

Lógica con Lean

José A. Alonso Jiménez

Grupo de Lógica Computacional
Dpto. de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial
Universidad de Sevilla
Sevilla, 21 de septiembre de 2020

Esta obra está bajo una licencia Reconocimiento–NoComercial–CompartirIgual 2.5 Spain de Creative Commons.

Se permite:

- copiar, distribuir y comunicar públicamente la obra
- hacer obras derivadas

Bajo las condiciones siguientes:

Reconocimiento. Debe reconocer los créditos de la obra de la manera especificada por el autor.



No comercial. No puede utilizar esta obra para fines comerciales.



Compartir bajo la misma licencia. Si altera o transforma esta obra, o genera una obra derivada, sólo puede distribuir la obra generada bajo una licencia idéntica a ésta.

- Al reutilizar o distribuir la obra, tiene que dejar bien claro los términos de la licencia de esta obra.
- Algunas de estas condiciones pueden no aplicarse si se obtiene el permiso del titular de los derechos de autor.

Esto es un resumen del texto legal (la licencia completa). Para ver una copia de esta licencia, visite <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.5/es/> o envíe una carta a Creative Commons, 559 Nathan Abbott Way, Stanford, California 94305, USA.

Índice general

1 Introducción	5
2 Lógica proposicional	7
2.1 Reglas del condicional	7
2.1.1 Regla de eliminación del condicional en $P \rightarrow Q, P \vdash Q$	7
2.1.2 Pruebas de $P, P \rightarrow Q, P \rightarrow (Q \rightarrow R) \vdash R$	9
2.1.3 Regla de introducción del condicional en $P \rightarrow P$	10
2.1.4 Pruebas de $P \rightarrow (Q \rightarrow P)$	12
2.1.5 Pruebas del silogismo hipotético: $P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \vdash P \rightarrow R$	14
2.2 Reglas de la conjunción	16
2.2.1 Reglas de la conjunción en $P \wedge Q, R \vdash Q \wedge R$	16
2.2.2 Pruebas de $P \wedge Q \rightarrow Q \wedge P$	19
2.3 Reglas de la negación	22
2.3.1 Reglas de la negación con $(\perp \vdash P), (P, \neg P \vdash \perp)$ y $\neg(P \wedge \neg P)$	22
2.3.2 Pruebas de $P \rightarrow Q, P \rightarrow \neg Q \vdash \neg P$	25
2.3.3 Pruebas del modus tollens: $P \rightarrow Q, \neg Q \vdash \neg P$	28
2.3.4 Pruebas de $P \rightarrow (Q \rightarrow R), P, \neg R \vdash \neg Q$	31
2.3.5 Pruebas de $P \rightarrow Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P$	33
2.3.6 Regla de introducción de la doble negación: $P \vdash \neg\neg P$	36
2.3.7 Pruebas de $\neg Q \rightarrow \neg P \vdash P \rightarrow \neg\neg Q$	37
2.4 Reglas de la disyunción	40
2.4.1 Reglas de introducción de la disyunción	40
2.4.2 Regla de eliminación de la disyunción	44
2.4.3 Pruebas de $P \vee Q \vdash Q \vee P$	46
2.4.4 Pruebas de $Q \rightarrow R \vdash P \vee Q \rightarrow P \vee R$	47

Capítulo 1

Introducción

El objetivo de este trabajo es presentar una introducción a la Lógica usando [Lean](#) para usarla en las clases de la asignatura de [Razonamiento automático](#) del [Máster Universitario en Lógica, Computación e Inteligencia Artificial](#) de la Universidad de Sevilla. Por tanto, el único prerequisite es, como en el Máster, cierta madurez matemática como la que deben tener los alumnos de los Grados de Matemática y de Informática.

El trabajo se basa fundamentalmente en

- El [curso de "Lógica matemática y fundamentos"](#) en que se estudia la deducción natural proposicional y de primer orden (basado en el libro [Logic in computer science: Modelling and reasoning about systems](#) de Michael Huth y Mark Ryan) y su formalización en [Isabelle/HOL](#).
- Los apuntes de [Lógica y demostración con Lean](#) que son un resumen del libro [Logic and Proof](#) de Jeremy Avigad, Robert Y. Lewis y Floris van Doorn.
- Los apuntes [Deducción natural en Lean](#) en el que se presentan ejemplos de uso de las tácticas de Lean correspondientes a las reglas de la deducción natural.
- Los apuntes [Matemáticas en Lean](#) en el que se presentan la formalización en Lean de temas básicos de las matemáticas usando las librerías de [mathlib](#). Está basado en el libro [Mathematics in Lean](#) de Jeremy Avigad, Kevin Buzzard, Robert Y. Lewis y Patrick Massot.

La exposición se hará mediante una colección de ejercicios. En cada ejercicio se mostrarán distintas pruebas del mismo resultado y se comentan las tácticas conforme se van usando y los lemas utilizados en las demostraciones.

Además, en cada ejercicio hay tres enlaces: uno al código, otro que al pulsarlo abre el ejercicio en Lean Web (en una sesión del navegador) de forma

que se puede navegar por las pruebas y editar otras alternativas, y el tercero es un enlace a un vídeo explicando las soluciones del ejercicio.

El trabajo se desarrolla como un [proyecto en GitHub](#) que contiene [libro en PDF](#). Además, los vídeos correspondientes a cada uno de los ejercicios se encuentran en [YouTube](#).

Capítulo 2

Lógica proposicional

2.1. Reglas del condicional

2.1.1. Regla de eliminación del condicional en $P \rightarrow Q$, $P \vdash Q$

- Enlaces al [código](#), a la [sesión en Lean Web](#) y al [vídeo](#).

```
-- Eliminación del condicional en Lean
-- =====

-- Ej. 1. Demostrar que
--      (P → Q), P ⊢ Q.

import tactic
variables (P Q : Prop)

-- 1ª demostración
example
  (h1 : P → Q)
  (h2 : P)
  : Q :=
begin
  apply h1,
  exact h2,
end

-- 2ª demostración
example
  (h1 : P → Q)
```

```
(h2 : P)
: Q :=
begin
  exact h1 h2,
end

-- 3ª demostración
example
  (h1 : P → Q)
  (h2 : P)
  : Q :=
by exact h1 h2

-- 4ª demostración
example
  (h1 : P → Q)
  (h2 : P)
  : Q :=
h1 h2

-- 5ª demostración
example
  (h1 : P → Q)
  (h2 : P)
  : Q :=
by tauto

-- 6ª demostración
example
  (h1 : P → Q)
  (h2 : P)
  : Q :=
by finish

-- 7ª demostración
example
  (h1 : P → Q)
  (h2 : P)
  : Q :=
by solve_by_elim
```


2.1.2. Pruebas de $P, P \rightarrow Q, P \rightarrow (Q \rightarrow R) \vdash R$

- Enlaces al [código](#), a la [sesión en Lean Web](#) y al vídeo.

```
-- Pruebas de  $P, P \rightarrow Q, P \rightarrow (Q \rightarrow R) \vdash R$ 
-- =====
```

```
-- Ej 1. Demostrar que
--  $P, P \rightarrow Q, P \rightarrow (Q \rightarrow R) \vdash R$ 
```

```
import tactic
```

```
variables (P Q R : Prop)
```

```
-- 1ª demostración
```

```
example
```

```
  (h1 : P)
  (h2 : P → Q)
  (h3 : P → (Q → R))
  : R :=
```

```
have h4 : Q,
```

```
  from h2 h1,
```

```
have h5 : Q → R,
```

```
  from h3 h1,
```

```
show R,
```

```
  from h5 h4
```

```
-- 2ª demostración
```

```
example
```

```
  (h1 : P)
  (h2 : P → Q)
  (h3 : P → (Q → R))
  : R :=
```

```
have h4 : Q      := h2 h1,
```

```
have h5 : Q → R := h3 h1,
```

```
show R, from h5 h4
```

```
-- 3ª demostración
```

```
example
```

```
  (h1 : P)
  (h2 : P → Q)
  (h3 : P → (Q → R))
  : R :=
```

```
show R, from (h3 h1) (h2 h1)
```

```

-- 4ª demostración
example
  (h1 : P)
  (h2 : P → Q)
  (h3 : P → (Q → R))
  : R :=
(h3 h1) (h2 h1)

-- 5ª demostración
example
  (h1 : P)
  (h2 : P → Q)
  (h3 : P → (Q → R))
  : R :=
by finish

```

2.1.3. Regla de introducción del condicional en $P \rightarrow P$

- Enlaces al [código](#), a la [sesión en Lean Web](#) y al [vídeo](#).

```

-- Introducción del condicional en Lean
-- =====

-- Ej. 1. Demostrar que
--      P → P

import tactic
variable (P : Prop)

-- 1ª demostración
example : P → P :=
assume h : P,
show P, from h

-- 2ª demostración
example : P → P :=
assume : P,
show P, from this

-- 3ª demostración
example : P → P :=
assume : P,
show P, from <P>

```

```
-- 4ª demostración
example : P → P :=
assume h : P, h

-- 5ª demostración
example : P → P :=
λ h, h

-- 6ª demostración
example : P → P :=
id

-- 7ª demostración
example : P → P :=
begin
  intro h,
  exact h,
end

-- 8ª demostración
example : P → P :=
begin
  intro,
  exact <P>,
end

-- 9ª demostración
example : P → P :=
begin
  intro h,
  assumption,
end

-- 10ª demostración
example : P → P :=
begin
  intro,
  assumption,
end

-- 11ª demostración
example : P → P :=
by tauto
```

```
-- 12ª demostración
example : P → P :=
by finish

-- 13ª demostración
example : P → P :=
by simp
```

2.1.4. Pruebas de $P \rightarrow (Q \rightarrow P)$

- Enlaces al [código](#), a la [sesión en Lean Web](#) y al [vídeo](#).

```
-- Pruebas de  $P \rightarrow (Q \rightarrow P)$ 
-- =====

-- Ej. 1. Demostrar
--       $P \rightarrow (Q \rightarrow P)$ 

import tactic

variables (P Q : Prop)

-- 1ª demostración
example : P → (Q → P) :=
assume (h1 : P),
show Q → P, from
  ( assume h2 : Q,
    show P, from h1)

-- 2ª demostración
example : P → (Q → P) :=
assume (h1 : P),
show Q → P, from
  ( assume h2 : Q, h1)

-- 3ª demostración
example : P → (Q → P) :=
assume (h1 : P),
show Q → P, from
  ( λ h2, h1)

-- 4ª demostración
example : P → (Q → P) :=
```

```
assume (h1 : P), (λ h2, h1)

-- 5ª demostración
example : P → (Q → P) :=
λ h1, λ h2, h1

-- 6ª demostración
example : P → (Q → P) :=
λ h1 h2, h1

-- 7ª demostración
example : P → (Q → P) :=
λ h _, h

-- 8ª demostración
example : P → (Q → P) :=
imp_intro

-- 9ª demostración
example : P → (Q → P) :=
begin
  intro h1,
  intro h2,
  exact h1,
end

-- 10ª demostración
example : P → (Q → P) :=
begin
  intros h1 h2,
  exact h1,
end

-- 6ª demostración
example : P → (Q → P) :=
λ h1 h2, h1

-- 11ª demostración
example : P → (Q → P) :=
by tauto

-- 12ª demostración
example : P → (Q → P) :=
by finish
```

2.1.5. Pruebas del silogismo hipotético: $P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \vdash P \rightarrow R$

- Enlaces al [código](#), a la [sesión en Lean Web](#) y al [vídeo](#).

```
-- Pruebas del silogismo hipotético
-- -----
```

```
import tactic
```

```
variables (P Q R : Prop)
```

```
-- Ej. 1. Demostrar que
--   P → Q, Q → R ⊢ P → R
```

```
-- 1ª demostración
```

```
example
```

```
  (h1 : P → Q)
```

```
  (h2 : Q → R)
```

```
  : P → R :=
```

```
assume h : P,
```

```
have h3 : Q,
```

```
  from h1 h,
```

```
show R,
```

```
  from h2 h3
```

```
-- 2ª demostración
```

```
example
```

```
  (h1 : P → Q)
```

```
  (h2 : Q → R)
```

```
  : P → R :=
```

```
assume h : P,
```

```
have h3 : Q := h1 h,
```

```
show R,
```

```
  from h2 h3
```

```
-- 3ª demostración
```

```
example
```

```
  (h1 : P → Q)
```

```
  (h2 : Q → R)
```

```
  : P → R :=
```

```
assume h : P,
```

```
show R,
```

```
  from h2 (h1 h)
```

```
-- 4º demostración
example
  (h1 : P → Q)
  (h2 : Q → R)
  : P → R :=
assume h : P, h2 (h1 h)

-- 5º demostración
example
  (h1 : P → Q)
  (h2 : Q → R)
  : P → R :=
λ h, h2 (h1 h)

-- 6º demostración
example
  (h1 : P → Q)
  (h2 : Q → R)
  : P → R :=
h2 ▯ h1


-- 7º demostración
example
  (h1 : P → Q)
  (h2 : Q → R)
  : P → R :=
begin
  intro h,
  apply h2,
  apply h1,
  exact h,
end

-- 8º demostración
example
  (h1 : P → Q)
  (h2 : Q → R)
  : P → R :=
begin
  intro h,
  apply h2,
  exact h1 h,
end
```

```

-- 9º demostración
example
  (h1 : P → Q)
  (h2 : Q → R)
  : P → R :=
begin
  intro h,
  exact h2 (h1 h),
end

-- 10º demostración
example
  (h1 : P → Q)
  (h2 : Q → R)
  : P → R :=
λ h, h2 (h1 h)

-- 11º demostración
example
  (h1 : P → Q)
  (h2 : Q → R)
  : P → R :=
h2  h1

-- 12º demostración
example
  (h1 : P → Q)
  (h2 : Q → R)
  : P → R :=
by tauto

-- 13º demostración
example
  (h1 : P → Q)
  (h2 : Q → R)
  : P → R :=
by finish

```

2.2. Reglas de la conjunción

2.2.1. Reglas de la conjunción en $P \wedge Q, R \vdash Q \wedge R$

- Enlaces al [código](#), a la [sesión en Lean Web](#) y al [vídeo](#).


```
-- Reglas de la conjunción
-- =====
```

```
-- Ej. 1. Demostrar que
--    $P \wedge Q, R \vdash Q \wedge R$ 
```

```
import tactic
```

```
variables (P Q R : Prop)
```

```
-- 1ª demostración
-- =====
```

```
example
  (hPQ : P ∧ Q)
  (hR : R)
  : Q ∧ R :=
have hQ : Q,
  from and.right hPQ,
show Q ∧ R,
  from and.intro hQ hR
```

```
-- 2ª demostración
-- =====
```

```
example
  (hPQ : P ∧ Q)
  (hR : R)
  : Q ∧ R :=
have hQ : Q,
  from hPQ.right,
show Q ∧ R,
  from ⟨hQ, hR⟩
```

```
-- 3ª demostración
-- =====
```

```
example
  (hPQ : P ∧ Q)
  (hR : R)
  : Q ∧ R :=
have hQ : Q,
  from hPQ.2,
show Q ∧ R,
  from ⟨hQ, hR⟩
```

```
-- 4ª demostración
-- =====
```

```
example
  (hPQ : P ∧ Q)
  (hR : R)
  : Q ∧ R :=
have hQ : Q :=
  hPQ.2,
show Q ∧ R,
  from ⟨hQ, hR⟩
```

```
-- 5ª demostración
-- =====
```

```
example
  (hPQ : P ∧ Q)
  (hR : R)
  : Q ∧ R :=
show Q ∧ R,
  from ⟨hPQ.2, hR⟩
```

```
-- 6ª demostración
-- =====
```

```
example
  (hPQ : P ∧ Q)
  (hR : R)
  : Q ∧ R :=
⟨hPQ.2, hR⟩
```

```
-- 7ª demostración
-- =====
```

```
example
  (hPQ : P ∧ Q)
  (hR : R)
  : Q ∧ R :=
begin
  split,
  { cases hPQ with hP hQ,
    clear hP,
    exact hQ, },
  { exact hR, },
```

```

end

-- 8ª demostración
-- =====

example
  (hPQ : P ∧ Q)
  (hR : R)
  : Q ∧ R :=
begin
  split,
  { cases hPQ,
    assumption, },
  { assumption, },
end

-- 9ª demostración
-- =====

example
  (hPQ : P ∧ Q)
  (hR : R)
  : Q ∧ R :=
by tauto

-- 10ª demostración
-- =====

example
  (hPQ : P ∧ Q)
  (hR : R)
  : Q ∧ R :=
by finish

```

2.2.2. Pruebas de $P \wedge Q \rightarrow Q \wedge P$

- Enlaces al [código](#), a la [sesión en Lean Web](#) y al vídeo.

```

-- Pruebas en Lean de  $P \wedge Q \rightarrow Q \wedge P$ 
-- =====

-- Ej. 1. Demostrar que
--  $P \wedge Q \rightarrow Q \wedge P$ 

```

```

import tactic

variables (P Q : Prop)

-- 1ª demostración
-- =====

example : P ∧ Q → Q ∧ P :=
assume h : P ∧ Q,
have hP : P,
  from and.left h,
have hQ : Q,
  from and.right h,
show Q ∧ P,
  from and.intro hQ hP

-- 2ª demostración
-- =====

example : P ∧ Q → Q ∧ P :=
assume h : P ∧ Q,
have hP : P,
  from h.left,
have hQ : Q,
  from h.right,
show Q ∧ P,
  from ⟨hQ, hP⟩

-- 3ª demostración
-- =====

example : P ∧ Q → Q ∧ P :=
assume h : P ∧ Q,
have hP : P,
  from h.1,
have hQ : Q,
  from h.2,
show Q ∧ P,
  from ⟨hQ, hP⟩

-- 4ª demostración
-- =====

example : P ∧ Q → Q ∧ P :=

```

```

assume h : P ∧ Q,
have hP : P := h.1,
have hQ : Q := h.2,
show Q ∧ P,
  from ⟨hQ, hP⟩

-- 5ª demostración
-- =====

example : P ∧ Q → Q ∧ P :=
assume h : P ∧ Q,
show Q ∧ P,
  from ⟨h.2, h.1⟩

-- 6ª demostración
-- =====

example : P ∧ Q → Q ∧ P :=
assume h : P ∧ Q, ⟨h.2, h.1⟩

-- 7ª demostración
-- =====

example : P ∧ Q → Q ∧ P :=
λ h, ⟨h.2, h.1⟩

-- 8ª demostración
-- =====

example : P ∧ Q → Q ∧ P :=
and.comm.mp

-- 9ª demostración
-- =====

example : P ∧ Q → Q ∧ P :=
begin
  intro h,
  cases h with hP hQ,
  split,
  { exact hQ, },
  { exact hP, },
end

-- 10ª demostración

```

```

-- =====

example : P ∧ Q → Q ∧ P :=
begin
  rintro ⟨hP, hQ⟩,
  exact ⟨hQ, hP⟩,
end

-- 11ª demostración
-- =====

example : P ∧ Q → Q ∧ P :=
λ ⟨hP, hQ⟩, ⟨hQ, hP⟩

-- 12ª demostración
-- =====

example : P ∧ Q → Q ∧ P :=
by tauto

-- 13ª demostración
-- =====

example : P ∧ Q → Q ∧ P :=
by finish

```

2.3. Reglas de la negación

2.3.1. Reglas de la negación con $(\perp \vdash P)$, $(P, \neg P \vdash \perp)$ y $\neg(P \wedge \neg P)$

- Enlaces al [código](#), a la [sesión en Lean Web](#) y al [vídeo](#).

```

-- Reglas de la negación
-- =====

import tactic

variable (P : Prop)

-- Eliminación del falso

```

```
-- -----  
  
-- Ej. 1. Demostrar que  
--  $\perp \vdash P$   
  
-- 1ª demostración  
example  
  (h : false)  
  : P :=  
false.elim h  
  
-- 2ª demostración  
example  
  (h : false)  
  : P :=  
false.rec P h  
  
-- 3ª demostración  
example  
  (h : false)  
  : P :=  
by tauto  
  
-- 4ª demostración  
example  
  (h : false)  
  : P :=  
by cases h  
  
-- 5ª demostración  
example  
  (h : false)  
  : P :=  
by finish  
  
-- 6ª demostración  
example  
  (h : false)  
  : P :=  
by solve_by_elim  
  
-- Definición de la negación  
-- -----  
  
--  $\neg P \equiv (P \rightarrow \text{false})$ 
```

```

-- Eliminación de la negación
-- -----

-- Ej. 2. Demostrar que
--       $P, \neg P \vdash \perp$ 

-- 1ª demostración
example
  (h1: P)
  (h2:  $\neg P$ )
  : false :=
not.elim h2 h1

-- 2ª demostración
example
  (h1: P)
  (h2:  $\neg P$ )
  : false :=
h2 h1

-- Introducción de la negación
-- -----

-- Ej. 3. Demostrar
--       $\neg(P \wedge \neg P)$ 

-- 1ª demostración
example :  $\neg(P \wedge \neg P) :=$ 
not.intro
  ( assume h :  $P \wedge \neg P$ ,
    have h1 : P := h.1,
    have h2 :  $\neg P$  := h.2,
    show false, from h2 h1 )

-- 2ª demostración
example :  $\neg(P \wedge \neg P) :=$ 
not.intro
  ( assume h :  $P \wedge \neg P$ ,
    show false, from h.2 h.1 )

-- 3ª demostración
example :  $\neg(P \wedge \neg P) :=$ 
not.intro
  ( assume h :  $P \wedge \neg P$ , h.2 h.1 )

```



```

-- 4ª demostración
example : ¬(P ∧ ¬P) :=
not.intro (λ h, h.2 h.1)

-- 5ª demostración
example : ¬(P ∧ ¬P) :=
begin
  intro h,
  cases h with h1 h2,
  apply h2,
  exact h1,
end

-- 6ª demostración
example : ¬(P ∧ ¬P) :=
begin
  rintro ⟨h1, h2⟩,
  exact h2 h1,
end

-- 7ª demostración
example : ¬(P ∧ ¬P) :=
λ ⟨h1, h2⟩, h2 h1

-- 8ª demostración
example : ¬(P ∧ ¬P) :=
(and_not_self P).mp

-- 9ª demostración
example : ¬(P ∧ ¬P) :=
by tauto

-- 10ª demostración
example : ¬(P ∧ ¬P) :=
by finish

-- 11ª demostración
example : ¬(P ∧ ¬P) :=
by simp

```

2.3.2. Pruebas de $P \rightarrow Q$, $P \rightarrow \neg Q \vdash \neg P$

- Enlaces al [código](#), a la [sesión en Lean Web](#) y al [vídeo](#).

```

-- Pruebas de  $P \rightarrow Q, P \rightarrow \neg Q \vdash \neg P$ 
-- =====

import tactic

variables (P Q : Prop)

-- Ej. 1. Demostrar
--  $P \rightarrow Q, P \rightarrow \neg Q \vdash \neg P$ 

-- 1ª demostración
example
  (h1 : P → Q)
  (h2 : P → ¬Q)
  : ¬P :=
assume h : P,
have h4 : Q,
  from h1 h,
have h5 : ¬Q,
  from h2 h,
show false,
  from h5 h4

-- 2ª demostración
example
  (h1 : P → Q)
  (h2 : P → ¬Q)
  : ¬P :=
assume h : P,
have h4 : Q := h1 h,
have h5 : ¬Q := h2 h,
show false,
  from h5 h4

-- 3ª demostración
example
  (h1 : P → Q)
  (h2 : P → ¬Q)
  : ¬P :=
assume h : P,
show false,
  from (h2 h) (h1 h)

-- 4ª demostración
example

```

```
(h1 : P → Q)
(h2 : P → ¬Q)
: ¬P :=
assume h : P, (h2 h) (h1 h)
```

-- 5ª demostración

```
example
  (h1 : P → Q)
  (h2 : P → ¬Q)
  : ¬P :=
λ h, (h2 h) (h1 h)
```

-- 6ª demostración

```
example
  (h1 : P → Q)
  (h2 : P → ¬Q)
  : ¬P :=
begin
  intro h,
  have h3 : ¬Q := h2 h,
  apply h3,
  apply h1,
  exact h,
end
```

-- 7ª demostración

```
example
  (h1 : P → Q)
  (h2 : P → ¬Q)
  : ¬P :=
begin
  intro h,
  have h3 : ¬Q := h2 h,
  apply h3,
  exact h1 h,
end
```

-- 8ª demostración

```
example
  (h1 : P → Q)
  (h2 : P → ¬Q)
  : ¬P :=
begin
  intro h,
  have h3 : ¬Q := h2 h,
```

```

    exact h3 (h1 h),
end

-- 9ª demostración
example
  (h1 : P → Q)
  (h2 : P → ¬Q)
  : ¬P :=
begin
  intro h,
  exact (h2 h) (h1 h),
end

-- 10ª demostración
example
  (h1 : P → Q)
  (h2 : P → ¬Q)
  : ¬P :=
λ h, (h2 h) (h1 h)

-- 11ª demostración
example
  (h1 : P → Q)
  (h2 : P → ¬Q)
  : ¬P :=
by finish

```

2.3.3. Pruebas del modus tollens: $P \rightarrow Q, \neg Q \vdash \neg P$

- Enlaces al [código](#), a la [sesión en Lean Web](#) y al [vídeo](#).

```

-- Pruebas del modus tollens
-- =====

-- Ej. 1. Demostrar
--    $P \rightarrow Q, \neg Q \vdash \neg P$ 

import tactic

variables (P Q : Prop)

-- 1ª demostración
example

```

```
(h1 : P → Q)
(h2 : ¬Q)
: ¬P :=
assume h3 : P,
have h4 : Q,
  from h1 h3,
show false,
  from h2 h4

-- 2ª demostración
example
  (h1 : P → Q)
  (h2 : ¬Q)
  : ¬P :=
assume h3 : P,
have h4 : Q := h1 h3,
show false,
  from h2 h4

-- 3ª demostración
example
  (h1 : P → Q)
  (h2 : ¬Q)
  : ¬P :=
assume h3 : P,
show false,
  from h2 (h1 h3)

-- 4ª demostración
example
  (h1 : P → Q)
  (h2 : ¬Q)
  : ¬P :=
assume h3 : P, h2 (h1 h3)

-- 5ª demostración
example
  (h1 : P → Q)
  (h2 : ¬Q)
  : ¬P :=
λ h, h2 (h1 h)

-- 6ª demostración
example
  (h1 : P → Q)
```

```

(h2 : ¬Q)
: ¬P :=
h2 ▯ h1

-- 7ª demostración
example
  (h1 : P → Q)
  (h2 : ¬Q)
  : ¬P :=
mt h1 h2

-- 8ª demostración
example
  (h1 : P → Q)
  (h2 : ¬Q)
  : ¬P :=
by tauto

-- 9ª demostración
example
  (h1 : P → Q)
  (h2 : ¬Q)
  : ¬P :=
by finish

-- 10ª demostración
example
  (h1 : P → Q)
  (h2 : ¬Q)
  : ¬P :=
begin
  intro h,
  apply h2,
  apply h1,
  exact h,
end

-- 11ª demostración
example
  (h1 : P → Q)
  (h2 : ¬Q)
  : ¬P :=
begin
  intro h,
  exact h2 (h1 h),

```

```

end

-- 12ª demostración
example
  (h1 : P → Q)
  (h2 : ¬Q)
  : ¬P :=
λ h, h2 (h1 h)

```

2.3.4. Pruebas de $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$, P , $\neg R \vdash \neg Q$

- Enlaces al [código](#), a la [sesión en Lean Web](#) y al vídeo.

```

-- Pruebas de  $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$ ,  $P$ ,  $\neg R \vdash \neg Q$ 
-- =====

-- Ej. 1. Demostrar
--   Pruebas de  $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$ ,  $P$ ,  $\neg R \vdash \neg Q$ 

import tactic

variables (P Q R : Prop)

-- 1ª demostración
example
  (h1 : P → (Q → R))
  (h2 : P)
  (h3 : ¬R)
  : ¬Q :=
have h4 : Q → R,
  from h1 h2,
show ¬Q,
  from mt h4 h3

-- 2ª demostración
example
  (h1 : P → (Q → R))
  (h2 : P)
  (h3 : ¬R)
  : ¬Q :=
have h4 : Q → R := h1 h2,
show ¬Q,
  from mt h4 h3

```

```
-- 3ª demostración
example
  (h1 : P → (Q → R))
  (h2 : P)
  (h3 : ¬R)
  : ¬Q :=
show ¬Q,
  from mt (h1 h2) h3

-- 4ª demostración
example
  (h1 : P → (Q → R))
  (h2 : P)
  (h3 : ¬R)
  : ¬Q :=
mt (h1 h2) h3

-- 5ª demostración
example
  (h1 : P → (Q → R))
  (h2 : P)
  (h3 : ¬R)
  : ¬Q :=
begin
  intro h4,
  apply h3,
  apply (h1 h2),
  exact h4,
end

-- 6ª demostración
example
  (h1 : P → (Q → R))
  (h2 : P)
  (h3 : ¬R)
  : ¬Q :=
begin
  intro h4,
  apply h3,
  exact (h1 h2) h4,
end

-- 7ª demostración
example
```



```

(h1 : P → (Q → R))
(h2 : P)
(h3 : ¬R)
: ¬Q :=
begin
  intro h4,
  exact h3 ((h1 h2) h4),
end

-- 8ª demostración
example
  (h1 : P → (Q → R))
  (h2 : P)
  (h3 : ¬R)
  : ¬Q :=
λ h4, h3 ((h1 h2) h4)

-- 9ª demostración
example
  (h1 : P → (Q → R))
  (h2 : P)
  (h3 : ¬R)
  : ¬Q :=
by finish

```

2.3.5. Pruebas de $P \rightarrow Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P$

- Enlaces al [código](#), a la [sesión en Lean Web](#) y al [vídeo](#).

```

-- Pruebas de  $P \rightarrow Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P$ 
-- =====

-- Ej. 1. Demostrar
--  $P \rightarrow Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P$ 

import tactic

variables (P Q : Prop)

-- 1ª demostración
example
  (h1 : P → Q)
  : ¬Q → ¬P :=

```

```

assume h2 : ¬Q,
show ¬P,
  from mt h1 h2

-- 2ª demostración
example
  (h1 : P → Q)
  : ¬Q → ¬P :=
assume h2 : ¬Q, mt h1 h2

-- 3ª demostración
example
  (h1 : P → Q)
  : ¬Q → ¬P :=
λ h2, mt h1 h2

-- 4ª demostración
example
  (h1 : P → Q)
  : ¬Q → ¬P :=
  mt h1

-- 5ª demostración
example
  (h1 : P → Q)
  : ¬Q → ¬P :=
begin
  intro h2,
  exact mt h1 h2,
end

-- 6ª demostración
example
  (h1 : P → Q)
  : ¬Q → ¬P :=
begin
  intro h2,
  intro h3,
  apply h2,
  apply h1,
  exact h3,
end

-- 7ª demostración
example

```

```
(h1 : P → Q)
: ¬Q → ¬P :=
begin
  intro h2,
  intro h3,
  apply h2,
  exact h1 h3,
end

-- 8ª demostración
example
  (h1 : P → Q)
  : ¬Q → ¬P :=
begin
  intro h2,
  intro h3,
  exact h2 (h1 h3),
end

-- 9ª demostración
example
  (h1 : P → Q)
  : ¬Q → ¬P :=
begin
  intros h2 h3,
  exact h2 (h1 h3),
end

-- 10ª demostración
example
  (h1 : P → Q)
  : ¬Q → ¬P :=
λ h2 h3, h2 (h1 h3)

-- 11ª demostración
example
  (h1 : P → Q)
  : ¬Q → ¬P :=
by tauto

-- 12ª demostración
example
  (h1 : P → Q)
  : ¬Q → ¬P :=
by finish
```

2.3.6. Regla de introducción de la doble negación: $P \vdash \neg\neg P$

- Enlaces al [código](#), a la [sesión en Lean Web](#) y al [vídeo](#).

```
-- Regla de introducción de la doble negación
-- =====
```

```
-- Ej. 1. Demostrar
--      P ⊢ ¬¬P
```

```
import tactic
variable (P : Prop)
```

```
-- 1ª demostración
```

```
example
  (h1 : P)
  : ¬¬P :=
not.intro
  ( assume h2: ¬P,
    show false,
    from h2 h1)
```

```
-- 2ª demostración
```

```
example
  (h1 : P)
  : ¬¬P :=
assume h2: ¬P,
show false,
  from h2 h1
```

```
-- 3ª demostración
```

```
example
  (h1 : P)
  : ¬¬P :=
assume h2: ¬P, h2 h1
```

```
-- 4ª demostración
```

```
example
  (h1 : P)
  : ¬¬P :=
λ h2, h2 h1
```

```
-- 5ª demostración
```

```

example
  (h1 : P)
  :  $\neg\neg P$  :=
not_not.mpr h1

-- 6ª demostración
example
  (h1 : P)
  :  $\neg\neg P$  :=
not_not_intro h1

-- 7ª demostración
example
  (h1 : P)
  :  $\neg\neg P$  :=
begin
  intro h2,
  exact h2 h1,
end

-- 8ª demostración
example
  (h1 : P)
  :  $\neg\neg P$  :=
by tauto

-- 9ª demostración
example
  (h1 : P)
  :  $\neg\neg P$  :=
by finish

```

2.3.7. Pruebas de $\neg Q \rightarrow \neg P \vdash P \rightarrow \neg\neg Q$

- Enlaces al [código](#), a la [sesión en Lean Web](#) y al [vídeo](#).

```

-- Pruebas de  $\neg Q \rightarrow \neg P \vdash P \rightarrow \neg\neg Q$ 
-- =====

-- Ej. 1. Demostrar
--  $\neg Q \rightarrow \neg P \vdash P \rightarrow \neg\neg Q$ 

import tactic

```

```

variables (P Q : Prop)

-- 1ª demostración
example
  (h1 : ¬Q → ¬P)
  : P → ¬¬Q :=
assume h2 : P,
have h3 : ¬¬P,
  from not_not_intro h2,
show ¬¬Q,
  from mt h1 h3

-- 2ª demostración
example
  (h1 : ¬Q → ¬P)
  : P → ¬¬Q :=
assume h2 : P,
have h3 : ¬¬P := not_not_intro h2,
show ¬¬Q,
  from mt h1 h3

-- 3ª demostración
example
  (h1 : ¬Q → ¬P)
  : P → ¬¬Q :=
assume h2 : P,
show ¬¬Q,
  from mt h1 (not_not_intro h2)

-- 4ª demostración
example
  (h1 : ¬Q → ¬P)
  : P → ¬¬Q :=
assume h2 : P, mt h1 (not_not_intro h2)

-- 5ª demostración
example
  (h1 : ¬Q → ¬P)
  : P → ¬¬Q :=
λ h2, mt h1 (not_not_intro h2)

-- 6ª demostración
example
  (h1 : ¬Q → ¬P)

```

```
: P → ¬¬Q :=
imp_not_comm.mp h1

-- 7ª demostración
example
  (h1 : ¬Q → ¬P)
  : P → ¬¬Q :=
begin
  intro h2,
  apply mt h1,
  apply not_not_intro,
  exact h2,
end

-- 8ª demostración
example
  (h1 : ¬Q → ¬P)
  : P → ¬¬Q :=
begin
  intro h2,
  apply mt h1,
  exact not_not_intro h2,
end

-- 9ª demostración
example
  (h1 : ¬Q → ¬P)
  : P → ¬¬Q :=
begin
  intro h2,
  exact mt h1 (not_not_intro h2),
end

-- 10ª demostración
example
  (h1 : ¬Q → ¬P)
  : P → ¬¬Q :=
λ h2, mt h1 (not_not_intro h2)

-- 11ª demostración
example
  (h1 : ¬Q → ¬P)
  : P → ¬¬Q :=
begin
  intro h2,
```

```

intro h3,
  have h4 : ¬P := h1 h3,
  exact h4 h2,
end

-- 12ª demostración
example
  (h1 : ¬Q → ¬P)
  : P → ¬¬Q :=
begin
  intros h2 h3,
  exact (h1 h3) h2,
end

-- 13ª demostración
example
  (h1 : ¬Q → ¬P)
  : P → ¬¬Q :=
λ h2 h3, (h1 h3) h2

-- 14ª demostración
example
  (h1 : ¬Q → ¬P)
  : P → ¬¬Q :=
by tauto

-- 15ª demostración
example
  (h1 : ¬Q → ¬P)
  : P → ¬¬Q :=
by finish

```

2.4. Reglas de la disyunción

2.4.1. Reglas de introducción de la disyunción

- Enlaces al [código](#), a la [sesión en Lean Web](#) y al [vídeo](#).

```

-- Reglas de introducción de la disyunción
-- =====

import tactic

```



```
variables (P Q R : Prop)
```

```
-- Ej. 1. Demostrar
--    $P \vdash P \vee Q$ 
```

```
-- 1ª demostración
```

```
example
  (h : P)
  : P  $\vee$  Q :=
or.intro_left Q h
```

```
-- 2ª demostración
```

```
example
  (h : P)
  : P  $\vee$  Q :=
or.inl h
```

```
-- 3ª demostración
```

```
example
  (h : P)
  : P  $\vee$  Q :=
by tauto
```

```
-- 4ª demostración
```

```
example
  (h : P)
  : P  $\vee$  Q :=
by finish
```

```
-- Ej. 2. Demostrar
--    $P \wedge Q \vdash P \vee R$ 
```

```
-- 1ª demostración
```

```
example
  (h1 : P  $\wedge$  Q)
  : P  $\vee$  R :=
have h2 : P,
  from and.elim_left h1,
show P  $\vee$  R,
  from or.inl h2
```

```
-- 2ª demostración
```

```
example
  (h1 : P  $\wedge$  Q)
```

```

: P ∨ R :=
have h2 : P,
  from h1.1,
show P ∨ R,
  from or.inl h2

-- 3ª demostración
example
  (h1 : P ∧ Q)
  : P ∨ R :=
have h2 : P := h1.1,
show P ∨ R,
  from or.inl h2

-- 4ª demostración
example
  (h1 : P ∧ Q)
  : P ∨ R :=
show P ∨ R,
  from or.inl h1.1

-- 5ª demostración
example
  (h1 : P ∧ Q)
  : P ∨ R :=
or.inl h1.1

-- 6ª demostración
example
  (h1 : P ∧ Q)
  : P ∨ R :=
by tauto

-- 7ª demostración
example
  (h1 : P ∧ Q)
  : P ∨ R :=
by finish

-- Ej. 3. Demostrar
--   Q ⊢ P ∨ Q

-- 1ª demostración
example
  (h : Q)

```

```

: P ∨ Q :=
or.intro_right P h

-- 2ª demostración
example
  (h : Q)
  : P ∨ Q :=
or.inr h

-- 3ª demostración
example
  (h : Q)
  : P ∨ Q :=
by tauto

-- 4ª demostración
example
  (h : Q)
  : P ∨ Q :=
by finish

-- Ej. 4. Demostrar
--    $P \wedge Q \vdash P \vee R$ 

-- 1ª demostración
example
  (h1 : P ∧ Q)
  : R ∨ Q :=
have h2 : Q,
  from and.elim_right h1,
show R ∨ Q,
  from or.inr h2

-- 2ª demostración
example
  (h1 : P ∧ Q)
  : R ∨ Q :=
have h2 : Q,
  from h1.2,
show R ∨ Q,
  from or.inr h2

-- 3ª demostración
example
  (h1 : P ∧ Q)

```

```

: R ∨ Q :=
have h2 : Q := h1.2,
show R ∨ Q,
  from or.inr h2

-- 4ª demostración
example
  (h1 : P ∧ Q)
  : R ∨ Q :=
show R ∨ Q,
  from or.inr h1.2

-- 5ª demostración
example
  (h1 : P ∧ Q)
  : R ∨ Q :=
or.inr h1.2

-- 6ª demostración
example
  (h1 : P ∧ Q)
  : R ∨ Q :=
by tauto

-- 7ª demostración
example
  (h1 : P ∧ Q)
  : R ∨ Q :=
by finish

```

2.4.2. Regla de eliminación de la disyunción

- Enlaces al [código](#), a la [sesión en Lean Web](#) y al [vídeo](#).

```

-- Regla de eliminación de la disyunción
-- =====

import tactic

variables (P Q R : Prop)

-- Ej. 1. Demostrar
--   P ∨ Q, P → R, Q → R ⊢ R

```

```
-- 1ª demostración
```

```
example
```

```
  (h1 : P  $\vee$  Q)
```

```
  (h2 : P  $\rightarrow$  R)
```

```
  (h3 : Q  $\rightarrow$  R)
```

```
  : R :=
```

```
or.elim h1 h2 h3
```

```
-- 2ª demostración
```

```
example
```

```
  (h1 : P  $\vee$  Q)
```

```
  (h2 : P  $\rightarrow$  R)
```

```
  (h3 : Q  $\rightarrow$  R)
```

```
  : R :=
```

```
or.rec h2 h3 h1
```

```
-- 3ª demostración
```

```
example
```

```
  (h1 : P  $\vee$  Q)
```

```
  (h2 : P  $\rightarrow$  R)
```

```
  (h3 : Q  $\rightarrow$  R)
```

```
  : R :=
```

```
begin
```

```
  cases h1 with hP hQ,
```

```
  { exact h2 hP, },
```

```
  { exact h3 hQ, },
```

```
end
```

```
-- 4ª demostración
```

```
example
```

```
  (h1 : P  $\vee$  Q)
```

```
  (h2 : P  $\rightarrow$  R)
```

```
  (h3 : Q  $\rightarrow$  R)
```

```
  : R :=
```

```
by tauto
```

```
-- 5ª demostración
```

```
example
```

```
  (h1 : P  $\vee$  Q)
```

```
  (h2 : P  $\rightarrow$  R)
```

```
  (h3 : Q  $\rightarrow$  R)
```

```
  : R :=
```

```
by finish
```

2.4.3. Pruebas de $P \vee Q \vdash Q \vee P$

- Enlaces al [código](#), a la [sesión en Lean Web](#) y al [vídeo](#).

```
-- Pruebas de  $P \vee Q \vdash Q \vee P$ 
-- =====
```

```
import tactic
```

```
variables (P Q R : Prop)
```

```
-- Ej. 1. Demostrar
```

```
--  $P \vee Q \vdash Q \vee P$ 
```

```
-- 1ª demostración
```

```
example
```

```
(h1 : P  $\vee$  Q)
```

```
: Q  $\vee$  P :=
```

```
or.elim h1
```

```
( assume h2 : P,
```

```
  show Q  $\vee$  P,
```

```
    from or.inr h2 )
```

```
( assume h3 : Q,
```

```
  show Q  $\vee$  P,
```

```
    from or.inl h3 )
```

```
-- 2ª demostración
```

```
example
```

```
(h1 : P  $\vee$  Q)
```

```
: Q  $\vee$  P :=
```

```
or.elim h1
```

```
(  $\lambda$  h, or.inr h )
```

```
(  $\lambda$  h, or.inl h )
```

```
-- 3ª demostración
```

```
example
```

```
(h1 : P  $\vee$  Q)
```

```
: Q  $\vee$  P :=
```

```
or.elim h1 or.inr or.inl
```

```
-- 4ª demostración
```

```
example
```

```
(h1 : P  $\vee$  Q)
```

```
: Q  $\vee$  P :=
```

```
or.rec or.inr or.inl h1
```

```

-- 5ª demostración
example
  (h1 : P ∨ Q)
  : Q ∨ P :=
or.swap h1

-- 6ª demostración
example
  (h1 : P ∨ Q)
  : Q ∨ P :=
begin
  cases h1 with h2 h3,
  { exact or.inr h2, },
  { exact or.inl h3, },
end

-- 7ª demostración
example
  (P ∨ Q)
  : Q ∨ P :=
begin
  cases <P ∨ Q>,
  { exact or.inr <P>, },
  { exact or.inl <Q>, },
end

-- 8ª demostración
example
  (h1 : P ∨ Q)
  : Q ∨ P :=
by tauto

-- 9ª demostración
example
  (h1 : P ∨ Q)
  : Q ∨ P :=
by finish

```

2.4.4. Pruebas de $Q \rightarrow R \vdash P \vee Q \rightarrow P \vee R$

- Enlaces al [código](#), a la [sesión en Lean Web](#) y al [vídeo](#).

```

-- Pruebas de  $Q \rightarrow R \vdash P \vee Q \rightarrow P \vee R$ 
-- =====

-- Ej. 1. Demostrar
--       $Q \rightarrow R \vdash P \vee Q \rightarrow P \vee R$ 

import tactic

variables (P Q R : Prop)

-- 1ª demostración
example
  (h1 : Q → R)
  : P ∨ Q → P ∨ R :=
assume h2 : P ∨ Q,
or.elim h2
  ( assume h3 : P,
    show P ∨ R,
    from or.inl h3 )
  ( assume h4 : Q,
    have h5 : R := h1 h4,
    show P ∨ R,
    from or.inr h5 )

-- 2ª demostración
example
  (h1 : Q → R)
  : P ∨ Q → P ∨ R :=
assume h2 : P ∨ Q,
or.elim h2
  ( assume h3 : P, or.inl h3 )
  ( assume h4 : Q,
    show P ∨ R,
    from or.inr (h1 h4) )

-- 3ª demostración
example
  (h1 : Q → R)
  : P ∨ Q → P ∨ R :=
assume h2 : P ∨ Q,
or.elim h2
  ( assume h3 : P, or.inl h3 )
  ( assume h4 : Q, or.inr (h1 h4) )

-- 4ª demostración

```



```

example
  (h1 : Q → R)
  : P ∨ Q → P ∨ R :=
assume h2 : P ∨ Q,
or.elim h2
  ( λ h3, or.inl h3 )
  ( λ h4, or.inr (h1 h4) )

-- 5ª demostración
example
  (h1 : Q → R)
  : P ∨ Q → P ∨ R :=
assume h2 : P ∨ Q,
or.elim h2
  or.inl
  ( λ h, or.inr (h1 h) )

-- 6ª demostración
example
  (h1 : Q → R)
  : P ∨ Q → P ∨ R :=
λ h2, or.elim h2 or.inl (λ h, or.inr (h1 h))

-- 7ª demostración
example
  (h1 : Q → R)
  : P ∨ Q → P ∨ R :=
or.imp_right h1

-- 8ª demostración
example
  (h1 : Q → R)
  : P ∨ Q → P ∨ R :=
begin
  intro h2,
  cases h2 with h3 h4,
  { exact or.inl h3, },
  { exact or.inr (h1 h4), },
end

-- 9ª demostración
example
  (h1 : Q → R)
  : P ∨ Q → P ∨ R :=
by tauto

```

```
-- 10ª demostración
example
  (h1 : Q → R)
  : P ∨ Q → P ∨ R :=
by finish
```