

Ejercicios de lógica proposicional con Lean

José A. Alonso Jiménez

Grupo de Lógica Computacional
Dpto. de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial
Universidad de Sevilla
Sevilla, 30 de noviembre de 2020

Esta obra está bajo una licencia Reconocimiento-NoComercial-CompartirIgual 2.5 Spain de Creative Commons.

Se permite:

- copiar, distribuir y comunicar públicamente la obra
- hacer obras derivadas

Bajo las condiciones siguientes:

Reconocimiento. Debe reconocer los créditos de la obra de la manera especificada por el autor.



No comercial. No puede utilizar esta obra para fines comerciales.



Compartir bajo la misma licencia. Si altera o transforma esta obra, o genera una obra derivada, sólo puede distribuir la obra generada bajo una licencia idéntica a ésta.

- Al reutilizar o distribuir la obra, tiene que dejar bien claro los términos de la licencia de esta obra.
- Algunas de estas condiciones pueden no aplicarse si se obtiene el permiso del titular de los derechos de autor.

Esto es un resumen del texto legal (la licencia completa). Para ver una copia de esta licencia, visite <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.5/es/> o envíe una carta a Creative Commons, 559 Nathan Abbott Way, Stanford, California 94305, USA.

Índice general

1	Introducción	5
2	Ejercicios sobre implicaciones	7
2.1	$p \rightarrow q, p \vdash q$	7
2.2	$p \rightarrow q, q \rightarrow r, p \vdash r$	8
2.3	$p \rightarrow (q \rightarrow r), p \rightarrow q, p \vdash r$	9
2.4	$p \rightarrow q, q \rightarrow r \vdash p \rightarrow r$	11

Capítulo 1

Introducción

Este libro es una colección de soluciones de ejercicios de lógica proposicional formalizadas con [Lean](#) que complementa el libro de [Lógica con Lean](#).

En cada capítulo va entrando en juego una nueva conectiva y para cada uno de los ejercicios se formalizan las soluciones en distintos estilos:

- aplicativo usando tácticas con razonamiento hacia atrás,
- declarativo (o estructurado) con razonamiento hacia adelante,
- funcional con términos del tipo especificado y
- automático.

Además, al final de cada ejercicio se encuentra un enlace al código y otro a una sesión de Lean en la Web que contiene la solución del ejercicio.

Capítulo 2

Ejercicios sobre implicaciones

2.1. $p \rightarrow q, p \vdash q$

```
-- Ejercicio. Demostrar
--       $p \rightarrow q, p \vdash q$ 
```

```
import tactic
variables (p q : Prop)
```

```
-- 1ª demostración
```

```
example
  (Hpq : p → q)
  (Hp   : p)
  : q :=
Hpq Hp
```

```
-- 2ª demostración
```

```
example
  (Hpq : p → q)
  (Hp   : p)
  : q :=
by tauto
```

Enlaces al [código](#) y a la [sesión en Lean Web](#). y al vídeo.

2.2. $p \rightarrow q, q \rightarrow r, p \vdash r$

```
-- Ejercicio. Demostrar
--    $p \rightarrow q, q \rightarrow r, p \vdash r$ 
```

```
import tactic
variables (p q r : Prop)
```

```
-- 1ª demostración
```

```
example
  (Hpq : p → q)
  (Hqr : q → r)
  (Hp : p)
  : r :=
```

```
begin
  apply Hqr,
  apply Hpq,
  exact Hp,
end
```

```
-- 2ª demostración
```

```
example
  (Hpq : p → q)
  (Hqr : q → r)
  (Hp : p)
  : r :=
```

```
begin
  apply Hqr,
  exact Hpq Hp,
end
```

```
-- 3ª demostración
```

```
example
  (Hpq : p → q)
  (Hqr : q → r)
  (Hp : p)
  : r :=
```

```
begin
  exact Hqr (Hpq Hp),
end
```

```
-- 3ª demostración
```



```

example
  (Hpq : p → q)
  (Hqr : q → r)
  (Hp : p)
  : r :=
Hqr (Hpq Hp)

-- 4ª demostración
example
  (Hpq : p → q)
  (Hqr : q → r)
  (Hp : p)
  : r :=
by tauto

-- 5ª demostración
example
  (Hpq : p → q)
  (Hqr : q → r)
  (Hp : p)
  : r :=
have Hq : q,
  from Hpq Hp,
show r,
  from Hqr Hq

```

Enlaces al [código](#) y a la [sesión en Lean Web](#).

2.3. $p \rightarrow (q \rightarrow r), p \rightarrow q, p \vdash r$

```

-----
-- Ejercicio. Demostrar
--    $p \rightarrow (q \rightarrow r), p \rightarrow q, p \vdash r$ 
-----

import tactic
variables (p q r : Prop)

-- 1ª demostración
example
  (Hpqr : p → (q → r))
  (Hpq : p → q)
  (Hp : p)

```

```

: r :=
begin
  have Hqr : q → r, from Hpqr Hp,
  apply Hqr,
  apply Hpq,
  exact Hp,
end

```

-- 2ª demostración

```

example
  (Hpqr : p → (q → r))
  (Hpq   : p → q)
  (Hp    : p)
  : r :=
begin
  have Hqr : q → r, from Hpqr Hp,
  apply Hqr,
  exact Hpq Hp,
end

```

-- 3ª demostración

```

example
  (Hpqr : p → (q → r))
  (Hpq   : p → q)
  (Hp    : p)
  : r :=
begin
  have Hqr : q → r, from Hpqr Hp,
  exact Hqr (Hpq Hp),
end

```

-- 4ª demostración

```

example
  (Hpqr : p → (q → r))
  (Hpq   : p → q)
  (Hp    : p)
  : r :=
  (Hpqr Hp) (Hpq Hp)

```

-- 5ª demostración

```

example
  (Hpqr : p → (q → r))
  (Hpq   : p → q)
  (Hp    : p)
  : r :=

```

```
-- by hint  
by finish
```

Enlaces al [código](#) y a la [sesión en Lean Web](#).

2.4. $p \rightarrow q, q \rightarrow r \vdash p \rightarrow r$

```
-----  
-- Ejercicio. Demostrar  
--    $p \rightarrow q, q \rightarrow r \vdash p \rightarrow r$   
-----
```

```
import tactic  
variables (p q r : Prop)
```

```
-- 1ª demostración
```

```
example  
  (Hpq : p → q)  
  (Hqr : q → r)  
  : p → r :=
```

```
begin  
  intro Hp,  
  apply Hqr,  
  apply Hpq,  
  exact Hp,  
end
```

```
-- 2ª demostración
```

```
example  
  (Hpq : p → q)  
  (Hqr : q → r)  
  : p → r :=
```

```
begin  
  intro Hp,  
  apply Hqr,  
  exact Hpq Hp,  
end
```

```
-- 3ª demostración
```

```
example  
  (Hpq : p → q)  
  (Hqr : q → r)  
  : p → r :=
```

```
begin
  intro Hp,
  exact Hqr (Hpq Hp),
end
```

-- 4ª demostración

```
example
  (Hpq : p → q)
  (Hqr : q → r)
  : p → r :=
λ Hp, Hqr (Hpq Hp)
```

-- 5ª demostración

```
example
  (Hpq : p → q)
  (Hqr : q → r)
  : p → r :=
assume Hp : p,
have Hq : q,
  from Hpq Hp,
show r,
  from Hqr Hq
```

-- 6ª demostración

```
example
  (Hpq : p → q)
  (Hqr : q → r)
  : p → r :=
assume Hp : p,
have Hq : q,
  from Hpq Hp,
Hqr Hq
```

-- 7ª demostración

```
example
  (Hpq : p → q)
  (Hqr : q → r)
  : p → r :=
assume Hp : p,
Hqr (Hpq Hp)
```

-- 8ª demostración

```
example
  (Hpq : p → q)
  (Hqr : q → r)
```

```
: p → r :=  
λ Hp, Hqr (Hqp Hp)  
  
-- 9ª demostración  
example  
  (Hqp : p → q)  
  (Hqr : q → r)  
  : p → r :=  
-- by hint  
by tauto  
  
-- 10ª demostración  
example  
  (Hqp : p → q)  
  (Hqr : q → r)  
  : p → r :=  
by finish
```

Enlaces al [código](#) y a la [sesión en Lean Web](#).