Matrizen

- können Vektoren drehen, spiegeln und strecken (um den Faktor λ)

Eigenvektor zum EW λ wird gestreckt

$$M\vec{v} = \lambda \vec{v}$$

Eigenwert

Eigenwerte berechnen:
charakteristisches Polynom suchen Nullstellen

$$\det(M - E\cdot\lambda) = 0$$

Algebraische Vielfachheit: Häufigkeit des Vorkommens eines EV (Exponent von zugehörigem Linearfaktor $(x-\lambda)^{k}$)

Eigenvektoren zu jedem EW wird EV durch Lösen des folgenden GLS bestimmt

$$(M - E\cdot\lambda_i)\vec{v} = \vec{0}$$

wenn keine Nullzeile entsteht, da $|A - E\cdot\lambda| = 0$

① $\lambda = 2$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1-2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1-2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\dots} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Geometrische Vielfachheit: Dimension des Eigenraums (Anz. der Vektoren, die ER aufspannen)

$v_z \in \mathbb{R}$

$2v_y = 3v_z \Leftrightarrow v_y = \frac{3}{2}v_z$

$v_x = -v_y + v_z = -\frac{3}{2}v_z + v_z = -\frac{1}{2}v_z$

$$\Rightarrow \vec{v}_1 = \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{v}_z = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}\vec{v}_z}_{\text{der/ein EV}}}_{\Rightarrow GV = 1}$$

$\Rightarrow$ Eigenraum:

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} x \;\middle|\; x \in \mathbb{R}\right\}$$

Diagonalmatrix hat EW auf Hauptdiagonale, sonst 0 $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_i \end{pmatrix}$

Matrix diagonalisierbar, falls $\forall$ EW: AV = GV ~~[illegible]~~

Koordinatentransformation:

Basis E: $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Basis B: $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}_E$, $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}_E$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_B = \vec{v}_B = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}_B : \alpha\vec{b}_1 + \beta\vec{b}_2 = \vec{v}_E = 1\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}_E + 2\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$= (\vec{b}_1, \vec{b}_2) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Transformationsmatrix S von $B \to E$

$$\boxed{S\cdot\vec{v}_B = \vec{v}_E}$$

Transformation von $E \to B$

$S\cdot\vec{v}_B = \vec{v}_E \mid S^{-1}\cdot$

$$\boxed{\vec{v}_B = S^{-1}\vec{v}_E}$$

Transformation einer Matrix:

$B \to E$: $S\cdot M_B \cdot S^{-1} = M_E$

$E \to B$: $S^{-1} M_E \cdot S = M_B$

Folgen

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, kurz (a_n) Folge

inkl. 0

Monotonie:

(a_n) monoton wachsend, falls $a_n \leq a_{n+1}$

(a_n) streng monoton wachsend, falls $a_n < a_{n+1}$

Beweis monoton wachsend ($a_n = n^2+1$)

Annahme: $a_n \leq a_{n+1}$

$a_n \leq a_{n+1}$ | Einsetzen

$\Leftrightarrow n^2+1 \leq (n+1)^2+1$

$\Leftrightarrow n^2+1 \leq n^2+2n+2$ | $-n^2-1$

$\Leftrightarrow 0 \leq 2n+1$

wahre Aussage, da $n \in \mathbb{N}$, also $n \geq 0$

Singularität: Punkt einer Fkt/Folge, an dem sie nicht definiert ist.

$a_n = \frac{1}{n} \Rightarrow 0$ ist Singularität von (a_n)

Beschränktheit

- Beschränkt nach oben: $\exists K \in \mathbb{R}.\ \forall n \in \mathbb{N}.\ a_n < K$

Beweis: $K = 2$ ist obere Schranke für $a_n = 1 - \frac{1}{n}$

Annahme: $\forall n \in \mathbb{N}.\ a_n < 2$

$a_n < 2$

$\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{n} < 2$ | -1

$\Leftrightarrow -\frac{1}{n} < 1$ | $\cdot n$

$\Leftrightarrow -1 < n$ □ wahre Aussage, da $n \in \mathbb{N}$ und somit $n \geq 0 > -1$

Grenzwert

Der Wert a heißt GW, falls

$$\forall \varepsilon > 0.\ \exists n_0 \in \mathbb{N}.\ \forall n > n_0.\ |a_n - a| < \varepsilon$$

max. Abstand der Folge zum GW

"Für jedes noch so kleine $\varepsilon \in \mathbb{R}$ liegen ab einem n_0 alle Folgenglieder im Intervall $]1-\varepsilon, 1+\varepsilon[$"

kurz: $\lim_{n\to\infty}(a_n) = a \Rightarrow (a_n)$ konvergiert gegen a / ist konvergent

Beweis: $\lim_{n\to\infty} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n}\right)}_{a_n} = \overset{!}{a}\ 1$

Ab welchem n_0 ist der Abstand der Folgeglieder zum GW $< \varepsilon = 0{,}01$?

$|a_n - a| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow |1 - \frac{1}{n} - 1| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow |-\frac{1}{n}| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} < n$

$\frac{1}{\varepsilon} < n$

$\Rightarrow \frac{1}{0{,}01} < n$

$\Leftrightarrow 100 < n$

Ab $n_0 = 100$ (ab $n = 101$) liegen alle a_n in $]1-0{,}01; 1+0{,}01[$

wahre Aussage für $n > n_0 = \frac{1}{\varepsilon}$

Alternativ: mit Satz

Jede beschränkte und monotone Folge ist konvergent

① Beweis (a_n) nach oben/unten beschränkt

② Beweis (a_n) monoton steigend/fallend

(Konvergenzbeweis ohne Berechnung von GW)

Rekursiv definierte Folgen

Folgen, bei denen Bildungsvorschrift des n-ten Glieds von Vorgängerglied (a_{n-1}) abhängt

jeweils dem, man verwenden müssen, die ersten entsprechend gegeben sein

Fibonnacci: $a_1 = 1$, $a_2 = 1$

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

Heronsche Folge: $a_1 = p$

$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{p}{a_n}\right)$

Konvergenzbeweis von Heronscher Folge mittels vollständiger Induktion

z.z. ① (a_n) nach unten beschränkt

② (a_n) monoton fallend

① z.z. $a_n \geq \sqrt{p}$

Induktionsanfang: $n = 1$

$a_1 = p \geq \sqrt{p}\quad \forall p > 1$

Somit ist folgendes gezeigt: $a_1 \geq \sqrt{p}$

Induktionsvoraussetzung: Für ein bel. aber festes $n \geq 1$ gelte $a_n \geq \sqrt{p}$

Induktionsbehauptung: $a_{n+1} \geq \sqrt{p}$

Induktionsschluss ($a_{n+1} \geq \sqrt{p}$)

$a_{n+1} \geq p$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{p}{a_n}\right) \geq \sqrt{p} \Leftrightarrow a_n + \frac{p}{a_n} = 2\sqrt{p}$ | $\cdot a_n$

$\overset{IV}{\Leftrightarrow} a_n^2 + p \geq 2a_n\sqrt{p}$

$a_n \geq \sqrt{p} > 0$ ohne VZ-Wechsel

$\Leftrightarrow a_n^2 - 2a_n\sqrt{p} + p \geq 0$

$\Leftrightarrow (a_n - \sqrt{p})^2 \geq 0$ □ gilt, da ein Quadrat im Reellen nicht negativ werden kann

② (a_n) monoton fallend

z.z. $a_{n+1} \leq a_n$

$a_{n+1} \leq a_n$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{p}{a_n}\right) \leq a_n$ | $\cdot 2$

$\Leftrightarrow a_n + \frac{p}{a_n} \leq 2a_n$ | $\cdot a_n$

$\Leftrightarrow a_n^2 + p \leq 2a_n^2$ | $-a_n^2$

$\Leftrightarrow p \leq a_n^2$ | $\sqrt{\ }$

$\Leftrightarrow \sqrt{p} \leq a_n$

Gilt, wie eben in ① gezeigt.

$\Rightarrow (a_n)$ ist nach unten beschränkt und monoton fallend und konvergiert damit!

Komplexe Folgen

$$c_n = a_n + i b_n$$

reelle Folgen

c_n konvergiert gdw Realteil(a_n) und Imaginärteil (b_n) konvergieren.

Wichtige Grenzwerte

(a_n)	$\lim_{n\to\infty} a_n$
c (konstante Fkt)	c
$\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}, \frac{1}{n^3}, \dots$	0 ($\Rightarrow$ Nullfolge)
$a - \frac{1}{n}$	a (von unten)
$a + \frac{1}{n}$	a (von oben)
$n, n^2, n^3, \dots$	∞ (uneigentlicher GW)
$\sqrt[n]{x}$, $x > 0$	1
$\sqrt[n]{n}$	1

$$x^n \begin{cases} x > 1 \to \infty & \text{(divergent)} \\ x = 1 \to 1 & \\ -1 < x < 1 \to 0 & \\ x = -1 \to \text{Sprung zw. } -1, 1 & \\ x < 1 \to -\infty \text{ und } \infty & \text{(divergent)} \end{cases}$$

Häufungspunkte (unendlich oft erreicht)

$\exists$ unendlich viele n mit $|a_n - \ddot{a}| < \varepsilon$

(a_n)	$\lim_{n\to\infty} a_n$
$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$	Eulersche Zahl $e = 2{,}71828\dots$
$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$	e^x

Grenzwertsätze

Seien (a_n), (b_n) Folgen mit $\lim_{n\to\infty}(a_n) = a$, $\lim_{n\to\infty}(b_n) = b$, $c \in \mathbb{R}$, dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n) \pm \lim_{n\to\infty}(b_n) = a \pm b$$

(ebenso für $\cdot$ und $\div$), $b \neq 0$

$$\lim_{n\to\infty}(c \cdot a_n) = c \lim_{n\to\infty}(a_n) = c \cdot a \qquad \lim_{n\to\infty}(c) = c$$

$$\lim_{n\to\infty}(\text{Nullfolge} \cdot \text{beschr. Folge}) = 0 \cdot a = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n) = \lim_{n\to\infty}(a_{n+1}) = a$$

Trick:

$$a_n = \frac{P(n)}{Q(n)} = \frac{2n^3 + 7n}{5n^4 + 8}$$

"Teile alles durch die höchste Potenz von n, hier n^4"

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^3+7n}{5n^4+8}\right) \overset{\uparrow}{=} 0$$

Grad(Zähler) < Grad(Nenner)

Grad($P(n)$) < Grad($Q(n)$) $\Rightarrow \lim_{n\to\infty}(a_n) = 0$

Grad($P(n)$) = Grad($Q(n)$) $\Rightarrow \lim_{n\to\infty}(a_n) = c$

Grad($P(n)$) > Grad($Q(n)$) $\Rightarrow \lim_{n\to\infty}(a_n) = \infty$ oder $-\infty$ (divergent)

$$\text{bzw.: } \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^3+7n}{5n^4+8}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\overset{\to 0}{\frac{2}{n}} + \overset{\to 0}{\frac{7}{n^3}}}{\underset{\to 5}{5} + \underset{\to 0}{\frac{8}{n^4}}}\right) = 0$$

Partialreihen

Summe der Folge (a_i) bis n

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

↑ ist wieder eine Folge

Unendliche Reihe

Summe der Folge (a_i) bis ∞

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

Konvergenz

notwendiges Kriterium

Wenn eine Reihe konvergiert, so ist die Folge eine Nullfolge

Sei $a \in \mathbb{R}$, dann gilt $\sum_{i=0}^{\infty} a_i = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(a_n) = 0$

$\not\Leftarrow$

harmonische Reihe konvergiert nicht, obwohl $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$

Beweis: $S_1 = 1 + \frac{1}{2}$

(a_n) muss hinreichend schnell gegen 0 ⟵ $S_{2^2} = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{> \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} > 1 + \frac{1}{2} \cdot 2$

siehe Bsp: $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2} = \frac{\pi^2}{6}$ $S_{2^\ell} = \dots = 1 + \frac{1}{2} \cdot \ell$

wichtige Grenzwerte Reihen:

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^i}{i!} = e^x, \quad \sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0} x^i = \lim_{n\to\infty}\frac{1-x^n}{1-x} = \begin{cases} |x|<1 \rightarrow \frac{1}{1-x} \\ \infty \text{ oder } -\infty \; (x^i \text{ keine Nullfolge}) \leftarrow |x| \geq 1 \end{cases}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln(2), \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$$

Geometrische Reihe

$$\sum_{i=0}^{n} x^i = 1 + x^1 + x^2 + \dots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

bzw. $\sum_{i=0}^{n-1} x^i = 1 + x^1 + \dots + x^{n-1} = \frac{1-x^n}{1-x}$

Allgemeine harmonische Reihe

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$, mit $\alpha = 2$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Alternierende harmonische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln(2)$$

Leibnizreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$$

Konvergenzkriterien

Quotientenkriterium

Gut bei: Produkten/Quotienten aus Fakultäten, Binomialkoeffizienten, oder Termen wie x^n.

Ungeeignet bei: Summen

Sei (a_n) Folge mit $a_n > 0$, $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ Reihe über (a_n)

$$r = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$$

$r < 1$: Reihe konvergiert

$r > 1$: Reihe divergiert

$r = 1$: keine Aussage

$(a_n) = \frac{1}{n!} \Rightarrow r = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}\right)$

$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n!}{(n+1)\cdot n!}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(n+1)}\right) = 0$

$\Rightarrow r < 1 \Rightarrow$ Reihe konvergiert

Grenzwertregeln Reihen

seien (a_n) und (b_n) Folgen, $c \in \mathbb{R}$,

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a$, $\sum_{k=0}^{\infty} b_k = b$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(a_k \pm b_k) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \pm \sum_{k=0}^{\infty} b_k = a \pm b$$

(gilt nicht für ·, /)

$$\sum_{k=0}^{\infty} c \cdot a_k = c \cdot \sum_{k=0}^{\infty} a_k = c \cdot a$$

$$\sum_{k=1}^{n}(a_n) = \sum_{k=0}^{n}(a_n) - a_0$$

(auch für $\lim_{n\to\infty}$)

Leibniz-Kriterium

→ wenn in Reihe alternierendes Element (z.B. $(-1)^n$) vorhanden und (a_n) Nullfolge, dann gilt:

$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \cdot a_k$ ist konvergent

Bsp. Mit harm. $\overset{(a_n)}{\text{Reihe}}$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \cdot \frac{1}{k} = \ln(2)$$

Absolute Konvergenz.

Sei (a_n) Folge und $S = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ unendliche Reihe.

S heißt absolut konvergent, wenn gilt:

$\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|$ ist konvergent

→ schärferes Kriterium als Konvergenz

(absolut konv ⇒ konv)

$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \cdot \frac{1}{k}$ konv. aber nicht abs. konv., denn

$\sum_{k=0}^{\infty}\left|(-1)^k \frac{1}{k}\right| = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k}$

↑ harm. Reihe, ist divergent.

Wurzelkriterium

Gut bei Reihen, wo n in Bildungsvorschrift Laufvariable im Exponent steht

$$r = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{a_n}\right)$$

$(a_n) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} \Rightarrow r = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}}$

$= \lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$

$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^n}{(1+\frac{1}{n})^n}\right)$

$= \frac{1}{\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{1}{e} < 1 \Rightarrow$ Reihe konv.

Vergleichskriterium

wenn bei Quotienten- & Wurzelkriterium $r = 1$

seien $(a_n), (b_n)$ Folgen

a) $\sum_{k=0}^{\infty} b_k = b \wedge a_n < b_n \; \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent

b) $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ divergent$^{\to\infty}$ $\wedge \; a_n > b_n \; \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ divergent

→ brauchen Vergleichsreihe, von der wir wissen, dass all ihre Folgeglieder größer/kleiner sind als die der untersuchten Reihe

untersuche $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin^2(3k+5)}{3^k+1} =: S$

$$\frac{\sin^2(3k+5)}{3^k+1} \leq \frac{1}{3^k+1} < \frac{1}{3^k}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{3^k} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

geom. Reihe

Damit ist die Reihe S nach Vergleichskriterium a) konvergent.

Konvergenzradius R

Gibt an, für welche x die Reihe konvergiert

$|x| < R \Rightarrow$ konvergent

Berechnung mit Formel von Cauchy-Hadamard

Sei $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ eine (komplexe) Potenzreihe mit Konvergenzradius R, dann gilt:

(mit Wurzelkriterium)

$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)$ divergent $\Rightarrow R = 0$

$$\exists r = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right) \Rightarrow R = \begin{cases} \frac{1}{r}, & \text{falls } r > 0 \\ \infty, & \text{falls } r = 0 \end{cases}$$

(mit Quotientenkriterium)

$\lim_{n\to\infty}\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)$ divergent $\Rightarrow R = 0$

$$\exists r = \lim_{n\to\infty}\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right) \Rightarrow R = \begin{cases} \frac{1}{r}, & \text{falls } r > 0 \\ \infty, & \text{falls } r = 0 \end{cases}$$

Potenzreihen

Sei (a_n) Folge, dann heißt die Reihe

$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ Potenzreihe

Geom. Reihe als Potenzreihe: $\sum_{i=0}^{\infty} 1 \cdot x^i$

Bedeutung:

(denn alle $a_i x^i$ fallen weg, außer $a_0 x^0$)

$R = 0$: Reihe konvergiert nur für $x = 0$

$R > 0$: Reihe konvergiert $\forall |x| < R$. Für $|x| = R$ keine Aussage, muss im Einzelfall untersucht werden.

$R = \infty$: Reihe konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$ (bzw. $x \in \mathbb{C}$)

Für Konvergenzintervall Randpunkte $|x| = R$ untersuchen

→ Konvergenzintervall: z.B. $]-R, R]$

Reihe konvergiert für $x \in\,]-R, R]$

Wichtige Reihen

Funktion	Reihe	Konvergenzbereich
$\sin(x)$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} \mp \dots$	$x \in \mathbb{R}$
$\cos(x)$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} \mp \dots$	$x \in \mathbb{R}$
$\arctan(x)$	$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \pm \dots$	$\lvert x\rvert < 1$
e^x	$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}x^k = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$	$x \in \mathbb{R}$
$\ln(x+1)$	$x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \pm \dots$	$x \in\,]-1, 1]$
$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$	$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(ix)^k$	

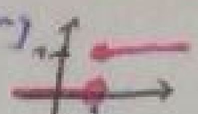
Funktionen

$f: D \to Z \,;\, f(x) = x^2$

Definitionsmenge x | Zielmenge | Berechnungsvorschrift

nicht stetig: Trick für Funktion mit Sprung

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$



Behauptung: f ist an der Stelle $x_0 = 1$ nicht stetig

wähle $x_n = 1 - \frac{1}{n}$ und $y_n = 1 + \frac{1}{n}$ (wähle 2 Folgen, die zu FKt. ergebnissen unterschiedl. GW - Werte ergeben)

von unten gegen $x_0 = 1$ | von oben gegen $x_0 = 1$

$\lim_{n\to\infty}(x_n) = \lim_{n\to\infty}(y_n) = x_0 = 1$ (muss nicht extra nachgewiesen werden)

$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty}\left(f(1-\frac{1}{n})\right) \underset{\uparrow}{=} \lim_{n\to\infty}(0) = 0$

$1-\frac{1}{n} < 1$

$\lim_{n\to\infty} f(y_n) = \lim_{n\to\infty}\left(f(1+\frac{1}{n})\right) \underset{\uparrow}{=} \lim_{n\to\infty}(1) = 1 \neq 0$

$1+\frac{1}{n} \geq 1$

=> Der Grenzwert $\lim_{x\to x_0}(f(x))$ existiert nicht

somit ist f an der Stelle $x_0 = 1$ nicht stetig

--> nicht stetig: Trick für Fkt. wo ein Punkt x_0 anders ist

wähle bel. Folge, die gegen x_0 konv., z.B. $x_n = x_0 + \frac{1}{n}$

$\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ und $f(x_0)$ ausrechnen

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}(f(x_n)) \neq f(x_0) \Rightarrow f$ an Stelle $x_0 = \_$ nicht stetig

Bsp: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

wähle $x_n = 0 + \frac{1}{n}$, mit $\lim_{n\to\infty} x_n = 0 = x_0$

$\lim_{n\to\infty}(f(x_n)) \underset{\uparrow}{=} \lim_{n\to\infty}((x_n)^2) = \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2}) = 0$

$x_n \neq 0$

Aber $f(x_0) = f(0) = 1$

$\Rightarrow f(0) \neq \lim_{n\to\infty}(f(\frac{1}{n}))$

$\Rightarrow$ f ist am Punkt $x_0 = 0$ nicht stetig.

Stetigkeit

Sei f: D→R eine Fkt. f genau dann in $x_0 \in D$ stetig, wenn gilt:

$\lim_{x\to x_0}(f(x)) = f(x_0)$

Ist f stetig in allen x∈D, so heißt f stetig auf D

Mit GW-Def. über Folgen:

$\lim_{x\to x_0}(f(x)) = \lim_{n\to\infty}(f(x_n)) = f(x_0) \quad \forall (x_n)$ mit $\lim_{n\to\infty}(x_n) = x_0$

⇔ f ist nicht stetig, wenn

- Der Grenzwert $\lim_{x\to x_0}(f(x))$ nicht existiert
- Nicht alle Folgen (x_n) mit $\lim_{n\to\infty}(x_n) = x_0$ in Fkt. eingesetzt gegen den selben Wert konvergieren
- Der Wert, gegen den $\lim_{n\to\infty}(f(x))$ konvergieren nicht ~~und~~ dem Funktionswert an der Stelle x_0 entspricht

Stetigkeitsbeweis:

Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$

Annahme: f ist stetig für alle $x_0 \in \mathbb{R}$

sei (x_n) eine Folge mit $\lim_{n\to\infty}(x_n) = x_0$

Also gilt

$\lim_{x\to x_0}(f(x)) = \lim_{n\to\infty}(f(x_n)) \overset{f\text{ einsetzen}}{=} \lim_{n\to\infty}((x_n)^2)$

Rechenregeln für GW, GW einsetzen

$= \lim_{n\to\infty}(x_n) \cdot \lim_{n\to\infty}(x_n) = x_0 \cdot x_0 = x_0^2 = f(x_0)$

Somit ist f(x) per Definition für alle x∈ℝ stetig.

Regeln für stetige Funktionen

seien f(x), g(x) stetige Fkt., c∈ℝ

Dann sind folgende Verknüpfungen ebenfalls stetig:

$c \cdot f(x)$

$f(x) \pm g(x)$

$\frac{f(x)}{g(x)},\ g(x) \neq 0$

Alle Polynome

$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$

stetig ergänzbare Fkt

Funktion, die stetig ergänzt werden kann

sei x_0 ~~die einzige Stelle~~ Definitionslücke der stetigen Fkt. $f: I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$

(bzw. x_0 die einzige Stelle, an der $f: I \to \mathbb{R}$ nicht stetig ist)

$\exists \hat{f}: I \to \mathbb{R}$ mit $\hat{f}(x) = f(x)\ \forall x \in I \setminus \{x_0\}$ (und $\hat{f}$ stetig)

=> f stetig ergänzbar

$\hat{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in I \setminus \{x_0\} \\ \lim_{x\to x_0} f(x), & x = 0 \end{cases}$

ist der Fall, wenn $\exists \lim_{x\to x_0} f(x)$

(d.h. wenn alle (x_n) mit $\lim_{n\to\infty}(x_n) = x_0$ in Fkt eingesetzt den selben Wert ergeben

[bzw. $\lim_{x\nearrow x_0} f(x) = \lim_{x\searrow x_0} f(x)$]

Stetige Funktion auf geschlossenem Intervall

ist $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, so

- hat f in [a,b] mindestens ein Maximum und Minimum
  - ⇒ notwendiges Extremwertkriterium: $f'(x_0) = 0 \lor x_0$ ist am Rand
- nimmt f alle Werte zwischen f(a) und f(b) an (Zwischenwertsatz)

$\forall y \in [f(a), f(b)]\ \exists x: f(x) = y$

⇔ ist $f(a) \geq 0$ und $f(b) < 0$ (bzw. $f(a) \cdot f(b) < 0$)

(oder andersrum)

so existiert eine NST in dem Intervall [a, b]

⇔ Bisektionsverfahren:

1. Setze a := lower limit, b := upper limit
2. Teste ob NST in [a,b] ex. $(f(a) \cdot f(b) > 0)$
3. Teste ob $b - a > 0$ (ansonsten Lösungsintervall gefunden) (bzw. Genauigkeit z.B. 0.0001) (NST)
4. Teile Intervall in Mitte und setze das Verfahren rekursiv fort

$c = \frac{a+b}{2}$; Bis(a, c); Bis(c, b);

wichtige Ableitungen

f(x)	f'(x)	f(x)	f'(x)
a	0	arcsin(x)	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$a \cdot f(x)$	$a \cdot f'(x)$	arccos(x)	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
x^n	nx^{n-1}	arctan(x)	$\frac{1}{x^2+1}$
$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$		
sin(x)	cos(x)	e^x	e^x
cos(x)	-sin(x)		
tan(x)	$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$	$10^x = e^{x\ln(10)}$	$\ln(10) \cdot 10^x$
		$a^x = e^{x\ln(a)}$	$\ln(a) \cdot e^{x\ln(a)} = \ln(a) \cdot a^x$

Differenzialquotient

$\underbrace{\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}\right)}_{\text{Differenzenquotient}}$

Ableitung

"Steigung von f an der Stelle x"

$f'(x) = \dot{f}(x) = \frac{df(x)}{d(x)} = \frac{df}{dx}$

$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right)$ ← differenzierbar, wenn dieser GW ex.

← zur Best. von f'(x) verwenden

$\begin{pmatrix} \Delta f(x) = f(x+h) - f(x) \\ \Delta x = (x+h) - x = h \\ m = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \end{pmatrix}$

f diff'bar in x_0, wenn dieser GW ex.

mit $x+h = x_0$ ⇔ $h = x_0 - x$

$\lim_{h\to x_0}\left(\frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x}\right) = \lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right)$ ← Wert für x_0 einsetzen

Ableitung in x_0 = _ :

$\{\forall x_0 \in D.\ (f \text{ diffbar})\} \Rightarrow f$ diff'bar

f diff'bar ⇒ f stetig

f diff'bar in x_0 ⇒ f stetig in x_0

$\sqrt[3]{x}$ ist stetig aber nicht diffbar in $x_0 = 0$

Ableitungsregeln

$(a \cdot f(x))' = a \cdot f'(x)$

$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$ (Summenregel)

$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ ← Produktregel

$(f(x) \cdot g(x) \cdot h(x))' = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$

Kettenregel: "innere mal äußere Ableitung"

$f(g(x)) = g'(x) \cdot f'(g) = \frac{dg(x)}{dx} \cdot \frac{df(g)}{dg}$

Quotientenregel (für $g(x) \neq 0$)

$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

Ableitung von Umkehrfkt.

$(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

$f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

$f(x) = x^2$

$f'(x) = 2x$

$f'(f^{-1}(x)) = 2\sqrt{x}$

$(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Zeigen f nicht diff'bar

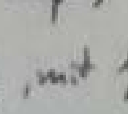
$\exists x_0 \in D.\ (!f \text{ diff'bar})\} \Rightarrow\ !f$ diff'bar

⇔ GW $f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right)$ ex. nicht.

zeigen ⇒ Folgen $(x_n), (y_n)$ mit $\lim_{n\to\infty}(x_n) = \lim_{n\to\infty}(y_n) = x_0$ einsetzen, die zu versch. Ergebnissen führen

(meist: $x_n = x_0 - \frac{1}{n}$, $y_n = x_0 + \frac{1}{n}$)

Bsp: $f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$



wähle $x_n = x_0 - \frac{1}{n} = -\frac{1}{n}$, mit $\lim_{n\to\infty}(x_n) = x_0 = 0$

und $y_n = x_0 + \frac{1}{n} = \frac{1}{n}$, mit $\lim_{n\to\infty}(y_n) = x_0 = 0$

$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{f(-\frac{1}{n}) - f(0)}{-\frac{1}{n} - 0}\right) \overset{\dots}{=} -1$

$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(y_n) - f(x_0)}{y_n - x_0}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{f(\frac{1}{n}) - f(0)}{\frac{1}{n} - 0}\right) \overset{\dots}{=} +1 \neq -1$

$\Rightarrow f'(x_0)$ existiert nicht, damit ist f nicht diff'bar in x_0.

Herleitung: $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$

$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$

$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{\sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{k} x^{n-k} \cdot h^k\right) - x^n}{h}\right)$

$\overset{!}{=} n x^{n-1}$

binomischer Lehrsatz

sei $n \in \mathbb{N}_0$

$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$

Binomialkoeffizient

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

höhere Ableitungen von f

1. Ableitung: $f'(x) = f^{(1)}(x) = \frac{df(x)}{dx}$ Steigung von f

2. Ableitung: $f''(x) = f^{(2)}(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2}$ Krümmung von f
<0 => konkav
>0 => konvex

⋮

n-te Ableitung: $f^{(n)}(x) = \frac{d^n(x)}{dx^n}$

Tangente

Sei $f: D \to \mathbb{R}$ eine stetige und diff'bare Fkt.
Dann ist die Tangente eine Gerade, die an der Stelle x_0
1) den gleichen Funktionswert hat $T(x_0) = f(x_0)$
2) die gleiche Steigung hat $T'(x) = f'(x_0)$

$T(x) = mx + b \;,\; m = f'(x_0)$
$f(x_0) = m x_0 + b$
$\Leftrightarrow b = f(x_0) - m x_0$
$= f(x_0) - f'(x_0) x_0$
$\Rightarrow T(x) = f'(x_0) x + f(x_0) - f'(x_0) x_0$
$= f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

$f(x) = x^2, x_0 = 1$
$f'(x) = 2x$
$f(x_0) = 1$
$f'(x_0) = 2$
$T(x) = 2 \cdot (x-1) + 1$
$= 2x - 1$

Extremwerte

notwendiges Extremwertkriterium
$f'(x_0) = 0 \vee x_0$ ist am Rand

$f''(x_0) > 0 \Rightarrow$ Minimum
$f''(x_0) < 0 \Rightarrow$ Maximum
$f'(x_0) = 0 \wedge f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow$ Sattelpunkt
$f''(x_0) = 0 \wedge f'''(x_0) \neq 0$, $f'(x_0)$ egal $\Rightarrow$ Wendepunkt

Extremwerte mit Nebenbedingungen

Aufgabe: Höhe h und Breite 2r eines Zylinders (z.B. Coladose) so bestimmen, dass für geg. Fassungsvermögen (Volumen) V die Oberfläche (→ Materialverbrauch) minimal ist

$A_{Deckel} = \pi r^2$
$A_{Boden} = \pi r^2$
$A_{Seiten} = 2\pi r h$

$A = A_{Deckel} + A_{Boden} + A_{Seiten}$
$= 2\pi r^2 + 2\pi r h$
⇒ Minimumsaufgabe, aber hängt von 2 Variablen ab, also $A(r,h)$

wir wissen (Nebenbedingung):
$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$
$\Leftrightarrow h = \frac{V}{\pi r^2}$
in $A(r,h)$:
$A(r,h) = 2\pi r^2 + 2\pi r \underbrace{\frac{V}{\pi r^2}}_{=h} = 2\pi r^2 + 2\frac{V}{r}$
Min $A(r)$ berechnen:
$\frac{dA(r)}{dr} = 4\pi r - 2\frac{V}{r^2} \overset{!}{=} 0$
... nach r auflösen $r^3 = \frac{V}{2\pi} \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$
damit ist $h = \frac{V}{\pi r^2}$ berechenbar $\Leftrightarrow V = 2\pi r^3$
$= \frac{2\pi r^3}{\pi r^2} = 2r$
⇒ Zylinder muss so breit wie hoch sein für minimalen Materialverbrauch

Taylorpolynom

Partialsumme von Taylorreihe

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

mit $x_0 = 0$ → Mac Laurin'sche Reihe $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$

Entwicklungspunkt

Taylorreihe

$$\lim_{n \to \infty} T_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

Im Entwicklungspunkt x_0 stimmt die Taylorreihe und ihre Ableitungen mit der Funktion und ihren Ableitungen überein

Taylor Verwendung
Funktionen approximieren, Ableitungen von sin, cos, e^x beweisen

mehr Bsp siehe
②: wichtige Reihen

Sinus mit Taylor in $x_0 = 0$

$f^{(0)}(x) = \sin(x)$ $\quad \sin(0) = 0$
$f^{(1)}(x) = \cos(x)$ $\quad \cos(0) = 1$
$f^{(2)}(x) = -\sin(x)$ $\quad -\sin(0) = 0$
$f^{(3)}(x) = -\cos(x)$ $\quad -\cos(0) = -1$
$f^{(4)}(x) = f^{(0)}(x)$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_0 = \frac{1}{0!} \sin(0) = 0 \\ a_1 = \frac{1}{1!} \cos(0) = \frac{1}{1!} = 1 \\ a_2 = \frac{1}{2!}(-\sin(0)) = 0 \\ a_3 = \frac{1}{3!}(-\cos(0)) = -\frac{1}{3!} \end{cases}$$

↳ ungerade Koeffizienten bleiben, mit wechselnden VZ

$$\Rightarrow \sin(x) = \frac{1}{1!}x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \ldots$$

Beweis: Gauß'sche Identität $e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$

$$e^{ix} = 1 + (ix) + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \ldots$$

mit $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$ ...

$$= \underbrace{1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 \mp \ldots}_{=\cos(x)} + i \cdot \underbrace{\left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 \mp \ldots\right)}_{=\sin(x)}$$

$$= \cos(x) + i \sin(x) \quad \square$$

Unbestimmtes Integral

$$\int f(x)dx = F(x) + c \;,\; c \in \mathbb{R}$$

Leibniz'sche Notation · Stammfkt. $F' = f(x)$ · Integrationskonstante

Integrationsregeln

$\left(\int f(x)dx\right)' = \int f'(x)dx = f(x)$
$\int c \cdot f(x) dx = c \cdot \int f(x) dx \;,\; c \in \mathbb{R}$
$\int f(x) + g(x) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$

Partielle Integration (gut, wenn abgeleitete Fkt (u(x)) einfacher wird, oder Phoenix)

$$\int u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) v(x)$$

$\int \underbrace{x}_{=u(x)} \underbrace{\sin(x)}_{=v'(x)} dx$
$u'(x) = 1 \quad v(x) = -\cos(x)$
$= x \cdot (-\cos(x)) - \int 1 \cdot (-\cos(x)) dx + c$
$= -x\cos(x) + \sin(x) + c$

Trick: "·1"

$\int \ln(x) dx = \int \underbrace{\ln(x)}_{=u(x)} \cdot \underbrace{1}_{v'(x)} dx = \ln(x) \cdot x - \int \frac{1}{x} \cdot x dx + c$
$u'(x) = \frac{1}{x} \quad v(x) = x$
$= \ln(x) \cdot x - \int 1 dx + c$
$= \ln(x) \cdot x - x + c$

Trick: "Phoenix"
zu berechnendes Integral entsteht wieder nach PI (und ggf. Umformungen)
⇒ Gleichung umstellen

$\int \sin(x)\cos(x) dx = \sin(x)\sin(x) - \int \cos(x)\sin(x) dx + c$
$= \sin^2(x) - \int \sin(x)\cos(x) dx + c \quad | + \int \sin(x)\cos(x) dx$
$\Leftrightarrow 2\int \sin(x)\cos(x) dx = \sin^2(x) + c \quad | : 2$
$\Leftrightarrow \int \sin(x)\cos(x) dx = \frac{1}{2}\sin^2(x) + c$

$\int \sin^2(x) dx = \sin(x)(-\cos(x)) - \int \cos(x)(-\cos(x)) dx + c$
$= -\sin(x)\cos(x) + \int \cos^2(x) dx + c$
$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \Rightarrow \cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$
$= -\sin(x)\cos(x) + \int 1 - \sin^2(x) dx + c$
$= -\sin(x)\cos(x) + \underbrace{\int 1 dx}_{=x} - \int \sin^2(x) dx + c \quad | + \int \sin^2(x) dx$
$\Leftrightarrow 2\int \sin^2(x) dx = -\sin(x)\cos(x) + x + c \quad | : 2$
$\Leftrightarrow \int \sin^2(x) dx = -\frac{1}{2}(\sin(x)\cos(x) - x) + c$

$\int \cos^2(x) dx \overset{\text{analog}}{=} \frac{1}{2}(\sin(x)\cos(x) + x) + c$

Substitution

geht, wenn eines der Faktoren = der inneren Ableitung des anderen ist (bzw. sich nur durch konstanten Faktor unterscheidet (den man vor das Integral ausziehen kann))

$$\int g'(x) \cdot f(g(x)) dx = \int f(g) dg$$

innere Fkt durch g ersetzen, in NR $g'(x) = \frac{dg}{dx}$ ausrechnen, nach dx umstellen $dx = \frac{1}{g'(x)} dg$ für dx einsetzen
↳ können restliche andere Faktoren kürzen
integrieren,
resubstituieren

$\int x e^{x^2+2} dx$
$= \int x \cdot e^g \frac{1}{2x} dg$
$= \frac{1}{2} \int e^g dg$
$= \frac{1}{2} e^g + c$
$= \frac{1}{2} e^{x^2+2} + c$

$g(x) = x^2 + 2$
$\frac{dg}{dx} = 2x$
$\Rightarrow dx = \frac{1}{2x} dg$

Trick: Substitution für $\int f'(x) f(x) dx$
$= \int f'(x) f \frac{1}{f'(x)} df \quad \frac{df}{dx} = f'(x)$
$= \int f df \quad \Leftrightarrow dx = \frac{1}{f'(x)} df$
$= \frac{1}{2} f^2 + c = \frac{1}{2} f^2(x) + c$
↳ $\int \sin(x)\cos(x) dx = \frac{1}{2}\sin^2(x) + c$

Trick Subst. für $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$
$\frac{df}{dx} = f'(x) \Leftrightarrow dx = \frac{1}{f'(x)} df$
$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{f'(x)}{f} \cdot \frac{1}{f'(x)} df$
$= \int \frac{1}{f} df = \ln|f| + c = \ln|f(x)| + c$
↳ $\int \tan(x) dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx = -\ln|f(x)| = -\ln|\cos(x)|$

Substitution andersrum

$\int f(x) dx = \int f(x(t)) \cdot x'(t) dt$
$x(t) = g(t)$ ← Fkt, die in f(x) f einfacher macht
$\frac{dx}{dt} = x'(t) = g'(t)$
$\Leftrightarrow dx = x'(t) dt$
$= \int f(x(t)) \cdot x'(t) dt$

integrieren,
Mittels Umkehrfkt. von x(t) resubstituieren (da t mit x ersetzt werden muss)

$\int \sqrt{1 - x^2} dx \quad x(t) = \sin(t)$
$= \int \underbrace{\sqrt{1 - \sin^2(t)}}_{\cos(t)} \cos(t) dt \quad \frac{dx(t)}{dt} = \cos(t)$
$\Rightarrow dx = \cos(t) dt$
$= \int \cos^2(t) dt$
PI siehe links $\quad x^{-1}(t) = \arcsin(t)$
$= \frac{1}{2}(\sin(t)\cos(t) + t) + c$
$= \frac{1}{2}(\sin(\arcsin(t))\cos(\arcsin(t)) + \arcsin(t)) + c$
$= \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1 - x^2} + \arcsin(x)\right) + c$
$\sin(\arcsin(x)) = x$
$\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - x^2}$

Partialbruchzerlegung (siehe Spicker TI)

Wichtige Integrale

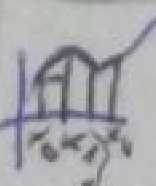
$f(x)$	$\int f(x)dx$
a	$ax + c$
$c \cdot f(x)$	$c \cdot \int f(x) dx$
x^n $(\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}})$	$\frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$
$\ln(x)$	$x(\ln(x) - 1) + c$ $= x\ln(x) - x + c$
e^x	$e^x + c$
$\cos(x)$	$\sin(x) + c$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + c$
$\tan(x)$	$-\ln(\cos(x)) + c$
$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$	$\arcsin(x) + c$
a^x	$\frac{a^x}{\ln(a)} + c$
$\frac{1}{x + a}$	$\ln\lvert x + a \rvert + c$ $a \in \mathbb{R}$ (durch Subst.)
$\frac{x}{x^2 + a}$	$\frac{1}{2} \ln\lvert x^2 + a \rvert + c$

Rechenregeln

bestimmte Integrale

$\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$
$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$

Trapezregel



$\Delta x = x_1 - x_0$
$= x_2 - x_1$
$= x_n - x_{n-1}$

$F_{Rechteck} = f(x_0)\Delta x$
$F_\Delta = f(x_1) - f(x_0)$
$F_1 = F_\square + F_\Delta = f(x_0)\Delta x + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{2}\Delta x$
$= \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2}\Delta x$
$F = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{f(x_{i-1}) - f(x_i)}{2}\right)\Delta x$
Δx unendlich klein $\Rightarrow \int_a^b f(x) dx$

Bestimmtes Integral

$\int_a^b f(x) dx = F(x)\Big|_a^b = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$
liefert Fläche zw. f & x-Achse in [a, b]
(oberhalb positiv, unterhalb negativ)

Uneigentliches Integral
$\lim_{n \to \infty} \left(\int_a^b f(x) dx\right) = \int_a^\infty f(x) dx$