

The firefighter problem

Klara Travnik in Karolina Šavli

16. november 2022

1 Opis problema

The firefighter problem oziroma *problem gasilca* obravnava širjenje in omejevanje požara na grafu. Na začetku (v času 0) požar izbruhne na nekem nizu vozlišč in v vsakem časovnem koraku se lahko na poljubno še nepogorelo vozlišče postavi nov gasilec in požar omeji tako, da lahko napreduje zgolj na vozlišča, ki še niso zavarovana z gasilci in imajo za soseda vozlišče, ki gori. Cilj problema je zajezitev požara, tako da čim več vozlišč ostane nepogorelih. Problem se lahko aplicira na mnoge probleme v realnem življenju, kot je na primer širjenje nalezljive bolezni.

IDEJA IN FORMALIZACIJA PROBLEMA

Podan imamo graf z vozlišči $V(G)$ in povezavami $E(G)$ ter fiksno število gasilcev D .

V času $t = 0$ požar izbruhne v nizu vozlišč $B_{init} \subseteq V$. Pogorela vozlišča označimo kot *burnt* (b). V času $t = 1$ se D gasilcev postavi na še nepogorela vozlišča. Slednja vozlišča označimo kot *defended* (d). V naslednjem časovnem koraku se lahko požar razširi zgolj na sosednja vozlišča, ki niso še *defended*. Za tem gasilci izbirajo vozlišča in proces se ponavlja dokler požar ni zajezjen.

Za dan problem lahko zapišemo **celoštevilski linearni program (CLP)**, pri katerem bomo maksimirali število nepogorelih vozlišč:

$$\max |V| - \sum_{v \in V} b_{v,T}$$

pri pogojih:

$$b_{v,t} + d_{v,t} - b_{v',t-1} \geq 0 \quad \forall v \in V, \forall v' \in N(v), \forall t \in \mathbb{N} \ 1 \leq t \leq T$$

$$b_{v,t} + d_{v,t} \leq 1 \quad \forall v \in V, \forall t \in \mathbb{N}, \ 1 \leq t \leq T$$

$$b_{v,t} - b_{v,t-1} \geq 0 \quad \forall v \in B, \forall t \in \mathbb{N}, \ 1 \leq t \leq T$$

$$d_{v,t} - d_{v,t-1} \geq 0 \quad \forall v \in B, \forall t \in \mathbb{N}, \ 1 \leq t \leq T$$

$$\sum_{v \in V} (d_{v,t} - d_{v,t-1}) \leq D \quad \forall t \in \mathbb{N}, \ 1 \leq t \leq T$$

$$b_{v,0} = 1 \quad \forall v \in B_{init}$$

$$b_{v,0} = 0 \quad \forall v \in V \setminus B_{init}$$

$$d_{v,0} = 0 \quad \forall v \in V$$

$$b_{v,t} = \begin{cases} 1, & \text{če vozlišče } v \text{ pogori v času } t, \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases}$$

$$d_{v,t} = \begin{cases} 1, & \text{če je vozlišče } v \text{ rešeno v času } t, \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases}$$

$$\forall v \in V, \forall t \in \mathbb{N}, \ 1 \leq t \leq T$$

Obrazložitev spremenljivk in korakov:

- Imamo **celoštevilske spremenljivke** $b_{v,t}$ in $d_{v,t}$.

- Pogoji

$$b_{v,t} + d_{v,t} - b_{v',t-1} \geq 0 \quad \forall v \in V, \forall v' \in N(v), \forall t \in \mathbb{N} \ 1 \leq t \leq T$$

pove, da če je vozlišče v' pogorelo v času $t-1$, za vse njegove sosedes velja, da v času t zagotovo pogorijo, če niso rešeni. Če pa vozlišče v' v času $t-1$ ni pogorelo, je še vseeno možno, da vozlišče v pogori (če kateri drugi sosedi zagorijo v času $t-1$), ali pa je rešeno.

- Pogoji

$$b_{v,t} + d_{v,t} \leq 1 \quad \forall v \in V, \forall t \in \mathbb{N}, \ 1 \leq t \leq T$$

pomeni, da vozlišče ne more biti hkrati rešeno in pogorelo.

- Pogoja

$$b_{v,t} - b_{v,t-1} \geq 0 \quad \forall v \in B, \forall t \in \mathbb{N}, \ 1 \leq t \leq T$$

$$d_{v,t} - d_{v,t-1} \geq 0 \quad \forall v \in B, \forall t \in \mathbb{N}, \ 1 \leq t \leq T$$

povesta, da če je bilo vozlišče v nekem času t rešeno ali je pogorelo, velja za rešeno oz. pogorelo tudi v vseh prihodnjih časih do T .

- Vsota

$$\sum_{v \in V} (d_{v,t} - d_{v,t-1}) \leq D \quad \forall t \in \mathbb{N}, 1 \leq t \leq T$$

pogojuje število na novo rešenih vozlišč. V vsakem času $t \in [1, T]$ je na voljo D gasilcev, vsak lahko reši eno vozlišče, torej je v vsakem času največ D rešenih.

- Začetni pogoji za spremenljivke pa povedo, da so vsa vozlišča iz množice vozlišč B_{init} , na katerih se požar začne širiti, v času 0 označena kot pogorela. Vsa ostala vozlišča pa v času 0 niso še niti pogorela niti rešena.

2 Načrt dela

V projektni nalogi bova predstavili *The firefighter problem* s pomočjo celoštevilskega linearnega programiranja. Algoritme bova implementirali v programskem okolju *Sage* in si po potrebi pomagali še s programskima jezikoma *Python* in *R*.

Motivacijo in pomoč za delo bova/ova črpali iz člankov “García-Martínez, Blum, Rodríguez in Lozano”[2] ter “Fomin, Heggenes in van Leeuwen”[1].

Literatura

- [1] Fedor V. Fomin, Pinar Heggenes, and Erik Jan van Leeuwen. The firefighter problem on graph classes. *Theoretical Computer Science*, 613:38–50, 2016.
- [2] Carlos García-Martínez, Christian Blum, F. J. Rodríguez, and Manuel Lozano. The firefighter problem: Empirical results on random graphs. *Computers & Operations Research*, 60:55–66, 2015.