Graafiteooria

Kaur Aare Saar
kauraare@gmail.com

14. juuli 2017. a.

1 Mõisted

- *Graaf* $G = (V, E)$ koosneb *tippudest* V ja *servadest* E.
- Graafi tipud on *ühendatud*, kui need on graafi ühe serva otspunktideks.
- Graaf on *suunatud*, kui graafi serva otspunktid on järjestatud.
- Omavahel ühendatud tippude jada nimetatakse *teeks*.
- Kui iga kahe tipu vahel leidub tee, siis graaf on *sidus*.
- *Tsükkel* on tee, mille algus ja lõpppunkt kattuvad ning ei sisalda kattuvaid servasid.
- *Euleri tsükkel* on tsükkel, mis sisaldab kõiki graafi servasid ja tippe.
- *Hamiltoni tsükkel* on tsükkel, mis läbib kõiki graafi tippe täpselt ühe korra.
- *Puu* on sidus graaf, mis ei sisalda tsüklit.
- Tipu *aste* d on sellest lähtuvate servade arv.
- Graafi G *täiendgraaf* $\overline{G}$ on graaf, mis sisaldab ainult neid servasid, mis puuduvad graafis G.

2 Soojendus

1. Tõesta, et n-tipulises graafis ($n \geq 2$) leidub kaks tippu, mille aste on võrdne.
2. Leia servade arv n-tipulises puus.
3. Tõesta, et vähemalt üks graafidest G ja $\overline{G}$ on sidus.
4. n-tipulise graafi G mis tahes kahe tipu astmete summa on suurem kui n. Tõesta, et G sisaldab Hamiltoni tsüklit.
5. Tõesta, et sidus graaf sisaldab Euleri tsüklit parajasti siis, kui kõikide tippude aste on paarisarv.
6. *(Diraci teoreem)* Tõesta, et n tipuga graaf sisaldab Hamiltoni tsüklit, kui iga tipu aste on vähemalt $n/2$.

3 Ülesanded

1. Club Olegis sai kokku n inimest. Millise vähima n korral, leiduvad nende hulgas kindlasti kolm sellist, kes kõik üksteist tunnevad, või kolm sellist, kellest ükski paar teineteist ei tunne?

2. Toas on $2n$ inimest, kellest igaühel on ülimalt $n-1$ vaenlast. Tõesta, et need $2n$ inimset saavad istuda ümber ringikujulise laua nii, et vaenlased ei istuks kõrvuti.

3. *(Euleri teoreem)* Kumeras hulktahukas on E serva, F tahku ja V tippu. Tõesta, et $E+2=F+V$.

4. *(USAMO 1999)* Mõõtmetega $n \times n$ ruudustikus värvitakse mõned ruudud mustaks ja kõik ülejäänud valgeks nii, et on täidetud järgised tingimused:

   (i) Igal valgel ruudul on ühine külg mingi musta ruuduga

   (ii) Mistahes kahe musta ruudu korral leidub selline järjend mustadest ruutudest, mille esimeseks ja viimaseks ruuduks on need kaks ruutu ning mille igal kahel järjestikusel ruudul on ühine külg.

   Tõesta, et ruudustikus on vähemalt $\frac{n^2-2}{3}$ musta ruutu.

5. *(Balti tee 1997)* Metsas elavad n looma ($n \geq 3$), igaüks oma urus ning iga kaht urgu ühendab täpselt üks rada. Metsakuninga valimise eel teevad mõned loomad valimiskampaaniat. Iga kampaaniat tegev loom külastab iga teise looma urgu täpselt korra, liigub urust urgu ainult mööda radu, ei pööra urgude vahel kusagil ühelt rajalt teisele ning pöördub lõpuks tagasi oma urgu. Samuti on teada, et iga rada kasutab ülimalt üks kampaaniat tegev loom.

   (i) Tõesta, et iga algarvulise n korral on kampaaniat tegevate loomade suurim võimalik arv $\frac{n-1}{2}$.

   (ii) Leia kampaaniat tegevate loomade suurim võimalik arv, kui $n = 9$.

6. *(BT 1991)* Lossis on teatud arv saale ja n ust. Iga uks ühendab mingit kaht saali või viib lossist välja. Igal saalil on vähemalt 2 ust. Rüütel siseneb lossi ja edaspidi võib ta igast saalist väljuda mistahes ukse kaudu peale selle, mille kaudu ta viimati sellesse saali sisenes. Leia strateegia, mille abil rüütel jõuab lossist välja, olles läbinud mitte rohkem kui $2n$ saali. (Saali läbimine läheb arvesse iga kord, kui rüütel sellesse siseneb.)

7. *(IMO 2001 Shortlist)* Olgu k-klikk hulk k inimesega nii, et selle iga paar tunneb teineteist. Club Olegis, on igas 3-kliki paaris vähemalt üks kattuv inimene, aga pole ühtegi 5-klikki. Tõesta, et Club Olegis on ülimalt kaks inimest, kelle lahkumise korral ei jääks Club Olegi mitte ühtegi 3-klikki.

8. *(Balti Tee 1994)* Kuningas otsustas lasta ehitada oma kuningriigi 13 asustamata saarele kokku 25 linna ning panna käima praamiliini iga erinevatel saartel olevate linnade paari vahel. Kuidas peaks kuningas linnad saarte vahel jaotama, et igaühel 13 saarest oleks vähemalt üks linn ja praamiliinide koguarv oleks vähim?

9. *(Canada 2006)* Turniiril, kus osaleb $2n+1$ võistkonda, mängivad kõik võistkondade paarid täpselt ühe korra. Kolm võistkonda moodustavad *surnud ringi*, kui X võidab Y, Y võidab Z ja Z võidab X.

   (i) Leia minimaalne surnud ringide arv.

   (ii) Leia maksimaalne surnud ringide arv.