

Práctica 03

DOCENTE	CARRERA	CURSO
Marcela Quispe Cruz	Maestría en Ciencia de la Computación	Teoría de la Computación

PRÁCTICA	TEMA	DURACIÓN
03	Lenguajes de Libre Contexto	3 horas

1. Datos de los estudiantes

- Grupo: 9
- Integrantes:
 - Abarca Murillo, Jhonatan Piero
 - Apari Pinto, Christian Timoteo
 - Suca Velando, Christian Anthony
 - Vargas Zuni, Arturo

2. Ejercicios

2.1. Pregunta 1

Considere las siguiente gramáticas:

- | | |
|---|---|
| 1. $S \rightarrow AbS a, A \rightarrow a$ | 6. $S \rightarrow aA aS, A \rightarrow ab$ |
| 2. $S \rightarrow Sa AB, A \rightarrow aA a, B \rightarrow b$ | 7. $S \rightarrow ASB AB, A \rightarrow aA \epsilon, B \rightarrow b$ |
| 3. $S \rightarrow aS b$ | 8. $S \rightarrow Ab, A \rightarrow AA a$ |
| 4. $S \rightarrow aS aA, A \rightarrow bS bA \epsilon$ | 9. $S \rightarrow AS b, A \rightarrow AA a$ |
| 5. $S \rightarrow aSa b$ | |

Indique cual gramática corresponde a cada lenguaje abajo. Puede haber más de una o ninguna gramática para cada lenguaje.

- | | |
|--|---|
| (a) $L_1 : \{a^i b i \geq 1\}$ | <input type="checkbox"/> 1 <input checked="" type="checkbox"/> 2 <input checked="" type="checkbox"/> 3 <input checked="" type="checkbox"/> 4 <input type="checkbox"/> 5 <input type="checkbox"/> 6 <input checked="" type="checkbox"/> 7 <input checked="" type="checkbox"/> 8 <input checked="" type="checkbox"/> 9 |
| (b) $L_2 : \{(ab)^i a i \geq 0\}$ | <input checked="" type="checkbox"/> 1 <input type="checkbox"/> 2 <input type="checkbox"/> 3 <input checked="" type="checkbox"/> 4 <input type="checkbox"/> 5 <input type="checkbox"/> 6 <input type="checkbox"/> 7 <input type="checkbox"/> 8 <input type="checkbox"/> 9 |
| (c) $L_3 : \{a^i b i \geq 2\}$ | <input type="checkbox"/> 1 <input checked="" type="checkbox"/> 2 <input checked="" type="checkbox"/> 3 <input checked="" type="checkbox"/> 4 <input type="checkbox"/> 5 <input checked="" type="checkbox"/> 6 <input checked="" type="checkbox"/> 7 <input checked="" type="checkbox"/> 8 <input checked="" type="checkbox"/> 9 |
| (d) $L_4 : \{a^i b a^j i \geq 1, j \geq 0\}$ | <input type="checkbox"/> 1 <input checked="" type="checkbox"/> 2 <input type="checkbox"/> 3 <input checked="" type="checkbox"/> 4 <input type="checkbox"/> 5 <input type="checkbox"/> 6 <input type="checkbox"/> 7 <input type="checkbox"/> 8 <input type="checkbox"/> 9 |
| (e) $L_5 : \{a^i b i \geq 0\}$ | <input type="checkbox"/> 1 <input type="checkbox"/> 2 <input checked="" type="checkbox"/> 3 <input type="checkbox"/> 4 <input type="checkbox"/> 5 <input type="checkbox"/> 6 <input checked="" type="checkbox"/> 7 <input type="checkbox"/> 8 <input checked="" type="checkbox"/> 9 |

- (f) $L_6 : \{a^i b^j | i \geq 0, j > 0\}$ ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐ 8 ☐ 9
- (g) $L_7 : \{(ab)^i | i \geq 0\}$ ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☐ 9

Resolución

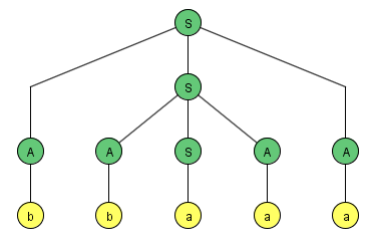
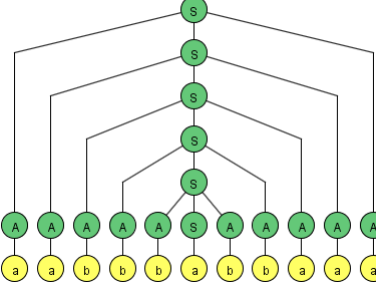
Parte 1 Representando lenguajes [Sipser(2013)]

- (a) $L_1 : \{a^i b | i \geq 1\}$
 $L_1 : \{ab, aab, aaab, aaaaab\}$
- (b) $L_2 : \{(ab)^i a | i \geq 0\}$
 $L_2 : \{a, aba, ababa, abababa\}$
- (c) $L_3 : \{a^i b | i \geq 2\}$
 $L_3 : \{aab, aaab, aaaab, aaaaab\}$
- (d) $L_4 : \{a^i b a^j | i \geq 1, j \geq 0\}$
 $L_4 : \{ab, aba, aaba, aabaa\}$
- (e) $L_5 : \{a^i b | i \geq 0\}$
 $L_5 : \{b, ab, aab, aaab\}$
- (f) $L_6 : \{a^i b^j | i \geq 0, j > 0\}$
 $L_6 : \{b, ab, aab, abb\}$
- (g) $L_7 : \{(ab)^i | i \geq 0\}$
 $L_7 : \{\varepsilon, ab, abab, ababab\}$

Parte 2 Producción y Derivación de Gramáticas [Hopcroft and Ullman(1979)]

1. $S \rightarrow AbS | a, A \rightarrow a$
 - $L_2 : \{abababa\}$
 Pruducción: $S \rightarrow AbS, S \rightarrow AbS, S \rightarrow AbS, S \rightarrow AbS, A \rightarrow a, A \rightarrow a, A \rightarrow a, S \rightarrow a$
 Derivación: $S, AbS, AbAbS, AbAbAbS, abAbAbS, ababAbS, abababS, abababa$
2. $S \rightarrow Sa | AB, A \rightarrow aA | a, B \rightarrow b$
 - $L_1 : \{aaaab\}, L_3 : \{aaaaaab\}$
 Pruducción: $S \rightarrow AB, A \rightarrow aA, A \rightarrow aA, A \rightarrow aA, A \rightarrow a, B \rightarrow b$
 Derivación: $AB, aAB, aaAB, aaaAB, aaaaB, aaaaab$
 - $L_4 : \{aabaa\}$
 Pruducción: $S \rightarrow Sa, S \rightarrow Sa, S \rightarrow AB, A \rightarrow aA, A \rightarrow a, B \rightarrow b$
 Derivación: $Sa, Saa, ABaa, aABaa, aaBaa, aabaa$
3. $S \rightarrow aS | b$
 - $L_1 : \{aaaab\}, L_3 : \{aaaaaab\}$
 Pruducción: $S \rightarrow aS, S \rightarrow aS, S \rightarrow aS, S \rightarrow aS, S \rightarrow b$
 Derivación: $aS, aaS, aaaS, aaaaS, aaaaab$
 - $L_5 : \{b\}$
 Pruducción: $S \rightarrow b$
 Derivación: b
4. $S \rightarrow aS | aA, A \rightarrow bS | bA | \varepsilon$

- $L_1 : \{aaaaab\}, L_3 : \{aaaaab\}$
Pruducción: $S \rightarrow aS, S \rightarrow aS, S \rightarrow aS, S \rightarrow aA, A \rightarrow bA, A \rightarrow \varepsilon$
Derivación: $aS, aaS, aaaS, aaaaA, aaaaabA, aaaaab$
 - $L_2 : \{abababab\}$
Pruducción: $S \rightarrow aA, A \rightarrow bS, S \rightarrow aA, A \rightarrow bS, S \rightarrow aA, A \rightarrow bS, S \rightarrow aA, A \rightarrow \varepsilon$
Derivación: $aA, abS, abaA, ababS, ababaA, abababS, ababababA, abababab$
 - $L_4 : \{aabaa\}$
Pruducción: $S \rightarrow aS, S \rightarrow aA, A \rightarrow bS, S \rightarrow aS, S \rightarrow aA, A \rightarrow \varepsilon$
Derivación: $aS, aaA, aabS, aabaS, aabaaA, aabaa$
5. $S \rightarrow aSa|b$
- Ninguno
6. $S \rightarrow aA|aS, A \rightarrow ab$
- $L_3 : \{aaaaaab\}$
Pruducción: $S \rightarrow aS, S \rightarrow aS, S \rightarrow aS, S \rightarrow aA, A \rightarrow ab$
Derivación: $aS, aaS, aaaS, aaaaA, aaaaaab$
7. $S \rightarrow ASB|AB, A \rightarrow aA|\varepsilon, B \rightarrow b$
- $L_1 : \{aaaaab\}, L_3 : \{aaaaab\}$
Pruducción: $S \rightarrow AB, A \rightarrow aA, A \rightarrow aA, A \rightarrow aA, A \rightarrow aA, A \rightarrow \lambda, B \rightarrow b$
Derivación: $AB, aAB, aaAB, aaaAB, aaaaAB, aaaaB, aaaaab$
 - $L_5 : \{b\}$
Pruducción: $S \rightarrow b$
Derivación: b
 - $L_6 : \{abb\}$
Pruducción: $S \rightarrow ASB, A \rightarrow aA, S \rightarrow AB, A \rightarrow \lambda, A \rightarrow \lambda, B \rightarrow b, B \rightarrow b$
Derivación: $ASB, aASB, aAABB, aABB, aBB, abB, abb$
8. $S \rightarrow Ab, A \rightarrow AA|a$
- $L_1 : \{aaaaab\}, L_3 : \{aaaaab\}$
Pruducción: $S \rightarrow Ab, A \rightarrow AA, A \rightarrow AA, A \rightarrow AA, A \rightarrow AA, A \rightarrow AA, A \rightarrow a, A \rightarrow a, A \rightarrow a, A \rightarrow a, A \rightarrow a$
Derivación: $Ab, AAb, AAAb, AAAAb, AAAAAb, aAAAAAb, aaAAAAAb, aaaAAAAAb, aaaaaAb, aaaaaab$
9. $S \rightarrow AS|b, A \rightarrow AA|a$
- $L_1 : \{aaaaab\}, L_3 : \{aaaaab\}$
Pruducción: $S \rightarrow AS, S \rightarrow AS, A \rightarrow AA, A \rightarrow AA, S \rightarrow AS, A \rightarrow a, A \rightarrow a, A \rightarrow a, A \rightarrow a, A \rightarrow a, S \rightarrow b$
Derivación: $AS, AAS, AAAS, AAAAS, AAAAAAS, aAAAAAS, aaAAAAAS, aaaAAAAAS, aaaaaAS, aaaaaaS, aaaaaab$
 - $L_5 : \{b\}$
Pruducción: $S \rightarrow b$
Derivación: b

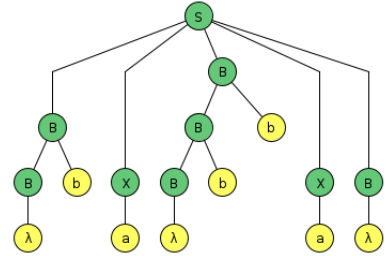
Cadena con a 's y b 's en cada lado: bbaaa		
Producción	Derivación	
$Inicio \rightarrow S$	S	
$S \rightarrow ASA$	ASA	
$S \rightarrow ASA$	AASAA	
$A \rightarrow b$	bASAA	
$A \rightarrow b$	bbSAA	
$S \rightarrow a$	bbaAA	
$A \rightarrow a$	bbaaA	
$A \rightarrow a$	bbaaa	
Cadena grande de a 's y b 's: aabbbabbaaa		
Producción	Derivación	
$Inicio \rightarrow S$	S	
$S \rightarrow ASA$	ASA	
$S \rightarrow ASA$	AASAA	
$S \rightarrow ASA$	AAASAAA	
$S \rightarrow ASA$	AAAASAAAA	
$S \rightarrow ASA$	AAAAASAAAAA	
$A \rightarrow a$	aAAAAASAAAAA	
$A \rightarrow a$	aaAAAAASAAAAA	
$A \rightarrow b$	aabAASAAAAA	
$A \rightarrow b$	aabbASAAAAA	
$A \rightarrow b$	aabbbSAAAAA	
$S \rightarrow a$	aabbbAAAAAA	
$A \rightarrow b$	aabbbabAAAA	
$A \rightarrow b$	aabbbabbAAA	
$A \rightarrow a$	aabbbabbAaA	
$A \rightarrow a$	aabbbabbbaA	
$A \rightarrow a$	aabbbabbbaaA	
$A \rightarrow a$	aabbbabbbaaa	

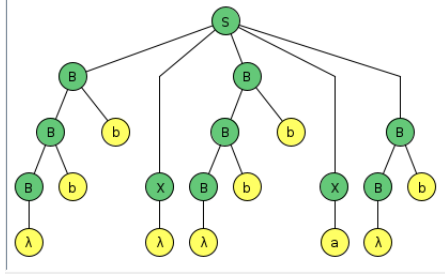
(c) $L = \{w \mid w \text{ posee, máximo, 2 ocurrencias de } a\}$

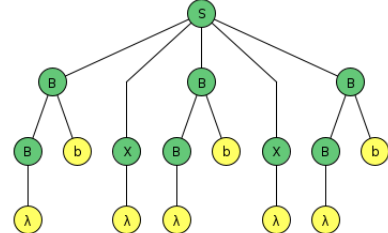
Gramática

- $S \rightarrow \epsilon \mid BXBXB$
- $B \rightarrow Bb \mid \epsilon$
- $X \rightarrow a \mid \epsilon$

Derivación

Cadena con dos a 's: babba		
Producción	Derivación	Árbol
$S \rightarrow BXBXB$ $B \rightarrow Bb$ $B \rightarrow Bb$ $B \rightarrow Bb$ $B \rightarrow \epsilon$ $X \rightarrow a$ $B \rightarrow \epsilon$ $X \rightarrow a$ $B \rightarrow \epsilon$	BXBXB BXBbXB BbXBbXB BbXBbbXB bXBbbXB baBbbXB babbXB babbaB babba	

Cadena con una a : bbbbab		
Producción	Derivación	Árbol
$S \rightarrow BXBXB$ $B \rightarrow Bb$ $B \rightarrow Bb$ $B \rightarrow Bb$ $B \rightarrow Bb$ $B \rightarrow Bb$ $B \rightarrow Bb$ $B \rightarrow \epsilon$ $X \rightarrow \epsilon$ $B \rightarrow \epsilon$ $X \rightarrow a$ $B \rightarrow \epsilon$	BXBXB BbXBXB BbXBbXB BbbXBbXB BbbXBbbXB BbbXBbbbXB bbbXBbbbXBb bbXBbbbXBb bbBbbXBb bbbbXBb bbbbaBb bbbbab	

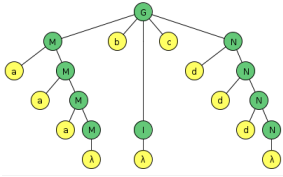
Cadena sin ninguna a 's: bbb		
Producción	Derivación	Árbol
$S \rightarrow BXBXB$ $B \rightarrow Bb$ $B \rightarrow Bb$ $B \rightarrow Bb$ $B \rightarrow \epsilon$ $X \rightarrow \epsilon$ $B \rightarrow \epsilon$ $X \rightarrow \epsilon$ $B \rightarrow \epsilon$	BXBXB BbXBXB BbXBbXB BbXBbXBb bXBbXBb bBbXBb bbXBb bbBb bbb	

Gramática

- $G \rightarrow MbIcN$
- $I \rightarrow bIc|\varepsilon$
- $M \rightarrow aM|\varepsilon$
- $N \rightarrow dN|\varepsilon$

Derivación

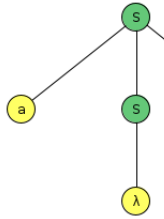
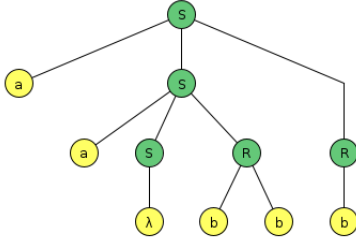
$$I \Rightarrow_{lm} bIc|\varepsilon$$
$$G \Rightarrow_{lm} MIN$$
$$M \Rightarrow_{l_m} aM|\varepsilon N \Rightarrow_{l_m} dN|\varepsilon$$
[illegible]

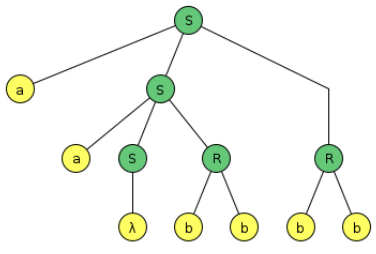
Cadena con ubicación única b' y c' concatenado con a 's y d 'c al extremo: aaabcbdd		
Producción	Derivación	Árbol
$Inicio \rightarrow G$ $G \rightarrow MbIcN$ $M \rightarrow aM$ $N \rightarrow dN$ $M \rightarrow aM$ $N \rightarrow dN$ $M \rightarrow aM$ $N \rightarrow dN$ $M \rightarrow \epsilon$ $I \rightarrow \epsilon$ $N \rightarrow \epsilon$	G $MbIcN$ $aMbIcN$ S $aMbIcdN$ $aaMbIcdN$ $aaMbIcddN$ $aaaMbIcddN$ $aaaMbIcdddN$ $aaabIcdddN$ $aaabcbddN$ $aaabcbdd$	

(e) $L = \{a^n b^m \mid 0 \leq n \leq m \leq 2n\}$ Gramática

- $S \rightarrow \epsilon \mid aSR$
- $R \rightarrow bb \mid b$

Derivación

Cadena con $m = n$: ab		
Producción	Derivación	Árbol
$S \rightarrow aSR$ $S \rightarrow \epsilon$ $R \rightarrow b$	aSR aR ab	
Cadena con $m > n$: aabbb		
Producción	Derivación	Árbol
$S \rightarrow aSR$ $S \rightarrow aSR$ $S \rightarrow \epsilon$ $R \rightarrow bb$ $R \rightarrow b$	aSR $aaSRR$ $aaRR$ $aabbR$ $aabbb$	

Cadena con $m = 2n$: aabbbb		
Producción	Derivación	Árbol
$S \rightarrow aSR$ $S \rightarrow aSR$ $S \rightarrow \epsilon$ $R \rightarrow bb$ $R \rightarrow bb$	aSR aaSRR aaRR aabbR aabbbb	

(f) $L = \{a^i b^j c^k | k = i + j\}$

Gramática

- $S \rightarrow aSc$
- $S \rightarrow B|\epsilon$
- $B \rightarrow bBc|\epsilon$

Derivación

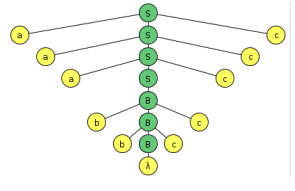
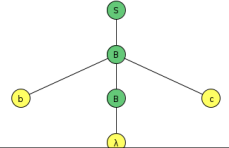
Para el caso del conteo de las a 's y como primera posición de la cadena antes de las c 's

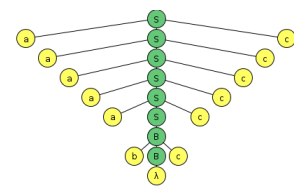
$$S \Rightarrow_{lm} aSc$$

Para el caso del conteo de las b 's con recursividad llamamos a B y como segunda posición de la cadena antes de las c 's

$$B \Rightarrow_{lm} bBc|\epsilon$$

Se presentan algunos casos mas extensos

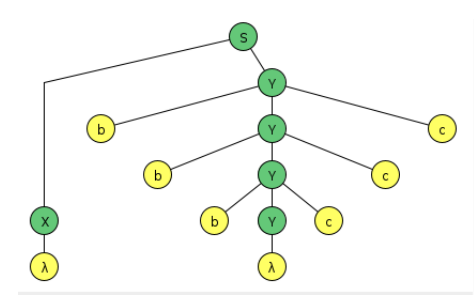
Cadena con tres a 's y dos b 's resulta cinco c 's aaabbccccc		
Producción	Derivación	Árbol
$Inicio \rightarrow S$ $S \rightarrow aSc$ $S \rightarrow aSc$ $S \rightarrow aSc$ $S \rightarrow B$ $B \rightarrow bBc$ $B \rightarrow bBc$ $B \rightarrow \epsilon$	S aSc aaSc aaSc aaaSc aaaBccc aaabBcccc aaabbBccccc aaabbccccc	
Cadena con una unica letra b eso resulta en una unica c : bc		
Producción	Derivación	Árbol
$Inicio \rightarrow S$ $S \rightarrow B$ $B \rightarrow bBc$ $B \rightarrow \epsilon$	S EGc bGc S bc	

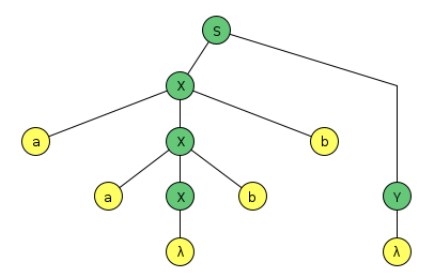
Cadena con solo 5 a's y unica b concatenado con 5 c's extremo: aaaaabcccccc		
Producción	Derivación	Árbol
$Inicio \rightarrow S$ $S \rightarrow aSc$ $S \rightarrow aSc$ $S \rightarrow aSc$ $S \rightarrow aSc$ $S \rightarrow aSc$ $S \rightarrow B$ $B \rightarrow bBc$ $b \rightarrow \varepsilon$	S aSc aaSc aaaSc aaaaSc aaaaaSc aaaaaB aaaaaBc aaaaaBcc aaaaaBccc aaaaaBcccc aaaaaBccccc aaaaaBcccccc	

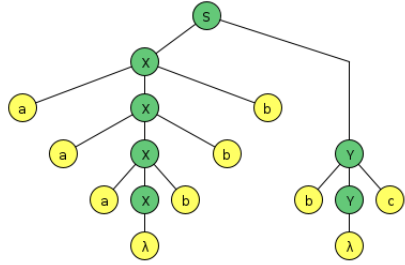
(g) $L = \{a^n b^{n+m} c^m | n, m \geq 0\}$ Gramática

- $S \rightarrow \epsilon \mid XY$
- $X \rightarrow aXb \mid \epsilon$
- $Y \rightarrow bYc \mid \epsilon$

Derivación

Cadena con $n = 0, m = 3$: bbbccc		
Producción	Derivación	Árbol
$S \rightarrow XY$ $Y \rightarrow bYc$ $Y \rightarrow bYc$ $Y \rightarrow bYc$ $X \rightarrow \epsilon$ $Y \rightarrow \epsilon$	XY XbYc XbbYcc XbbbYccc bbbYccc bbbccc	

Cadena con $m = 0, n = 2$: aabb		
Producción	Derivación	Árbol
$S \rightarrow XY$ $X \rightarrow aXb$ $X \rightarrow aXb$ $X \rightarrow \epsilon$ $Y \rightarrow \epsilon$	XY aXbY aaXbbY aabbY aabb	

Cadena con $m = 1, n = 3 : aaabbbbc$		
Producción	Derivación	Árbol
$S \rightarrow XY$ $X \rightarrow aXb$ $X \rightarrow aXb$ $X \rightarrow aXb$ $Y \rightarrow bYc$ $X \rightarrow \epsilon$ $Y \rightarrow \epsilon$	XY $aXbY$ $aaXbbY$ $aaaXbbbY$ $aaaXbbbbbYc$ $aaabbbbc$	

Referencias

- [Sipser(2013)] M. Sipser, *Introduction to the Theory of Computation*, 3rd ed. Boston, MA: Course Technology, 2013.
- [Hopcroft and Ullman(1979)] J. E. Hopcroft and J. D. Ullman, *Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation*. Addison-Wesley Publishing Company, 1979.
- [Rodger(1993)] S. H. Rodger, "JFLAP," <https://www.jflap.org/>, 1993, [Java Formal Languages and Automata Package].