Práctica 01

DOCENTE	CARRERA	CURSO
Marcela Quispe Cruz	Maestría en Ciencia de la Computación	Teoría de la Computación

PRÁCTICA	TEMA	DURACIÓN
01	Lógica Proposicional	3 horas

1. Datos de los estudiantes

- Grupo: 9
- Integrantes:
  - Abarca Murillo, Jhonatan Piero
  - Apari Pinto, Christian Timoteo
  - Suca Velando, Christian Anthony
  - Vargas Zuni, Arturo

2. Ejercicios

1. Existen dos cajas, A y B. Un aviso en la caja A dice "El aviso en la caja B es falso y el oro está en la caja B". Un aviso en la caja B dice "El aviso en la caja A es verdadero y el oro está en la caja B". Asumiendo que existe oro en una de las cajas, ¿cuál de ellas contiene oro? Justifique esa respuesta en términos lógicos.
   Declarando las variables:
   - p: Aviso en A es verdadero
   - q: Aviso en B es verdadero
   - r: El oro esta en A
   - s: El oro esta en B

   a) {El aviso en A } si y solo si {El aviso en la caja B es falso} y {el oro está en la caja B}

   $$p \Leftrightarrow (\neg q \wedge s)$$

   b) {El aviso en B } si y solo si {El aviso en la caja A es verdadero} y {el oro está en la caja B}

   $$q \Leftrightarrow (p \wedge s)$$

   c) {El oro esta en A } o {El oro esta en B }

   $$r \vee s$$

La premisa quedaría de la siguiente manera

$$\{p \Leftrightarrow (\neg q \wedge s), q \Leftrightarrow (p \wedge s), r \vee s\} \models r \tag{1}$$

$$\{p \Leftrightarrow (\neg q \wedge s), q \Leftrightarrow (p \wedge s), r \vee s\} \models s \tag{2}$$

Realizando el Tableaux en cada una de las premisas definidas para cada una tanto para r y s, llegando solamente a concluir en r (ver figura 1 ya que en s no llega a ser válido. Concluyendo que **El oro esta en A**.

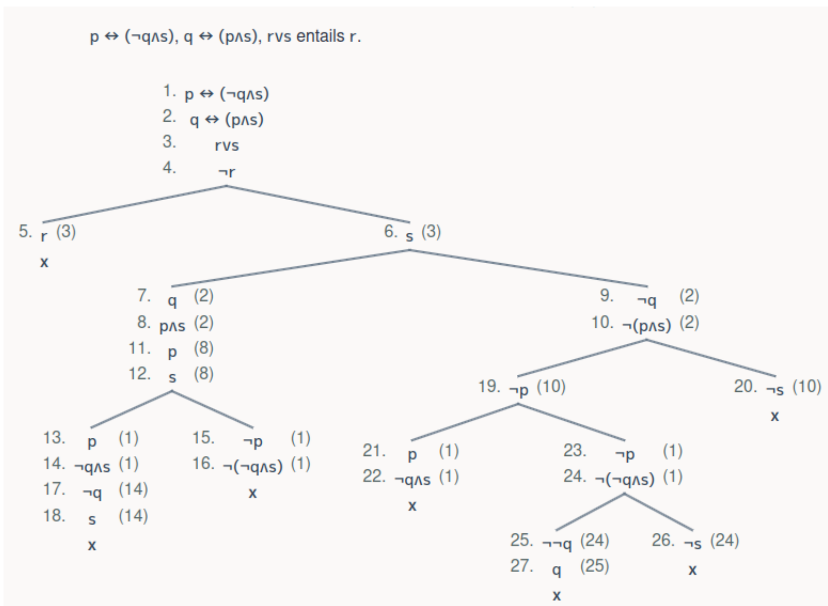

Figura 1: Demostración por Tableaux para r

2. Un crimen es cometido por una y solamente una persona y hay cuatro sospechosos: Paulo, Rodrigo, Enrique y Felipe. Interrogados ellos hacen las siguientes declaraciones:

   - **Felipe:** Rodrigo miente cuando dice que yo no soy inocente.
   - **Paulo:** Rodrigo no es inocente.
   - **Enrique:** Yo soy inocente.
   - **Rodrigo:** Felipe no es inocente.

   Represente en lógica proposicional las sentencias arriba. Con base en estas sentencias lógicas, muestre que si el inspector usa Tableaux irá a concluir que si Enrique fuera culpable entonces solamente Felipe dice la verdad. Muestre el Tableaux que soporta la conclusión del inspector.

   Solución

   - f: Felipe dice la verdad
   - r: Rodrigo dice la verdad
   - e: Enrique dice la verdad
   - p: Paulo dice la verdad

- a: Felipe es inocente
- b: Rodrigo es inocente
- c: Enrique es inocente
- d: Paulo es inocente

Proposiciones

$$\neg a \rightarrow (b \wedge c \wedge d), \neg b \rightarrow (a \wedge c \wedge d), \neg c \rightarrow (b \wedge a \wedge d), \neg d \rightarrow (b \wedge c \wedge a),$$
$$f \Leftrightarrow \neg r \wedge a, p \Leftrightarrow \neg b, e \Leftrightarrow c, r \Leftrightarrow \neg a \models \neg c \rightarrow (\neg r \wedge a) \tag{3}$$

Tableaux de la conclusión del inspector dando como resultado una **Tautología**

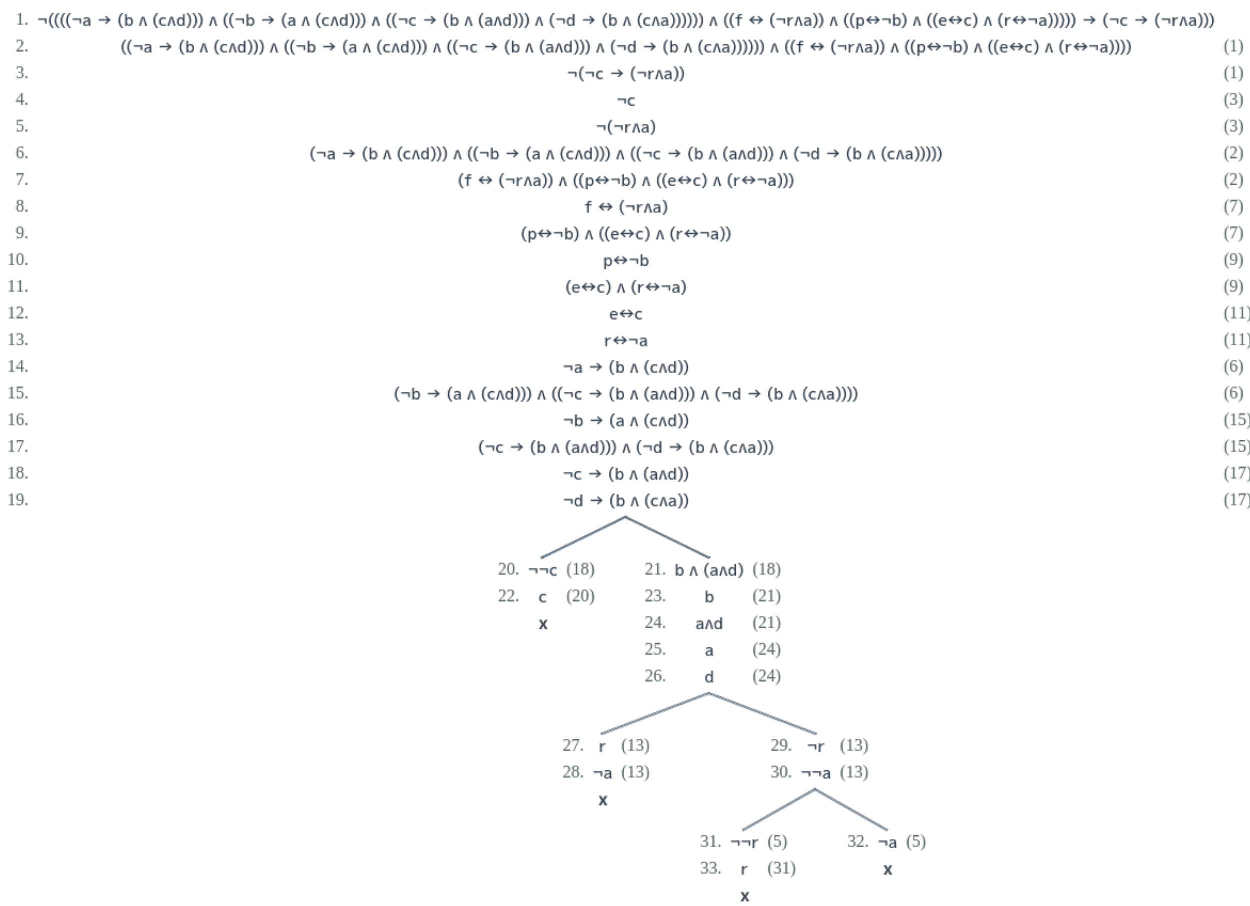

Figura 2: Demostracion por Tableaux

3. Considere las siguientes informaciones:

   - Si el profesor tomara un examen, entonces los alumnos van bien o mal en el examen.
   - Si los alumnos fueren bien, entonces el profesor va a pensar que el examen estaba fácil y quedará frustrado.

- Si los alumnos fueren mal, entonces el profesor va a pensar que los alumnos no aprendieron nada de lógica y quedará frustrado.

Queremos saber si podemos, a partir del texto, concluir que:

a) Si el profesor tomara un examen, entonces el profesor quedará frustrado.

b) Si el profesor no tomara un examen, entonces el profesor no quedará frustrado.

Declaración de las variables para formar las premisas:

P. Profesor toma el examen
F. Profesor frustrado
A: Alumnos dan bien el examen
L: Alumnos aprenden logica
E: Examen facil

$$P \to (A \vee \neg A), A \to (E \wedge F), \neg A \to (\neg L \wedge F)$$

$$Conclusiones$$

$$P \to F$$

$$\neg P \to \neg F$$

$$Tableux$$

$$P \to (A \vee \neg A), A \to (E \wedge F), \neg A \to (\neg L \wedge F) \models P \to F$$

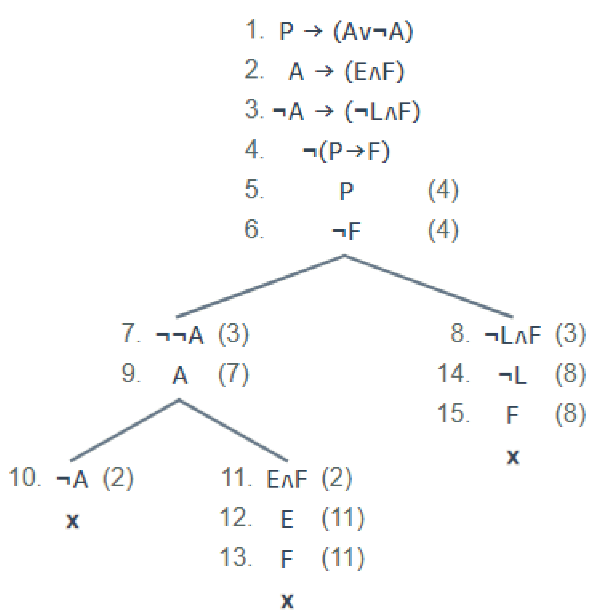

Figura 3: Demostración Tableaux, llegando a la conclusión que **el profesor toma el examen entoces el profesor quedará frustrado**

4. Muestre que el conjunto de conectivos $\{\neg, \vee\}$ es completo. O sea, presente fórmulas φ y ψ conteniendo apenas los conectivos '$\neg$' y '$\vee$' tales que $\varphi \equiv \alpha \wedge \beta$ y $\psi \equiv \alpha \to \beta$. Justifique su respuesta usando tableaux.

$$\begin{array}{cc} Conectivos\,\{\neg\ ,\vee\} & \phi, \psi\, deben\, contener \\ \varphi \equiv \alpha \wedge \beta & \psi \equiv \alpha \to \beta \\ \varphi \equiv \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta) & \psi \equiv \neg\alpha \vee \beta \end{array}$$

$$Tableaux$$

$$\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta) \leftrightarrow \alpha \wedge \beta \qquad\qquad \neg\alpha \vee \beta \leftrightarrow \alpha \to \beta$$

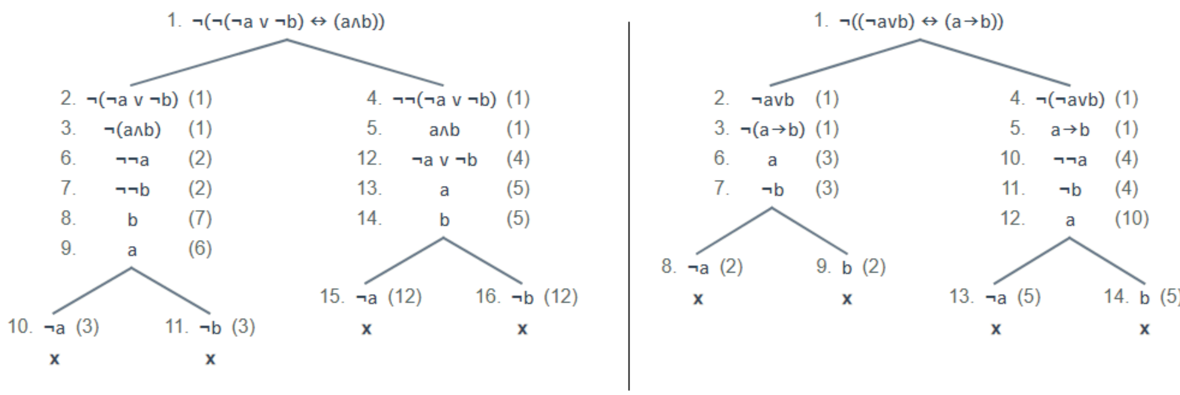

Figura 4: Demostración Tableaux con los cambios de los conectores '$\neg$' y '$\vee$' **si cierran**, por lo tanto **si son válidos**

5. Sea '$|$' (léase "nand") un conectivo binario tal que $\alpha|\beta \equiv \neg(\alpha \wedge \beta)$. Muestre que el conjunto $\{|\}$ conteniendo apenas ese conectivo es completo. O sea, presente fórmulas $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ conteniendo apenas el conectivo '$|$' tales que $\varphi_1 \equiv \neg\alpha, \varphi_2 \equiv \alpha \wedge \beta, \varphi_3 \equiv \alpha \vee \beta$ y $\varphi_4 \equiv \alpha \to \beta$. Justifique su respuesta usando tableaux.

   a) $\varphi_1 \equiv \neg\alpha$, para completar la forma del conectivo nand, se utiliza la ley de idempotencia para que pueda aplicarse sobre la fórmula, $\alpha \wedge \alpha \equiv \alpha$, luego negando $\neg(\alpha \wedge \alpha) \equiv \neg(\alpha)$, quedando de la siguiente forma , ver figura 5

$$\varphi_1 \equiv \alpha|\alpha \equiv \neg(\alpha \wedge \alpha) \tag{4}$$

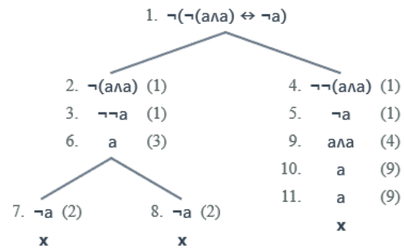

Figura 5: Demostrando por Tableaux la premisa $\varphi_1 \equiv \neg\alpha$

b) $\varphi_2 \equiv \alpha \wedge \beta$, en este caso se interpreta recursivamente a ambas variables, α y β, para igualar a la formula de nand, la primera forma obedece a la negación de la conjunción $(\neg(\alpha \wedge \beta))$ y la segunda de la misma manera, para continuar con la recursión se aplica hacia arriba.

$$\varphi_2 \equiv (\alpha|\beta)|(\alpha|\beta) \equiv \neg(\neg(\alpha \wedge \beta) \wedge \neg(\alpha \wedge \beta)) \tag{5}$$

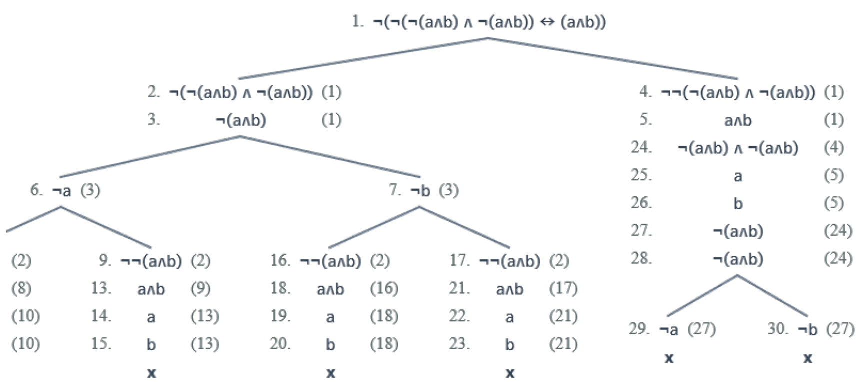

Figura 6: Demostrando por Tableaux la premisa $\varphi_2 \equiv \alpha \wedge \beta$

c) $\varphi_3 \equiv \alpha \vee \beta$, para el caso de la disyunción aplicando la propiedad de equivalencia a la conjunción se aplica lo siguiente $\alpha \vee \beta \equiv \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)$ e igualmente realizando recursivamente la resolución de llamada al operador nand, empezando por resolver la negación tanto en α como en β y siguiendo con la conjunción al finalizar, ver figura 7.

$$\varphi_3 \equiv (\alpha|\alpha)|(\beta|\beta) \equiv \neg(\neg(\alpha \wedge \alpha) \wedge \neg(\beta \wedge \beta)) \tag{6}$$

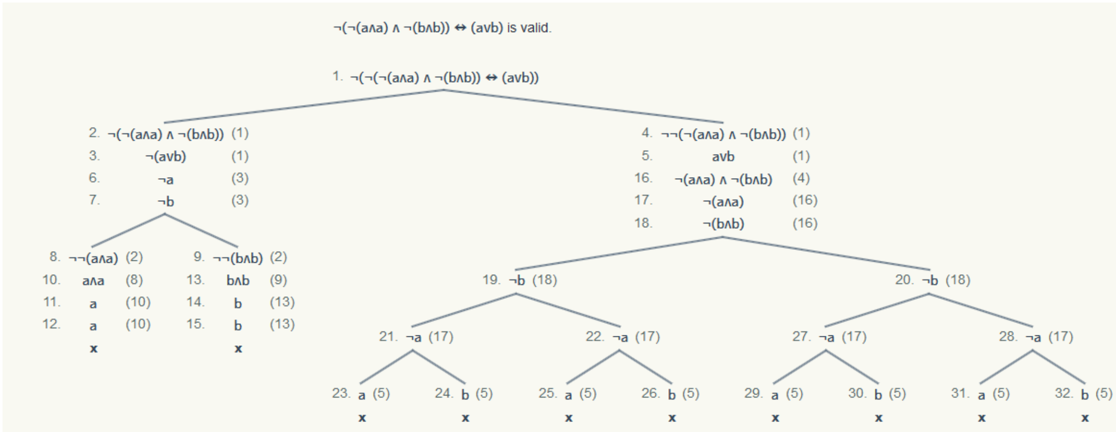

Figura 7: Demostrando por Tableaux la premisa $\varphi_3 \equiv \alpha \vee \beta$

d) $\varphi 4_{\equiv}\alpha \rightarrow \beta$, previamente para la resolución igualemente aplicando la equivalencia con la disyunción se aplica $\alpha \rightarrow \beta \equiv \neg\alpha \vee \beta$ luego al igual que en φ_3 se aplica la equivalencia de la conjunción sin aun aplicar la ley de doble negación para continuar con la resolución $\neg(\neg\alpha) \wedge \beta$, finalmente resolviendo por recursión se aplica hacia las variables negadas $\neg(\neg\alpha \wedge \neg\alpha) \wedge \neg(\beta \wedge \beta))$ finalmente la propiedad de idempotencia y recursión nuevamente.
$\neg(\neg(\neg(\alpha \wedge \alpha) \wedge \neg(\alpha \wedge \alpha)) \wedge \neg(\beta \wedge \beta))$, quedando de la siguiente forma, ver figura 8

$$\varphi 4 \equiv ((\alpha|\alpha)|(\alpha|\alpha))|(\beta|\beta) \equiv \neg(\neg(\neg(\alpha \wedge \alpha) \wedge \neg(\alpha \wedge \alpha)) \wedge \neg(\beta \wedge \beta)) \tag{7}$$

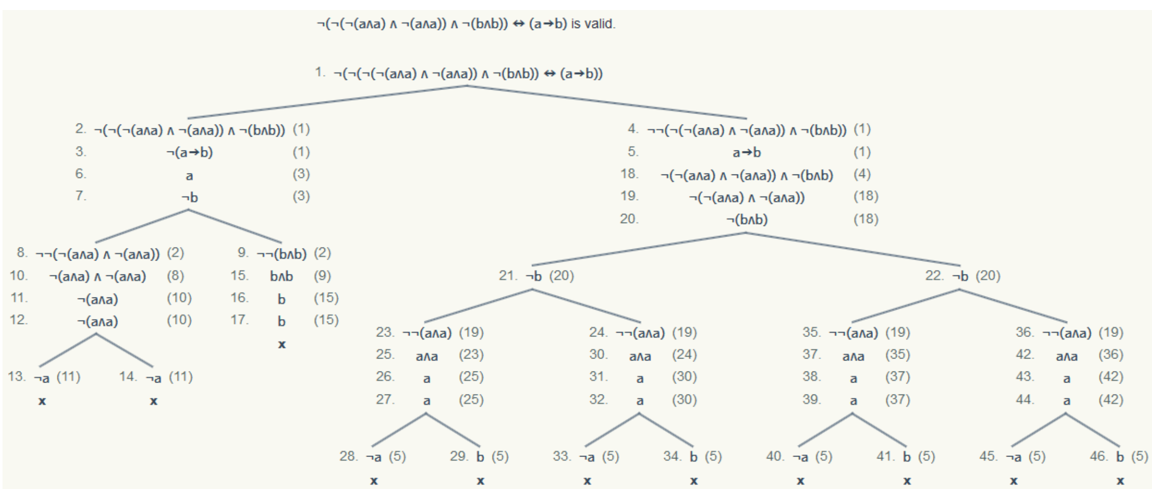

Figura 8: Demostrando por Tableaux la premisa $\varphi_4 \equiv \alpha \rightarrow \beta$

6. Presente posibles reglas de Tableaux para el conectivo nand (|) del ejercicio anterior.

   - Tomando la resolución de la operación $\alpha|\beta \equiv \neg(\alpha \wedge \beta)$ deberíamos tener en cuenta dos casos principales, primero la resolución de cuando es verdadera, ver figura 9

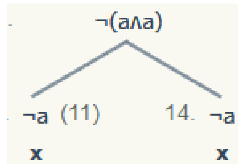

Figura 9: $V(\neg(\alpha \wedge \beta))$

- Y también de la resolución cuando es falsa, ver figura 10

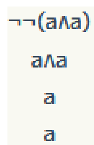

Figura 10: $F(\neg(\alpha \wedge \beta))$

Se puede concluir que:

$$\frac{V(\alpha|\beta)}{F(\alpha)|F(\beta)} \quad \frac{F(\alpha|\beta)}{\begin{array}{c} V(\alpha) \\ V(\beta) \end{array}} \tag{8}$$

7. Deduzca, por el método de Deducción Natural, si $\neg P \to Q$ es consecuencia lógica del conjunto de proposiciones: $\{P \vee (Y \to X), X \to Z, (Y \to Z) \to Q\}$. Se uso como referencia para la deducción natural Huth and Ryan (2004), llegando a concluir y cerrando cada nueva premisa.

   - Proposiciones:

$$\begin{aligned} P \vee (Y \to X) \\ (X \to Z) \\ ((Y \to Z) \to Q) \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{array}{c}
\dfrac{[\neg P]^1 \qquad (P \vee (Y \to X))}{Y \to X}\ \text{Modus Tollendo Ponens} \\
\dfrac{[Y]^2\ Y \to X}{X\ (X \to Z)}\ \text{Modus Ponendo Ponens} \\
\dfrac{}{Z}\ \text{Modus Ponendo Ponens} \\
\dfrac{}{[Y]^2 \to Z} \\
\dfrac{[Y]^2 \to Z\ ((Y \to Z) \to Q)}{Q}\ \text{Modus Ponendo Ponens} \\
\dfrac{}{\neg P \to Q}
\end{array}$$

8. Pruebe la sentencia abajo usando Deducción Natural
   $\{A \vee (B \wedge C), \neg E, (A \vee B) \to (D \vee E)), \neg A\} \vdash (C \wedge D)$

   - Propiedad Distributiva:

$$A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C) \tag{10}$$

$$
\dfrac{\text{modus tollendo ponens}\ \dfrac{\dfrac{\text{modus ponendo ponens}\ \dfrac{\dfrac{\dfrac{A \vee (B \wedge C)}{(A \vee B) \wedge (A \vee C)}}{(A \vee B)(A \vee B) \rightarrow (D \vee E)}}{(D \vee E)\neg E}}{\dfrac{\neg E(\neg D \rightarrow E)}{\neg E(\neg E \rightarrow D)}}}{D} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \vee (B \wedge C)}{(A \vee B) \wedge (A \vee C)}}{(A \vee C)\neg A}}{\neg A(\neg A \rightarrow C)}}{C}\ \text{modus tollendo ponens}}{C \wedge D}\ I\wedge
$$

9. Considere lo siguiente: "Si Beto pelea con Gloria, entonces Gloria va al cine. Si Gloria va a cine, entonces Carla se queda en casa. Si Carla se queda en casa, entonces Raúl pelea con Carla. Ahora, Raúl no pelea con Carla". Escriba un conjunto de fórmulas que describe el problema. Verifique cual de estas alternativas es consecuencia lógica de las fórmulas que especifican el problema. Use Deducción Natural para probar la consecuencia lógica.

   a) Carla no se queda en casa y Beto no pelea con Gloria.
   b) Carla se queda en casa y Gloria va al cine.
   c) Carla no se queda en casa y Gloria va al cine.
   d) Gloria va al cine y Beto pelea con Gloria.
   e) Gloria no va al cine y Beto pelea con Gloria.

   Solución

   - p: Beto pelea con Gloria.
   - q: Gloria va al cine.
   - r: Carla se queda en casa.
   - s: Raúl pelea con Carla.

   a) Carla no se queda en casa y Beto no pelea con Gloria.

$$\{p \rightarrow q, q \rightarrow r, r \rightarrow s, \neg s\} \models \neg r \wedge \neg p \tag{11}$$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg p}{\neg p\ \neg r}\ I\wedge}{\neg r \wedge \neg p}}{}
\quad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{r \rightarrow s \qquad \neg s}{\neg r}}{(q \rightarrow r)\ \neg r}\ \text{Tollendo Tollens}}{(p \rightarrow q)\ \neg q}\ \text{Tollendo Tollens}}{\neg p}\ \text{Tollendo Tollens}
$$

   b) Carla se queda en casa y Gloria va al cine.

$$\{p \rightarrow q, q \rightarrow r, r \rightarrow s, \neg s\} \models r \wedge q \tag{12}$$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{r \rightarrow s \qquad \neg s}{\neg r} \qquad \dfrac{q \rightarrow r \qquad \neg r}{\neg q}}{\neg r\ \neg q \vdash \neg r \wedge \neg q}}{r\ q \vdash r \wedge q}\ \text{Contradiccion en } r \text{ y } q
$$

c) Carla no se queda en casa y Gloria va al cine.

$$\{p \to q, q \to r, r \to s, \neg s\} \models \neg r \wedge q \tag{13}$$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{r \to s \qquad \neg s}{\neg r} \qquad \cfrac{q \to r \qquad \neg r}{\neg q}}{\neg r \ \neg q \vdash \neg r \wedge \neg q}}{\neg r \ q \vdash \neg r \wedge q}\ \text{Contradiccion en } q$$

d) Gloria va al cine y Beto pelea con Gloria.

$$\{p \to q, q \to r, r \to s, \neg s\} \models q \wedge p \tag{14}$$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{[p]^1 \qquad p \to q}{q \ q \to r}\ \text{Modus Ponendo Ponens}}{r \ r \to s}\ \text{Modus Ponendo Ponens}}{s \ \neg s}\ \text{Modus Ponendo Ponens}}{\perp \ r}\ I\wedge}{\neg r}\ \text{Absurdo}}{q \wedge [p]^1}$$

e) Gloria no va al cine y Beto pelea con Gloria.

$$\{p \to q, q \to r, r \to s, \neg s\} \models \neg q \wedge p \tag{15}$$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{[p]^1 \qquad p \to q}{q \ q \to r}\ \text{Modus Ponendo Ponens}}{r \ r \to s}\ \text{Modus Ponendo Ponens}}{s \ \neg s}\ \text{Modus Ponendo Ponens}}{\perp \ q}\ I\wedge}{\neg q \wedge [p]^1}\ \text{Absurdo}$$

Concluyendo que solamente en (*a*) **Carla no se queda en casa y Beto no pelea con Gloria**, concluye y finaliza las premisas.

Referencias

M. Huth and M. Ryan, *Logic in Computer Science: Modelling and reasoning about systems.* Cambridge university press, 2004.