Práctica 02

DOCENTE	CARRERA	CURSO
Marcela Quispe Cruz	Maestría en Ciencia de la Computación	Teoría de la Computación

PRÁCTICA	TEMA	DURACIÓN
02	Lógica de Primer Orden	3 horas

1. Datos de los estudiantes

- Grupo: 9
- Integrantes:
  - Abarca Murillo, Jhonatan Piero
  - Apari Pinto, Christian Timoteo
  - Suca Velando, Christian Anthony
  - Vargas Zuni, Arturo

2. Ejercicios

1. Considere el lenguaje $\mathscr{L} = \langle R^1, a^0, b^0, F^2 \rangle$ en que:

   R es una relación;
   a y b son constante;
   F es una función;

   a) Haga lo que se pide , todas las definiciones de términos, fórmulas bien formadas y estructuras, están directamente basadas en la definición de la sintaxis y semántica de la lógica de primer orden en base al universo de discurso [1]:

   1) Escriba 4 términos de ese lenguaje.
      - Variables: $t_1 = x$
      - Constantes $t_2 = a, t_3 = b$
      - Funciones $t_4 = f(f(a, b), a)$
   2) Escriba 3 fórmulas sin utilizar constantes.
      - $\varphi_1 := \forall x \forall y \exists z((z = s(x, y) \wedge R(x) \wedge R(y)) \rightarrow R(z))$
      - $\varphi_2 := \forall x \forall y \forall z((z = s(x, y) \wedge R(x) \wedge R(y)) \rightarrow R(z))$
      - $\varphi_3 := \exists x \exists y((z = s(x, y) \wedge \neg R(x) \wedge \neg R(y)) \rightarrow R(z))$
   3) Escriba 3 fórmulas utilizando apenas constantes.
      - $\varphi_1 := \exists x(R(f(a, x)))$
      - $\varphi_2 := \neg \exists x(R(x) \wedge \neg R(x))$
      - $\varphi_3 := \exists x(R(b) \vee \neg R(x))$

   b) Presente una estructura para $\mathscr{L}$ y diga cuáles fórmulas definidas en el ítem anterior son verdaderas y cuáles son falsas.

$\langle|\mathfrak{A}|$ = números naturales,
$R^{\mathfrak{A}}$ = es número natural,
$f^{\mathfrak{A}}$ = la función suma x + y,
$a^{\mathfrak{A}}$ = a,
$b^{\mathfrak{A}}$ = b$\rangle$

Solución

- $(V) = \forall x \forall y \exists z((z = f(x,y) \land R(x) \land R(y)) \to R(z))$
- $(F) = \forall x \forall y \forall z((z = f(x,y) \land R(x) \land R(y)) \to R(z))$
- $(F) = \exists x \exists y((z = f(x,y) \land \neg R(x) \land \neg R(y)) \to R(z))$
- $(F) = \exists x(R(f(a,x)))$
- $(V) = \neg \exists x(R(x) \land \neg R(x))$
- $(V) = \exists x(R(b) \lor \neg R(x))$

2. Dado el lenguaje $\mathscr{L} = \langle <^2, s^1, +^2, \times^2, 0^0 \rangle$ considere la siguiente estructura:

$\langle|\mathfrak{A}|$= números naturales,
$<^{\mathfrak{A}}$,= la relación menor que,
$s^{\mathfrak{A}}$= la función sucesor, es decir, $s(x) = x + 1$,
$+^{\mathfrak{A}}$= la función suma,
$\times^{\mathfrak{A}}$= la función producto,
$0^{\mathfrak{A}}$= el número cero$\rangle$

a) Traduzca para el lenguaje de $\mathfrak{A}$:

1) $2 + 2 = 4$ Usaremos los términos definidos en $\mathscr{L}$ el número cero y las función sucesor:

$$+(s(s(0)), s(s(0))) = s(s(s(s(0))))$$

2) Cero es el único número que no es sucesor de ningún número.

$$\neg \exists x[x = s(0)]$$

3) No existe un número mayor que todos los otros.

$$\neg \exists x \forall y(\neg x = y \to < (y,x))$$

4) Todo número par mayor que 2 puede ser escrito como la suma de dos primos.

Primero definimos un número primo es aquel que tiene dos divisores (a si mismo y uno) estos no son iguales y es representado dentro de los números naturales y también definimos función divisible.

$Divisible(x,y) \equiv \exists z[x = \times(z,y)]$

$Primo(x) = \exists y \exists z(Divisible(x,y) \land Divisible(x,z) \land \neg y = x \land \forall w(Divisible(x,w) \to y = w \lor z = w))$

También definimos la relación es par: Todo número par debe ser múltiplo 2 ó es la suma de alguno numero natural por si mismo. (que es lo mismo que sumar 2 veces (obviando el cero como par))

$Par(x) \equiv \exists y(x = +(y, y))$

Ahora traduciendo la sentencia: Todo número par mayor que 2 puede ser escrito como la suma de dos primos.

$\therefore \forall x((Par(x) \wedge < (s(s(0)), x)) \rightarrow \exists y \exists z(Primo(y) \wedge Primo(z) \wedge x = +(y, z)))$

5) Todo cuadrado perfecto par es divisible por 4.

Un cuadrado perfecto es resultado del cuadrado de algún otro numero natural, en otras palabras es el doble de cualquier numero por si mismo (y no todos los cuadrados perfectos de los número natural son pares, solo algunos).
$CuadPerf(x) \equiv \exists y[x = \times(y, y)]$

También definimos la función divisible nuevamente
$Divisible(x, y) \equiv \exists z[x = \times(z, y)]$

Traduciendo Todo cuadrado perfecto par es divisible por 4.

$\therefore \forall x(CuadPerf(x) \rightarrow Divisible(x, s(s(s(s(0))))))$

b) Verifique si es verdadero o falso, justificando:

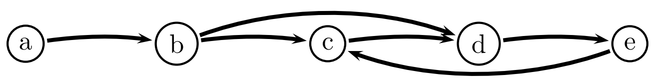
1) $\forall x \exists y(+(x, y) = x \wedge \forall z(+(x, z) = x \rightarrow z = y))$
Resp. Verdadero
Y toma un valor de cero y que es el elemento neutral de la suma haciendo para todos los casos dé el mismo número.
$+(1, 0) = 1 \wedge +(1, 0) = 1 \rightarrow z = y = 0$
2) $\forall x \exists y(+(x, y) = \times(x, y))$
Resp. Falso
Si a un determinado valor x le sumamos un valor y y realizamos la misma operación con las mismas variables en la multiplicación, es imposible que estos sean equivalentes ya que por ejemplo $x = 7$ y $y = 3$ dará 10 y multiplicado dará 21.
3) $\forall x \forall y \forall z((x < y \rightarrow y < z) \rightarrow x < z)$
Resp. Verdadero
$\forall x \forall y \forall z(< (x, y) \wedge < (y, z) \rightarrow < (x, z)$
Sea:
S(x) = x+1 = y
S(x+1) = (x+1+1) = z
se puede deducir que:
$(< (x, x + 1) \wedge < (x + 1, x + 2)) \rightarrow < (x, x + 2)$
$(V) \wedge (V) \rightarrow (V)$
$(V1)$
4) $\forall x \forall y \forall z((x < \times(y, z)) \rightarrow (x < y \vee x < z))$
Resp. Falso
$\forall x \forall y \forall z(< (x, \times(y, z)) \rightarrow (< (x, y) \vee < (x, z)))$
Para este caso se toman los siguientes valores:
x = 4, y = 3, z = 2
Entonces
$(< (4, \times(3, 2)) \rightarrow (< (4, 3) \vee < (4, 2)))$
$(V) \rightarrow (F) \vee (F)$

(F)
No satisface

3. Escriba una sentencia en lógica de primer orden que diferencie las estructuras abajo, es decir, una sentencia que sea válida en una estructura y no sea válida en la otra:

   a) $G_1 = \langle \{a, b, c, d, e\}, \{(a, b), (b, c), (b, d), (d, e), (e, c), (c, d)\} \rangle$

$$\begin{aligned} \mathscr{L} &= \langle ; ; f^1 \rangle \\ |A| &= \langle a, b, c, d, e \rangle \\ (f^A) &= \langle (a, b), (b, c), (b, d), (d, e), (e, c), (c, d) \rangle \end{aligned} \tag{1}$$



   No existe un vértice que llegue a si mismo

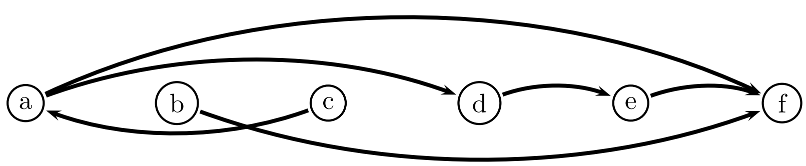
$$\exists k(f(k) = k) \Rightarrow F$$

   Desde cualquier vértice se puede llegar al vértice e

$$\forall k(f(k) = e) \Rightarrow V$$

   b) $G_2 = \langle \{a, b, c, d, e, f\}, \{(c, a), (a, d), (a, f), (b, f), (e, f), (d, e)\} \rangle$

$$\begin{aligned} \mathscr{L} &= \langle ; ; f^1 \rangle \\ |A| &= \langle a, b, c, d, e, f \rangle \\ (f^A) &= \langle (c, a), (a, d), (a, f), (b, f), (e, f), (d, e) \rangle \end{aligned} \tag{2}$$



   Desde cualquier vértice se puede llegar al vértice f

$$\forall x(f(x) = \mathrm{f}) \Rightarrow V$$

   Ningun nodo llega al vertice c

$$\forall k(f(k) = c) \Rightarrow F$$

4. Verifique si los siguientes items son verdaderos o falsos. Justifique a través de tableaux, se utilizo el paquete de representacion de Tablas Logicas de [2].

a) $\forall x \forall y(L(x,y) \rightarrow x = y) \models \forall x L(x,x))$

1.	$F(\forall x \forall y(L(x,y) \rightarrow x = y) \models \forall x L(x,x)))$ ✓1	condicional
2.	$V(\forall x \forall y(L(x,y) \rightarrow x = y))$ ✓4	
3.	$F(\forall x L(x,x)))$ ✓2 $\backslash a$	
4.	$F(L(a,y))$ ✓3	3 $\forall$E
5.	$V(\forall y(L(a,y) \rightarrow a = y))$ ✓5 $\backslash b$	
6.	$V(L(a,b) \rightarrow a = b)$	5 cuaquiera b
7.	$F(L(a,b))$ $\quad$ $V(a = b)$	6 reutiliza
8.	$L(a,b)$ $\quad$ $V(a = c)$	7 seguira tomando cualquiera c
9.	$\vdots$	8 indeterminado
10.	$F(L(a,c))$	7 seguira tomando cualquiera c
11.	$\vdots$	10 indeterminado

b) Es tautología

$\forall x \forall y((x = y \wedge R(x,y)) \rightarrow R(x,x))$

1.	$F(\forall x \forall y((x = y \wedge R(x,y)) \rightarrow R(x,x)))$ ✓1 $\backslash a$	nuevo termino a
2.	$F(\forall y((a = y \wedge R(a,y)) \rightarrow R(a,a)))$ ✓2	
3.	$V(\forall y((a = y \wedge R(a,y))))$ ✓3 $\backslash b$	2 cualquier valor b $\exists$E
4.	$F(R(a,a))$	
5.	$V(a = b \wedge R(a,b))$ ✓4	3 tomar cualquier valor b
6.	$V(a = b)$	ambos iguales
7.	$V(R(a,b))$	6 b puede ser a
8.	$V(R(a,a))$	4 es Tautología
	$\underset{4,8}{\otimes}$	

c) $\exists x(P(x) \rightarrow Q(x)) \models \exists x P(x) \rightarrow \exists x Q(x)$

1.	$F(\exists x(P(x) \rightarrow Q(x)) \models \exists x P(x) \rightarrow \exists x Q(x)$ ✓1	condicional
2.	$V(\exists x(P(x) \rightarrow Q(x))$	puede reutilizar
3.	$F(\exists x P(x) \rightarrow \exists x Q(x)$ ✓2	
4.	$F(\exists x P(x))$ ✓3	
5.	$V(\exists x Q(x)$ ✓4	
6.	$V(P(a))$ $\backslash a$	4 nuevo valor
7.	$F(Q(a))$ $\backslash a, b$ ✓5	5 cualquier valor
8.	$V(P(b) \rightarrow Q(b))$ $\backslash b$	2 $\exists$E
9.	$F(P(b))$ $\quad$ $V(Q(b))$	6 no cierra
10.	*invalido* $\quad$ $V(Q(a))$	
	$\underset{7,10}{\otimes}$	

Referencias

[1] M. Huth and M. Ryan, *Logic in Computer Science: Modelling and reasoning about systems.* Cambridge university press, 2004.

[2] C. F. Rees, "Prooftrees." `https://ctan.org/pkg/tikz-qtree`, 2019. [Package, based on forest, designed to support the typesetting of proof trees].