코딩으로 공부하는 과학이야기
3차시: 수학

서지범 (서울대학교 과학교육과 물리전공)
*jabam1264@snu.ac.kr

SEOUL NATIONAL UNIVERSITY

수업 안내 및 학습 목표

회차	강의주제	강의내용	수업활동
1 (2시간)	프로그래밍 기초	- 파이썬(python) 및 구글 코랩(colab) 소개 - 파이썬 기본 문법 학습 - NumPy 및 Matplotlib 소개 및 실습	이론, 프로그래밍 실습
2 (2시간)	물체의 운동	- 기초 수학 학습(그래프, 미분) - 기초 물리 학습(운동방정식, 뉴턴법칙) - 등속운동, 등가속도운동, 포물선운동 학습 및 실습 - 진동운동 학습 및 실습	이론, 프로그래밍 실습
3 (2시간)	몬테카를로 방법	- 몬테카를로 방법 소개 - 몬테카를로 적분 학습 및 실습 - 몬테카를로 방법을 활용한 물리학 문제 해결 (톰슨 문제, 이징 모형)	이론, 프로그래밍 실습
4 (2시간)	행위자 기반 모형	- 행위자 기반 모형 소개 - '생명 게임' 학습 및 실습 - '셸링 모형' 학습 및 실습	이론, 프로그래밍 실습
4 (2시간)	네트워크 과학	- 네트워크 과학 소개 - 네트워크 동역학 소개 - NetworkX 소개 및 실습	이론, 프로그래밍 실습

복습

자유낙하운동?

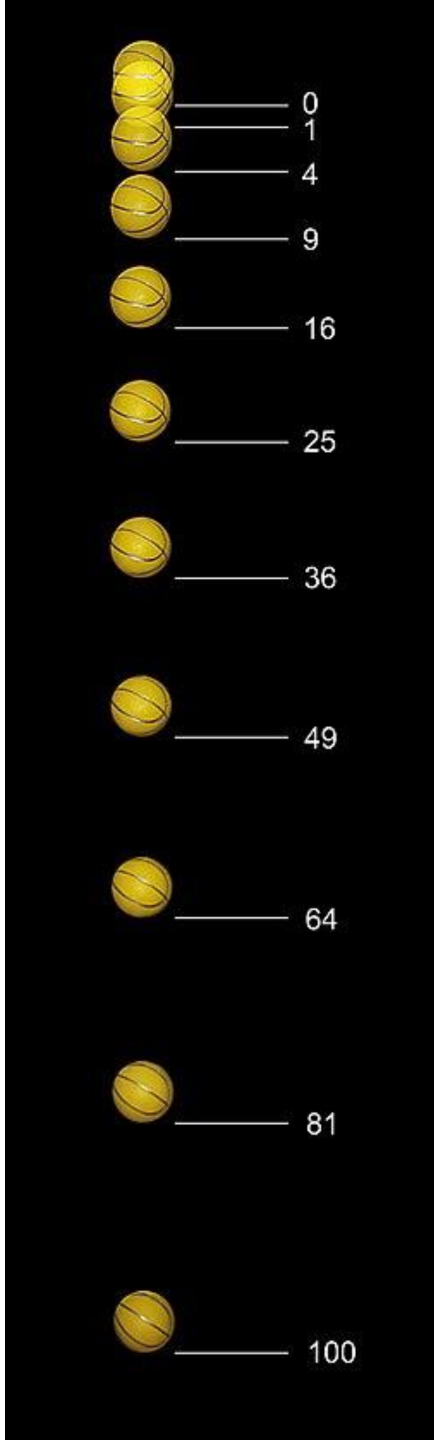
어떠한 물체가 힘을 중력만 받아

일정한 가속도로 운동하는 것

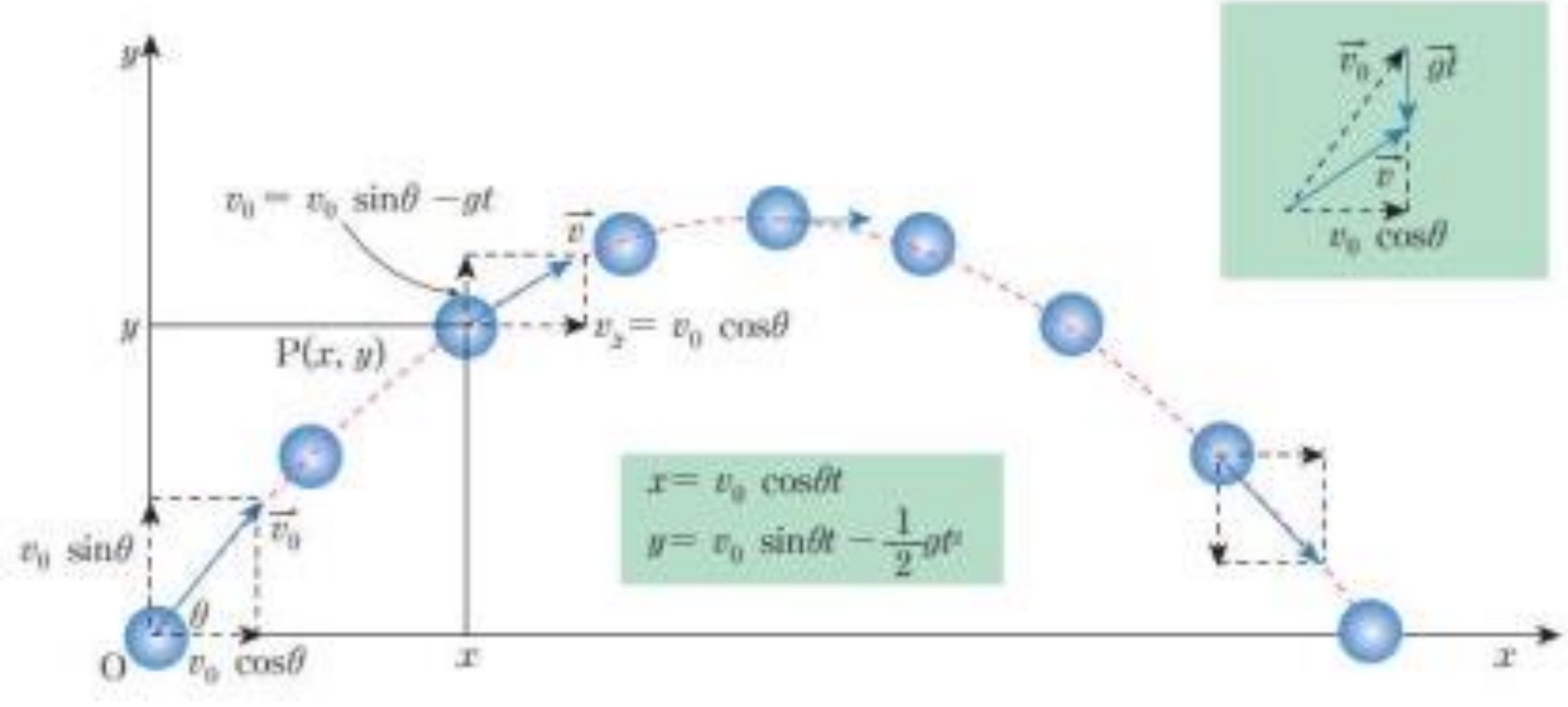
$$a = g \approx 9.8m/s^2$$

$$v = v_0 + at$$

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$



복습

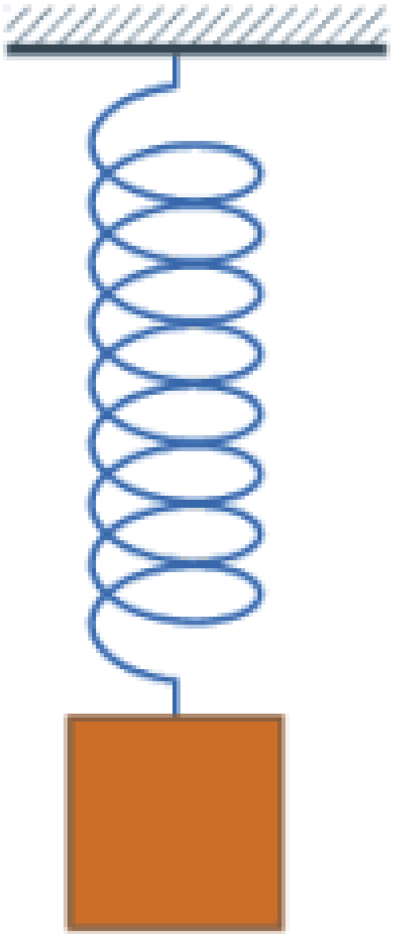


y
$v_y = v_0 \sin\theta - gt$
$\vec{v}$
y
$v_x = v_0 \cos\theta$
P(x, y)
$v_0 \sin\theta$
$\vec{v_0}$
θ
O
$v_0 \cos\theta$
x
x
$x = v_0 \cos\theta t$
$y = v_0 \sin\theta t - \frac{1}{2}gt^2$
$\vec{v_0}$
$\vec{gt}$
$\vec{v}$
$v_0 \cos\theta$

복습

조화진동?

평형점을 기준으로 물체의 변위에 비례한 복원력이 작용하게 되어 일정한 주기 운동을 하는 계



운동 방정식 [편집]

단순 조화 진동의 운동 방정식은 다음과 같이 주어진다.

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

보통 여기서 ω_0를 다음과 같이 정의하여

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

운동 방정식을 다음과 같이 쓴다.

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

이 방정식의 해는 다음과 같다.[1]

$$x(t) = C_1 \sin \omega_0 t + C_2 \cos \omega_0 t$$

여기서 C_1와 C_2는 상수로 초기 조건에 따라 결정되는 값이다. 좀 더 식에 물리학적 의미를 부여하기 위해 다음과 해를

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi)$$

(또는 $x(t) = A \sin(\omega_0 t + \phi)$)

1. 미분

1. 미분

어떤 곡선의 서로 다른 두 점의 연결선(할선)의 기울기는 다음과 같다:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

점 $(x, f(x))$가 점 $(a, f(a))$에 매우 가까워지면(즉, $\Delta x \to 0$일 때) 연결선은 접선이 된다. 이 때 점 $(a, f(a))$에서의 기울기 k는 다음과 같이 표현할 수 있다:

$$k = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

이는 어떤 함수의 순간 변화율과 같은데, 이를 미분계수라고 말할 수 있다. 접선의 기울기(순간 변화율, 미분계수)를 **함수의 미분**이라고 말할 수 있으며 표기법은 다음과 같다:

$$k = f'(a) = \frac{dy}{dx}\Big|_{x=a}.$$

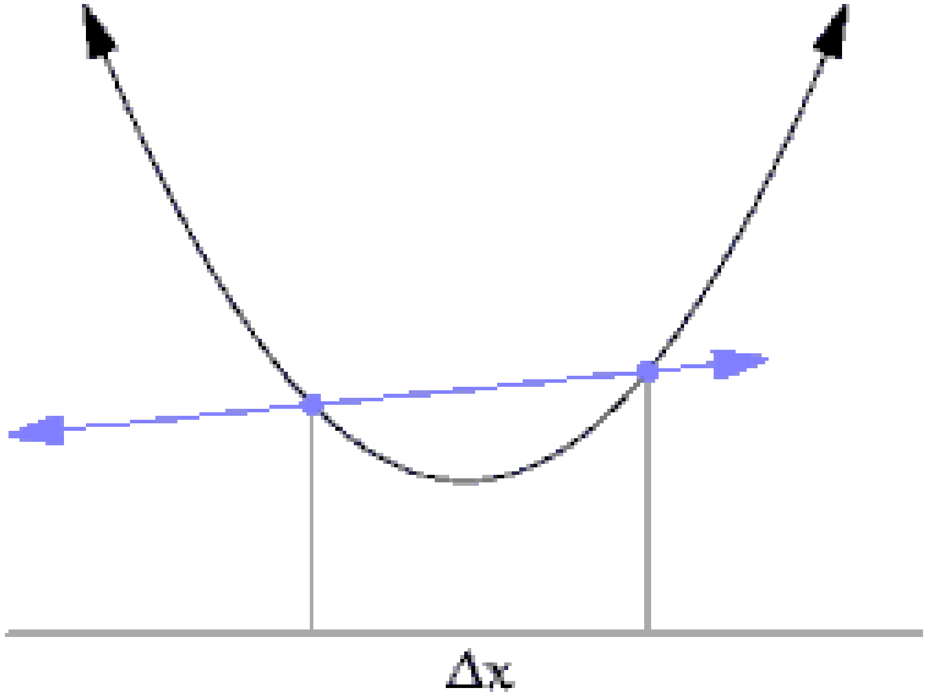
일반화하자면 미분 또는 미분 계수 또는 순간 변화율은 평균 변화율의 극한을 의미하는 용어로 다음과 같이 표기할 수 있다:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

1. 미분

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$



- (상수 함수) $(C)' = 0$
- (멱함수) $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha - 1} \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$
- (지수 함수) $(e^{x})' = e^{x}$
- (지수 함수) $(a^{x})' = a^{x} \ln a \qquad (a > 0)$
- (로그 함수) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
- (로그 함수) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \qquad (a > 0,\ a \neq 1)$
- (삼각 함수) $(\sin x)' = \cos x$
- (삼각 함수) $(\cos x)' = -\sin x$
- (삼각 함수) $(\tan x)' = \sec^2 x$

2. 테일러 급수

2. 테일러 급수

테일러 급수는 어떤 함수를 다항식으로 나타낼 때 사용하는 표현 방법이다. a에서 함수 f를 다음과 같이 표현할 수 있다:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots.$$

언제 쓰이냐? 수치적인 계산을 할 때 사용된다! 쉽게 설명하자면 엄밀한 수학적인 계산을 하는 것이 어려울 수 있는데, 그때 사용한다.

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \qquad (|x| < 1)$$

$$\exp x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots \qquad \forall x$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \qquad \forall x$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots \qquad \forall x$$

옆의 예시들은 a=0일 때의 테일러 급수이며, 특별히 매클로린 급수라고 한다.

2. 테일러 급수

증명)
f를 다음과 같이 급수로 표현되는 함수라 한다.

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \cdots$$

f(x)에서 x = a를 대입하면, $f(a) = c_0$을 얻을 수 있고,
f'(x)에서 x = a를 대입하면, $f'(a) = c_1$을 얻을 수 있고
f''(x)에서 x = a를 대입하면, $f''(a) = 2c_2$을 얻을 수 있다
f'''(x)에서 x = a를 대입하면, $f'''(a) = 2 \cdot 3c_3$을 얻을 수 있다

일반화하자면, $f^{(n)}(a) = 2 \cdot 3 \cdots nc_n = n!\,c_n,\quad c_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$

3. 미분 방정식

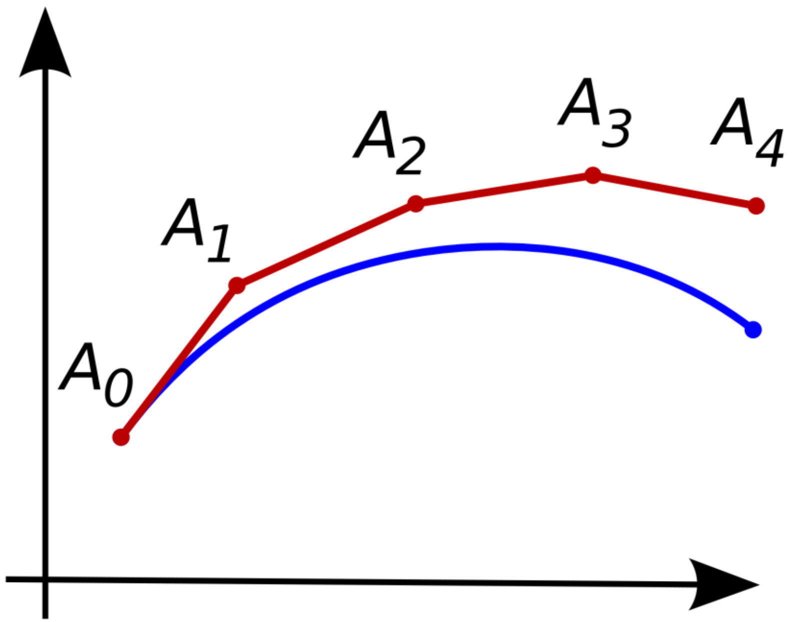
3. 오일러 방법

미분방정식을 수치해법을 통해서 푸는 방법 중 가장 간단한 방법이다. 간단한 만큼 오차도 크다. 테일러 급수에서 유도된 방법.

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

$$x(t+\Delta\mathrm{t}) = x(t) + \Delta t\frac{dx}{dt} + \frac{1}{2}\Delta\mathrm{t}^2\frac{d^2t}{dt^2} + O(\Delta\mathrm{t}^3)$$

$$x(t+\Delta\mathrm{t}) = x(t) + \Delta t f(x)$$



3. 호인의 방법

초기값 문제를 개선된 오일러 방법으로 수치적 솔루션을 구하는 절차는:

$$y'(t) = f(t, y(t)), \qquad y(t_0) = y_0,$$

호인의 방법은, 첫번째로 중간값 $\tilde{y}_{i+1}$ 최종 근사치 y_{i+1}.

$$\tilde{y}_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i)$$
$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(t_i, y_i) + f(t_{i+1}, \tilde{y}_{i+1})],$$

여기서 h단계 크기이고, $t_{i+1} = t_i + h$.

3. 4차 룽게-쿠타 방법

다음과 같이 정의된 초기값 문제를 두자:

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0.$$

y는 시간 t에 대한 미지의 함수이며, 우리가 근사하려는 것이다. y의 변화인 $\dot{y}$는 t와 y 자신으로 이루어진 함수이고, 초기시간 t_0에 대응하는 y의 초기값은 y_0이며, 함수 f와 t_0, y_0의 값은 주어져 있다.

이제 h > 0 인 단계 크기로 다음을 정의한다.

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \tfrac{1}{6}h\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right) \\ t_{n+1} &= t_n + h \end{aligned}$$

n = 0, 1, 2, 3, ... 에서, 다음을 사용한다.

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, y_n) \\ k_2 &= f\left(t_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}hk_1\right) \\ k_3 &= f\left(t_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}hk_2\right) \\ k_4 &= f\left(t_n + h, y_n + hk_3\right) \end{aligned}$$

3. 활용

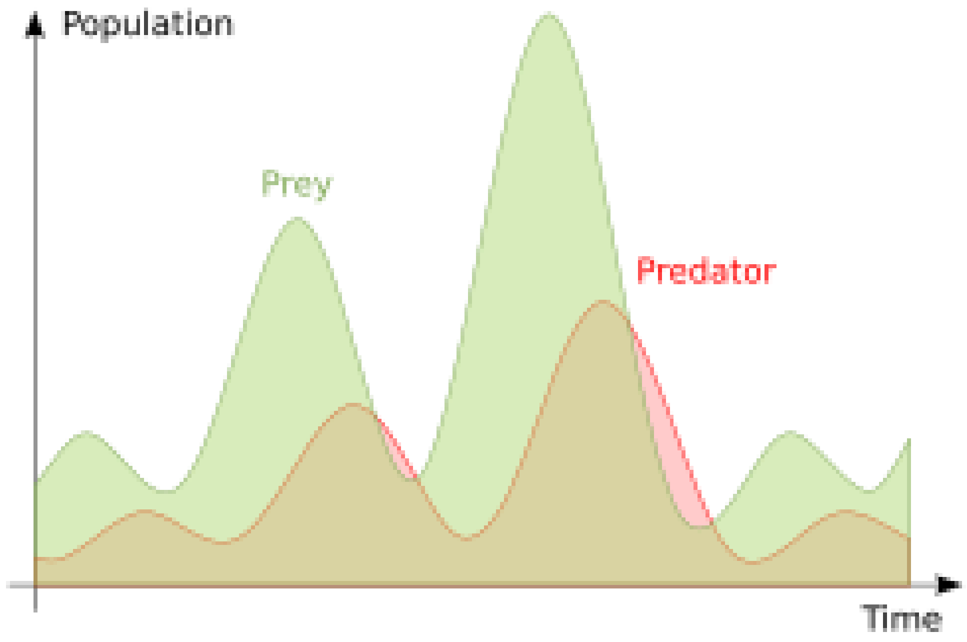
로트카-볼테라 방정식

포식자와 피식자 간의 포식 관계를 수량화한 공식이다.

로트카-볼테라 방정식은 다음의 형태로 기술된다.

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy$$
$$\frac{dy}{dt} = \delta xy - \gamma y$$

- x는 토끼나 사슴 따위의 피식자의 수를 나타낸다.
- y는 여우나 사자 따위의 포식자의 수를 나타낸다.
- t는 시간을 나타낸다.
- $\frac{dy}{dt}$와 $\frac{dx}{dt}$는 각각 포식자와 피식자의, 시간에 따른 개체 수 증가율을 나타낸다.
- $\alpha, \beta, \gamma, \delta$는 각각 포식자와 피식자 간의 상호작용에 의한 매개변수들이다. (단, 매개변수는 모두 양수이다.)



3. 활용

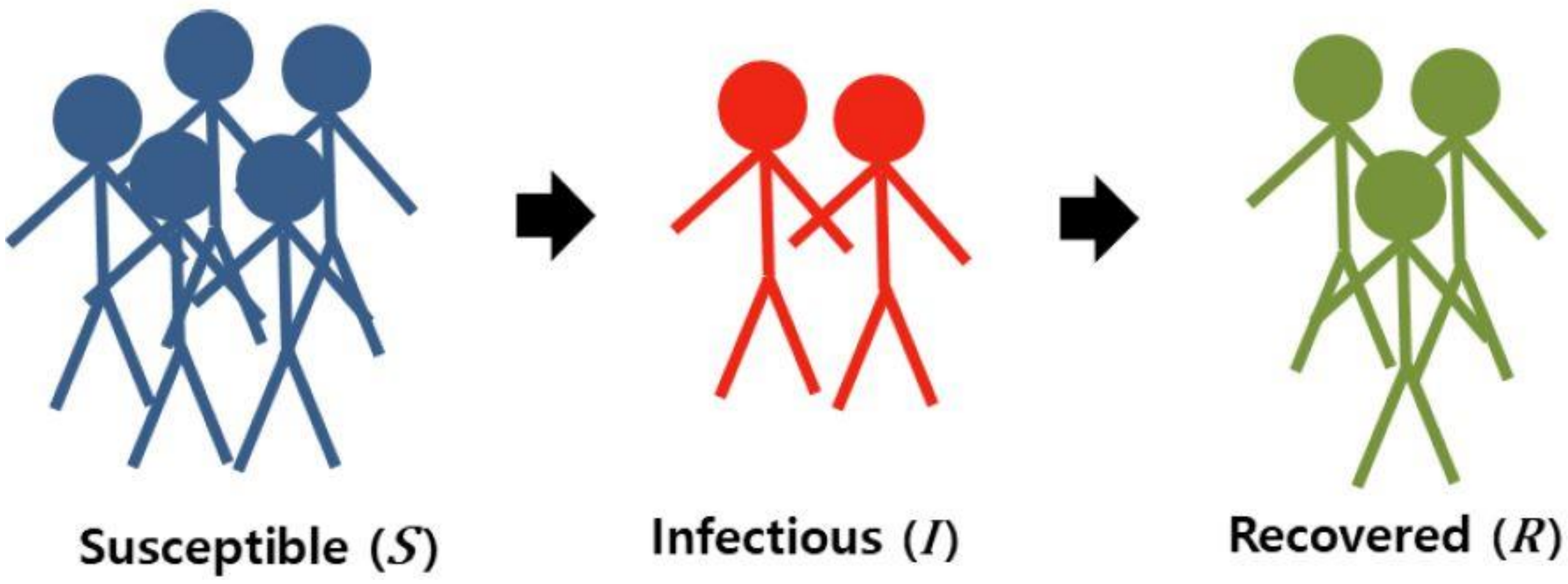
https://www.asaninst.org/contents/%EC%A0%84%EC%97%BC%EB%B3%91-%EB%AA%A8%EB%8D%B8%EA%B3%BC-covid-19/

SIR모델

감염된 인구 I, 감염 가능한 인구 S, 회복된 인구 R

β: 감염률 γ:회복률

이를 수식으로 표현하면 다음 세 개의 미분방정식으로 표현된다.



$$\frac{dS}{dt} = -\frac{\beta}{N} \cdot S \cdot I$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\beta}{N} \cdot S \cdot I - \gamma \cdot I$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma \cdot I$$

3. 활용

조화진동자

운동 방정식 [편집]

단순 조화 진동의 운동 방정식은 다음과 같이 주어진다.

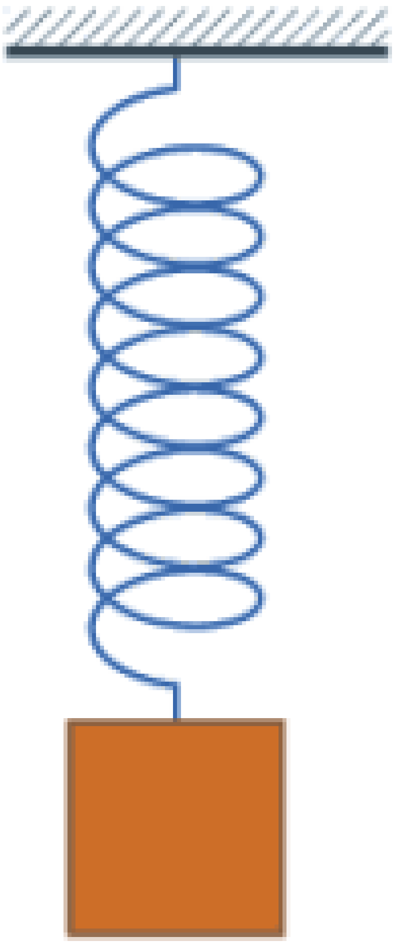
$$m\ddot{x} + kx = 0$$

보통 여기서 ω_0를 다음과 같이 정의하여

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

운동 방정식을 다음과 같이 쓴다.

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$



Thank you