The firefighter problem

Klara Travnik in Karolina Šavli

16. november 2022

OPIS PROBLEMA IN NAČRT DELA

The firefighter problem oziroma problem gasilca obravnava širjenje in omejevanje požara na grafu. Na začetku (v času 0) požar izbruhne na nekem nizu točk. V vsakem časovnem koraku se lahko na poljubno še nepogorelo oglišče postavi nov gasilec in požar omeji tako da lahko napreduje zgolj na vozlišča, ki še niso zavarovana z gaslici in imajo za soseda vozlišče, ki gori. Cilj problema je zajezitev požara, tako da čim več vozlišč ostane nepogorelih. Problem se lahko oplicira na mnoge probleme v realnem življenju, kot je na primer širjenje nalezljive bolezni.

FORMALIZACIJA PROBLEMA

Podan imamo graf z vozlišči $V(G)$ in povezavami $E(G)$. Število vozlišč in povezav označimo z $n = |V(G)|$ in $m = |E(G)|$. Dano imamo tudi fiksno število gasilcev in sicer D.

V času $t = 0$ požar izbruhne v nizu vozlišč $B_{init} \subseteq V$. Pogorela vozlišča označimo kot *burnt*. V času $t = 1$ se D gasilcev postavi na še nepogorela vozlišča. Slednja vozlišča označimo kot *defended*. V naslednjem časovnem koraku se lahko požar razširi zgolj na sosednja vozlišča, ki niso še *defended*. Za tem gasilci izbirajo vozlišča in proces se ponavlja dokler požar ni zajezen. Za dan problem lahko zapišemo celoštevilski linearni program (CLP), pri katerem bomo maksimirali število nepogorelih vozlišč:

$$
\begin{aligned}
&\max |V| - \sum_{v \in V} b_{v,T} && \\
&\text{pri pogojih:} && \\
&b_{v,t} + d_{v,t} - b_{v',t-1} \geq 0 && \forall v \in V, \forall v' \in N(v), \forall t \in \mathbb{N}\, 1 \leq t \leq T \\
&b_{v,t} + d_{v,t} \leq 1 && \forall v \in V, \forall t \in \mathbb{N}, 1 \leq t \leq T \\
&b_{v,t} - b_{v,t-1} \geq 0 && \forall v \in B, \forall t \in \mathbb{N}, 1 \leq t \leq T \\
&d_{v,t} - d_{v,t-1} \geq 0 && \forall v \in B, \forall t \in \mathbb{N}, 1 \leq t \leq T \\
&\sum_{v \in V} (d_{v,t} - d_{v,t-1}) \leq D && \forall t \in \mathbb{N}, 1 \leq t \leq T \\
&b_{v,0} = 1 && \forall v \in B_{init} \\
&b_{v,0} = 0 && \forall v \in V \setminus B_{init} \\
&d_{v,0} = 0 && \forall v \in V
\end{aligned}
$$

- $b_{v,t} = \begin{cases} 1, & \text{če vozlišče } v \text{ pogori v času } t, \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases}$
- $d_{v,t} = \begin{cases} 1, & \text{če je vozlišče } v \text{ rešeno v času } t, \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases}$

$$\forall v \in V, \forall t \in \mathbb{N}, 1 \leq t \leq T$$

Imamo torej **celoštevilski spremenljivki.**

Obrazložitev spremenljivk in korakov:

Pogoj

$$b_{v,t} + d_{v,t} - b_{v',t-1} \geq 0 \qquad \forall v \in V, \forall v' \in N(v), \forall t \in \mathbb{N}\, 1 \leq t \leq T$$

pove, da če je vozlišče v' pogorelo v času $t-1$, za vse njegove sosede velja, da v času t zagotovo pogorijo, če niso rešeni. Če pa vozlišče v' v času $t-1$ ni pogorelo, je še vseeno možno, da vozlišče v pogori (če kateri drugi sosedi zagorijo v času $t-1$), ali pa je rešeno.

Pogoj

$$b_{v,t} + d_{v,t} \leq 1 \qquad \forall v \in V, \forall t \in \mathbb{N}, 1 \leq t \leq T$$

pomeni, da vozlišče ne more biti hkrati rešeno in pogorelo.

Pogoja

$$b_{v,t} - b_{v,t-1} \geq 0 \qquad \forall v \in B, \forall t \in \mathbb{N}, 1 \leq t \leq T$$

in

$$d_{v,t} - d_{v,t-1} \geq 0 \qquad \forall v \in B, \forall t \in \mathbb{N}, 1 \leq t \leq T$$

povesta, da če je bilo vozlišče v nekem času t rešeno ali je pogorelo, velja za rešeno oz. pogorelo tudi v vseh prihodnjih časih do T.

Vsota

$$\sum_{v \in V} (d_{v,t} - d_{v,t-1}) \leq D \qquad \forall t \in \mathbb{N},\, 1 \leq t \leq T$$

pogojuje število na novo rešenih vozlišč. V vsakem času $t \in [1, T]$ je na voljo D gasilcev, vsak lahko reši eno vozlišče, torej v vsakem času največ D rešenih.

Začetni pogoji za spremenljivke pa povedo, da so vsa vozlišča iz množice vozlišč B_{init}, na katerih se požar začne širiti, v času 0 označena kot pogorela. Vsa ostala vozlišča pa v času 0 niso še niti pogorela niti rešena.

VIRI

Literatura