Contents

1 1° de Bachillerato (16 años)

Del libro Matemáticas I (1º de Bachillerato) de Apuntes marea Verde.

1.1 Números reales y complejos

1.1.1 Valor absoluto

- 10 No negatividad: $|a| \geq 0$.
- 10 Simetría: $|a| = |-a|$. Si $a > 0$, entonces

$$\begin{aligned} |a| &= a \\ &= -(-a) \\ &= |-a| \end{aligned}$$

Si $a = 0$, entonces

$$\begin{aligned} |a| &= |0| \\ &= |-0| \\ &= |-a| \end{aligned}$$

Si $a < 0$, entonces

$$\begin{aligned} |a| &= -a \\ &= |-a| \end{aligned}$$

- 10 Definición positiva: Si $|a| = 0$, entonces $a = 0$.
- 10 Valor absoluto y producto: $|a \times b| = |a| \times |b|$.
- 10 Desigualdad triangular: $|a + b| \leq |a| + |b|$.

1.1.2 Distancia en la recta real

- 12 La distancia está definida por $\text{dist}(x, y) = |x - y|$ y verifica las siguientes propiedades:
  - $\text{dist}(x, y) = 0$ syss $x = y$
  - $\text{dist}(x, y) = \text{dist}(y, x)$
  - $\text{dist}(x, y) \leq \text{dist}(x, z) + \text{dist}(z, y)$

1.1.3 Números complejos

- 21 Operaciones en forma binómica:
  - $(x + iy) + (u + iv) = (x + u) + i(y + v)$.
  - $(x + iy)(u + iv) = (xu - yv) + i(xv + yu)$.
- 27 Propiedades del módulo, del conjugado y del argumento de un número complejo:
  - $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$
  - $\overline{z - w} = \overline{z} - \overline{w}$
  - $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$.
  - $\arg(\overline{z}) = -\arg(z)$.
  - $z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z}$.
  - $z \cdot \overline{z} = |z|^2$
  - $|\overline{z}| = |z|$.
  - $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$
  - $\left|\dfrac{z}{w}\right| = \dfrac{|z|}{|w|}$
  - $|z| = 0 \iff z = 0$
  - $\Re(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$
  - $\Im(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$

- $\Re(z) \leq |z|$
- $\Im(z) \leq |z|$
- $|z| \leq \Re(z) + \Im(z)$
- $||z| - |w|| \leq |z + w| \leq |z| + |w|$

1.1.4 Operaciones entre números complejos en forma trigonométrica

- 29 Para multiplicar números complejos expresados en forma polar o en trigonométrica basta multiplicar sus módulos y sumar sus argumento

$$\begin{aligned} z \cdot z' &= r(\cos\alpha + i\alpha) \cdot r'(\cos\beta + i\beta) \\ &= (r \cdot r')((\cos\alpha\cos\beta - \alpha\beta) + i(\alpha\cos\beta - \cos\alpha\beta)) \\ &= (r \cdot r')(\cos(\alpha + \beta) + i(\alpha + \beta)) \end{aligned}$$

- Para dividir números complejos, basta dividir sus módulos y restar sus argumentos.
- El inverso de un número complejo distinto de cero tiene como módulo, el inverso del módulo, y como argumento, el opuesto del argumento.
- Para elevar un número complejo a una potencia, se eleva el módulo a dicha potencia, y se multiplica el argumento por el exponente.

1.2 Trigonometría

1.2.1 Razones trigonométricas de la suma de ángulos

- 116 $(a + b) = (a)\cos(b) + \cos(a)(b)$
- 116 $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - (a)(b)$

- 117 $\tan(a+b) = \dfrac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$

$$\begin{aligned}
\tan(a+b) &= \frac{(a+b)}{\cos(a+b)} \\
&= \frac{(a)\cos(b)+\cos(a)(b)}{\cos(a)\cos(b)-(a)(b)} \\
&= \frac{\dfrac{(a)\cos(b)+\cos(a)(b)}{\cos(a)\cos(b)}}{\dfrac{\cos(a)\cos(b)-(a)(b)}{\cos(a)\cos(b)}} \\
&= \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}
\end{aligned}$$

1.2.2 Razones trigonométricas de la resta de ángulos

- 117 $(-a) = -(a)$
- 117 $\cos(-a) = \cos(a)$
- 117 $\tan(-a) = -\tan(a)$
- 118 $(a-b) = (a)\cos(b) - \cos(a)(b)$
- 118 $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + (a)(b)$
- 118 $\tan(a-b) = \dfrac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}$

1.2.3 Razones trigonométricas del ángulo doble

- 118 $(2a) = 2(a)\cos(a)$
- 118 $\cos(2a) = \cos^2(a) -^2 (a)$
- 118 $\tan(2a) = \dfrac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)}$
- 119 $\left(\dfrac{a}{2}\right) = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos(a)}{2}}$
- 119 $\cos\left(\dfrac{a}{2}\right) = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos(a)}{2}}$

- 119 $\tan\left(\frac{a}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(a)}{1+\cos(a)}}$

1.2.4 Transformaciones de sumas de razones trigonométricas en productos

- Fórmula de Simpson de seno por coseno:
  $\alpha\cos\beta = \frac{(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)}{2}$ (en ProofWiki Simpson's formulas/Sine by cosine)

$$
\begin{aligned}
&\frac{(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)}{2} \\
&= \frac{(\alpha\cos\beta+\cos\alpha\beta)+(\alpha\cos\beta-\cos\alpha\beta)}{2} \\
&= \frac{2\alpha\cos\beta}{2} \\
&= \alpha\cos\beta
\end{aligned}
$$

- 120 $(a)+(b) = 2\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$ (En ProofWiki Prosthaphaeresis formulas/Sine plus sine).

$$
\begin{aligned}
&2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \\
&= 2\frac{\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{2} \quad \text{Fórmula de Simpson} \\
&= \frac{2\alpha}{2}+\frac{2\beta}{2} \\
&= \alpha+\beta
\end{aligned}
$$

- 120 $(a)-(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{a-b}{2}\right)$ (en ProofWiki Prosthaphaeresis formulas/sine minus sine)

$$
\begin{aligned}
&2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\\
&=2\frac{\left(\frac{\alpha-\beta}{2}+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+\left(\frac{\alpha-\beta}{2}-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{2} \quad \text{Fórmula de Simpson}\\
&=\frac{2\alpha}{2}-\frac{2\beta}{2}\\
&=\alpha-\beta
\end{aligned}
$$

- Fórmula de Simpson de coseno por coseno: $\cos\alpha\cos\beta=\dfrac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2}$ (en ProofWiki Simpson's Formulas/Cosine by Cosine)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\cos(\alpha-\beta)+(\alpha+\beta)}{2}\\
&=\frac{(\cos\alpha\cos\beta+\alpha\beta)+(\cos\alpha\cos\beta-\alpha\beta)}{2}\\
&=\frac{2\cos\alpha\cos\beta}{2}\\
&=\cos\alpha\cos\beta
\end{aligned}
$$

- 120 $\cos a+\cos b=2\cos\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\cos\left(\dfrac{a-b}{2}\right)$ (en ProofWiki Prosthaphaeresis Formulas/Cosine plus Cosine).

$$
\begin{aligned}
&2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\\
&=2\frac{\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{2} \quad \text{Fórmula de Simpson}\\
&=\cos\frac{2\beta}{2}+\cos\frac{2\alpha}{2}\\
&=\cos\alpha+\cos\beta
\end{aligned}
$$

– 120

$\cos a - \cos b = -2\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\left(\dfrac{a-b}{2}\right)$ (en ProofWiki Prosthaphaeresis Formulas/Cosine minus Cosine).

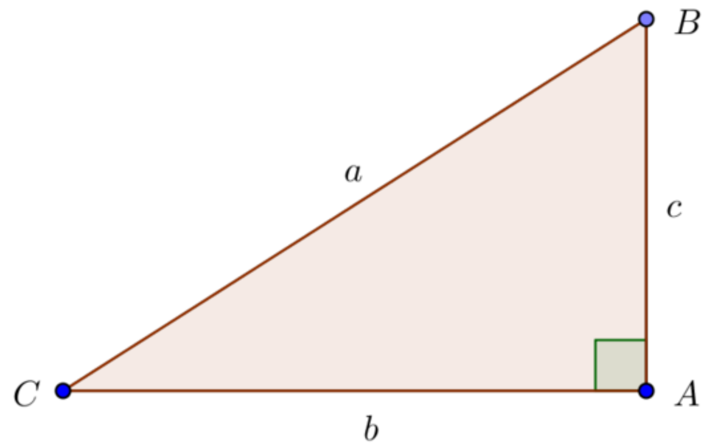
$$
\begin{aligned}
&-2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\\
&= -2\frac{\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)-\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{2} \quad \text{Fórmula de Simpson}\\
&= -\left(\cos\frac{2\beta}{2}-\cos\frac{2\alpha}{2}\right)\\
&= \cos\alpha-\cos\beta
\end{aligned}
$$

1.2.5 Resolución general de triángulos

- 129 Teorema del coseno: Sea $\triangle ABC$ un triángulos cuyos lados a, b, c son tales que a es opuesto de A, b es opuestos de B y c es opuesto de C. Entonces,
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$
(En ProofWiki Law of cosines).

  Caso de triángulo rectángulo

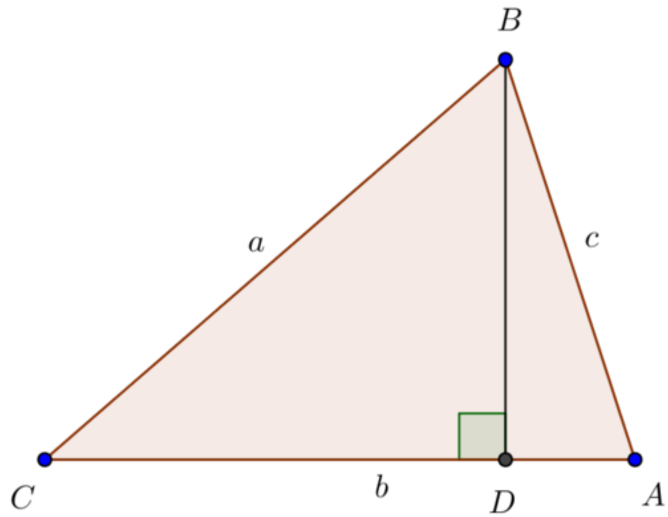
  Sea $\triangle ABC$ un triángulo rectángulo tal que $\angle A$ recto.



$$
\begin{aligned}
a^2 &= b^2 + c^2 && \text{Teorema de Pitágoras}\\
c^2 &= a^2 - b^2 && \text{Despejando } c^2\\
&= a^2 - 2b^2 + b^2 && \text{Sumando } 0 = b^2 - b^2 \text{ a la derecha}\\
&= a^2 - 2ab\left(\frac{b}{a}\right) + b^2 && \text{Multiplicando } 2b^2 \text{ por } \frac{a}{a}\\
&= a^2 + b^2 - 2ab\cos C && \text{Por la definición de } \cos C = \frac{b}{a}
\end{aligned}
$$

Caso del triángulo acutángulo

Sea $\triangle ABC$ un triángulo acutángulo.

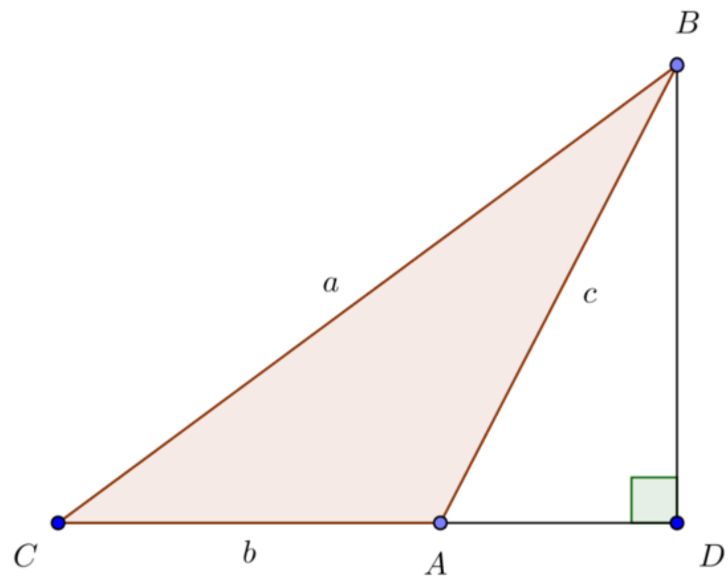


Sea BD perpendicular a AC y se definen $h = BD$, $e = CD$ y $f = AD$.
Los triángulos $\triangle CDB$ y $\triangle ADB$ son rectángulos. Por tanto,

$$\begin{aligned}
c^2 &= h^2 + f^2 && \text{Teorema de Pitágoras}\\
&= a^2 - e^2 + f^2 && \text{Teorema de Pitágoras}\\
&= a^2 - e^2 + f^2 + 2e^2 - 2e^2 + 2ef - 2ef && \text{Sumando } 2e^2 - 2e^2 + 2ef - 2ef\\
&= a^2 + (e^2 + f^2 + 2ef) - 2e(e+f) && \text{Agrupando}\\
&= a^2 + (e+f)^2 - 2e(e+f) && \text{Cuadrado del binomio}\\
&= a^2 + b^2 - 2eb && \text{Sustituyendo } b = e+f\\
&= a^2 + b^2 - 2ab\cos C && \text{Definición de } \cos C = \frac{e}{a}
\end{aligned}$$

Caso del triángulo obtusángulo

Sea $\triangle ABC$ un triángulo obtusángulo.



Se extiende AC y sea BD perpendicular a AC. Se define $h = BD$, $e = CD$ y $f = AD$.

Entonces $\triangle CDB$ y $\triangle ADB$ son triángulos rectángulos. Por tanto,

$$
\begin{aligned}
c^2 &= h^2 + f^2 && \text{Teorema de Pitágoras}\\
&= a^2 - e^2 + f^2 && \text{Teorema de Pitágoras}\\
&= a^2 - (b+f)^2 + f^2 && \text{Por definición de } e \text{ y } f\\
&= a^2 - b^2 - f^2 - 2bf + f^2 && \text{Expandiendo el cuadrado del binomio}\\
&= a^2 - b^2 - 2bf && \text{Cancelando } f^2 - f^2\\
&= a^2 - b^2 - 2bf + 2b^2 - 2b^2 && \text{Sumando y restando } 2b^2\\
&= a^2 + b^2 - 2b(b+f) && \text{Reagrupando}\\
&= a^2 + b^2 - 2be && \\
&= a^2 + b^2 - 2ab\cos C && \text{Por definición de } \cos C = \frac{e}{a}
\end{aligned}
$$

- 129 Teorema de Pitágoras: Sea $\triangle ABC$ un triángulo rectángulo c como su hipotenusa. Entonces,

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$
\begin{aligned}
c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \\
&= a^2 + b^2
\end{aligned}
$$