코딩으로 공부하는 과학이야기
3차시: 미분 방정식

서지범 (서울대학교 과학교육과 물리전공)
*jabam1264@snu.ac.kr

SEOUL NATIONAL UNIVERSITY

수업 안내 및 학습 목표

- 수업 자료(코드 및 PPT)는 아래 링크 및 QR 코드 참고!
- 또는 구글에 jabamseo github 검색 → 좌측 상단 jabamseo 클릭 → SNUcourse 클릭

https://github.com/jabamseo/SNUcourse

복습

자유낙하운동?

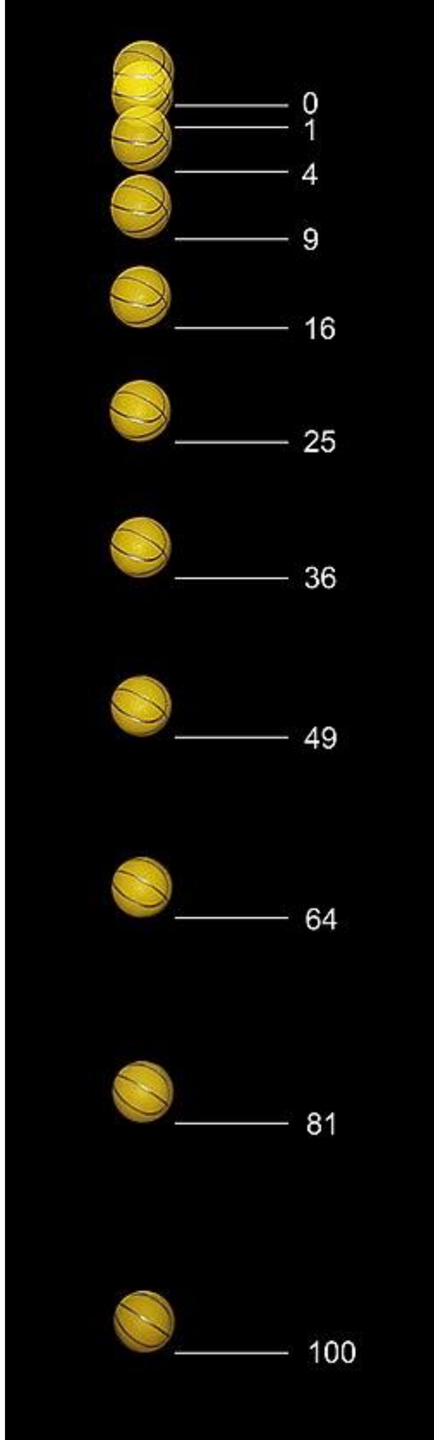
어떠한 물체가 힘을 중력만 받아

일정한 가속도로 운동하는 것

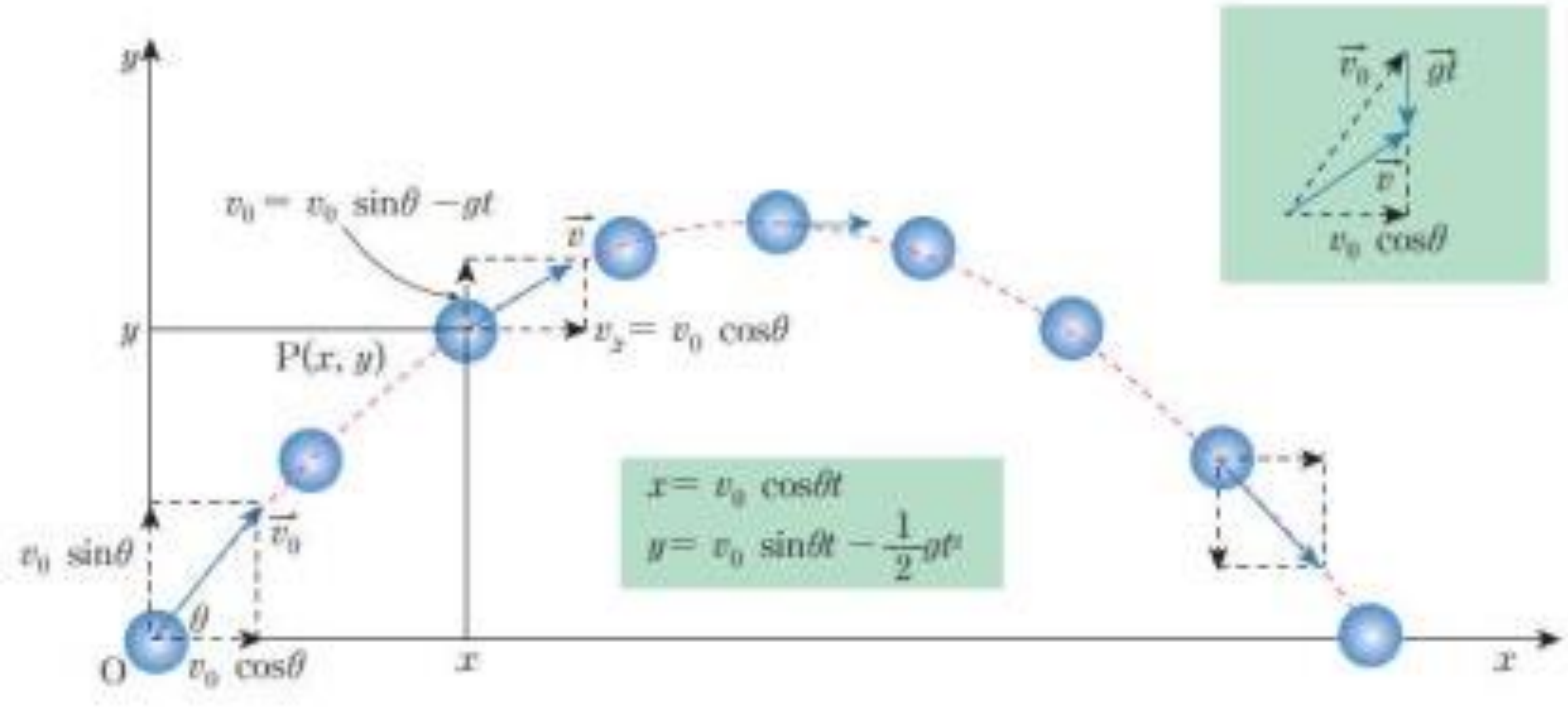
$$a = g \approx 9.8m/s^2$$

$$v = v_0 + at$$

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$



복습

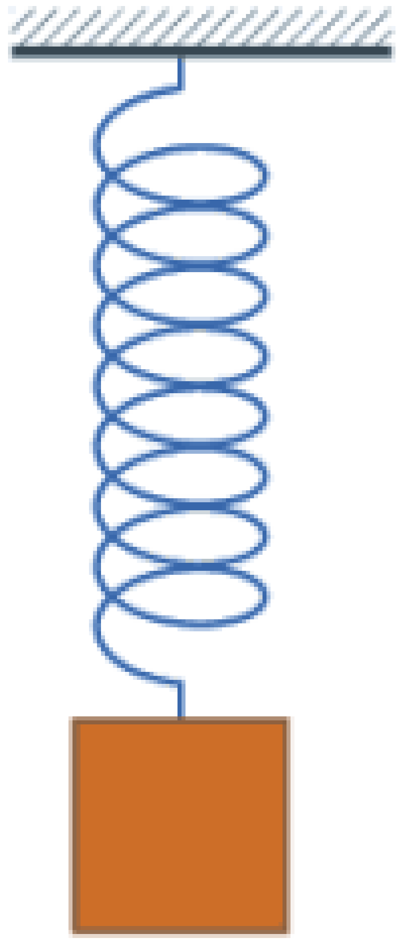


$v_0 = v_0 \sin\theta - gt$
$\vec{v}$
$v_x = v_0 \cos\theta$
P(x, y)
$v_0 \sin\theta$
$\vec{v_0}$
θ
O
$v_0 \cos\theta$
$x = v_0 \cos\theta t$
$y = v_0 \sin\theta t - \frac{1}{2}gt^2$
$\vec{v_0}$
$\vec{gt}$
$\vec{v}$
$v_0 \cos\theta$

복습

조화진동?

평형점을 기준으로 물체의 변위에 비례한 복원력이 작용하게 되어 일정한 주기 운동을 하는 계



운동 방정식 [편집]

단순 조화 진동의 운동 방정식은 다음과 같이 주어진다.

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

보통 여기서 ω_0를 다음과 같이 정의하여

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

운동 방정식을 다음과 같이 쓴다.

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

이 방정식의 해는 다음과 같다.[1]

$$x(t) = C_1 \sin \omega_0 t + C_2 \cos \omega_0 t$$

여기서 C_1와 C_2는 상수로 초기 조건에 따라 결정되는 값이다. 좀 더 식에 물리학적 의미를 부여하기 위해 다음과 해를

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi)$$

(또는 $x(t) = A \sin(\omega_0 t + \phi)$)

1. 미분

1. 미분

어떤 곡선의 서로 다른 두 점의 연결선(할선)의 기울기는 다음과 같다:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

점 $(x, f(x))$가 점 $(a, f(a))$에 매우 가까워지면(즉, $\Delta x \to 0$일 때) 연결선은 접선이 된다. 이 때 점 $(a, f(a))$에서의 기울기 k는 다음과 같이 표현할 수 있다:

$$k = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

이는 어떤 함수의 순간 변화율과 같은데, 이를 미분계수라고 말할 수 있다. 접선의 기울기(순간 변화율, 미분계수)를 **함수의 미분**이라고 말할 수 있으며 표기법은 다음과 같다:

$$k = f'(a) = \frac{dy}{dx}\Big|_{x=a}.$$

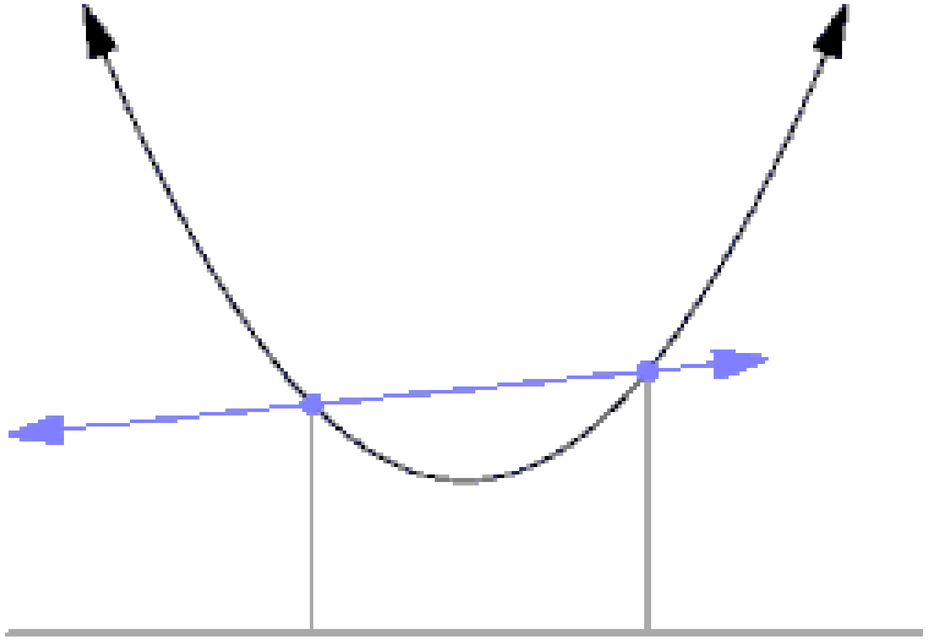
일반화하자면 미분 또는 미분 계수 또는 순간 변화율은 평균 변화율의 극한을 의미하는 용어로 다음과 같이 표기할 수 있다:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

1. 미분

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$



- (상수 함수) $(C)' = 0$
- (멱함수) $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha - 1} \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$
- (지수 함수) $(e^{x})' = e^{x}$
- (지수 함수) $(a^{x})' = a^{x} \ln a \qquad (a > 0)$
- (로그 함수) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
- (로그 함수) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \qquad (a > 0,\ a \neq 1)$
- (삼각 함수) $(\sin x)' = \cos x$
- (삼각 함수) $(\cos x)' = -\sin x$
- (삼각 함수) $(\tan x)' = \sec^2 x$

2. 미분 방정식

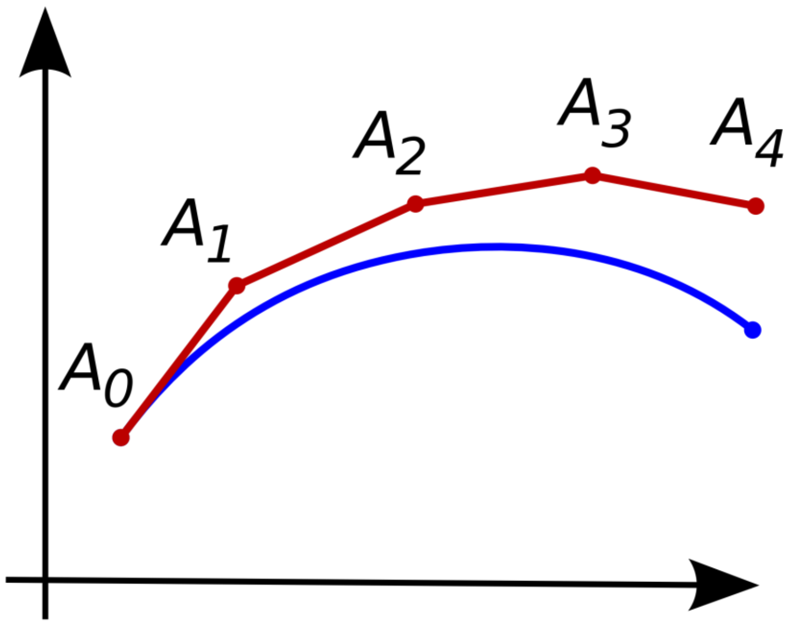
3. 오일러 방법

미분방정식을 수치해법을 통해서 푸는 방법 중 가장 간단한 방법이다. 간단한 만큼 오차도 크다. 테일러 급수에서 유도된 방법.

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

$$x(t + \Delta \mathrm{t}) = x(t) + \Delta t \frac{dx}{dt} + \frac{1}{2} \Delta \mathrm{t}^2 \frac{d^2 t}{dt^2} + O(\Delta \mathrm{t}^3)$$

$$x(t + \Delta \mathrm{t}) = x(t) + \Delta t f(x)$$

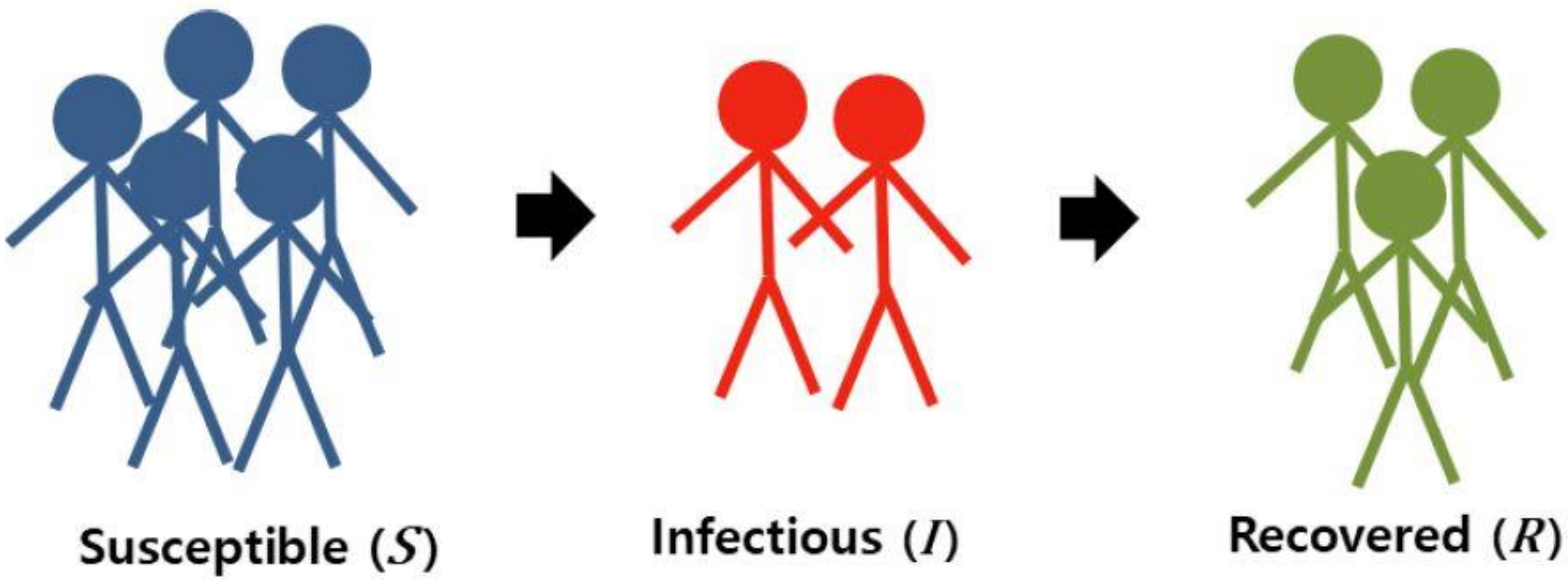


3. 활용

https://www.asaninst.org/contents/%EC%A0%84%EC%97%BC%EB%B3%91-%EB%AA%A8%EB%8D%B8%EA%B3%BC-covid-19/

SIR모델

감염된 인구 I, 감염 가능한 인구 S, 회복된 인구 R
β: 감염률 γ:회복률
이를 수식으로 표현하면 다음 세 개의 미분방정식으로 표현된다.



$$\frac{dS}{dt} = -\frac{\beta}{N} \cdot S \cdot I$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\beta}{N} \cdot S \cdot I - \gamma \cdot I$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma \cdot I$$

3. 활용

로트카-볼테라 방정식

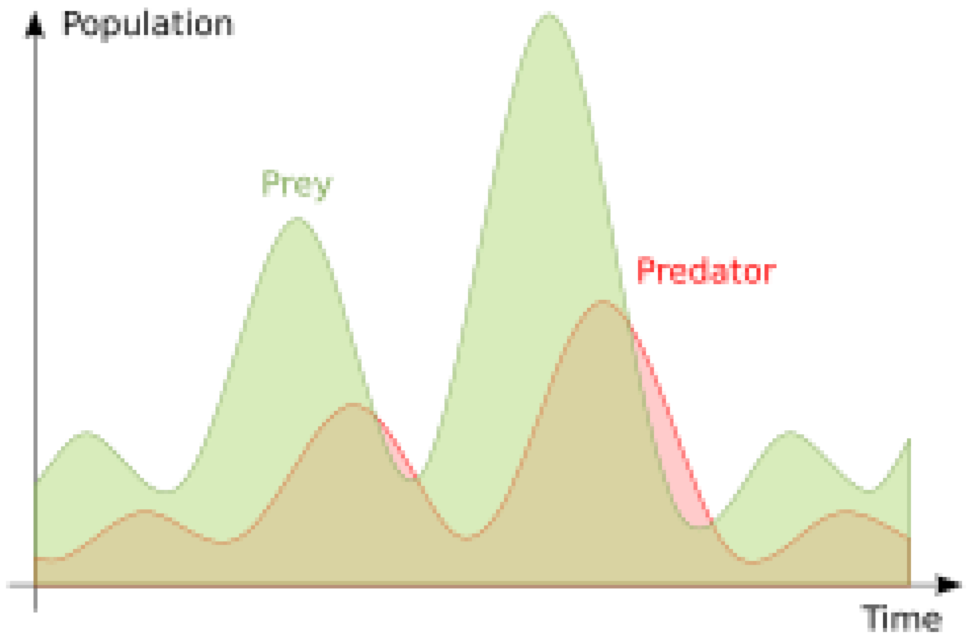
포식자와 피식자 간의 포식 관계를 수량화한 공식이다.

로트카-볼테라 방정식은 다음의 형태로 기술된다.

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy$$

$$\frac{dy}{dt} = \delta xy - \gamma y$$

- x는 토끼나 사슴 따위의 피식자의 수를 나타낸다.
- y는 여우나 사자 따위의 포식자의 수를 나타낸다.
- t는 시간을 나타낸다.
- $\frac{dy}{dt}$와 $\frac{dx}{dt}$는 각각 포식자와 피식자의, 시간에 따른 개체 수 증가율을 나타낸다.
- $\alpha, \beta, \gamma, \delta$는 각각 포식자와 피식자 간의 상호작용에 의한 매개변수들이다. (단, 매개변수는 모두 양수이다.)



Thank you