코딩으로 공부하는 과학이야기
2차시: 미분 방정식

서지범 (서울대학교 과학교육과 물리전공)
*jabam1264@snu.ac.kr

SEOUL NATIONAL UNIVERSITY

수업 안내 및 학습 목표

- 수업 자료(코드 및 PPT)는 아래 링크 및 QR 코드 참고!
- 또는 구글에 jabamseo github 검색 → 좌측 상단 jabamseo 클릭 → SNUcourse 클릭

https://github.com/jabamseo/SNUcourse

1. 미분 방정식

1. 미분방정식

지금까지 다루었던 물체의 운동을 나타내는 방정식은 미분방정식으로 표현 가능하다.

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

또는

$$\dot{x} = f(x)$$

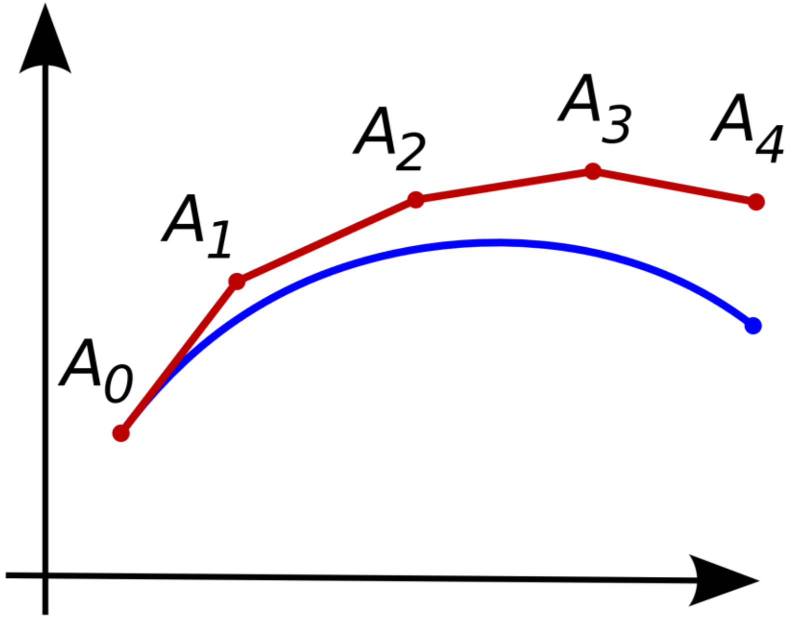
1. 오일러 방법

미분방정식을 수치해법을 통해서 푸는 방법 중 가장 간단한 방법.
간단한 만큼 오차도 크다. 테일러 급수에서 유도된 방법.

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

$$x(t + \Delta\mathrm{t}) = x(t) + \Delta t\frac{dx}{dt} + \frac{1}{2}\Delta\mathrm{t}^2\frac{d^2t}{dt^2} + O(\Delta\mathrm{t}^3)$$

$$x(t + \Delta\mathrm{t}) = x(t) + \Delta t f(x)$$



1. 호인의 방법

초기값 문제를 개선된 오일러 방법으로 수치적 솔루션을 구하는 절차는:

$$y'(t) = f(t, y(t)), \qquad y(t_0) = y_0,$$

호인의 방법은, 첫번째로 중간값 $\tilde{y}_{i+1}$ 최종 근사치 y_{i+1}.

$$\tilde{y}_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(t_i, y_i) + f(t_{i+1}, \tilde{y}_{i+1})],$$

여기서 h단계 크기이고, $t_{i+1} = t_i + h$.

1. 4차 룽게-쿠타 방법

다음과 같이 정의된 초기값 문제를 두자:

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0.$$

y는 시간 t에 대한 미지의 함수이며, 우리가 근사하려는 것이다. y의 변화인 $\dot{y}$는 t와 y 자신으로 이루어진 함수이고, 초기시간 t_0에 대응하는 y의 초기값은 y_0이며, 함수 f와 t_0, y_0의 값은 주어져 있다.

이제 h > 0 인 단계 크기로 다음을 정의한다.

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \tfrac{1}{6}h\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right) \\ t_{n+1} &= t_n + h \end{aligned}$$

n = 0, 1, 2, 3, ... 에서, 다음을 사용한다.

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, y_n) \\ k_2 &= f(t_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}hk_1) \\ k_3 &= f(t_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}hk_2) \\ k_4 &= f(t_n + h, y_n + hk_3) \end{aligned}$$

1. 활용

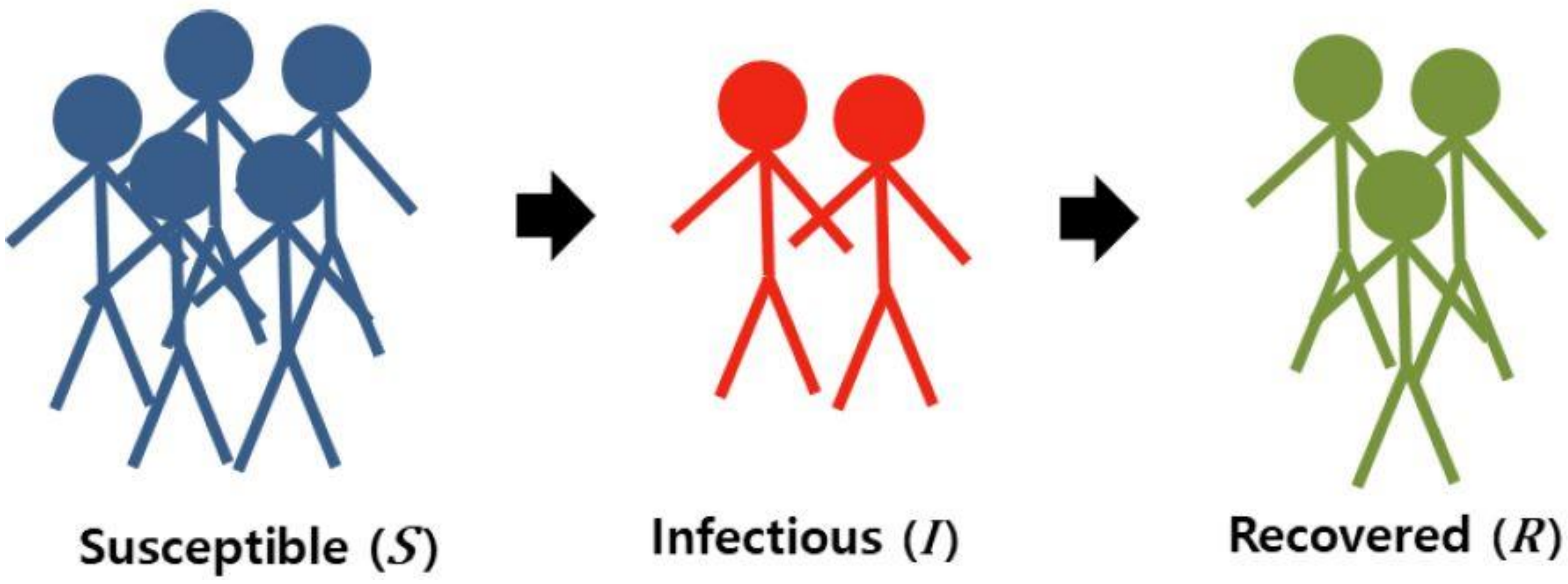
https://www.asaninst.org/contents/%EC%A0%84%EC%97%BC%EB%B3%91-%EB%AA%A8%EB%8D%B8%EA%B3%BC-covid-19/

SIR모델

감염된 인구 I, 감염 가능한 인구 S, 회복된 인구 R

β: 감염률 γ:회복률

이를 수식으로 표현하면 다음 세 개의 미분방정식으로 표현된다.



$$\frac{dS}{dt} = -\frac{\beta}{N} \cdot S \cdot I$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\beta}{N} \cdot S \cdot I - \gamma \cdot I$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma \cdot I$$

1. 활용

https://www.asaninst.org/contents/%EC%A0%84%EC%97%BC%EB%B3%91-%EB%AA%A8%EB%8D%B8%EA%B3%BC-covid-19/

SIR모델

기초 감염 재생산 수 (basic reproduction number) R_0

감염된 사람이 회복되기 전에 그 질병을 옮겨서 추가된 감염자의 평균 수

만약, 질병에 걸린 사람이 평균적으로 두 명에게 질병을 옮긴다면? $R_0 = 2$

$R_0 = 1$을 기점으로 질병이 증폭될지 사라질 지 결정된다.

1. $R_0 = 2$ 시간이 지남에 따라, 감염자 수가 매회 두배 증가
2. $R_0 = \frac{1}{2}$ 시간이 지남에 따라, 감염자 수가 매회 절반 감소

따라서 $R_0 = 1$를 감염병 문턱값이라고 부른다.

$$R_0 = \frac{\beta}{\gamma}$$

1. 활용

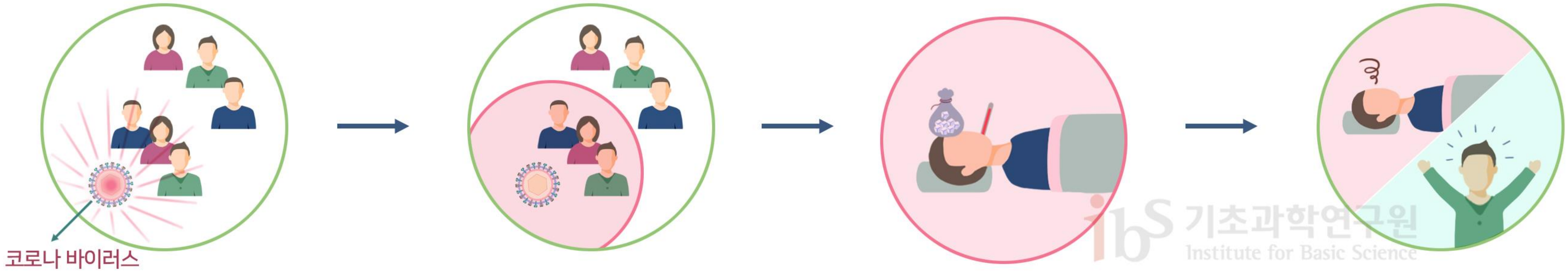
SEIR모델

SIR모형보다 현실적인 모형

네 개의 미분방정식으로 표현된다.

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI, \qquad \frac{dI}{dt} = aE - \gamma I,$$

$$\frac{dE}{dt} = \beta SI - aE, \qquad \frac{dR}{dt} = \gamma I.$$



S
감염 가능성이 있는 집단

E
감염자에게 노출된 집단

I
감염시킬 수 있는 집단

R
사망하거나 회복된 집단

1. 활용

로트카-볼테라 방정식

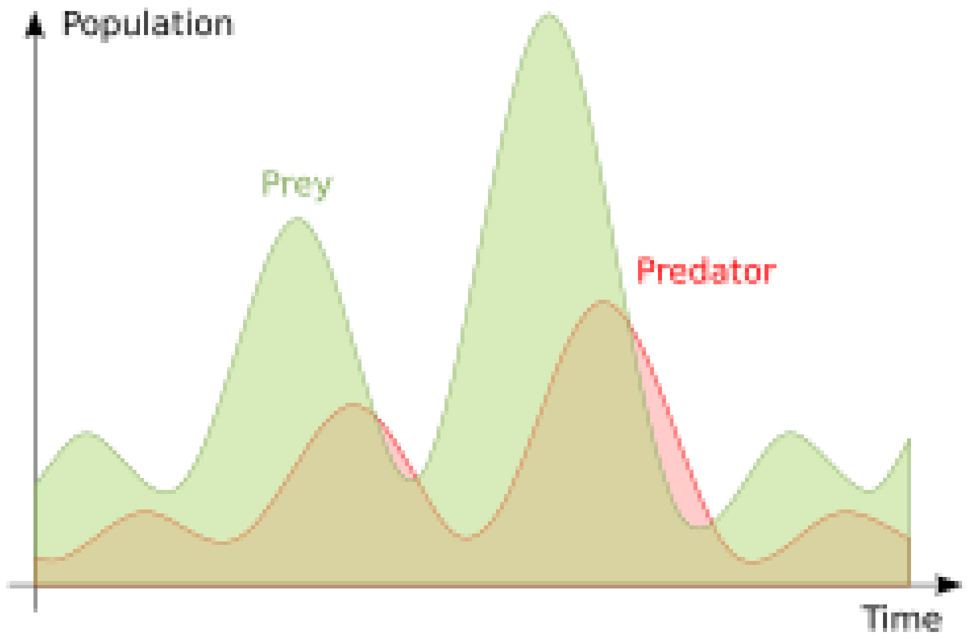
포식자와 피식자 간의 포식 관계를 수량화한 공식이다.

로트카-볼테라 방정식은 다음의 형태로 기술된다.

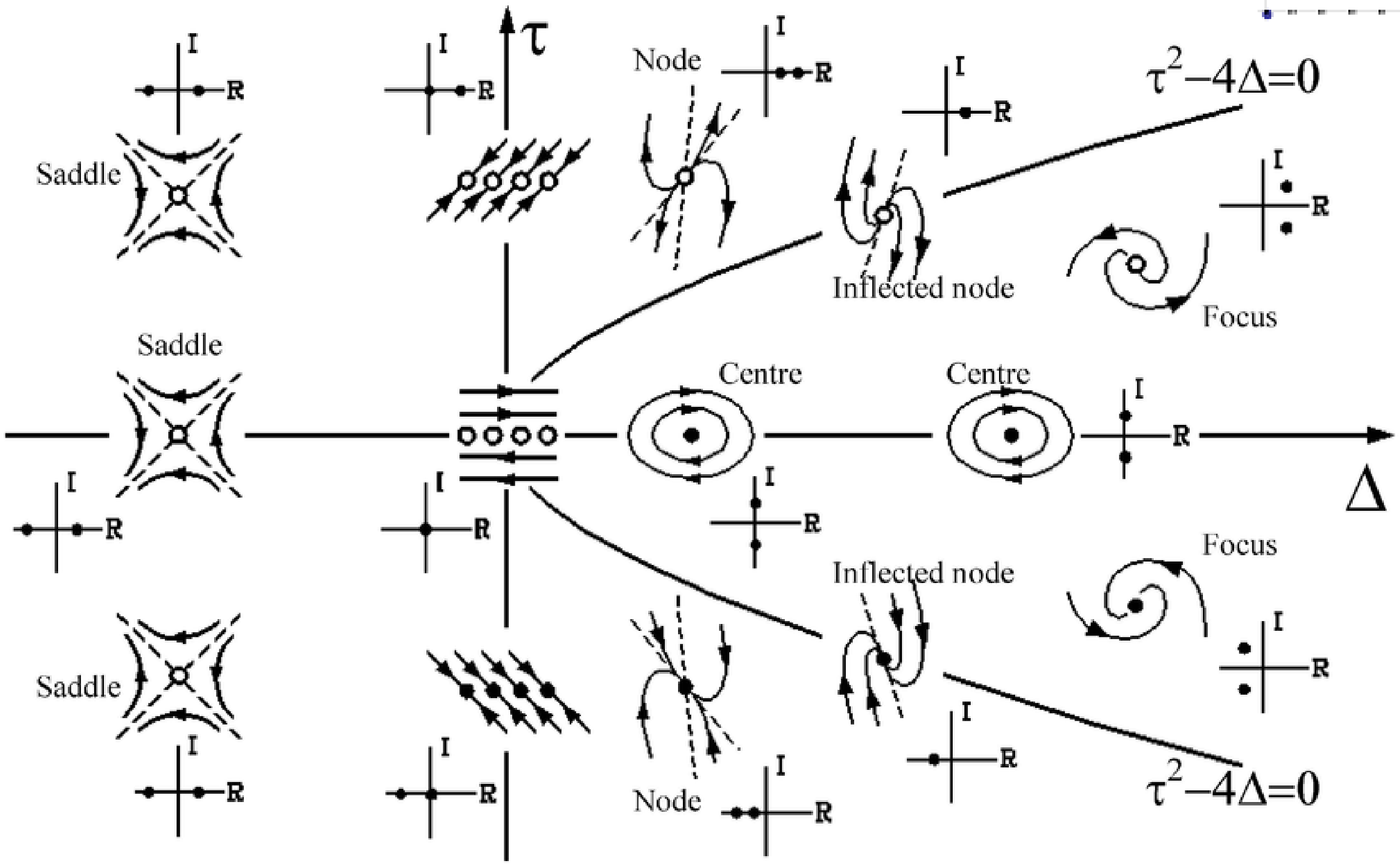
$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy$$

$$\frac{dy}{dt} = \delta xy - \gamma y$$

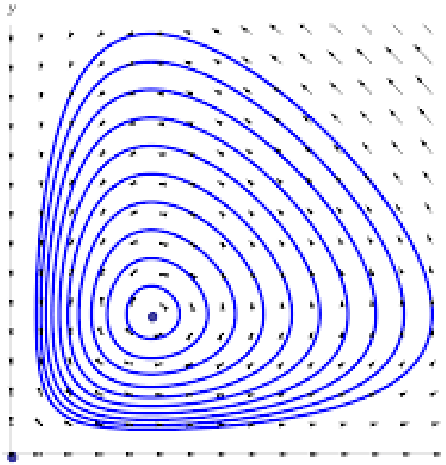
- x는 토끼나 사슴 따위의 피식자의 수를 나타낸다.
- y는 여우나 사자 따위의 포식자의 수를 나타낸다.
- t는 시간을 나타낸다.
- $\frac{dy}{dt}$와 $\frac{dx}{dt}$는 각각 포식자와 피식자의, 시간에 따른 개체 수 증가율을 나타낸다.
- $\alpha, \beta, \gamma, \delta$는 각각 포식자와 피식자 간의 상호작용에 의한 매개변수들이다. (단, 매개변수는 모두 양수이다.)

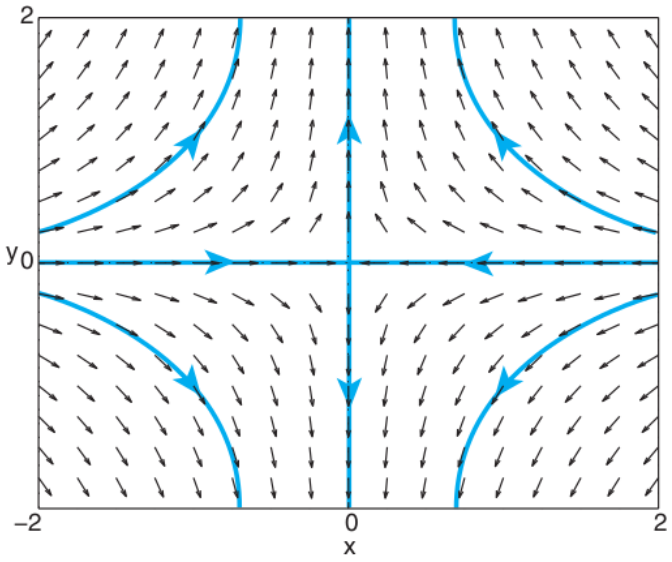


참고자료

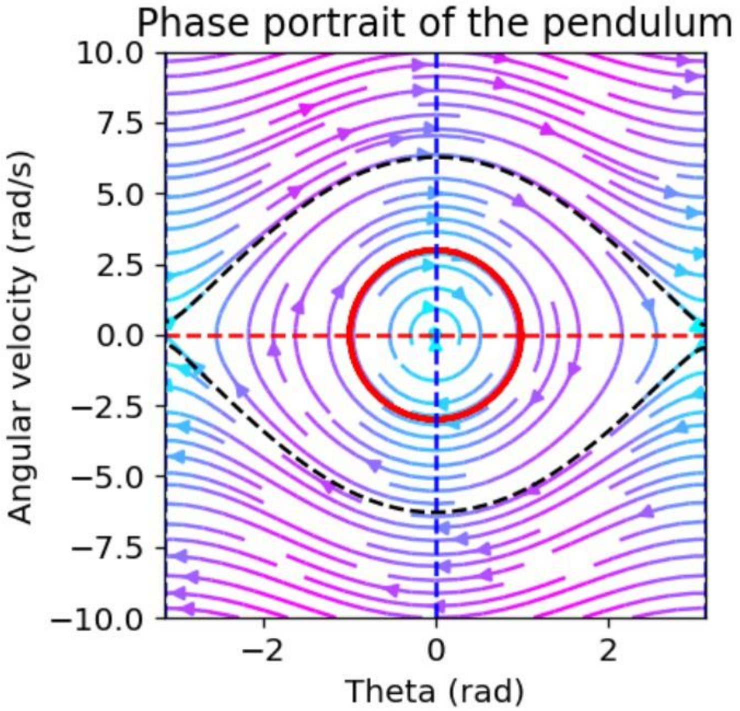


Saddle
Saddle
Saddle
Node
Node
Inflected node
Inflected node
Centre
Centre
Focus
Focus
τ
Δ
$\tau^2 - 4\Delta = 0$
$\tau^2 - 4\Delta = 0$
I
R



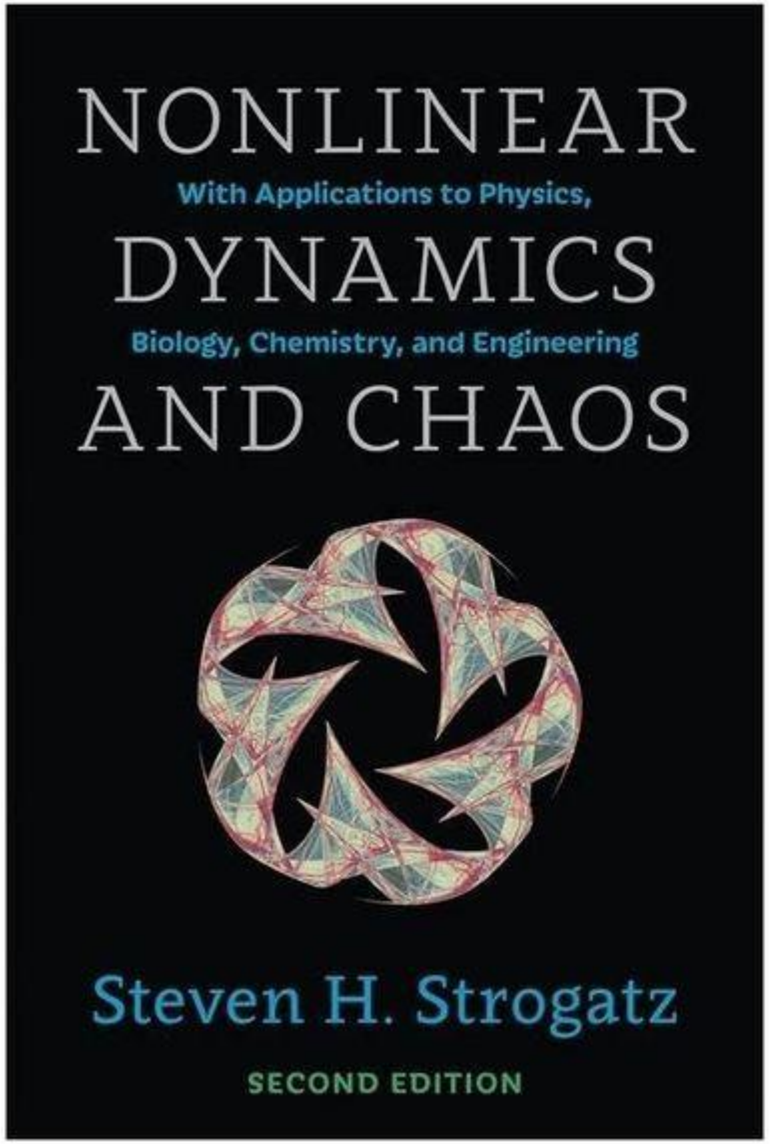


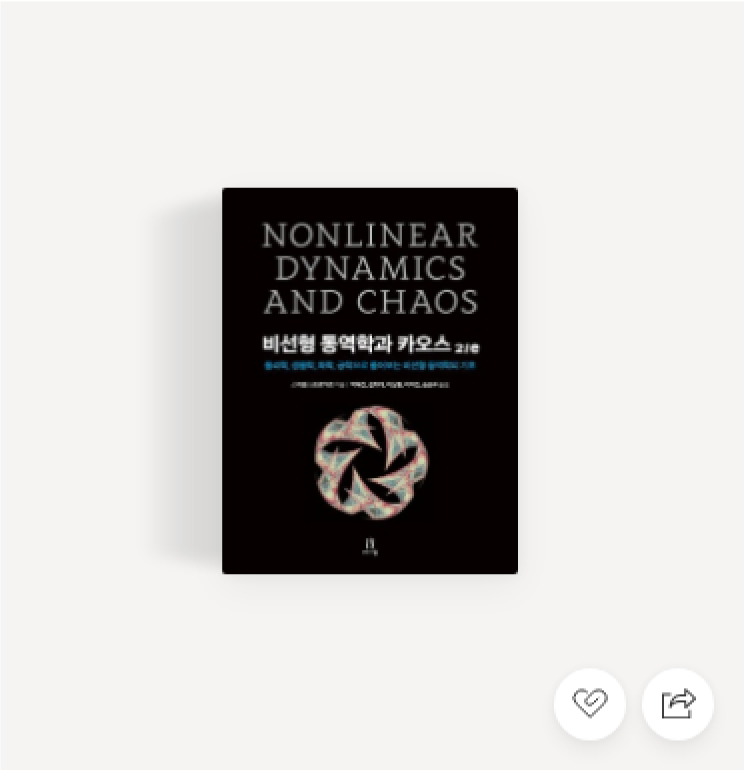
2
−2
0
2
x
y



Phase portrait of the pendulum
Angular velocity (rad/s)
Theta (rad)
10.0
7.5
5.0
2.5
0.0
−2.5
−5.0
−7.5
−10.0
−2
0
2

참고자료





베스트셀러 신간 **비선형 동역학과 카오스 2/e** 물리학, 생물학, 화학, 공학으로 풀어보는 비선형 동역학의 기초

저자 스티븐 스트로가츠

번역 박혜진,김희태,이상훈

출판 에이콘출판 발행 2025.06.23.

랭킹 자연/과학 부문 133위 [교보문고]

책 소개

복잡한 세상 속 숨겨진 질서를 밝히는 과학 고전, 『비선형 동역학과 카오스』 제2판 출간 현대 과학과 공학, 생물학, 심지어 사회 현상까지.... 우리는 수많은 비선형(nonlinear) 시스템 속에서 살아간다. 나비효과로 대표...

Thank you