss) es el producto cartesiano de los conjuntos
-- xss. Por ejemplo,
--   λ> productoCartesiano [[1,3],[2,5],[6,4]]
--   [[1,2,6],[1,2,4],[1,5,6],[1,5,4],[3,2,6],[3,2,4],[3,5,6],[3,5,4]]
productoCartesiano :: [[a]] -> [[a]]
productoCartesiano []      = [[]]
productoCartesiano (xs:xss) =
  [x:ys | x <- xs, ys <- productoCartesiano xss]

-- 6ª solución
-- =====

divisoresCompuestos6 :: Integer -> [Integer]
divisoresCompuestos6 =
  sort
    . map product
    . compuestos
    . map concat
    . productoCartesiano
    . map inits
    . group
    . primeFactors
  where compuestos xss = [xs | xs <- xss, length xs > 1]

-- Equivalencia de las definiciones
-- =====

-- La propiedad es
prop_divisoresCompuestos :: (Positive Integer) -> Bool
prop_divisoresCompuestos (Positive x) =
  all (== divisoresCompuestos x) [f x | f <- [divisoresCompuestos2

```

```

, divisoresCompuestos3
, divisoresCompuestos4
, divisoresCompuestos5
, divisoresCompuestos6 ]]

-- La comprobación es
--   λ> quickCheck prop_divisoresCompuestos
--   +++ OK, passed 100 tests.

-- Comparación de eficiencia
-- =====

--   λ> length (divisoresCompuestos (product [1..11]))
--   534
--   (14.59 secs, 7,985,108,976 bytes)
--   λ> length (divisoresCompuestos2 (product [1..11]))
--   534
--   (7.36 secs, 3,993,461,168 bytes)
--   λ> length (divisoresCompuestos3 (product [1..11]))
--   534
--   (7.35 secs, 3,993,461,336 bytes)
--   λ> length (divisoresCompuestos4 (product [1..11]))
--   534
--   (0.07 secs, 110,126,392 bytes)
--   λ> length (divisoresCompuestos5 (product [1..11]))
--   534
--   (0.01 secs, 3,332,224 bytes)
--   λ> length (divisoresCompuestos6 (product [1..11]))
--   534
--   (0.01 secs, 1,869,776 bytes)
--
--   λ> length (divisoresCompuestos4 (product [1..14]))
--   2585
--   (9.11 secs, 9,461,570,720 bytes)
--   λ> length (divisoresCompuestos5 (product [1..14]))
--   2585
--   (0.04 secs, 17,139,872 bytes)
--   λ> length (divisoresCompuestos6 (product [1..14]))
--   2585
--   (0.02 secs, 10,140,744 bytes)

```

```
--  
--  λ> length (divisoresCompuestos2 (product [1..16]))  
--  5369  
--  (1.97 secs, 932,433,176 bytes)  
--  λ> length (divisoresCompuestos5 (product [1..16]))  
--  5369  
--  (0.03 secs, 37,452,088 bytes)  
--  λ> length (divisoresCompuestos6 (product [1..16]))  
--  5369  
--  (0.03 secs, 23,017,480 bytes)  
--  
--  λ> length (divisoresCompuestos5 (product [1..25]))  
--  340022  
--  (2.43 secs, 3,055,140,056 bytes)  
--  λ> length (divisoresCompuestos6 (product [1..25]))  
--  340022  
--  (1.94 secs, 2,145,440,904 bytes)
```

Ejercicio 33

Número de divisores compuestos

Lo corriente en el hombre es la tendencia a creer verdadero cuanto le reporta alguna utilidad. Por eso hay tantos hombres capaces de comulgar con ruedas de molino.

Antonio Machado

Enunciado

Definir la función

```
nDivisoresCompuestos :: Integer -> Integer
```

tal que (nDivisoresCompuestos x) es el número de divisores de x que son compuestos (es decir, números mayores que 1 que no son primos). Por ejemplo,

```
nDivisoresCompuestos 30 == 4
nDivisoresCompuestos (product [1..11]) == 534
nDivisoresCompuestos (product [1..25]) == 340022
length (show (nDivisoresCompuestos (product [1..3*10^4]))) == 1948
```

Soluciones

```

import Data.List (genericLength, group, inits, sort)
import Data.Numbers.Primes (isPrime, primeFactors)
import Test.QuickCheck

-- 1ª solución
-- =====

nDivisoresCompuestos :: Integer -> Integer
nDivisoresCompuestos =
  genericLength . divisoresCompuestos

-- (divisoresCompuestos x) es la lista de los divisores de x que
-- son números compuestos (es decir, números mayores que 1 que no son
-- primos). Por ejemplo,
--   divisoresCompuestos 30 == [6,10,15,30]
divisoresCompuestos :: Integer -> [Integer]
divisoresCompuestos x =
  [y | y <- divisores x
    , y > 1
    , not (isPrime y)]

-- (divisores x) es la lista de los divisores de x. Por ejemplo,
--   divisores 30 == [1,2,3,5,6,10,15,30]
divisores :: Integer -> [Integer]
divisores =
  sort
  . map (product . concat)
  . productoCartesiano
  . map inits
  . group
  . primeFactors

-- (productoCartesiano xss) es el producto cartesiano de los conjuntos xss. Por
-- ejemplo,
--   λ> productoCartesiano [[1,3],[2,5],[6,4]]
--   [[1,2,6],[1,2,4],[1,5,6],[1,5,4],[3,2,6],[3,2,4],[3,5,6],[3,5,4]]
productoCartesiano :: [[a]] -> [[a]]
productoCartesiano [] = [[]]

```

```

productoCartesiano (xs:xss) =
  [x:ys | x <- xs, ys <- productoCartesiano xss]

-- 2ª solución
-- =====

nDivisoresCompuestos2 :: Integer -> Integer
nDivisoresCompuestos2 x =
  nDivisores x - nDivisoresPrimos x - 1

-- (nDivisores x) es el número de divisores de x. Por ejemplo,
--   nDivisores 30 == 8
nDivisores :: Integer -> Integer
nDivisores x =
  product [1 + genericLength xs | xs <- group (primeFactors x)]

-- (nDivisoresPrimos x) es el número de divisores primos de x. Por
-- ejemplo,
--   nDivisoresPrimos 30 == 3
nDivisoresPrimos :: Integer -> Integer
nDivisoresPrimos =
  genericLength . group . primeFactors

-- 3ª solución
-- =====

nDivisoresCompuestos3 :: Integer -> Integer
nDivisoresCompuestos3 x =
  nDivisores' - nDivisoresPrimos' - 1
  where xss          = group (primeFactors x)
        nDivisores'  = product [1 + genericLength xs | xs <- xss]
        nDivisoresPrimos' = genericLength xss

-- Equivalencia de las definiciones
-- =====

-- La propiedad es
prop_nDivisoresCompuestos :: (Positive Integer) -> Bool
prop_nDivisoresCompuestos (Positive x) =
  all (== nDivisoresCompuestos x) [f x | f <- [ nDivisoresCompuestos2

```

```
, nDivisoresCompuestos3 ]]
```

```
-- La comprobación es
-- λ> quickCheck prop_nDivisoresCompuestos
-- +++ OK, passed 100 tests.

-- Comparación de eficiencia
-- =====

-- λ> nDivisoresCompuestos (product [1..25])
-- 340022
-- (2.53 secs, 3,145,029,032 bytes)
-- λ> nDivisoresCompuestos2 (product [1..25])
-- 340022
-- (0.00 secs, 220,192 bytes)
--
-- λ> length (show (nDivisoresCompuestos2 (product [1..3*10^4])))
-- 1948
-- (5.22 secs, 8,431,630,288 bytes)
-- λ> length (show (nDivisoresCompuestos3 (product [1..3*10^4])))
-- 1948
-- (3.06 secs, 4,662,277,664 bytes)
```


Ejercicio 34

Tablas de operaciones binarias

*¿Tu verdad? No, la Verdad,
y ven conmigo a buscarla.
La tuya guárdatela.*

Antonio Machado

Enunciado

Para representar las operaciones binarias en un conjunto finito A con n elementos se pueden numerar sus elementos desde el 0 al $n-1$. Entonces cada operación binaria en A se puede ver como una lista de listas xss tal que el valor de aplicar la operación a los elementos i y j es el j -ésimo elemento del i -ésimo elemento de xss . Por ejemplo, si $A = 0,1,2$ entonces las tabla de la suma y de la resta módulo 3 en A son

0 1 2	0 2 1
1 2 0	1 0 2
2 0 1	2 1 0
Suma	Resta

Definir las funciones

```
tablaOperacion :: (Int -> Int -> Int) -> Int -> [[Int]]
tablaSuma      :: Int -> [[Int]]
```

```

tablaResta      :: Int -> [[Int]]
tablaProducto   :: Int -> [[Int]]

```

tales que

- (tablaOperacion f n) es la tabla de la operación f módulo n en [0..n-1]. Por ejemplo,

```

tablaOperacion (+) 3 == [[0,1,2],[1,2,0],[2,0,1]]
tablaOperacion (-) 3 == [[0,2,1],[1,0,2],[2,1,0]]
tablaOperacion (-) 4 == [[0,3,2,1],[1,0,3,2],[2,1,0,3],[3,2,1,0]]
tablaOperacion (\x y -> abs (x-y)) 3 == [[0,1,2],[1,0,1],[2,1,0]]

```

- (tablaSuma n) es la tabla de la suma módulo n en [0..n-1]. Por ejemplo,

```

tablaSuma 3 == [[0,1,2],[1,2,0],[2,0,1]]
tablaSuma 4 == [[0,1,2,3],[1,2,3,0],[2,3,0,1],[3,0,1,2]]

```

- (tablaResta n) es la tabla de la resta módulo n en [0..n-1]. Por ejemplo,

```

tablaResta 3 == [[0,2,1],[1,0,2],[2,1,0]]
tablaResta 4 == [[0,3,2,1],[1,0,3,2],[2,1,0,3],[3,2,1,0]]

```

- (tablaProducto n) es la tabla del producto módulo n en [0..n-1]. Por ejemplo,

```

tablaProducto 3 == [[0,0,0],[0,1,2],[0,2,1]]
tablaProducto 4 == [[0,0,0,0],[0,1,2,3],[0,2,0,2],[0,3,2,1]]

```

Comprobar con QuickCheck, si parato entero positivo n de verificar las siguientes propiedades:

- La suma, módulo n, de todos los números de (tablaSuma n) es 0.
- La suma, módulo n, de todos los números de (tablaResta n) es 0.
- La suma, módulo n, de todos los números de (tablaProducto n) es n/2 si n es el doble de un número impar y es 0, en caso contrario.

Soluciones

```
import Test.QuickCheck
```

```
tablaOperacion :: (Int -> Int -> Int) -> Int -> [[Int]]
tablaOperacion f n =
  [[f i j 'mod' n | j <- [0..n-1]] | i <- [0..n-1]]
```

```
tablaSuma :: Int -> [[Int]]
tablaSuma = tablaOperacion (+)
```

```
tablaResta :: Int -> [[Int]]
tablaResta = tablaOperacion (-)
```

```
tablaProducto :: Int -> [[Int]]
tablaProducto = tablaOperacion (*)
```

```
-- (sumaTabla xss) es la suma, módulo n, de los elementos de la tabla de
-- operación xss (donde n es el número de elementos de xss). Por
-- ejemplo,
```

```
-- sumaTabla [[0,2,1],[1,1,2],[2,1,0]] == 1
```

```
sumaTabla :: [[Int]] -> Int
```

```
sumaTabla = sum . concat
```

```
-- La propiedad de la tabla de la suma es
```

```
prop_tablaSuma :: Positive Int -> Bool
```

```
prop_tablaSuma (Positive n) =
  sumaTabla (tablaSuma n) == 0
```

```
-- La comprobación es
```

```
-- λ> quickCheck prop_tablaSuma
```

```
-- +++ OK, passed 100 tests.
```

```
-- La propiedad de la tabla de la resta es
```

```
prop_tablaResta :: Positive Int -> Bool
```

```
prop_tablaResta (Positive n) =
  sumaTabla (tablaResta n) == 0
```

```
-- La comprobación es
```

```
-- λ> quickCheck prop_tablaResta
```

```
--      +++ OK, passed 100 tests.

-- La propiedad de la tabla del producto es
prop_tablaProducto :: Positive Int -> Bool
prop_tablaProducto (Positive n)
  | even n && odd (n `div` 2) = suma == n `div` 2
  | otherwise                = suma == 0
  where suma = sumaTabla (tablaProducto n)
```

Ejercicio 35

Reconocimiento de conmutatividad

Nuestras horas son minutos cuando esperamos saber, y siglos cuando sabemos lo que se puede aprender.

Antonio Machado

Enunciado

Para representar las operaciones binarias en un conjunto finito A con n elementos se pueden numerar sus elementos desde el 0 al $n-1$. Entonces cada operación binaria en A se puede ver como una lista de listas xss tal que el valor de aplicar la operación a los elementos i y j es el j -ésimo elemento del i -ésimo elemento de xss . Por ejemplo, si $A = 0,1,2$ entonces las tablas de la suma y de la resta módulo 3 en A son

0 1 2	0 2 1
1 2 0	1 0 2
2 0 1	2 1 0
Suma	Resta

Definir la función

```
conmutativa :: [[Int]] -> Bool
```

tal que (conmutativa xss) se verifica si la operación cuya tabla es xss es conmutativa. Por ejemplo,

```
conmutativa [[0,1,2],[1,0,1],[2,1,0]] == True
conmutativa [[0,1,2],[1,0,0],[2,1,0]] == False
conmutativa [[i+j 'mod' 2000 | j <- [0..1999]] | i <- [0..1999]] == True
conmutativa [[i-j 'mod' 2000 | j <- [0..1999]] | i <- [0..1999]] == False
```

Soluciones

```
import Data.List (transpose)
import Test.QuickCheck
```

```
-- 1ª solución
-- =====
```

```
conmutativa :: [[Int]] -> Bool
conmutativa xss =
  and [producto i j == producto j i | i <- [0..n-1], j <- [0..n-1]]
  where producto i j = (xss !! i) !! j
        n            = length xss
```

```
-- 2ª solución
-- =====
```

```
conmutativa2 :: [[Int]] -> Bool
conmutativa2 [] = True
conmutativa2 t@(xs:xss) = xs == map head t
                        && conmutativa2 (map tail xss)
```

```
-- 3ª solución
-- =====
```

```
conmutativa3 :: [[Int]] -> Bool
conmutativa3 xss = xss == transpose xss
```

```
-- 4ª solución
-- =====
```

```

conmutativa4 :: [[Int]] -> Bool
conmutativa4 = (==) <*> transpose

-- Equivalencia de las definiciones
-- =====

-- Para comprobar la equivalencia se define el tipo de tabla de
-- operaciones binarias:
newtype Tabla = T [[Int]]
    deriving Show

-- genTabla es un generador de tablas de operaciones binaria. Por ejemplo,
--     λ> sample genTabla
--     T [[2,0,0],[1,2,1],[1,0,2]]
--     T [[0,3,0,1],[0,1,2,1],[0,2,1,2],[3,0,0,2]]
--     T [[2,0,1],[1,0,0],[2,1,2]]
--     T [[1,0],[0,1]]
--     T [[1,1],[0,1]]
--     T [[1,1,2],[1,0,1],[2,1,0]]
--     T [[4,4,3,0,2],[2,2,0,1,2],[4,0,1,0,0],[0,4,4,3,3],[3,0,4,2,1]]
--     T [[3,4,1,4,1],[2,4,4,0,4],[1,2,1,4,3],[3,1,4,4,2],[4,1,3,2,3]]
--     T [[2,0,1],[2,1,0],[0,2,2]]
--     T [[3,2,0,3],[2,1,1,1],[0,2,1,0],[3,3,2,3]]
--     T [[2,0,2,0],[0,0,3,1],[1,2,3,2],[3,3,0,2]]
genTabla :: Gen Tabla
genTabla = do
    n <- choose (2,20)
    xs <- vectorOf (n^2) (elements [0..n-1])
    return (T (separa n xs))

-- (separa n xs) es la lista obtenidaseparando los elementos de xs en
-- grupos de n elementos. Por ejemplo,
--     separa 3 [1..9] == [[1,2,3],[4,5,6],[7,8,9]]
separa :: Int -> [a] -> [[a]]
separa _ [] = []
separa n xs = take n xs : separa n (drop n xs)

-- Generación arbitraria de tablas
instance Arbitrary Tabla where
    arbitrary = genTabla

```

```

-- La propiedad es
prop_conmutativa :: Tabla -> Bool
prop_conmutativa (T xss) =
  conmutativa xss == conmutativa2 xss &&
  conmutativa2 xss == conmutativa3 xss &&
  conmutativa2 xss == conmutativa4 xss

-- La comprobación es
--   λ> quickCheck prop_conmutativa
--   +++ OK, passed 100 tests.

-- Comparación de eficiencia
--   =====

-- Para las comparaciones se usará la función tablaSuma tal que
-- (tablaSuma n) es la tabla de la suma módulo n en [0..n-1]. Por
-- ejemplo,
--   tablaSuma 3 == [[0,1,2],[1,2,3],[2,3,4]]
tablaSuma :: Int -> [[Int]]
tablaSuma n =
  [[i + j 'mod' n | j <- [0..n-1]] | i <- [0..n-1]]

-- La comparación es
--   λ> conmutativa (tablaSuma 400)
--   True
--   (1.92 secs, 147,608,696 bytes)
--   λ> conmutativa2 (tablaSuma 400)
--   True
--   (0.14 secs, 63,101,112 bytes)
--   λ> conmutativa3 (tablaSuma 400)
--   True
--   (0.10 secs, 64,302,608 bytes)
--   λ> conmutativa4 (tablaSuma 400)
--   True
--   (0.10 secs, 61,738,928 bytes)
--
--   λ> conmutativa2 (tablaSuma 2000)
--   True
--   (1.81 secs, 1,569,390,480 bytes)

```



```
-- λ> conmutativa3 (tablaSuma 2000)
-- True
-- (3.07 secs, 1,601,006,840 bytes)
-- λ> conmutativa4 (tablaSuma 2000)
-- True
-- (3.14 secs, 1,536,971,288 bytes)
```


Ejercicio 36

Árbol de subconjuntos

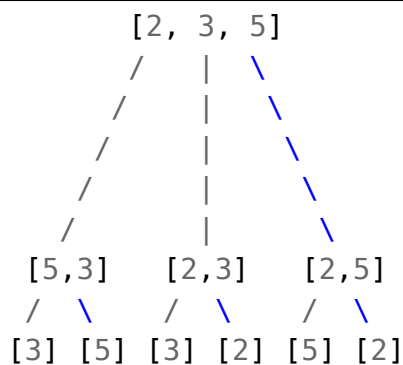
*Nunca traces tu frontera,
ni cuides de tu perfil;
todo eso es cosa de fuera.*

Antonio Machado

Enunciado

Se dice que A es un subconjunto maximal de B si $A \subset B$ y no existe ningún C tal que $A \subset C$ y $C \subset B$. Por ejemplo, $\{2,5\}$ es un subconjunto maximal de $\{2,3,5\}$, pero $\{3\}$ no lo es.

El árbol de los subconjuntos de un conjunto A es el árbol que tiene como raíz el conjunto A y cada nodo tiene como hijos sus subconjuntos maximales. Por ejemplo, el árbol de subconjuntos de $[2,3,5]$ es



```

      |   |   |   |   |
    [ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ]

```

Usando el tipo de dato

```

data Arbol = N Integer [Arbol]
deriving (Eq, Show)

```

el árbol anterior se representa por

```

N [2,5,3]
  [N [5,3]
    [N [3]
      [N [] []],
      N [5]
        [N [] []]],
    N [2,3]
      [N [3]
        [N [] []],
        N [2]
          [N [] []]],
    N [2,5]
      [N [5]
        [N [] []],
        N [2]
          [N [] []]]]

```

Definir las funciones

```

arbolSubconjuntos :: [Int] -> Arbol
n0currenciasArbolSubconjuntos :: [Int] -> [Int] -> Int

```

tales que

- (arbolSubconjuntos x) es el árbol de los subconjuntos de xs. Por ejemplo,

```

λ> arbolSubconjuntos [2,5,3]
N [2,5,3] [N [5,3] [N [3] [N [] []],N [5] [N [] []]],
          N [2,3] [N [3] [N [] []],N [2] [N [] []]],
          N [2,5] [N [5] [N [] []],N [2] [N [] []]]]

```

- `(nOcurrenciasArbolSubconjuntos xs ys)` es el número de veces que aparece el conjunto `xs` en el árbol de los subconjuntos de `ys`. Por ejemplo,

<code>nOcurrenciasArbolSubconjuntos []</code>	<code>[2,5,3]</code>	<code>==</code>	<code>6</code>
<code>nOcurrenciasArbolSubconjuntos [3]</code>	<code>[2,5,3]</code>	<code>==</code>	<code>2</code>
<code>nOcurrenciasArbolSubconjuntos [3,5]</code>	<code>[2,5,3]</code>	<code>==</code>	<code>1</code>
<code>nOcurrenciasArbolSubconjuntos [3,5,2]</code>	<code>[2,5,3]</code>	<code>==</code>	<code>1</code>

Comprobar con QuickChek que, para todo entero positivo n , el número de ocurrencia de un subconjunto `xs` de `[1..n]` en el árbol de los subconjuntos de `[1..n]` es el factorial de $n-k$ (donde k es el número de elementos de `xs`).

Soluciones

```
import Data.List (delete, nub, sort)
import Test.QuickCheck

data Arbol = N [Int] [Arbol]
  deriving (Eq, Show)

arbolSubconjuntos :: [Int] -> Arbol
arbolSubconjuntos xs =
  N xs (map arbolSubconjuntos (subconjuntosMaximales xs))

-- (subconjuntosMaximales xs) es la lista de los subconjuntos maximales
-- de xs. Por ejemplo,
--   subconjuntosMaximales [2,5,3] == [[5,3],[2,3],[2,5]]
subconjuntosMaximales :: [Int] -> [[Int]]
subconjuntosMaximales xs =
  [delete x xs | x <- xs]

-- Definición de nOcurrenciasArbolSubconjuntos
-- =====

nOcurrenciasArbolSubconjuntos :: [Int] -> [Int] -> Int
nOcurrenciasArbolSubconjuntos xs ys =
  nOcurrencias xs (arbolSubconjuntos ys)
```

```

-- (n0currencias x a) es el número de veces que aparece x en el árbol
-- a. Por ejemplo,
--     n0currencias 3 (arbolSubconjuntos 30) == 2
n0currencias :: [Int] -> Arbol -> Int
n0currencias xs (N ys [])
  | conjunto xs == conjunto ys = 1
  | otherwise                  = 0
n0currencias xs (N ys zs)
  | conjunto xs == conjunto ys = 1 + sum [n0currencias xs z | z <- zs]
  | otherwise                  = sum [n0currencias xs z | z <- zs]

-- (conjunto xs) es el conjunto ordenado correspondiente a xs. Por
-- ejemplo,
--     conjunto [3,2,5,2,3,7,2] == [2,3,5,7]
conjunto :: [Int] -> [Int]
conjunto = nub . sort

-- La propiedad es
prop_n0currencias :: (Positive Int) -> [Int] -> Bool
prop_n0currencias (Positive n) xs =
  n0currenciasArbolSubconjuntos ys [1..n] == factorial (n-k)
  where ys = nub [1 + x `mod` n | x <- xs]
        k  = length ys
        factorial m = product [1..m]

-- La comprobación es
--     λ> quickCheckWith (stdArgs {maxSize=9}) prop_n0currencias
--     +++ OK, passed 100 tests.

```

Ejercicio 37

El teorema de Navidad de Fermat

- ¡Cuándo llegará otro día!
- Hoy es siempre todavía.

Antonio Machado

Enunciado

El 25 de diciembre de 1640, en una carta a Mersenne, Fermat demostró la conjetura de Girard: todo primo de la forma $4n+1$ puede expresarse de manera única como suma de dos cuadrados. Por eso es conocido como el Teorema de Navidad de Fermat

Definir las funciones

```
representaciones      :: Integer -> [(Integer,Integer)]
primosImparesConRepresentacionUnica :: [Integer]
primos4nM1            :: [Integer]
```

tales que

- $(representaciones\ n)$ es la lista de pares de números naturales (x,y) tales que $n = x^2 + y^2$ con $x \leq y$. Por ejemplo.
-

```
representaciones 20      == [(2,4)]
representaciones 25      == [(0,5),(3,4)]
representaciones 325     == [(1,18),(6,17),(10,15)]
representaciones 100000147984 == [(0,316228)]
length (representaciones (10^10)) == 6
length (representaciones (4*10^12)) == 7
```

- `primosImparesConRepresentacionUnica` es la lista de los números primos impares que se pueden escribir exactamente de una manera como suma de cuadrados de pares de números naturales (x,y) con $x \leq y$. Por ejemplo,

```
λ> take 20 primosImparesConRepresentacionUnica
[5,13,17,29,37,41,53,61,73,89,97,101,109,113,137,149,157,173,181,193]
```

- `primos4nM1` es la lista de los números primos que se pueden escribir como uno más un múltiplo de 4 (es decir, que son congruentes con 1 módulo 4). Por ejemplo,

```
λ> take 20 primos4nM1
[5,13,17,29,37,41,53,61,73,89,97,101,109,113,137,149,157,173,181,193]
```

El [teorema de Navidad de Fermat](#) que afirma que un número primo impar p se puede escribir exactamente de una manera como suma de dos cuadrados de números naturales $p = x^2 + y^2$ (con $x \leq y$) si, y sólo si, p se puede escribir como uno más un múltiplo de 4 (es decir, que son congruentes con 1 módulo 4).

Comprobar con QuickCheck el teorema de Navidad de Fermat; es decir, que para todo número n , los n -ésimos elementos de `primosImparesConRepresentacionUnica` y de `primos4nM1` son iguales.

Soluciones

```
import Data.Numbers.Primes (primes)
import Test.QuickCheck

-- 1ª definición de representaciones
-- =====
```



```

representaciones :: Integer -> [(Integer,Integer)]
representaciones n =
  [(x,y) | x <- [0..n], y <- [x..n], n == x*x + y*y]

-- 2ª definición de representaciones
-- =====

representaciones2 :: Integer -> [(Integer,Integer)]
representaciones2 n =
  [(x,raiz z) | x <- [0..raiz (n `div` 2)]
               , let z = n - x*x
               , esCuadrado z]

-- (esCuadrado x) se verifica si x es un número al cuadrado. Por
-- ejemplo,
--     esCuadrado 25 == True
--     esCuadrado 26 == False
esCuadrado :: Integer -> Bool
esCuadrado x = x == y * y
  where y = raiz x

-- (raiz x) es la raíz cuadrada entera de x. Por ejemplo,
--     raiz 25 == 5
--     raiz 24 == 4
--     raiz 26 == 5
raiz :: Integer -> Integer
raiz 0 = 0
raiz 1 = 1
raiz x = aux (0,x)
  where aux (a,b) | d == x    = c
                  | c == a    = a
                  | d < x     = aux (c,b)
                  | otherwise = aux (a,c)
    where c = (a+b) `div` 2
          d = c^2

-- 3ª definición de representaciones
-- =====

representaciones3 :: Integer -> [(Integer,Integer)]

```

```

representaciones3 n =
  [(x,raiz3 z) | x <- [0..raiz3 (n `div` 2)]
    , let z = n - x*x
    , esCuadrado3 z]

-- (esCuadrado3 x) se verifica si x es un número al cuadrado. Por
-- ejemplo,
--     esCuadrado3 25 == True
--     esCuadrado3 26 == False
esCuadrado3 :: Integer -> Bool
esCuadrado3 x = x == y * y
  where y = raiz3 x

-- (raiz3 x) es la raíz cuadrada entera de x. Por ejemplo,
--     raiz3 25 == 5
--     raiz3 24 == 4
--     raiz3 26 == 5
raiz3 :: Integer -> Integer
raiz3 x = floor (sqrt (fromIntegral x))

-- 4ª definición de representaciones
-- =====

representaciones4 :: Integer -> [(Integer, Integer)]
representaciones4 n = aux 0 (floor (sqrt (fromIntegral n)))
  where aux x y
    | x > y      = []
    | otherwise = case compare (x*x + y*y) n of
      LT -> aux (x + 1) y
      EQ -> (x, y) : aux (x + 1) (y - 1)
      GT -> aux x (y - 1)

-- Equivalencia de las definiciones de representaciones
-- =====

-- La propiedad es
prop_representaciones_equiv :: (Positive Integer) -> Bool
prop_representaciones_equiv (Positive n) =
  representaciones n == representaciones2 n &&
  representaciones2 n == representaciones3 n &&

```

```

representaciones3 n == representaciones4 n

-- La comprobación es
--   λ> quickCheck prop_representaciones_equiv
--   +++ OK, passed 100 tests.

-- Comparación de eficiencia de las definiciones de representaciones
-- =====

--   λ> representaciones 3025
--   [(0,55),(33,44)]
--   (2.86 secs, 1,393,133,528 bytes)
--   λ> representaciones2 3025
--   [(0,55),(33,44)]
--   (0.00 secs, 867,944 bytes)
--   λ> representaciones3 3025
--   [(0,55),(33,44)]
--   (0.00 secs, 173,512 bytes)
--   λ> representaciones4 3025
--   [(0,55),(33,44)]
--   (0.00 secs, 423,424 bytes)
--
--   λ> length (representaciones2 (10^10))
--   6
--   (3.38 secs, 2,188,903,544 bytes)
--   λ> length (representaciones3 (10^10))
--   6
--   (0.10 secs, 62,349,048 bytes)
--   λ> length (representaciones4 (10^10))
--   6
--   (0.11 secs, 48,052,360 bytes)
--
--   λ> length (representaciones3 (4*10^12))
--   7
--   (1.85 secs, 1,222,007,176 bytes)
--   λ> length (representaciones4 (4*10^12))
--   7
--   (1.79 secs, 953,497,480 bytes)

-- Definición de primosImparesConRepresentacionUnica

```

```

-- =====

primosImparesConRepresentacionUnica :: [Integer]
primosImparesConRepresentacionUnica =
  [x | x <- tail primes
    , length (representaciones4 x) == 1]

-- Definición de primos4nM1
-- =====

primos4nM1 :: [Integer]
primos4nM1 = [x | x <- primes
  , x `mod` 4 == 1]

-- Teorema de Navidad de Fermat
-- =====

-- La propiedad es
prop_teoremaDeNavidadDeFermat :: Positive Int -> Bool
prop_teoremaDeNavidadDeFermat (Positive n) =
  primosImparesConRepresentacionUnica !! n == primos4nM1 !! n

-- La comprobación es
--   λ> quickCheck prop_teoremaDeNavidadDeFermat
--   +++ OK, passed 100 tests.

```

Ejercicio 38

El 2019 es apocalíptico

A vosotros no os importe pensar lo que habéis leído ochenta veces y oído quinientas, porque no es lo mismo pensar que haber leído.

Antonio Machado

Enunciado

Un número natural n es [apocalíptico](<http://bit.ly/2RqeeNk>) si 2^n contiene la secuencia 666. Por ejemplo, 157 es apocalíptico porque 2^{157} es

182687704666362864775460604089535377456991567872

que contiene la secuencia 666.

Definir las funciones

```
esApocaliptico      :: Integer -> Bool
apocalipticos       :: [Integer]
posicionApocaliptica :: Integer -> Maybe Int
```

tales que

- (esApocaliptico n) se verifica si n es un número apocalíptico. Por ejemplo,

```
esApocaliptico 157 == True
esApocaliptico 2019 == True
esApocaliptico 2018 == False
```

- apocalipticos es la lista de los números apocalípticos. Por ejemplo,

```
take 9 apocalipticos == [157,192,218,220,222,224,226,243,245]
apocalipticos !! 450 == 2019
```

- (posicionApocalitica n) es justo la posición de n en la sucesión de números apocalípticos, si n es apocalíptico o Nothing, en caso contrario. Por ejemplo,

```
posicionApocalitica 157 == Just 0
posicionApocalitica 2019 == Just 450
posicionApocalitica 2018 == Nothing
```

Soluciones

```
import Data.List (isInfixOf, elemIndex)

-- 1ª definición de esApocaliptico
esApocaliptico :: Integer -> Bool
esApocaliptico n = "666" `isInfixOf` show (2^n)

-- 2ª definición de esApocaliptico
esApocaliptico2 :: Integer -> Bool
esApocaliptico2 = isInfixOf "666" . show . (2^)

-- 1ª definición de apocalipticos
apocalipticos :: [Integer]
apocalipticos = [n | n <- [1..], esApocaliptico n]

-- 2ª definición de apocalipticos
apocalipticos2 :: [Integer]
apocalipticos2 = filter esApocaliptico [1..]

-- 1ª definición de posicionApocalitica
```

```
posicionApocaliptica :: Integer -> Maybe Int
posicionApocaliptica n
  | y == n    = Just (length xs)
  | otherwise = Nothing
  where (xs,y:_) = span (<n) apocalipticos

-- 2ª definición de posicionApocaliptica
posicionApocaliptica2 :: Integer -> Maybe Int
posicionApocaliptica2 n
  | esApocaliptico n = elemIndex n apocalipticos
  | otherwise        = Nothing
```


Ejercicio 39

El 2019 es malvado

...Yo os enseño, o pretendo enseñaros a que dudéis de todo: de lo humano y de lo divino, sin excluir vuestra propia existencia.

Antonio Machado

Enunciado

Un número malvado es un número natural cuya expresión en base 2 contiene un número par de unos. Por ejemplo, 6 es malvado porque su expresión en base 2 es 110 que tiene dos unos.

Definir las funciones

```
esMalvado      :: Integer -> Bool
malvados      :: [Integer]
posicionMalvada :: Integer -> Maybe Int
```

tales que

- (esMalvado n) se verifica si n es un número malvado. Por ejemplo,

```
esMalvado 6      == True
esMalvado 7      == False
esMalvado 2019   == True
```

```
esMalvado (10^70000) == True
esMalvado (10^(3*10^7)) == True
```

- malvados es la sucesión de los números malvados. Por ejemplo,

```
λ> take 20 malvados
[0,3,5,6,9,10,12,15,17,18,20,23,24,27,29,30,33,34,36,39]
malvados !! 1009 == 2019
malvados !! 10 == 20
malvados !! (10^2) == 201
malvados !! (10^3) == 2000
malvados !! (10^4) == 20001
malvados !! (10^5) == 200000
malvados !! (10^6) == 2000001
```

- (posicionMalvada n) es justo la posición de n en la sucesión de números malvados, si n es malvado o Nothing, en caso contrario. Por ejemplo,

```
posicionMalvada 6 == Just 3
posicionMalvada 2019 == Just 1009
posicionMalvada 2018 == Nothing
posicionMalvada 2000001 == Just 1000000
posicionMalvada (10^7) == Just 5000000
```

Soluciones

```
import Data.List (genericLength, elemIndex)
import Data.Bits (popCount)
```

```
-- 1ª definición de esMalvado
-- =====
```

```
esMalvado :: Integer -> Bool
esMalvado n = even (numeroUnosBin n)
```

```
-- Sin argumentos
esMalvado' :: Integer -> Bool
esMalvado' = even . numeroUnosBin
```

```

-- (numeroUnosBin n) es el número de unos de la representación binaria
-- del número decimal n. Por ejemplo,
--   numeroUnosBin 11 == 3
--   numeroUnosBin 12 == 2
numeroUnosBin :: Integer -> Integer
numeroUnosBin n = genericLength (filter (== 1) (binario n))

-- Sin argumentos
numeroUnosBin' :: Integer -> Integer
numeroUnosBin' = genericLength . filter (== 1) . binario

-- (binario n) es el número binario correspondiente al número decimal n.
-- Por ejemplo,
--   binario 11 == [1,1,0,1]
--   binario 12 == [0,0,1,1]
binario :: Integer -> [Integer]
binario n | n < 2      = [n]
          | otherwise = n `mod` 2 : binario (n `div` 2)

-- 2ª definición de esMalvado
-- =====

esMalvado2 :: Integer -> Bool
esMalvado2 n = even (numeroUnosBin n)

-- (numeroIntBin n) es el número de unos que contiene la representación
-- binaria del número decimal n. Por ejemplo,
--   numeroIntBin 11 == 3
--   numeroIntBin 12 == 2
numeroIntBin :: Integer -> Integer
numeroIntBin n | n < 2      = n
               | otherwise = n `mod` 2 + numeroIntBin (n `div` 2)

-- 3ª definición de esMalvado
-- =====

esMalvado3 :: Integer -> Bool
esMalvado3 n = even (popCount n)

-- Sin argumentos

```

```

esMalvado3' :: Integer -> Bool
esMalvado3' = even . popCount

-- Comparación de eficiencia
-- =====

--      λ> esMalvado (10^30000)
--      True
--      (1.79 secs, 664,627,936 bytes)
--      λ> esMalvado2 (10^30000)
--      True
--      (1.79 secs, 664,626,992 bytes)
--      λ> esMalvado3 (10^30000)
--      True
--      (0.03 secs, 141,432 bytes)
--
--      λ> esMalvado (10^40000)
--      False
--      (2.95 secs, 1,162,091,464 bytes)
--      λ> esMalvado2 (10^40000)
--      False
--      (2.96 secs, 1,162,091,096 bytes)
--      λ> esMalvado3 (10^40000)
--      False
--      (0.04 secs, 155,248 bytes)

-- 1ª definición de malvados
-- =====

malvados :: [Integer]
malvados = [n | n <- [0..], esMalvado3 n]

-- 2ª definición de malvados
-- =====

malvados2 :: [Integer]
malvados2 = filter esMalvado3 [0..]

-- 1ª definición de posicionMalvada
-- =====

```

```
posicionMalvada :: Integer -> Maybe Int
posicionMalvada n
  | y == n    = Just (length xs)
  | otherwise = Nothing
  where (xs,y:_) = span (<n) malvados

-- 2ª definición de posicionMalvada
posicionMalvada2 :: Integer -> Maybe Int
posicionMalvada2 n
  | esMalvado n = elemIndex n malvados
  | otherwise   = Nothing
```


Ejercicio 40

El 2019 es semiprimo

Porque toda visión requiere distancia, no hay manera de ver las cosas sin salirse de ellas.

Antonio Machado

Enunciado

Un **número semiprimo** es un número natural que es producto de dos números primos no necesariamente distintos. Por ejemplo, 26 es semiprimo (porque $26 = 2 \cdot 13$) y 49 también lo es (porque $49 = 7 \cdot 7$).

Definir las funciones

```
esSemiprimo :: Integer -> Bool
semiprimos  :: [Integer]
```

tales que

- (esSemiprimo n) se verifica si n es semiprimo. Por ejemplo,

esSemiprimo 26	==	True
esSemiprimo 49	==	True
esSemiprimo 8	==	False
esSemiprimo 2019	==	True
esSemiprimo (21+10 ¹⁴)	==	True

- semiprimos es la sucesión de números semiprimos. Por ejemplo,

```
take 10 semiprimos == [4,6,9,10,14,15,21,22,25,26]
semiprimos !! 579  == 2019
semiprimos !! 10000 == 40886
```

Soluciones

```
import Data.Numbers.Primes
import Test.QuickCheck
```

```
-- 1ª definición de esSemiprimo
-- =====
```

```
esSemiprimo :: Integer -> Bool
esSemiprimo n =
  not (null [x | x <- [n,n-1..2],
                  primo x,
                  n `mod` x == 0,
                  primo (n `div` x)])
```

```
primo :: Integer -> Bool
primo n = [x | x <- [1..n], n `mod` x == 0] == [1,n]
```

```
-- 2ª definición de esSemiprimo
-- =====
```

```
esSemiprimo2 :: Integer -> Bool
esSemiprimo2 n =
  not (null [x | x <- [n-1,n-2..2],
                  isPrime x,
                  n `mod` x == 0,
                  isPrime (n `div` x)])
```

```
-- 3ª definición de esSemiprimo
-- =====
```

```
esSemiprimo3 :: Integer -> Bool
esSemiprimo3 n =
```



```

    not (null [x | x <- reverse (takeWhile (<n) primes),
              n 'mod' x == 0,
              isPrime (n 'div' x)])

-- 4ª definición de esSemiprimo
-- =====

esSemiprimo4 :: Integer -> Bool
esSemiprimo4 n =
    length (primeFactors n) == 2

-- Equivalencia de las definiciones de esSemiprimo
-- =====

-- La propiedad es
prop_esSemiprimo :: Positive Integer -> Bool
prop_esSemiprimo (Positive n) =
    all (== esSemiprimo n) [f n | f <- [ esSemiprimo2
                                         , esSemiprimo3
                                         , esSemiprimo4
                                         ]]

-- La comprobación es
--    λ> quickCheck prop_esSemiprimo
--    +++ OK, passed 100 tests.

-- Comparación de eficiencia
-- =====

--    λ> esSemiprimo 5001
--    True
--    (1.90 secs, 274,450,648 bytes)
--    λ> esSemiprimo2 5001
--    True
--    (0.07 secs, 29,377,016 bytes)
--    λ> esSemiprimo3 5001
--    True
--    (0.01 secs, 1,706,840 bytes)
--    λ> esSemiprimo4 5001
--    True

```

```
-- (0.01 secs, 142,840 bytes)
--
-- λ> esSemiprimo2 100001
-- True
-- (2.74 secs, 1,473,519,064 bytes)
-- λ> esSemiprimo3 100001
-- True
-- (0.09 secs, 30,650,352 bytes)
-- λ> esSemiprimo4 100001
-- True
-- (0.01 secs, 155,200 bytes)
--
-- λ> esSemiprimo3 10000001
-- True
-- (8.73 secs, 4,357,875,016 bytes)
-- λ> esSemiprimo4 10000001
-- True
-- (0.01 secs, 456,328 bytes)

-- Definición de semiprimos
-- =====

semiprimos :: [Integer]
semiprimos = filter esSemiprimo4 [4..]
```

Ejercicio 41

El 2019 es un número de la suerte

*Ya es sólo brocal el pozo;
púlpito será mañana;
pasado mañana, trono.*

Antonio Machado

Enunciado

Un **número de la suerte** es un número natural que se genera por una criba, similar a la criba de Eratóstenes, como se indica a continuación:

Se comienza con la lista de los números enteros a partir de 1:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25...

Se eliminan los números de dos en dos

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25...

Como el segundo número que ha quedado es 3, se eliminan los números restantes de tres en tres:

1, 3, 7, 9, 13, 15, 19, 21, 25...

Como el tercer número que ha quedado es 7, se eliminan los números restantes de siete en siete:

1,	3,	7,	9,	13,	15,	21,	25...
----	----	----	----	-----	-----	-----	-------

Este procedimiento se repite indefinidamente y los supervivientes son los números de la suerte:

1,3,7,9,13,15,21,25,31,33,37,43,49,51,63,67,69,73,75,79

Definir las funciones

```
numerosDeLaSuerte :: [Int]
esNumeroDeLaSuerte :: Int -> Bool
```

tales que

- `numerosDeLaSuerte` es la sucesión de los números de la suerte. Por ejemplo,

```
λ> take 20 numerosDeLaSuerte
[1,3,7,9,13,15,21,25,31,33,37,43,49,51,63,67,69,73,75,79]
λ> numerosDeLaSuerte !! 277
2019
λ> numerosDeLaSuerte !! 2000
19309
```

- `(esNumeroDeLaSuerte n)` que se verifica si `n` es un número de la suerte. Por ejemplo,

```
esNumeroDeLaSuerte 15 == True
esNumeroDeLaSuerte 16 == False
esNumeroDeLaSuerte 2019 == True
```

Soluciones

```
-- 1ª definición de numerosDeLaSuerte
numerosDeLaSuerte :: [Int]
numerosDeLaSuerte = criba 3 [1,3..]
```

```

where
  criba i (n:s:xs) =
    n : criba (i + 1) (s : [x | (k, x) <- zip [i..] xs
      , rem k s /= 0])

-- 2ª definición de numerosDeLaSuerte
numerosDeLaSuerte2 :: [Int]
numerosDeLaSuerte2 = 1 : criba 2 [1, 3..]
  where criba k xs = z : criba (k + 1) (aux xs)
    where z = xs !! (k - 1)
          aux ws = us ++ aux vs
            where (us, _:vs) = splitAt (z - 1) ws

-- Comparación de eficiencia
-- =====

-- λ> numerosDeLaSuerte2 !! 200
-- 1387
-- (9.25 secs, 2,863,983,232 bytes)
-- λ> numerosDeLaSuerte !! 200
-- 1387
-- (0.06 secs, 10,263,880 bytes)

-- Definición de esNumeroDeLaSuerte
esNumeroDeLaSuerte :: Int -> Bool
esNumeroDeLaSuerte n =
  n == head (dropWhile (<n) numerosDeLaSuerte)

```


Ejercicio 42

Cadena descendiente de subnúmeros

La inseguridad, la incertidumbre, la desconfianza, son acaso nuestras únicas verdades. Hay que aferrarse a ellas.

Antonio Machado

Enunciado

Una particularidad del 2019 es que se puede escribir como una cadena de dos subnúmeros consecutivos (el 20 y el 19).

Definir la función

`cadena :: Integer -> [Integer]`

tal que (cadena n) es la cadena de subnúmeros consecutivos de n cuya unión es n; es decir, es la lista de números $[x, x-1, \dots, x-k]$ tal que su concatenación es n. Por ejemplo,

<code>cadena 2019</code>	<code>== [20,19]</code>
<code>cadena 2018</code>	<code>== [2018]</code>
<code>cadena 1009</code>	<code>== [1009]</code>
<code>cadena 110109</code>	<code>== [110,109]</code>

```

cadena 201200199198 == [201,200,199,198]
cadena 3246          == [3246]
cadena 87654         == [8,7,6,5,4]
cadena 123456        == [123456]
cadena 1009998       == [100,99,98]
cadena 100908        == [100908]
cadena 1110987       == [11,10,9,8,7]
cadena 210           == [2,1,0]
cadena 1             == [1]
cadena 0             == [0]
cadena 312           == [312]
cadena 191           == [191]
length (cadena (read (concatMap show [2019,2018..0]))) == 2020

```

Nota: Los subnúmeros no pueden empezar por cero. Por ejemplo, [10,09] no es una cadena de 1009 como se observa en el tercer ejemplo.

Soluciones

```

import Test.QuickCheck
import Data.List (inits)

```

```

-- 1ª solución
-- =====

```

```

cadena :: Integer -> [Integer]
cadena = head . cadenasL . digitos

```

```

-- (digitos n) es la lista de los dígitos de n. Por ejemplo,
--   digitos 325 == [3,2,5]

```

```

digitos :: Integer -> [Integer]
digitos n = [read [c] | c <- show n]

```

```

-- (cadenasL xs) son las cadenas descendientes del número cuyos dígitos
-- son xs. Por ejemplo,
--   cadenasL [2,0,1,9] == [[20,19],[2019]]
--   cadenasL [1,0,0,9] == [[1009]]
--   cadenasL [1,1,0,1,0,9] == [[110,109],[110109]]

```



```

cadenasL :: [Integer] -> [[Integer]]
cadenasL []      = []
cadenasL [x]     = [[x]]
cadenasL [1,0]   = [[1,0],[10]]
cadenasL (x:0:zs) = cadenasL (10*x:zs)
cadenasL (x:y:zs) =
    [x:a:as | (a:as) <- cadenasL (y:zs), a == x-1]
  ++ cadenasL (10*x+y:zs)

-- 2ª solución
-- =====

cadena2 :: Integer -> [Integer]
cadena2 n = (head . concatMap aux . iniciales) n
  where aux x = [[x,x-1..x-k] | k <- [0..x]
                                , concatMap show [x,x-1..x-k] == ds]
        ds    = show n

-- (iniciales n) es la lista de los subnúmeros iniciales de n. Por
-- ejemplo,
--   iniciales 2019 == [2,20,201,2019]
iniciales :: Integer -> [Integer]
iniciales = map read . tail . inits . show

-- Equivalencia
-- =====

-- La propiedad es
prop_cadena :: Positive Integer -> Bool
prop_cadena (Positive n) =
  cadena n == cadena2 n

-- La comprobación es
--   λ> quickCheck prop_cadena
--   +++ OK, passed 100 tests.

-- Comparación de eficiencia
-- =====

--   λ> length (cadena (read (concatMap show [15,14..0])))

```

```
-- 16
-- (3.28 secs, 452,846,008 bytes)
-- λ> length (cadena2 (read (concatMap show [15,14..0])))
-- 16
-- (0.03 secs, 176,360 bytes)
```

Ejercicio 43

Mínimo producto escalar

El escepticismo es una posición vital, no lógica, que ni afirma ni niega, se limita a preguntar, y no se asusta de las contradicciones.

Antonio Machado

Enunciado

El producto escalar de los vectores (a_1, a_2, \dots, a_n) y (b_1, b_2, \dots, b_n) es

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_n * b_n$$

Definir la función

```
menorProductoEscalar :: (Ord a, Num a) => [a] -> [a] -> a
```

tal que (menorProductoEscalar xs ys) es el mínimo de los productos escalares de las permutaciones de xs y de las permutaciones de ys. Por ejemplo,

menorProductoEscalar	[3,2,5]	[1,4,6]	==	29
menorProductoEscalar	[3,2,5]	[1,4,-6]	==	-19
menorProductoEscalar	[0..9]	[0..9]	==	120
menorProductoEscalar	[0..99]	[0..99]	==	161700
menorProductoEscalar	[0..999]	[0..999]	==	166167000

```

menorProductoEscalar [0..9999] [0..9999]      == 166616670000
menorProductoEscalar [0..99999] [0..99999]    == 166661666700000
menorProductoEscalar [0..999999] [0..999999] == 166666166667000000

```

Soluciones

```

import Data.List (sort, permutations)
import Test.QuickCheck

```

-- 1ª solución

```

menorProductoEscalar :: (Ord a, Num a) => [a] -> [a] -> a
menorProductoEscalar xs ys =
    minimum [sum (zipWith (*) pxs pys) | pxs <- permutations xs,
                                           pys <- permutations ys]

```

-- 2ª solución

```

menorProductoEscalar2 :: (Ord a, Num a) => [a] -> [a] -> a
menorProductoEscalar2 xs ys =
    minimum [sum (zipWith (*) pxs ys) | pxs <- permutations xs]

```

-- 3ª solución

```

menorProductoEscalar3 :: (Ord a, Num a) => [a] -> [a] -> a
menorProductoEscalar3 xs ys =
    sum (zipWith (*) (sort xs) (reverse (sort ys)))

```

-- Equivalencia

-- =====

-- La propiedad es

```

prop_menorProductoEscalar :: [Integer] -> [Integer] -> Bool
prop_menorProductoEscalar xs ys =
    menorProductoEscalar3 xs' ys' == menorProductoEscalar xs' ys' &&
    menorProductoEscalar3 xs' ys' == menorProductoEscalar2 xs' ys'
    where n = min (length xs) (length ys)
          xs' = take n xs
          ys' = take n ys

```

-- La comprobación es

```
-- λ> quickCheckWith (stdArgs {maxSize=7}) prop_menorProductoEscalar
-- +++ OK, passed 100 tests.

-- Comparación de eficiencia
-- =====

-- La comparación es
-- λ> menorProductoEscalar1 [0..5] [0..5]
-- 20
-- (3.24 secs, 977385528 bytes)
-- λ> menorProductoEscalar2 [0..5] [0..5]
-- 20
-- (0.01 secs, 4185776 bytes)
--
-- λ> menorProductoEscalar2 [0..9] [0..9]
-- 120
-- (23.86 secs, 9342872784 bytes)
-- λ> menorProductoEscalar3 [0..9] [0..9]
-- 120
-- (0.01 secs, 2580824 bytes)
--
-- λ> menorProductoEscalar3 [0..10^6] [0..10^6]
-- 166666666666500000
-- (2.46 secs, 473,338,912 bytes)
```


Ejercicio 44

Numeración de ternas de naturales

¿Cabe una comunión cordial entre hombres, que nos permita cantar en coro, animados de un mismo sentir?

Antonio Machado

Enunciado

Las ternas de números naturales se pueden ordenar como sigue

```
(0,0,0),  
(0,0,1),(0,1,0),(1,0,0),  
(0,0,2),(0,1,1),(0,2,0),(1,0,1),(1,1,0),(2,0,0),  
(0,0,3),(0,1,2),(0,2,1),(0,3,0),(1,0,2),(1,1,1),(1,2,0),(2,0,1),...  
...
```

Definir la función

```
posicion :: (Int,Int,Int) -> Int
```

tal que `posicion (x,y,z)` es la posición de la terna de números naturales `(x,y,z)` en la ordenación anterior. Por ejemplo,

```
posicion (0,1,0) == 2
posicion (0,0,2) == 4
posicion (0,1,1) == 5
```

Comprobar con QuickCheck que

- la posición de $(x,0,0)$ es $x(x^2+6x+11)/6$
- la posición de $(0,y,0)$ es $y(y^2+3y+8)/6$
- la posición de $(0,0,z)$ es $z(z^2+3z+2)/6$
- la posición de (x,x,x) es $x(9x^2+14x+7)/2$

Soluciones

```
import Test.QuickCheck
import Data.List (elemIndex)
import Data.Maybe (fromJust)
```

```
-- 1ª solución
-- =====
```

```
posicion :: (Int,Int,Int) -> Int
posicion (x,y,z) = length (takeWhile (/= (x,y,z)) ternas)
```

```
-- ternas es la lista ordenada de las ternas de números naturales. Por ejemplo,
-- ghci> take 9 ternas
-- [(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(1,0,0),(0,0,2),(0,1,1),(0,2,0),(1,0,1),(1,1,0)]
ternas :: [(Int,Int,Int)]
ternas = [(x,y,n-x-y) | n <- [0..], x <- [0..n], y <- [0..n-x]]
```

```
-- 2ª solución
-- =====
```

```
posicion2 :: (Int,Int,Int) -> Int
posicion2 t = aux 0 ternas
  where aux n (t':ts) | t' == t = n
```



```

| otherwise = aux (n+1) ts

-- 3ª solución
-- =====

posicion3 :: (Int,Int,Int) -> Int
posicion3 t =
  head [n | (n,t') <- zip [0..] ternas, t' == t]

-- 4ª solución
-- =====

posicion4 :: (Int,Int,Int) -> Int
posicion4 t = fromJust (elemIndex t ternas)

-- 5ª solución
-- =====

posicion5 :: (Int,Int,Int) -> Int
posicion5 = fromJust . ('elemIndex' ternas)

-- Equivalencia
-- =====

-- La propiedad es
prop_posicion_equiv :: NonNegative Int
                    -> NonNegative Int
                    -> NonNegative Int
                    -> Bool
prop_posicion_equiv (NonNegative x) (NonNegative y) (NonNegative z) =
  all (== posicion (x,y,z)) [f (x,y,z) | f <- [ posicion2
                                                , posicion3
                                                , posicion4
                                                , posicion5
                                                ]]

-- La comprobación es
--   λ> quickCheckWith (stdArgs {maxSize=20}) prop_posicion_equiv
--   +++ OK, passed 100 tests.

```

```

-- Comparación de eficiencia
-- =====

--  λ> posicion (200,0,0)
--  1373700
--  (2.48 secs, 368,657,528 bytes)
--  λ> posicion2 (200,0,0)
--  1373700
--  (3.96 secs, 397,973,912 bytes)
--  λ> posicion3 (200,0,0)
--  1373700
--  (1.47 secs, 285,831,056 bytes)
--  λ> posicion4 (200,0,0)
--  1373700
--  (0.13 secs, 102,320 bytes)
--  λ> posicion5 (200,0,0)
--  1373700
--  (0.14 secs, 106,376 bytes)

-- Propiedades
-- =====

-- La 1ª propiedad es
prop_posicion1 :: NonNegative Int -> Bool
prop_posicion1 (NonNegative x) =
  posicion (x,0,0) == x * (x^2 + 6*x + 11) `div` 6

-- Su comprobación es
--  λ> quickCheckWith (stdArgs {maxSize=20}) prop_posicion1
--  +++ OK, passed 100 tests.

-- La 2ª propiedad es
prop_posicion2 :: NonNegative Int -> Bool
prop_posicion2 (NonNegative y) =
  posicion (0,y,0) == y * (y^2 + 3*y + 8) `div` 6

-- Su comprobación es
--  λ> quickCheckWith (stdArgs {maxSize=20}) prop_posicion2
--  +++ OK, passed 100 tests.

```

```
-- La 3ª propiedad es
prop_posicion3 :: NonNegative Int -> Bool
prop_posicion3 (NonNegative z) =
  posicion (0,0,z) == z * (z^2 + 3*z + 2) 'div' 6

-- Su comprobación es
--   λ> quickCheckWith (stdArgs {maxSize=20}) prop_posicion3
--   +++ OK, passed 100 tests.

-- La 4ª propiedad es
prop_posicion4 :: NonNegative Int -> Bool
prop_posicion4 (NonNegative x) =
  posicion (x,x,x) == x * (9 * x^2 + 14 * x + 7) 'div' 2

-- Su comprobación es
--   λ> quickCheckWith (stdArgs {maxSize=20}) prop_posicion4
--   +++ OK, passed 100 tests.
```


Ejercicio 45

Subárboles monovalorados

*Y nadie pregunta
ni nadie contesta,
todos hablan solos.*

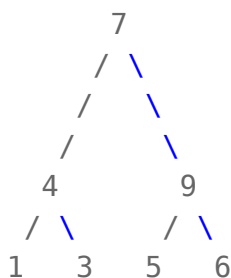
Antonio Machado

Enunciado

Los árboles binarios con valores enteros se pueden representar mediante el tipo `Arbol` definido por

```
data Arbol = H Int
           | N Int Arbol Arbol
           deriving Show
```

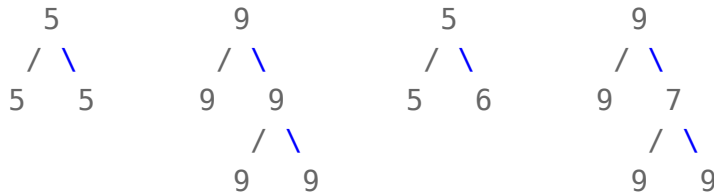
Por ejemplo, el árbol



se puede representar por

```
N 7 (N 4 (H 1) (H 3)) (N 9 (H 5) (H 6))
```

Un árbol es monovalorado si todos sus elementos son iguales. Por ejemplo, de los siguientes árboles sólo son monovalorados los dos primeros



Definir la función

```
monovalorados :: Arbol -> [Arbol]
```

tal que (monovalorados a) es la lista de los subárboles monovalorados de a. Por ejemplo,

```
λ> monovalorados (N 5 (H 5) (H 5))
[N 5 (H 5) (H 5), H 5, H 5]
λ> monovalorados (N 5 (H 5) (H 6))
[H 5, H 6]
λ> monovalorados (N 9 (H 9) (N 9 (H 9) (H 9)))
[N 9 (H 9) (N 9 (H 9) (H 9)), H 9, N 9 (H 9) (H 9), H 9, H 9]
λ> monovalorados (N 9 (H 9) (N 7 (H 9) (H 9)))
[H 9, H 9, H 9]
λ> monovalorados (N 9 (H 9) (N 9 (H 7) (H 9)))
[H 9, H 7, H 9]
```

Soluciones

```
data Arbol = H Int
           | N Int Arbol Arbol
           deriving (Show, Eq)
```

```
monovalorados :: Arbol -> [Arbol]
```

```
monovalorados (H x) = [H x]
monovalorados (N x i d)
  | todosIguales i x && todosIguales d x =
    N x i d : subarboles i ++ subarboles d
  | otherwise = monovalorados i ++ monovalorados d

-- (todosIguales a x) se verifica si todos los valores de los nodos y
-- las hojas del árbol a son iguales a x.
todosIguales :: Arbol -> Int -> Bool
todosIguales (H y) x      = y == x
todosIguales (N y i d) x = y == x && todosIguales i x && todosIguales d x

-- (subarboles a) es la lista de los subárboles de a.
subarboles :: Arbol -> [Arbol]
subarboles (H x)      = [H x]
subarboles (N x i d) = N x i d : subarboles i ++ subarboles d
```


Ejercicio 46

Mayor prefijo con suma acotada

Sed hombres de mal gusto. Yo os aconsejo el mal gusto para combatir los excesos de la moda.

Antonio Machado

Enunciado

Definir la función

```
mayorPrefijoAcotado :: [Int] -> Int -> [Int]
```

tal que (mayorPrefijoAcotado xs y) es el mayor prefijo de la lista de números enteros positivos xs cuya suma es menor o igual que y. Por ejemplo,

```
mayorPrefijoAcotado [45,30,55,20,80,20] 75 == [45,30]
mayorPrefijoAcotado [45,30,55,20,80,20] 140 == [45,30,55]
mayorPrefijoAcotado [45,30,55,20,80,20] 180 == [45,30,55,20]
length (mayorPrefijoAcotado (repeat 1) (8*10^6)) == 8000000
```

Soluciones

```
import Data.List (inits)
```

```
-- 1ª solución
```

```
-- =====
```

```
mayorPrefijoAcotado :: [Int] -> Int -> [Int]
mayorPrefijoAcotado [] _ = []
mayorPrefijoAcotado (x:xs) y
  | x > y = []
  | otherwise = x : mayorPrefijoAcotado xs (y-x)
```

```
-- 2ª solución
```

```
-- =====
```

```
mayorPrefijoAcotado2 :: [Int] -> Int -> [Int]
mayorPrefijoAcotado2 xs y =
  take (longitudMayorPrefijoAcotado2 xs y) xs

longitudMayorPrefijoAcotado2 :: [Int] -> Int -> Int
longitudMayorPrefijoAcotado2 xs y =
  length (takeWhile (<=y) (map sum (inits xs))) - 1
```

```
-- 3ª solución
```

```
-- =====
```

```
mayorPrefijoAcotado3 :: [Int] -> Int -> [Int]
mayorPrefijoAcotado3 xs y =
  take (longitudMayorPrefijoAcotado3 xs y) xs

longitudMayorPrefijoAcotado3 :: [Int] -> Int -> Int
longitudMayorPrefijoAcotado3 xs y =
  length (takeWhile (<= y) (scanl1 (+) xs))
```

```
-- Equivalencia
```

```
-- =====
```

```
-- La propiedad es
```

```
prop_equiv :: [Int] -> Int -> Bool
```

```
prop_equiv xs y =
```

```
  mayorPrefijoAcotado xs' y' == mayorPrefijoAcotado2 xs' y' &&
```

```
  mayorPrefijoAcotado xs' y' == mayorPrefijoAcotado3 xs' y'
```

```
  where xs' = map abs xs
```

$y' = \text{abs } y$

```
-- La comprobación es
-- λ> quickCheck prop_equiv
-- +++ OK, passed 100 tests.
-- (0.01 secs, 2,463,688 bytes)

-- Comparación de eficiencia
-- =====

-- λ> length (mayorPrefijoAcotado (repeat 1) (2*10^4))
-- 20000
-- (0.04 secs, 5,086,544 bytes)
-- λ> length (mayorPrefijoAcotado2 (repeat 1) (2*10^4))
-- 20000
-- (11.22 secs, 27,083,980,168 bytes)
-- λ> length (mayorPrefijoAcotado3 (repeat 1) (2*10^4))
-- 20000
-- (0.02 secs, 4,768,992 bytes)
--
-- λ> length (mayorPrefijoAcotado (repeat 1) (8*10^6))
-- 8000000
-- (3.19 secs, 1,984,129,832 bytes)
-- λ> length (mayorPrefijoAcotado3 (repeat 1) (8*10^6))
-- 8000000
-- (1.02 secs, 1,856,130,936 bytes)
```


Ejercicio 47

Ofertas 3 por 2

*Despacito y buena letra:
el hacer las cosas bien
importa más que el hacerlas.*

Antonio Machado

Enunciado

En una tienda tiene la “oferta 3 por 2” de forma que cada cliente que elige 3 artículos obtiene el más barato de forma gratuita. Por ejemplo, si los precios de los artículos elegidos por un cliente son 10, 2, 4, 5 euros pagará 19 euros si agrupa los artículos en (10,2,4) y (5) o pagará 17 si lo agrupa en (5,10,4) y (2).

Definir la función

```
minimoConOferta :: [Int] -> Int
```

tal que (minimoConOferta xs) es lo mínimo que pagará el cliente si los precios de la compra son xs; es decir, lo que pagará agrupando los artículos de forma óptima para aplicar la oferta 3 por 2. Por ejemplo,

```
minimoConOferta [10,2,4,5]    == 17
minimoConOferta [3,2,3,2]     == 8
minimoConOferta [6,4,5,5,5,5] == 21
```

Soluciones

```

import Data.List (sort, sortOn)
import Data.Ord  (Down(..))

-- 1ª solución
-- =====

minimoConOferta :: [Int] -> Int
minimoConOferta xs = sum (sinTerceros (reverse (sort xs)))

sinTerceros :: [a] -> [a]
sinTerceros []          = []
sinTerceros [x]         = [x]
sinTerceros [x,y]       = [x,y]
sinTerceros (x:y:_:zs) = x : y : sinTerceros zs

-- 2ª solución
-- =====

minimoConOferta2 :: [Int] -> Int
minimoConOferta2 = sum . sinTerceros . reverse . sort

-- 3ª solución
-- =====

minimoConOferta3 :: [Int] -> Int
minimoConOferta3 = sum . sinTerceros . sortOn Down

-- 4ª solución
-- =====

minimoConOferta4 :: [Int] -> Int
minimoConOferta4 xs = aux (reverse (sort xs)) 0
  where aux (a:b:_:ds) n = aux ds (a+b+n)
        aux as          n = n + sum as

-- 5ª solución
-- =====

```

```
minimoConOferta5 :: [Int] -> Int
minimoConOferta5 xs = aux (sortOn Down xs) 0
  where aux (a:b:_:ds) n = aux ds (a+b+n)
        aux as      n = n + sum as
```


Ejercicio 48

Representación de conjuntos mediante intervalos

Cuando el saber se especializa, crece el volumen total de la cultura. Esta es la ilusión y el consuelo de los especialistas. ¡Lo que sabemos entre todos! ¡Oh, eso es lo que no sabe nadie!

Antonio Machado

Enunciado

Un conjunto de números enteros se pueden representar mediante una lista ordenada de intervalos tales que la diferencia entre el menor elemento de un intervalo y el mayor elemento de su intervalo anterior es mayor que uno.

Por ejemplo, el conjunto {2, 7, 4, 3, 9, 6} se puede representar mediante la lista de intervalos [(2,4),(6,7),(9,9)] de forma que en el primer intervalo se agrupan los números 2, 3 y 4; en el segundo, los números 6 y 7 y el tercero, el número 9.

Definir la función

```
intervalos :: [Int] -> [(Int,Int)]
```

tal que (intervalos xs) es lista ordenada de intervalos que representa al conjunto xs. Por ejemplo,

```
λ> intervalos [2,7,4,3,9,6]
[(2,4),(6,7),(9,9)]
λ> intervalos [180,141,174,143,142,175]
[(141,143),(174,175),(180,180)]
```

Soluciones

```
import Data.List (sort)

intervalos :: [Int] -> [(Int,Int)]
intervalos = map intervalo . segmentos

-- (segmentos xs) es la lista de segmentos formados por elementos
-- consecutivos de xs. Por ejemplo,
--   segmentos [2,7,4,3,9,6] == [[2,3,4],[6,7],[9]]
segmentos :: [Int] -> [[Int]]
segmentos xs = aux bs [[b]]
  where aux [] zs = zs
        aux (y:ys) ((a:as):zs) | y == a-1 = aux ys ((y:a:as):zs)
                                | otherwise = aux ys ([y]:(a:as):zs)
        (b:bs) = reverse (sort xs)

-- (intervalo xs) es el intervalo correspondiente al segmento xs. Por
-- ejemplo,
--   intervalo [2,3,4] == (2,4)
--   intervalo [6,7]  == (6,7)
--   intervalo [9]    == (9,9)
intervalo :: [Int] -> (Int,Int)
intervalo xs = (head xs, last xs)
```

Ejercicio 49

Números altamente compuestos

*Nuestras horas son minutos
cuando esperamos saber,
y siglos cuando sabemos
lo que se puede aprender.*

Antonio Machado

Enunciado

Un número [altamente compuesto](<http://bit.ly/2H7Vj61>) es un entero positivo con más divisores que cualquier entero positivo más pequeño. Por ejemplo,

- 4 es un número altamente compuesto porque es el menor con 3 divisores,
- 5 no es altamente compuesto porque tiene menos divisores que 4 y
- 6 es un número altamente compuesto porque es el menor con 4 divisores,

Los primeros números altamente compuestos son

1, 2, 4, 6, 12, 24, 36, 48, 60, 120, 180, 240, ...

```

esAltamenteCompuesto    :: Int -> Bool
altamenteCompuestos      :: [Int]
graficaAltamenteCompuestos :: Int -> IO ()

```

tales que

- (esAltamenteCompuesto x) se verifica si x es altamente compuesto. Por ejemplo,

```

esAltamenteCompuesto 4    == True
esAltamenteCompuesto 5    == False
esAltamenteCompuesto 6    == True
esAltamenteCompuesto 1260 == True
esAltamenteCompuesto 2520 == True
esAltamenteCompuesto 27720 == True

```

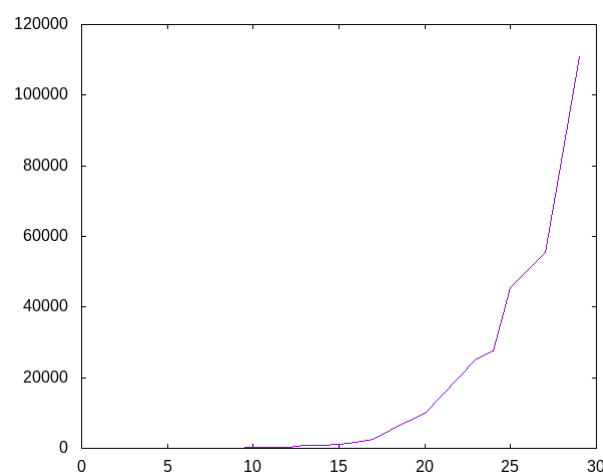
- altamente compuestos es la sucesión de los números altamente compuestos. Por ejemplo,

```

λ> take 20 altamenteCompuestos
[1,2,4,6,12,24,36,48,60,120,180,240,360,720,840,1260,1680,2520,5040,7560]

```

- (graficaAltamenteCompuestos n) dibuja la gráfica de los n primeros números altamente compuestos. Por ejemplo, (graficaAltamenteCompuestos 25) dibuja



Soluciones

```

import Data.List (group)
import Data.Numbers.Primes (primeFactors)
import Graphics.Gnuplot.Simple

-- 1ª definición de esAltamenteCompuesto
-- =====

esAltamenteCompuesto :: Int -> Bool
esAltamenteCompuesto x =
  and [nDivisores x > nDivisores y | y <- [1..x-1]]

-- (nDivisores x) es el número de divisores de x. Por ejemplo,
--   nDivisores 30 == 8
nDivisores :: Int -> Int
nDivisores x = length (divisores x)

-- (divisores x) es la lista de los divisores de x. Por ejemplo,
--   divisores 30 == [1,2,3,5,6,10,15,30]
divisores :: Int -> [Int]
divisores x =
  [y | y <- [1..x]
    , x `mod` y == 0]

-- 2ª definición de esAltamenteCompuesto
-- =====

esAltamenteCompuesto2 :: Int -> Bool
esAltamenteCompuesto2 x =
  all (nDivisores2 x >) [nDivisores2 y | y <- [1..x-1]]

-- (nDivisores2 x) es el número de divisores de x. Por ejemplo,
--   nDivisores2 30 == 8
nDivisores2 :: Int -> Int
nDivisores2 = succ . length . divisoresPropios

-- (divisoresPropios x) es la lista de los divisores de x menores que
-- x. Por ejemplo,
--   divisoresPropios 30 == [1,2,3,5,6,10,15]

```

```

divisoresPropios :: Int -> [Int]
divisoresPropios x =
  [y | y <- [1..x 'div' 2]
    , x 'mod' y == 0]

-- 3ª definición de esAltamenteCompuesto
-- =====

esAltamenteCompuesto3 :: Int -> Bool
esAltamenteCompuesto3 x =
  all (nDivisores3 x >) [nDivisores3 y | y <- [1..x-1]]

-- (nDivisores3 x) es el número de divisores de x. Por ejemplo,
--   nDivisores3 30 == 8
nDivisores3 :: Int -> Int
nDivisores3 x =
  product [1 + length xs | xs <- group (primeFactors x)]

-- 4ª definición de esAltamenteCompuesto
-- =====

esAltamenteCompuesto4 :: Int -> Bool
esAltamenteCompuesto4 x =
  x 'pertenece' altamenteCompuestos2

-- 1ª definición de altamenteCompuestos
-- =====

altamenteCompuestos :: [Int]
altamenteCompuestos =
  filter esAltamenteCompuesto4 [1..]

-- 2ª definición de altamenteCompuestos
-- =====

altamenteCompuestos2 :: [Int]
altamenteCompuestos2 =
  1 : [y | ((_,n),(y,m)) <- zip sucMaxDivisores (tail sucMaxDivisores)
    , m > n]

```

```

-- sucMaxDivisores es la sucesión formada por los números enteros
-- positivos y el máximo número de divisores hasta cada número. Por
-- ejemplo,
--     λ> take 12 sucMaxDivisores
--     [(1,1),(2,2),(3,2),(4,3),(5,3),(6,4),(7,4),(8,4),(9,4),(10,4),(11,4),(12,6)]
sucMaxDivisores :: [(Int,Int)]
sucMaxDivisores =
    zip [1..] (scanl1 max (map nDivisores3 [1..]))

pertenece :: Int -> [Int] -> Bool
pertenece x ys =
    x == head (dropWhile (<x) ys)

-- Comparación de eficiencia de esAltamenteCompuesto
-- =====

--     λ> esAltamenteCompuesto 1260
--     True
--     (2.99 secs, 499,820,296 bytes)
--     λ> esAltamenteCompuesto2 1260
--     True
--     (0.51 secs, 83,902,744 bytes)
--     λ> esAltamenteCompuesto3 1260
--     True
--     (0.04 secs, 15,294,192 bytes)
--     λ> esAltamenteCompuesto4 1260
--     True
--     (0.04 secs, 15,594,392 bytes)
--
--     λ> esAltamenteCompuesto2 2520
--     True
--     (2.10 secs, 332,940,168 bytes)
--     λ> esAltamenteCompuesto3 2520
--     True
--     (0.09 secs, 37,896,168 bytes)
--     λ> esAltamenteCompuesto4 2520
--     True
--     (0.06 secs, 23,087,456 bytes)
--
--     λ> esAltamenteCompuesto3 27720

```

```
--      True
--      (1.32 secs, 841,010,624 bytes)
--      λ> esAltamenteCompuesto4 27720
--      True
--      (1.33 secs, 810,870,384 bytes)

-- Comparación de eficiencia de altamenteCompuestos
-- =====

--      λ> altamenteCompuestos !! 25
--      45360
--      (2.84 secs, 1,612,045,976 bytes)
--      λ> altamenteCompuestos2 !! 25
--      45360
--      (0.01 secs, 102,176 bytes)

-- Definición de graficaAltamenteCompuestos
-- =====

graficaAltamenteCompuestos :: Int -> IO ()
graficaAltamenteCompuestos n =
  plotList [ Key Nothing
            , PNG ("Numeros_altamente_compuestos.png")
            ]
            (take n altamenteCompuestos2)
```


Ejercicio 50

Posiciones del 2019 en el número pi

Aprendió tantas cosas, que no tuvo tiempo para pensar en ninguna de ellas.

Antonio Machado

Enunciado

El fichero [Digitos_de_pi.txt](#) contiene el número pi con un millón de decimales; es decir,

3,1415926535897932384626433832...83996346460422090106105779458151

Definir la función

```
posiciones :: String -> Int -> IO [Int]
```

tal que (posicion cs k) es la lista de las posiciones iniciales de cs en la sucesión formada por los k primeros dígitos decimales del número pi. Por ejemplo,

```
λ> posiciones "141" 1000  
[0,294]
```

```
λ> posiciones "4159" 10000
[1,5797,6955,9599]
```

Calcular la primera posición de 2019 en los decimales de pi y el número de veces que aparece 2019 en el primer millón de decimales de pi.

Soluciones

```
import Data.List ( isPrefixOf
                  , findIndices
                  , tails
                  )

-- 1ª definición
-- =====

posiciones :: String -> Int -> IO [Int]
posiciones cs k = do
  ds <- readFile "Digitos_de_pi.txt"
  return (posicionesEnLista cs (take (k-1) (drop 2 ds)))

--    posicionesEnLista "23" "234235523" == [0,3,7]
posicionesEnLista :: Eq a => [a] -> [a] -> [Int]
posicionesEnLista xs ys = reverse (aux ys 0 [])
  where aux [] _ ns = ns
        aux (y:ys') n ns | xs 'isPrefixOf' (y:ys') = aux ys' (n+1) (n:ns)
                          | otherwise                = aux ys' (n+1) ns

-- 2ª definición
-- =====

posiciones2 :: String -> Int -> IO [Int]
posiciones2 cs k = do
  ds <- readFile "Digitos_de_pi.txt"
  return (findIndices (cs 'isPrefixOf') (tails (take (k-1) (drop 2 ds))))

-- Comparación de eficiencia
-- =====
```

```
-- λ> length <$> posiciones "2019" (10^6)
-- 112
-- (1.73 secs, 352,481,272 bytes)
-- λ> length <$> posiciones2 "2019" (10^6)
-- 112
-- (0.16 secs, 144,476,384 bytes)

-- El cálculo es
-- λ> ps <- posiciones "2019" (10^6)
-- λ> head ps
-- 243
-- λ> length ps
-- 112
-- Por tanto, la posición de la primera ocurrencia es 243 y hay 112
-- ocurrencias. Otra forma de hacer los cálculos anteriores es
-- λ> head <$> posiciones "2019" (10^6)
-- 243
-- λ> length <$> posiciones "2019" (10^6)
-- 112
```


Ejercicio 51

Mínimo número de operaciones para transformar un número en otro

*¿Dijiste media verdad?
Dirán que mientes dos veces
si dices la otra mitad.*

Antonio Machado

Enunciado

Se considera el siguiente par de operaciones sobre los números:

- multiplicar por dos
- restar uno.

Dados dos números x e y se desea calcular el menor número de operaciones para transformar x en y . Por ejemplo, el menor número de operaciones para transformar el 4 en 7 es 2:

4 -----> 8 -----> 7
 (*2) (-1)

y el menor número de operaciones para transformar 2 en 5 es 4

2 -----> 4 -----> 3 -----> 6 -----> 5
 (*2) (-1) (*2) (-1)

Definir las siguientes funciones

```
arbolOp :: Int -> Int -> Arbol
minNOp  :: Int -> Int -> Int
```

tales que

- (arbolOp x n) es el árbol de profundidad n obtenido aplicándole a x las dos operaciones. Por ejemplo,
-

```
λ> arbolOp 4 1
N 4 (H 8) (H 3)
λ> arbolOp 4 2
N 4 (N 8 (H 16) (H 7))
    (N 3 (H 6) (H 2))
λ> arbolOp 2 3
N 2 (N 4
    (N 8 (H 16) (H 7))
    (N 3 (H 6) (H 2)))
    (N 1
    (N 2 (H 4) (H 1))
    (H 0))
λ> arbolOp 2 4
N 2 (N 4 (N 8
    (N 16 (H 32) (H 15))
    (N 7 (H 14) (H 6)))
    (N 3
    (N 6 (H 12) (H 5))
    (N 2 (H 4) (H 1))))
    (N 1 (N 2
    (N 4 (H 8) (H 3))
    (N 1 (H 2) (H 0)))
    (H 0))
```

- (minNOp x y) es el menor número de operaciones necesarias para transformar x en y. Por ejemplo,
-

```
minNOP 4 7 == 2
minNOP 2 5 == 4
minNOP 2 2 == 0
```

Soluciones

```
data Arbol = H Int
           | N Int Arbol Arbol
  deriving (Show, Eq)

arbolOp :: Int -> Int -> Arbol
arbolOp 0 _ = H 0
arbolOp x 0 = H x
arbolOp x n = N x (arbolOp (2 * x) (n - 1)) (arbolOp (x - 1) (n - 1))

ocurre :: Int -> Arbol -> Bool
ocurre x (H y)      = x == y
ocurre x (N y i d) = x == y || ocurre x i || ocurre x d

minNOP :: Int -> Int -> Int
minNOP x y =
  head [n | n <- [0..]
        , ocurre y (arbolOp x n)]
```


Ejercicio 52

Intersección de listas infinitas crecientes

*Alguna vez he pensado
si el alma será la ausencia,
mientras más cerca más lejos;
mientras más lejos más cerca.*

Antonio Machado

Enunciado

Definir la función

```
interseccion :: Ord a => [[a]] -> [a]
```

tal que (interseccion xss) es la intersección de la lista no vacía de listas infinitas crecientes xss; es decir, la lista de los elementos que pertenecen a todas las listas de xss. Por ejemplo,

```
λ> take 10 (interseccion [[2,4..],[3,6..],[5,10..]])  
[30,60,90,120,150,180,210,240,270,300]  
λ> take 10 (interseccion [[2,5..],[3,5..],[5,7..]])  
[5,11,17,23,29,35,41,47,53,59]
```

Soluciones

-- 1ª solución

-- =====

```
interseccion :: Ord a => [[a]] -> [a]
interseccion [xs] = xs
interseccion (xs:ys:zss) = interseccionDos xs (interseccion (ys:zss))
```

```
interseccionDos :: Ord a => [a] -> [a] -> [a]
interseccionDos (x:xs) (y:ys)
  | x == y    = x : interseccionDos xs ys
  | x < y     = interseccionDos (dropWhile (<y) xs) (y:ys)
  | otherwise = interseccionDos (x:xs) (dropWhile (<x) ys)
```

-- 2ª solución

-- =====

```
interseccion2 :: Ord a => [[a]] -> [a]
interseccion2 = foldl1 interseccionDos
```

-- 3ª solución

-- =====

```
interseccion3 :: Ord a => [[a]] -> [a]
interseccion3 (xs:xss) =
  [x | x <- xs, all (x 'pertenece') xss]
```

```
pertenece :: Ord a => a -> [a] -> Bool
pertenece x xs = x == head (dropWhile (<x) xs)
```

Ejercicio 53

Soluciones de $x^2 = y^3 = k$

Leyendo a Cervantes me parece comprenderlo todo.

Antonio Machado

Enunciado

Definir la función

```
soluciones :: [(Integer,Integer,Integer)]
```

tal que sus elementos son las ternas (x,y,k) de soluciones del sistema $x^2 = y^3 = k$. Por ejemplo,

```
λ> take 6 soluciones
[(0,0,0),(-1,1,1),(1,1,1),(-8,4,64),(8,4,64),(-27,9,729)]
λ> soluciones !! (6*10^5+6)
(27000810008100027,90001800009,729043741093514580109350437400729)
```

Soluciones

```
-- 1ª solución
-- =====
```

```

soluciones :: [(Integer,Integer,Integer)]
soluciones = [(n^3, n^2, n^6) | n <- enteros]

-- enteros es la lista ordenada de los números enteros. Por ejemplo,
--   λ> take 20 enteros
--   [0,-1,1,-2,2,-3,3,-4,4,-5,5,-6,6,-7,7,-8,8,-9,9,-10]
enteros :: [Integer]
enteros = 0 : concat [[-x,x] | x <- [1..]]

-- 2ª solución
-- =====

soluciones2 :: [(Integer,Integer,Integer)]
soluciones2 = [(x^3,x^2,x^6) | x <- 0 : aux 1]
  where aux n = -n : n : aux (n+1)

-- 3ª solución
-- =====

soluciones3 :: [(Integer,Integer,Integer)]
soluciones3 =
  (0,0,0) : [(x,y,k) | k <- [n^6 | n <- [1..]]
              , let Just x' = raiz 2 k
              , let Just y = raiz 3 k
              , x <- [-x',x']]

-- (raiz n x) es es justo la raíz n-ésima del número natural x, si x es
-- una potencia n-ésima y Nothing en caso contrario. Por ejemplo,
--   raiz 2 16 == Just 4
--   raiz 3 216 == Just 6
--   raiz 5 216 == Nothing
raiz :: Int -> Integer -> Maybe Integer
raiz _ 1 = Just 1
raiz n x = aux (0,x)
  where aux (a,b) | d == x    = Just c
                  | c == a    = Nothing
                  | d < x    = aux (c,b)
                  | otherwise = aux (a,c)
    where c = (a+b) `div` 2

```

$$d = c^n$$

-- Comparación de eficiencia

-- =====

```
-- λ> soluciones !! (6*10^5+6)
-- (27000810008100027,90001800009,729043741093514580109350437400729)
-- (1.87 secs, 247,352,728 bytes)
-- λ> soluciones2 !! (6*10^5+6)
-- (27000810008100027,90001800009,729043741093514580109350437400729)
-- (1.44 secs, 243,012,936 bytes)
-- λ> soluciones3 !! (6*10^5+6)
-- (27000810008100027,90001800009,729043741093514580109350437400729)
-- (0.84 secs, 199,599,664 bytes)
```


Ejercicio 54

Sucesión triangular

Nadie debe asustarse de lo que piensa, aunque su pensar aparezca en pugna con las leyes más elementales de la lógica. Porque todo ha de ser pensado por alguien, y el mayor desatino puede ser un punto de vista de lo real.

Antonio Machado

Enunciado

La sucesión triangular es la obtenida concatenando las listas [1], [1,2], [1,2,3], [1,2,3,4],

Sus primeros términos son 1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, 1, 2, 3, 4, 5, 6

Definir las funciones

```
sucTriangular      :: [Integer]
terminoSucTriangular :: Int -> Integer
graficaSucTriangular :: Int -> IO ()
```

tales que

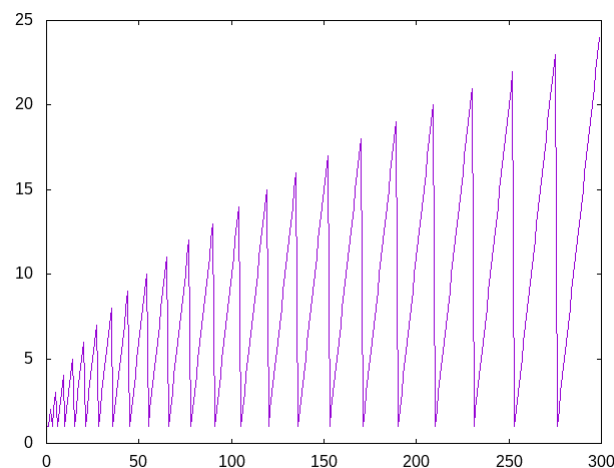
- sucTriangular es la lista de los términos de la sucesión triangular. Por ejemplo,

```
λ> take 30 sucTriangular
[1,1,2,1,2,3,1,2,3,4,1,2,3,4,5,1,2,3,4,5,6,1,2,3,4,5,6,7,1,2]
```

- (terminoSucTriangular n) es el término n-ésimo de la sucesión triangular. Por ejemplo,

```
terminoSucTriangular 5      == 3
terminoSucTriangular 10     == 1
terminoSucTriangular 20     == 6
terminoSucTriangular 100    == 10
terminoSucTriangular 1001   == 12
terminoSucTriangular (10^5) == 320
```

- (graficaSucTriangular n) dibuja la gráfica de los n primeros términos de la sucesión triangular. Por ejemplo, (graficaSucTriangular 300) dibuja



Soluciones

```
import Data.List (inits)
import Test.QuickCheck
import Graphics.Gnuplot.Simple

-- 1ª definición de sucTriangular
-- =====
```



```
sucTriangular :: [Integer]
sucTriangular =
  concat [[1..n] | n <- [1..]]

-- 2ª definición de sucTriangular
-- =====

sucTriangular2 :: [Integer]
sucTriangular2 =
  [x | n <- [1..], x <- [1..n]]

-- 3ª definición de sucTriangular
-- =====

sucTriangular3 :: [Integer]
sucTriangular3 =
  concat (tail (inits [1..]))

-- 1ª definición de terminoSucTriangular
-- =====

terminoSucTriangular :: Int -> Integer
terminoSucTriangular k =
  sucTriangular !! k

-- 2ª definición de terminoSucTriangular
-- =====

terminoSucTriangular2 :: Int -> Integer
terminoSucTriangular2 k =
  sucTriangular2 !! k

-- 3ª definición de terminoSucTriangular
-- =====

terminoSucTriangular3 :: Int -> Integer
terminoSucTriangular3 k =
  sucTriangular3 !! k

-- Equivalencia de definiciones
```

```

-- =====

-- La propiedad es
prop_terminoTriangular :: Positive Int -> Bool
prop_terminoTriangular (Positive n) =
    terminoSucTriangular n == terminoSucTriangular2 n &&
    terminoSucTriangular n == terminoSucTriangular3 n

-- La comprobación es
--    λ> quickCheck prop_terminoTriangular
--    +++ OK, passed 100 tests.

-- Comparación de eficiencia
-- =====

--    λ> terminoSucTriangular (3*10^6)
--    2425
--    (2.07 secs, 384,707,936 bytes)
--    λ> terminoSucTriangular2 (3*10^6)
--    2425
--    (2.22 secs, 432,571,208 bytes)
--    λ> terminoSucTriangular3 (3*10^6)
--    2425
--    (0.69 secs, 311,259,504 bytes)

-- Definición de graficaSucTriangular
-- =====

graficaSucTriangular :: Int -> IO ()
graficaSucTriangular n =
    plotList [ Key Nothing
              , PNG "Sucesion_triangular.png"
              ]
              (take n sucTriangular)

```

Ejercicio 55

Números primos en pi

*Al borde del sendero un día nos sentamos.
Ya nuestra vida es tiempo, y nuestra sola cuita
son las desesperantes posturas que tomamos
para aguardar ... Mas ella no faltará a la cita.*

Antonio Machado

Enunciado

El fichero [Digitos_de_pi.txt](#) contiene el número pi con un millón de decimales; es decir,

3.1415926535897932384626433832 ... 83996346460422090106105779458151

Definir las funciones

```
nOcurrenciasPrimosEnPi :: Int -> Int -> IO [Int]
graficaPrimosEnPi      :: Int -> Int -> IO ()
```

tales que

- + (nOcurrenciasPrimosEnPi n k) es la lista de longitud n cuyo i-ésimo elemento es el número de ocurrencias del i-ésimo número primo en los k primeros decimales del número pi. Por ejemplo,

```
n0currenciasPrimosEnPi 4 20 == [2,3,3,1]
```

ya que los 20 primeros decimales de pi son 14159265358979323846 y en ellos ocurre el 2 dos veces, el 3 ocurre 3 veces, el 5 ocurre 3 veces y el 7 ocurre 1 vez. Otros ejemplos son

```
λ> n0currenciasPrimosEnPi 10 100
[12,11,8,8,1,0,1,1,2,0]
λ> n0currenciasPrimosEnPi 10 (10^4)
[1021,974,1046,970,99,102,90,113,99,95]
λ> n0currenciasPrimosEnPi 10 (10^6)
[100026,100229,100359,99800,10064,10012,9944,10148,9951,9912]
```

- (graficaPrimosEnPi n k) dibuja la gráfica del número de ocurrencias de los n primeros números primos en los k primeros dígitos de pi. Por ejemplo,
 - (graficaPrimosEnPi 10 (10^4)) dibuja la Figura 55.1

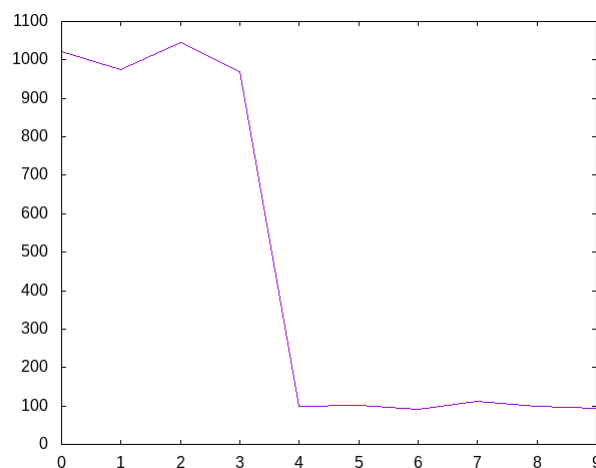


Figura 55.1: (graficaPrimosEnPi 10 10000)

- (graficaPrimosEnPi 10 (10^6)) dibuja la Figura 55.2
- (graficaPrimosEnPi 50 (10^5)) dibuja la Figura 55.3

Soluciones

```
import Data.List           ( isPrefixOf
                           , findIndices
```

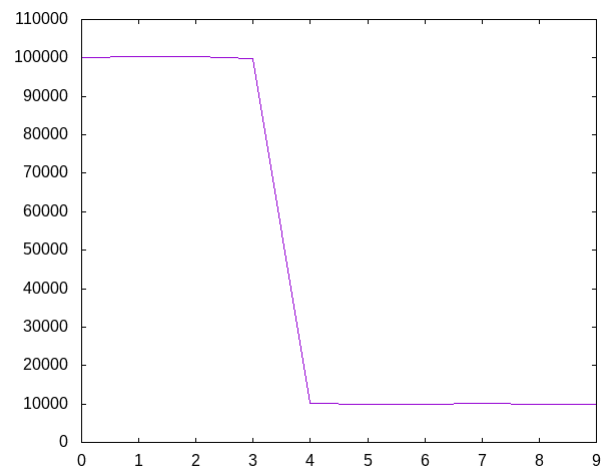


Figura 55.2: (graficaPrimosEnPi 10 1000000)

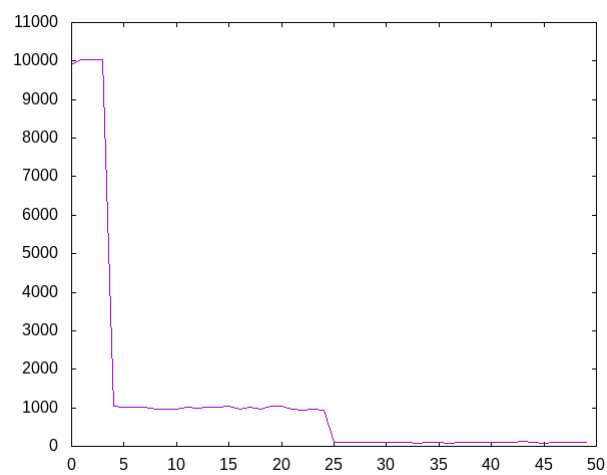


Figura 55.3: (graficaPrimosEnPi 50 100000)

```

                                , tails )
import Data.Numbers.Primes      ( primes)
import Graphics.Gnuplot.Simple  ( Attribute (Key, PNG)
                                , plotList )

-- Definición de nOcurrenciasPrimosEnPi
-- =====

nOcurrenciasPrimosEnPi :: Int -> Int -> IO [Int]
nOcurrenciasPrimosEnPi n k = do
  (_,ds) <- readFile "Digitos_de_pi.txt"
  let ps = take n primes
  let es = take k ds
  return [nOcurrencias (show x) es | x <- ps]

-- (nOcurrencias xs yss) es el número de ocurrencias de xs en yss. Por
-- ejemplo,
--     nOcurrencias "ac" "acbadcacaac" == 3
nOcurrencias :: Eq a => [a] -> [a] -> Int
nOcurrencias xs yss = length (ocurrencias xs yss)

-- (ocurrencias xs yss) es el índice de las posiciones del primer
-- elemento de xs en las ocurrencias de xs en yss. Por ejemplo,
--     ocurrencias "ac" "acbadcacaac" == [0,6,9]
ocurrencias :: Eq a => [a] -> [a] -> [Int]
ocurrencias xs yss =
  findIndices (xs `isPrefixOf`) (tails yss)

-- Definición de graficaPrimosEnPi
-- =====

graficaPrimosEnPi :: Int -> Int -> IO ()
graficaPrimosEnPi n k = do
  xs <- nOcurrenciasPrimosEnPi n k
  plotList [ Key Nothing
            , PNG ("Numeros_primos_en_pi_" ++ show (n,k) ++ ".png")
            ]
  xs

```

Ejercicio 56

Recorrido de árboles en espiral

*Dice la monotonía
del agua clara al caer:
un día es como otro día;
hoy es lo mismo que ayer.*

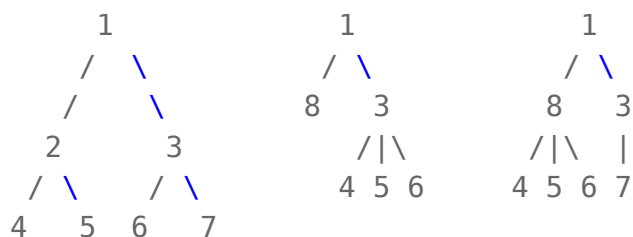
Antonio Machado

Enunciado

Los árboles se pueden representar mediante el siguiente tipo de datos

```
data Arbol a = N a [Arbol a]  
deriving Show
```

Por ejemplo, los árboles



se representan por

```
ej1, ej2, ej3 :: Arbol Int
ej1 = N 1 [N 2 [N 4 [], N 5 []], N 3 [N 6 [], N 7 []]]
ej2 = N 1 [N 8 [], N 3 [N 4 [], N 5 [], N 6 []]]
ej3 = N 1 [N 8 [N 4 [], N 5 [], N 6 []], N 3 [N 7 []]]
```

Definir la función

```
\begin{descripcion}
  espiral :: Arbol a -> [a]
```

tal que (espiral x) es la lista de los nodos del árbol x recorridos en espiral; es decir, la raíz de x, los nodos del primer nivel de izquierda a derecha, los nodos del segundo nivel de derecha a izquierda y así sucesivamente. Por ejemplo,

```
espiral ej1 == [1,2,3,7,6,5,4]
espiral ej2 == [1,8,3,6,5,4]
espiral ej3 == [1,8,3,7,6,5,4]
```

Soluciones

```
data Arbol a = N a [Arbol a]
  deriving Show
```

```
ej1, ej2, ej3 :: Arbol Int
ej1 = N 1 [N 2 [N 4 [], N 5 []], N 3 [N 6 [], N 7 []]]
ej2 = N 1 [N 8 [], N 3 [N 4 [], N 5 [], N 6 []]]
ej3 = N 1 [N 8 [N 4 [], N 5 [], N 6 []], N 3 [N 7 []]]
```

```
-- 1ª solución
-- =====
```

```
espiral :: Arbol a -> [a]
espiral x =
  concat [f xs | (f,xs) <- zip (cycle [reverse,id]) (niveles x)]

-- (niveles x) es la lista de los niveles del árbol x. Por ejemplo,
--   niveles ej1 == [[1],[8,3],[4]]
--   niveles ej2 == [[1],[8,3],[4,5,6]]
```



```

--     niveles ej3 == [[1],[8,3],[4,5,6,7]]
niveles :: Arbol a -> [[a]]
niveles x = takeWhile (not . null) [nivel n x | n <- [0..]]

-- (nivel n x) es el nivel de nivel n del árbol x. Por ejemplo,
--     nivel 0 ej1 == [1]
--     nivel 1 ej1 == [8,3]
--     nivel 2 ej1 == [4]
--     nivel 4 ej1 == []
nivel :: Int -> Arbol a -> [a]
nivel 0 (N x _) = [x]
nivel n (N _ xs) = concatMap (nivel (n-1)) xs

-- 2ª solución
-- =====

espiral2 :: Arbol a -> [a]
espiral2 =
    concat . zipWith ($) (cycle [reverse,id]) . niveles

-- 3ª solución
-- =====

espiral3 :: Arbol a -> [a]
espiral3 = concat . zipWith ($) (cycle [reverse,id]) . niveles3

niveles3 :: Arbol a -> [[a]]
niveles3 t = map (map raiz)
             . takeWhile (not . null)
             . iterate (concatMap subBosque) $ [t]

raiz :: Arbol a -> a
raiz (N x _) = x

subBosque :: Arbol a -> [Arbol a]
subBosque (N _ ts) = ts

-- 4ª solución
-- =====

```

```

espiral4 :: Arbol a -> [a]
espiral4 = concat . zipWith ($) (cycle [reverse,id]) . niveles4

niveles4 :: Arbol a -> [[a]]
niveles4 = map (map raiz)
           . takeWhile (not . null)
           . iterate (concatMap subBosque)
           . return

-- 5ª definición
-- =====

espiral5 :: Arbol a -> [a]
espiral5 x = concat $ zipWith ($) (cycle [reverse,id]) $ niveles5 [x]

niveles5 :: [Arbol a] -> [[a]]
niveles5 [] = []
niveles5 xs = a : niveles5 (concat b)
  where (a,b) = unzip $ map (\(N x y) -> (x,y)) xs

-- 6ª definición
-- =====

espiral6 :: Arbol a -> [a]
espiral6 = concat . zipWith ($) (cycle [reverse,id]) . niveles5 . return

```