

# Práctica 03

DOCENTE	CARRERA	CURSO
Marcela Quispe Cruz	Maestría en Ciencia de la	Teoría de la Computación
	Computación	

PRÁCTICA	TEMA	DURACIÓN
03	Lenguajes de Libre Contexto	3 horas

# 1. Datos de los estudiantes

- Grupo: 9
- Integrantes:
  - Abarca Murillo, Jhonatan Piero
  - Apari Pinto, Christian Timoteo
  - Suca Velando, Christian Anthony
  - Vargas Zuni, Arturo

# 2. Ejercicios

# 2.1. Pregunta 1

Considere las siguiente gramáticas:

1. 
$$S \to AbS|a, A \to a$$

2. 
$$S \rightarrow Sa|AB, A \rightarrow aA|a, B \rightarrow b$$

3. 
$$S \rightarrow aS|b$$

4. 
$$S \rightarrow aS|aA, A \rightarrow bS|bA|\epsilon$$

5. 
$$S \rightarrow aSa|b$$

6. 
$$S \to aA|aS, A \to ab$$

7. 
$$S \to ASB|AB, A \to aA|\epsilon, B \to b$$

8. 
$$S \to Ab, A \to AA|a$$

9. 
$$S \to AS|b, A \to AA|a$$

Indique cual gramática corresponde a cada lenguaje abajo. Puede haber más de una o ninguna gramática para cada lenguaje.

(a) 
$$L_1: \{a^ib|i \ge 1\}$$
 ......  $\Box$  1  $\Box$  2  $\Box$  3  $\Box$  4  $\Box$  5  $\Box$  6  $\Box$  7  $\Box$  8  $\Box$  9

(c) 
$$L_3:\{a^ib|i\geq 2\}$$
 ......  $\square$  1  $\square$  2  $\square$  3  $\square$  4  $\square$  5  $\square$  6  $\square$  7  $\square$  8  $\square$  9

(d) 
$$L_4: \{a^iba^j|i\geq 1, j\geq 0\}$$
 ......  $\Box$  1  $\Box$  2  $\Box$  3  $\Box$  4  $\Box$  5  $\Box$  6  $\Box$  7  $\Box$  8  $\Box$  9



(f) $L_6: \{a^ib^j i \ge 0, j > 0\}$ $\Box$ 1 $\Box$ 2 $\Box$ 3 $\Box$ 4 $\Box$ 5 $\Box$ 6 $\boxtimes$ 7
--

(g) 
$$L_7: \{(ab)^i | i \ge 0\}$$
 ......  $\Box 1 \ \Box 2 \ \Box 3 \ \Box 4 \ \Box 5 \ \Box 6 \ \Box 7 \ \Box 8 \ \Box 9$ 

#### Resolución

### Parte 1 Representando lenguajes [Sipser(2013)]

(a) 
$$L_1: \{a^i b | i \ge 1\}$$

 $L_1: \{ab, aab, aaab, aaaab\}$ 

(b) 
$$L_2: \{(ab)^i a | i \geq 0\}$$

 $L_2: \{a, aba, ababa, abababa\}$ 

(c) 
$$L_3: \{a^i b | i \geq 2\}$$

 $L_3: \{aab, aaab, aaaab, aaaaab\}$ 

(d) 
$$L_4: \{a^iba^j|i\geq 1, j\geq 0\}$$

 $L_4: \{ab, aba, aaba, aabaa\}$ 

(e) 
$$L_5: \{a^i b | i \geq 0\}$$

 $L_5: \{b, ab, aab, aaab\}$ 

# (f) $L_6: \{a^i b^j | i \ge 0, j > 0\}$

 $L_6:\{b,ab,aab,abb\}$ 

# (g) $L_7: \{(ab)^i | i \geq 0\}$

 $L_7: \{\varepsilon, ab, abab, ababab\}$ 

#### Parte 2 Producción y Derivación de Gramáticas [Hopcroft and Ullman(1979)]

#### 1. $S \to AbS|a, A \to a$

 $\blacksquare L_2 : \{abababa\}$ 

Pruducción:  $S \to AbS, S \to AbS, S \to AbS, S \to AbS, A \to a, A \to a, A \to a, S \to a$ 

Derivación: S, AbS, AbAbS, AbAbAbS, abAbAbS, ababAbS, abababS, abababa

#### 2. $S \rightarrow Sa|AB, A \rightarrow aA|a, B \rightarrow b$

 $\blacksquare L_1: \{aaaab\}, L_3: \{aaaaab\}$ 

Pruducción:  $S \to AB$  ,  $A \to aA$  ,  $A \to aA$  ,  $A \to aA$  ,  $A \to a$  ,  $B \to b$ 

Derivación: AB, aAB, aaAB, aaaAB, aaaaB, aaaaB

 $\blacksquare L_4: \{aabaa\}$ 

Pruducción:  $S \to Sa$  ,  $S \to Sa$  ,  $S \to AB$  ,  $A \to aA$  ,  $A \to a$  ,  $B \to b$ 

Derivación: Sa , Saa , ABaa , aABaa , aaBaa , aabaa

### 3. $S \rightarrow aS|b$

•  $L_1: \{aaaab\}, L_3: \{aaaaab\}$ 

Pruducción:  $S \rightarrow aS$ ,  $S \rightarrow aS$ ,  $S \rightarrow aS$ ,  $S \rightarrow aS$ ,  $S \rightarrow b$ 

Derivación: aS , aaS , aaaS , aaaaS , aaaab

■  $L_5:\{b\}$ 

Pruducción:  $S \to b$ 

Derivación: b

4.  $S \to aS|aA, A \to bS|bA|\varepsilon$ 



- $L_1: \{aaaab\}, L_3: \{aaaaab\}$ Pruducción:  $S \to aS$ ,  $S \to aS$ ,  $S \to aS$ ,  $S \to aA$ ,  $A \to bA$ ,  $A \to \varepsilon$ Derivación: aS, aaS, aaaS, aaaaA, aaaabA, aaaab
- $L_2:\{abababa\}$ Pruducción:  $S \to aA$ ,  $A \to bS$ ,  $S \to aA$ ,  $A \to bS$ ,  $S \to aA$ ,  $A \to bS$ ,  $S \to aA$ ,  $A \to \varepsilon$ Derivación: aA, abS, abaA, ababS, ababaA, abababA, abababA, abababA
- $L_4: \{aabaa\}$ Pruducción:  $S \to aS$ ,  $S \to aA$ ,  $A \to bS$ ,  $S \to aS$ ,  $S \to aA$ ,  $A \to \varepsilon$ Derivación: aS, aaA, aabS, aabaaA, aabaaA, aabaa
- 5.  $S \rightarrow aSa|b$ 
  - Ninguno
- 6.  $S \to aA|aS, A \to ab$ 
  - $L_3:\{aaaaab\}$ Pruducción:  $S \to aS$ ,  $S \to aS$ ,  $S \to aS$ ,  $S \to aA$ ,  $A \to ab$ Derivación: aS, aaS, aaaS, aaaaA, aaaaab
- 7.  $S \to ASB|AB, A \to aA|\epsilon, B \to b$ 
  - $L_1: \{aaaab\}, L_3: \{aaaaab\}$ Pruducción:  $S \to AB$ ,  $A \to aA$ ,
  - $L_5: \{b\}$ Pruducción:  $S \to b$ Derivación: b
  - $L_6:\{abb\}$ Pruducción:  $S \to ASB$ ,  $A \to aA$ ,  $S \to AB$ ,  $A \to \lambda$ ,  $A \to \lambda$ ,  $B \to b$ ,  $B \to b$ Derivación: ASB, aASB, aAABB, aABB, aBB, abB, abb
- 8.  $S \to Ab, A \to AA|a$ 
  - $L_1:\{aaaab\}, L_3:\{aaaaab\}$ Pruducción:  $S \to Ab$ ,  $A \to AA$ ,  $A \to a$ ,  $A \to a$
- 9.  $S \to AS|b, A \to AA|a$ 
  - $L_1: \{aaaab\}, L_3: \{aaaaab\}$ Pruducción:  $S \to AS$ ,  $S \to AS$ ,  $A \to AA$ ,  $A \to AA$ ,  $S \to AS$ ,  $A \to a$ ,  $A \to a$
  - $L_5: \{b\}$ Pruducción:  $S \to b$ Derivación: b



# 2.2. Pregunta 2

Para cada lenguaje abajo, determine una gramática que la genere. Cuando no especificado, w es un string sobre el alfabeto  $\sum = \{a,b\}$  [Rodger(1993)]

(a)  $L = \{w|w \text{ posee la misma cantidad de ocurrencias de }a$ 's y de b's  $\}$ 

Gramática

- $\blacksquare$   $S \to SS$
- $S \rightarrow aSb|bSa|\varepsilon$

Derivación

Para los casos en donde se requiere que la cantidad de a y b's estan ubicados de manera seguida, se puede reusar la doble combinación de aSb.

$$S \Rightarrow_{lm} aSb$$

Para el caso donde se tiene recursivamente b's y a's de manera seguida

$$S \Rightarrow_{lm} bSa$$

Y para el caos en donde se requiera concatenacion de pares de ab's o ba's se usa la producción

$$S \Rightarrow_{lm} SS$$

Cadena con ubicación de a's seguidas de b's y b's y a's seguidas bbbaaabbbaaa				
Producción	Derivación	Árbol		
Inicio  o S	S			
$S \rightarrow bSa$	bSa	(5) (a)		
$S \rightarrow bSa$	b bSa a	b		
$S \rightarrow bSa$	bb bSa aa	b		
$S \rightarrow aSb$	bbb aSb aaa	a 9 b		
$A \rightarrow aSb$	bbba aSb baaa	(a) (b)		
$A \rightarrow aSb$	bbbaa aSb bbaaa	<u> </u>		
S  o arepsilon	bbbaaabbbaaa			
Cadena con ubicación de $ba$	Cadena con ubicación de $ba$ 's concatenada con $a$ 's seguidas de $b$ 's externamente : aabababb			
Producción	Derivación	Árbol		
$Inicio \rightarrow S$	S			
S  o aSb	aSb	9		
S  o aSb	aaSbb S	a 5		
$S \rightarrow bSa$	aabSabb			
$S \rightarrow aSb$	aabaSbabb			
S  o arepsilon	aabababb			



Cadena con ubicación de $ab$ 's concatenada con $ba$ 's en los extremos : baababba		
Producción	Derivación	Árbol
$\begin{array}{l} Inicio \rightarrow S \\ S \rightarrow bSa \\ S \rightarrow aSb \\ S \rightarrow aSb \\ S \rightarrow bSa \\ S \rightarrow \varepsilon \end{array}$	S bSa baSba S baaSbba baabSabba baababba	
$S \to \varepsilon$	baababba	<b>(</b> )

(b)  $L = \{w | \text{ el tamaño de } w \text{ es impar y el símbolo del medio es } a\}$ 

Gramática

- $\blacksquare S \rightarrow ASA \mid a$
- $\blacksquare A \rightarrow a \mid b$

Derivación

Para los casos mas pequeños por ejempo decir que la ocurrencia impar tambien puede ser tomado como el unico valor permitido a.

$$S \Rightarrow_{lm} a$$

Igualmente para el caso de tener solo b's

$$S \Rightarrow_{lm} ASA \Rightarrow_{lm} bSA \Rightarrow_{lm} baA \Rightarrow_{lm} bab$$

Igualmente para el caso de tener solo a's

$$S \Rightarrow_{lm} ASA \Rightarrow_{lm} aSA \Rightarrow_{lm} aaA \Rightarrow_{lm} aaa$$

O ambos

$$S \Rightarrow_{lm} ASA \Rightarrow_{lm} aSA \Rightarrow_{lm} aaA \Rightarrow_{lm} aab$$

Cadena con cualquier	r cantidad de a's y b's: abbabba	
Producción	Derivación	
$Inicio \rightarrow S$	S	
$S \to ASA$	ASA	_
$S \to ASA$	AASAA	S
$S \to ASA$	AAASAAA	
$A \rightarrow a$	aAASAAA	
$A \rightarrow b$	abASAAA	S
$A \rightarrow b$	abbSAAA	
$S \rightarrow a$	abbaAAA	(A) (A) (S) (A) (A) (A)
$A \rightarrow b$	abbabAA	
$A \rightarrow b$	abbabbA	
$A \rightarrow a$	abbabbb	



Cadena con a's y b's	en cada lado: bbaaa	
Producción	Derivación	
Inicio  o S	S	
$S \to ASA$	ASA	
$S \to ASA$	AASAA	
$A \rightarrow b$	bASAA	
$A \rightarrow b$	bbSAA	
$S \rightarrow a$	bbaAA	(A) (A) (S) (A) (A)
$A \rightarrow a$	bbaaA	
$A \rightarrow a$	bbaaa	(b) (b) (a) (a)

Cadena grande de a's	y $b$ 's: aabbbabbaaa	
Producción	Derivación	
$Inicio \rightarrow S$	S	
$S \to ASA$	ASA	
$S \to ASA$	AASAA	
$S \to ASA$	AAASAAA	
$S \to ASA$	AAAASAAAA	S
$S \to ASA$	AAAAASAAAAA	
$A \rightarrow a$	aAAAASAAAA	
$A \rightarrow a$	aaAAASAAAA	S
$A \rightarrow b$	aabAASAAAA	S
$A \rightarrow b$	aabbASAAAA	
$A \rightarrow b$	aabbbSAAAA	
$S \to a$	aabbbaAAAA	
$A \rightarrow b$	aabbbabAAAA	
$A \rightarrow b$	aabbbabbAAA	
$A \rightarrow a$	aabbbabbaAA	
$A \rightarrow a$	aabbbabbaaA	
$A \rightarrow a$	aabbbabbaa	

(c)  $L = \{w|w \text{ posee, máximo, 2 ocurrencias de }a\}$ 

### Gramática

- $\blacksquare S \rightarrow \epsilon \mid BXBXB$
- $\blacksquare B \rightarrow Bb \mid \epsilon$
- $\blacksquare X \rightarrow a \mid \epsilon$

Derivación



	Cadena co	n dos a's: babba
Producción	Derivación	Árbol
$S \rightarrow BXBXB$ $B \rightarrow Bb$ $B \rightarrow Bb$ $B \rightarrow \epsilon$ $X \rightarrow a$ $B \rightarrow \epsilon$ $X \rightarrow a$ $B \rightarrow \epsilon$	BXBXB BXBbXB BbXBbbXB BbXBbbXB bXBbbXB baBbbXB babbAB babbAB	B b & B b & B

Cadena con una a: bbbbab		
Producción	Derivación	Árbol
$S \rightarrow BXBXB$ $B \rightarrow Bb$ $B \rightarrow Bb$ $B \rightarrow Bb$ $B \rightarrow Bb$ $B \rightarrow \epsilon$ $X \rightarrow \epsilon$ $B \rightarrow \epsilon$ $X \rightarrow a$ $B \rightarrow \epsilon$	BXBXB BbXBXB BbXBbXB BbbXBbbXB BbbXBbbXB	B b B b B b A A A A A A
	Cadena sin 1	ninguna a's: bbb
Producción	Derivación	Árbol
$S \rightarrow BXBXB$ $B \rightarrow Bb$ $B \rightarrow Bb$ $B \rightarrow \epsilon$ $X \rightarrow \epsilon$ $B \rightarrow \epsilon$ $X \rightarrow \epsilon$ $B \rightarrow \epsilon$ $A \rightarrow \epsilon$ $B \rightarrow \epsilon$	BXBXB BbXBXB BbXBbXBb bXBbXBb bBbXBb bbXBb bbXBb	B b X B b X B b



(d)  $L = \{a^n b^m c^m d^n | n \ge 0 \text{ e } m > 0\}$ 

Gramática

- $\blacksquare G \to MbIcN$
- $\quad \blacksquare \ I \to bIc|\varepsilon$
- $lacksquare M \to aM|arepsilon$
- $N \to dN | \varepsilon$

Derivación

Para el caso en que sol puede ser b y c's siendo a's y d's ceros

$$I \Rightarrow_{lm} bIc|\varepsilon$$

Para el caso en donde puede haber almenos b y c's y varios casos de a y d's respetando la posicion

$$G \Rightarrow_{lm} MIN$$

Y para el caso en donde se requiere varias veces las a y d's

$$M \Rightarrow_{lm} aM | \varepsilon N \Rightarrow_{lm} dN | \varepsilon$$

Cadena con solo las letras $b$ y $c$ sin contar con $a$ y $d$ bbbccc		
Producción	Derivación	Árbol
Inicio  ightarrow G	G	
$G \rightarrow MbIcN$	MbIcN	<b>b</b>
$I \rightarrow bIc$	MbbIccN	6
$I \rightarrow bIc$	MbbbIcccN	
$M \to \varepsilon$	bbbIcccN	
$I \to \varepsilon$	bbbcccN	
$N  o \varepsilon$	bbbccc	
Cadena con ubicación de b'	s y c's seguidas concatenado con a's	s y d al extremo : abbbcccd
Producción	Derivación	Árbol
Inicio  ightarrow G	G	
$G \to MbIcN$	MbIcN	_
$I \rightarrow bIc$	MbcIccN S	0
$M \to aM$	aMbcIccN	В
$I \rightarrow bIc$	aMbbbIcccN	
N  o dN	aMbbbIcccdN	(a) (b) (b) (c) (d) (N)
$M  o \varepsilon$	abbbIcccdN	<b>A A</b>
$I  o \varepsilon$	abbbcccdN	
$N  o \varepsilon$	abbbcccd	



Cadena con ubicación unica $b'$ y $c'$ concatenado con $a$ 's y $d$ 'c al extremo: aaabcddd		
Producción	Derivación	Árbol
Inicio  o G	G	
G  o MbIcN	MbIcN	
$M \to aM$	aMbIcN S	6
$N \to dN$	aMbIcdN	(h) (c) (d)
$M \to aM$	aaMbIcdN	a M d N
$N \to dN$	aaMbIcddN	o M d N
$M \to aM$	aaaMbIcddN	<b>a w a a</b>
$N \to dN$	aaaMbIcdddN	(A) (A)
M  o arepsilon	aaabIcdddN	
$I \to \varepsilon$	aaabcdddN	
$N  o \varepsilon$	aaabcddd	

- (e)  $L=\{a^nb^m|0\leq n\leq m\leq 2n\}$ Gramática
  - $\blacksquare S \rightarrow \epsilon \mid aSR$
  - $\blacksquare R \rightarrow bb \mid b$

### Derivación

Cadena con $m = n : ab$		
Producción	Derivación	Árbol
$S \to aSR$ $S \to \epsilon$ $R \to b$	aSR aR ab	a S R

Cadena con $m > n$ : aabbb		
Producción	Derivación	Árbol
$S  o aSR$ $S  o aSR$ $S  o \epsilon$ $R  o bb$ $R  o b$	aSR aaSRR aaRR aabbR aabbb	a S R R



Cadena con $m = 2n$ : aabbbb		
Producción	Derivación	Árbol
$S  ightarrow aSR$ $S  ightarrow aSR$ $S  ightarrow \epsilon$ $R  ightarrow bb$ $R  ightarrow bb$	aSR aaSRR aaRR aabbR aabbbb	a a S R R

(f) 
$$L = \{a^i b^j c^k | k = i + j\}$$

Gram'atica

- lacksquare S 
  ightarrow aSc
- $\mathbf{S} \to B|\varepsilon$
- $B \to bBc|\varepsilon$

Derivación

Para el caso del conteo de las a's y como primera posición de la cadena antes de las c's

$$S \Rightarrow_{lm} aSc$$

Para el caso del conte<br/>o de las b's con recursividad llamamos a <br/> By como segunda posición de la cadena antes de las<br/> c's

$$B \Rightarrow_{lm} bBc|\varepsilon$$

Cadena con tres $a$ 's y dos $b$ 's resulta cinco $c$ 's aaabbccccc			
Producción	Derivación	Árbol	
Inicio  o S	S		
$S \rightarrow aSc$	aSc	(s)	
$S \rightarrow aSc$	aaScc	a	
$S \rightarrow aSc$	aaaSccc	(a) (5) (c)	
$S \to B$	aaaBccc	b B c	
$B \rightarrow bBc$	aaabBcccc	<b>6 6 6</b>	
$B \rightarrow bBc$	aaabbBccccc		
$B  o \varepsilon$	aaabbccccc		
Cadena con una unica letra $b$ eso resulta en una unica $c$ : bc			
Producción	Derivación	Árbol	
Inicio  o S	S	(5)	
$S \rightarrow B$	EGc	I	
$B \rightarrow bBc$	bGc S	B	
$B \to \varepsilon$	bc	<b>b c</b>	
		A	



Cadena con solo 5 $a$ 's y unica $b$ concatenado con 5 $c$ 's extremo: aaaaabcccccc		
Producción	Derivación	Árbol
Inicio  o S	S	
$S \rightarrow aSc$	aSc	
$S \rightarrow aSc$	aaScc	
$S \rightarrow aSc$	aaaSccc	a
$S \rightarrow aSc$	aaaaScccc	a
$S \rightarrow aSc$	aaaaaSccccc	a <b>3</b> C
$S \to B$	aaaaaBccccc	
$B \rightarrow bBc$	aaaaabBcccccc	<b>6</b>
$b \to \varepsilon$	aaaaabcccccc	

- (g)  $L=\{a^nb^{n+m}c^m|n,m\geq 0\}$ Gramática
  - $\blacksquare S \rightarrow \epsilon \mid XY$
  - $\blacksquare X \rightarrow aXb \mid \epsilon$
  - $\blacksquare Y \rightarrow bYc \mid \epsilon$

# Derivación

Cadena con $n = 0$ , $m = 3$ : bbbccc		
Producción	Derivación	Árbol
$S \to XY$ $Y \to bYc$ $Y \to bYc$ $Y \to bYc$ $X \to \epsilon$ $Y \to \epsilon$	XY XbYc XbbYcc XbbbYccc bbbYccc bbbccc	b v c

Cadena con $m = 0$ , $n = 2$ : aabb			
Producción	Derivación	Árbol	
$S \to XY$ $X \to aXb$ $X \to aXb$ $X \to \epsilon$ $Y \to \epsilon$	XY aXbY aaXbbY aabbY aabb	a X b V	



Cadena con $m = 1$ , $n = 3$ : aaabbbbc		
Producción	Derivación	Árbol
$S \to XY$ $X \to aXb$ $X \to aXb$ $X \to aXb$ $Y \to bYc$ $X \to \epsilon$ $Y \to \epsilon$	XY aXbY aaXbbY aaaXbbbY aaaXbbbbYc aaabbbbYc	a X b b V c

# Referencias

[Sipser(2013)] M. Sipser, Introduction to the Theory of Computation, 3rd ed. Boston, MA: Course Technology, 2013.

[Hopcroft and Ullman(1979)] J. E. Hopcroft and J. D. Ullman, *Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation*. Addison-Wesley Publishing Company, 1979.

[Rodger(1993)] S. H. Rodger, "JFLAP," https://www.jflap.org/, 1993, [Java Formal Languages and Automata Package].