

Introduntion to Yamanaka Lab.
- 量子系の物理 -

鳥居 優作

2016 年 11 月 12 日

目次

0.1	はじめに	8
第 1 章	量子力学・統計力学の基礎知識	9
1.1	演算子・状態・Hamiltonian に関する Tips	9
1.1.1	演算子と Generator	9
1.1.2	ハミルトニアンとの交換関係	9
1.1.3	演算子の対角化	9
1.1.4	ユニタリー非同値	9
1.1.5	混合状態と密度行列	10
1.1.6	固有状態と不確定性	11
1.1.7	ヒルベルト空間と平面波	11
1.1.8	第二量子化と Fock 空間	11
1.1.9	時間発展とユニタリー性	12
1.2	パリティ選択則	12
1.2.1	あらまし	12
1.2.2	奇関数・偶関数	12
1.2.3	パリティ	13
1.2.4	パリティによる選択律構築の限界	14
1.2.5	ϕ の積分	14
1.2.6	選択律まとめ	14
1.2.7	物理的解釈	15
1.3	Fermion 界限 Tips	15
1.3.1	角運動量演算子	15
1.3.2	スピン演算子	16
1.3.3	スピン $\frac{1}{2}$ とは?	16
1.3.4	Singlet or Triplet	17
1.4	Baker-Campbell-Hausdorff 公式	17
1.4.1	Campbell-Hausdorff の公式	17
1.4.2	Baker-Hausdorff の補助定理	18
1.5	複素積分基礎	18
1.5.1	Cauchy の積分公式	18
1.5.2	Taylor 展開	19
1.5.3	Laurent 展開	19
1.5.4	留数定理	20
1.5.5	実関数への応用	20
1.5.6	Cauchy の主値	20
1.5.7	Sokhotski-Plemelj の公式	20

第 2 章	Green 関数	21
2.1	Green 関数の一般形	21
2.1.1	数学寄りの定義	21
2.1.2	物理寄りの定義	21
2.1.3	Green 演算子のスペクトル表示	22
2.2	量子力学と Green 関数	22
2.2.1	摂動展開と Green 関数	22
2.2.2	散乱問題における Green 関数	23
2.3	場の理論における Green 関数	26
2.3.1	時間依存自由粒子 Green 関数	26
2.3.2	相関関数と温度 Green 関数	27
第 3 章	超伝導	28
3.1	超伝導の基礎	28
3.1.1	超伝導体の性質	28
3.1.2	磁束の量子化	28
3.2	超伝導の現象論 : Ginzburg-Landau 理論	28
3.2.1	相転移と Order parameter	29
3.2.2	Ginzburg-Landau 方程式	29
3.2.3	ゲージ変換の復習	30
3.2.4	GL コヒーレンス長と侵入長	32
3.2.5	ソリトンの特徴	32
3.3	超伝導の微視的理論 : Bardeen-Cooper-Schrieffer 理論	33
3.3.1	金属の基本性質	33
3.3.2	電子-格子間相互作用	33
3.3.3	Cooper 問題	34
第 4 章	Anderson 局在とその周辺	35
4.1	Anderson 局在とは	35
4.2	P.W.Anderson. Phys. Rev. 109 , 1492(1958)	35
4.2.1	Tight-Binding 近似	35
4.2.2	Anderson の理論	36
4.3	E.Abrahams et al. Phys. Rev. Lett. 42 , 673(1979)	36
第 5 章	熱・統計・量子統計力学	37
5.1	熱力学	37
5.1.1	状態量	37
5.1.2	完全な熱力学関数	37
5.1.3	自由エネルギー	37
5.2	統計力学	38
5.2.1	目的	38
5.2.2	ミクロカノニカルアンサンブル	38
5.2.3	Langevin 方程式	38
5.3	Born-Markov 型量子マスター方程式	40
5.3.1	問題設定	41
5.3.2	熱平衡 (問題 1)	41
5.3.3	調和振動子のエネルギー (問題 2)	42
5.3.4	位置・運動量平均の時間発展 (問題 3)	43

5.3.5	数値計算	44
5.4	線形応答理論	45
5.4.1	概要	45
5.4.2	線形応答理論の基本概念	45
5.4.3	有限温度系へ	46
5.4.4	簡単な例	46
第 6 章	Wigner 関数	48
6.1	Winger 表示	48
6.1.1	定義	48
6.1.2	任意の演算子に対する Wigner 表示	48
6.2	Wigner 分布関数の時間発展	48
6.2.1	$(\hat{A}\hat{B})_W$ の計算	48
6.2.2	$f_W(q, p, t)$ の時間発展	49
6.3	具体的な問題	50
6.3.1	調和振動子系の Wigner-Moyal 方程式	50
6.3.2	数値計算	50
第 7 章	経路積分	52
7.1	量子力学の復習	52
7.1.1	自由粒子	52
7.1.2	Green 関数	53
7.2	経路積分の基礎	53
7.2.1	経路積分の導出	53
7.2.2	自由粒子：経路積分を使わない方法	54
7.2.3	自由粒子：経路積分の方法	55
7.3	数値計算の準備及び経路積分のイメージ	56
7.3.1	基底波動関数と伝搬関数	56
7.3.2	作用とラグランジアン	56
7.3.3	作用積分の簡略化	56
7.3.4	経路とは	57
7.3.5	経路の取り方	57
7.3.6	処方箋	57
第 8 章	Ising 模型	58
8.1	Ising 模型と熱統計力学の基礎	58
8.1.1	ハミルトニアン	58
8.1.2	平衡状態	58
8.1.3	相転移	58
8.2	Ising 模型の厳密解	59
8.2.1	1 次元 Ising 模型：平均場近似	59
8.2.2	1 次元 Ising 模型：厳密解	59
8.2.3	2 次元 Ising 模型	60
8.3	数値計算	60
8.3.1	Monte Carlo 法	60
8.3.2	Metropolis 法	60
8.3.3	2 次元 Ising 模型	61
8.3.4	数値計算上の注意	62

第 9 章	場の量子論	63
9.1	Wick の定理	63
9.1.1	概要	63
9.1.2	具体例	63
9.1.3	証明	63
9.2	TFD 形式による期待値計算	64
9.2.1	TFD のド基礎	64
9.2.2	具体計算	64
9.2.3	Block-de Dominics の定理	65
9.3	Gell-Mann-Low の定理	65
9.3.1	断熱因子	65
9.3.2	概要	66
9.3.3	証明	66
9.4	Bethe-Salpeter 方程式	66
9.4.1	Bethe-Salpeter への準備：1 体 Green 関数	66
9.4.2	2 体 Green 関数	67
9.4.3	Bethe-Salpeter 方程式	67
9.4.4	$K(k)$ の構成	67
9.5	ゼロモード演算子と BdG モードの成り立ち	68
9.5.1	場の理論の自己無撞着性	68
9.5.2	完全系の仮定	68
9.5.3	場の展開	69
9.5.4	なぜうまくいったか？	69
9.5.5	なぜ問題 (赤外発散) が発生するか	70
9.6	Grassmann 代数と Fermion の経路積分	70
9.6.1	あらまし	70
9.6.2	Grassmann 代数	70
9.6.3	g-数の元	71
9.6.4	解析手法	71
9.6.5	コヒーレント状態	73
9.6.6	g-数の Gauss 積分	74
9.6.7	分配関数の経路積分	75
9.7	Tips	76
9.7.1	Heisenberg 描像	76
9.7.2	相互作用描像	76
9.7.3	各描像のハミルトニアン同士の関係	77
9.7.4	デルタ関数の Fourier 変換表示	77
9.7.5	k が離散・連続の場合の $\langle a_k^\dagger a_{k'} \rangle$	78
9.7.6	デルタ関数が体積になること	79
9.7.7	ハミルトニアンの対角化と Bogoliubov-de Gennes 方程式	79
9.7.8	一様系の Bogoliubov-de Gennes 方程式	80
9.7.9	相互作用描像における時間発展演算子と T 積	81
第 10 章	Single mode 模型におけるゼロモード演算子と真空の直交性	83
10.1	諸言	83
10.2	冷却原子気体とゼロモード	83
10.2.1	冷却原子気体のハミルトニアン	83

10.2.2	相互作用描像	85
10.2.3	非摂動ハミルトニアンに対角化	85
10.2.4	ゼロモードのジレンマ	88
10.3	Single mode 模型	88
10.3.1	ハミルトニアンとゼロモード	88
10.3.2	W 行列の導入と場の展開	89
10.3.3	非摂動ハミルトニアンを選択	90
10.4	ゼロモード演算子と物理量	91
10.4.1	変分法による見積もり	91
10.4.2	Q, P の物理的な解釈	92
10.4.3	位相と凝縮粒子数の不確定性関係	92
10.5	Bose-Einstein 凝縮系における真空の構造と位相演算子	93
10.5.1	真空の直交性	93
10.5.2	位相演算子と位相ゆらぎ	96
10.6	結言	97
第 11 章	研究：3 次元一様有限温度系のゼロモード	101
11.1	問題設定	101
11.1.1	冷却原子気体のハミルトニアン	101
11.1.2	相互作用描像	102
11.1.3	量子補正	103
11.2	自己無撞着ループ	104
11.2.1	GP 方程式	105
11.2.2	共役モード方程式	105
11.2.3	BdG 方程式	106
11.2.4	ゼロモード方程式	106
11.2.5	$\langle Q^2 \rangle, \langle P^2 \rangle$ の計算	107
11.2.6	熱平均 V_t ・異常平均 V_a	108
11.2.7	比熱・圧力	109
11.3	変分法による見積もり	109
11.3.1	ゼロモードハミルトニアン	110
11.3.2	変分関数	110
11.3.3	ゼロ温度期待値・エネルギー固有値の計算	110
11.3.4	各パラメータの計算	111
11.3.5	有限温度期待値	111
11.4	数値計算結果	112
第 12 章	研究：ゼロモードの緩和	113
12.1	公式	113
12.2	具体計算：time-convolutionless 型	113
12.3	具体計算：摂動項 $\mathcal{K}(t)$	116
12.4	数値計算へ向けて	118
12.4.1	$E_\mu \cdot E_\nu$	118
12.4.2	A_i^{nm}	119
12.4.3	$N_{nm} \cdot N'_{nm}$	119
12.4.4	R_i	119
12.5	$L^{nm, n'm'}$ の整理	120

第 13 章 研究 : BdG 間及び Zeromode-BdG 間の相互作用を取り入れた有限温度系の計算	122
13.1 やりたいこと	122
13.1.1 Zeromode-BdG coupling	122
13.2 量子補正のくりこみによる理解	122
13.2.1 非摂動ハミルトニアン	123
13.2.2 カウンター項の決定	123
13.2.3 (13.19) の要請	124
13.2.4 分割条件摂動一次	124
13.2.5 $\delta\mathcal{L}, \delta\mathcal{M}$ の決定	126
13.2.6 分割条件の高次	127
13.3 量子統計力学と摂動計算	127
13.3.1 熱力学ポテンシャル	127
13.3.2 方法論の外観	128
13.3.3 相互作用描像と S 行列	128
13.3.4 熱力学ポテンシャルの摂動展開	129
13.3.5 描像について	129
13.4 3次元有限温度 IZMF 系への応用	129
13.4.1 ハミルトニアン	129
13.4.2 熱力学ポテンシャルの具体形	130
13.4.3 $a(s)$ の時間依存性	131
13.4.4 $Q(s), P(s)$ の時間依存性	131
13.4.5 Q を奇数個含むエルミートな期待値がゼロになること	131
13.4.6 (13.92) のさらなる具体形	132
13.4.7 ふたたび熱力学ポテンシャルの具体形	134
13.4.8 数値計算	134
13.4.9 量子補正の摂動一次	134
13.4.10 B.3 量子補正項	136
第 14 章 研究 : ゼロモードがない非一様接触型 Boson 系について	139
14.1 1 次の Green 関数の計算	139
14.1.1 Green 関数の 1 行目の具体計算	140
14.1.2 Green 関数の 2 行目以降	142
14.2 All-order の計算に向けて:その 1	142
14.2.1 1 次の self-energy の具体形	142
14.2.2 梯子近似された Bethe-Salpeter 方程式へ	143
14.2.3 異常伝搬を含む Bethe-Salpeter 方程式	144
14.2.4 摂動ハミルトニアン 3 次の取り扱い	145
14.2.5 実効的な計算が可能な形へ... は難しい	147
14.2.6 ゼロモードハミルトニアンの平均場的な取り扱い (暫定版)	147
14.3 方向転換	148
14.4 散乱の量子力学から Bethe-Salpeter 方程式の置換えへ	148
14.4.1 Schrödinger 方程式	148
14.4.2 問題意識	149
14.4.3 Γ_0 が散乱振幅 \tilde{f} で書けること (Fermi System)	149
14.4.4 Γ が散乱振幅 \tilde{f} で書けること (Bose System)	150
14.4.5 逆伝搬が存在しないこと	150

第 15 章 研究 : ZeroMode ハミルトニアンの大膽な近似について	151
15.1 あらまし	151
15.2 利点と致命的な点	152
15.3 Variational ZeroMode Hamiltonian の構成	152
15.3.1 v の決定	152
15.3.2 生成消滅演算子の構成	153
15.3.3 卒論のネタたり得るか?	153
15.4 その 1 : ZeroMode を含む摂動計算	153
15.5 その 2 : dipole-dipole interacting BEC における Gross-Pitaevskii 方程式の安定解	154
15.5.1 再び, 卒論のネタたり得るか?	154
第 16 章 Fetter-Walecka : Quantum Theory of Many-Particle Systems(Dover, 1971)	155
16.1 Second Quantization	155
16.1.1 Fields	155
16.2 Green's Functions	156
16.2.1 Definition	156
16.2.2 Relation to Observables	157
16.2.3 Example : Free Fermion	158
16.2.4 Lehmann Representation	158
16.2.5 Physical Interpretation of the Green's Function	161
16.3 Wick's Theorem	161
16.3.1 概略	161
16.3.2 (16.64)	164
16.3.3 (16.64)	164
16.3.4 (16.71) の縮約ゼロについて	164
16.3.5 (16.72)	164
16.3.6 縮約とは?	165
16.3.7 補題の (b)	165
16.3.8 補題の (c)	165
16.3.9 演算子が 2 つのときの補題	165
16.3.10 帰納法で補題を証明	166
16.3.11 補題の補題	166
16.3.12 補題の一般化	166
16.3.13 2 つの演算子の Wick	167
16.3.14 帰納法で Wick を証明	167
16.4 Diagrammatic Analysis of Perturbation Theory	167
16.4.1 Feynman Diagrams in Coordinate Space	167
16.4.2 Feynman Diagrams in Momentum Space	169
16.4.3 Dyson's Equation	170
第 17 章 数値計算手法	172
17.1 Symplectic 数値解法	172
17.1.1 ハミルトニアンの分解	172
17.1.2 エネルギーの保存	172
17.1.3 Formulate for Schrödinger equation	173

0.1 はじめに

鳥居のお勉強メモなので、ミス・誤植・間違った記述が存在します。批判的に読んでください。また、内容はまとまっているようでまとまっていません。情報がかなり乱雑に散りばめられているので、目次を索引だと思ってください。

第1章 量子力学・統計力学の基礎知識

1.1 演算子・状態・Hamiltonian に関する Tips

量子論界隈の細かいトピックについて

1.1.1 演算子と Generator

運動量演算子：並進変換の生成子

角運動量演算子：回転の生成子

ハミルトニアン：時間並進の生成子

1.1.2 ハミルトニアンとの交換関係

ある演算子 \hat{O} がハミルトニアンと交換するとき、 \hat{O} は時間発展せず、かつハミルトニアンと同時固有状態を取る状態を作ることができる。つまり、仮に運動量演算子 \hat{p} がハミルトニアンと交換すれば、状態はハミルトニアンと運動量演算子の同時固有状態になっている。

ちなみに、ハミルトニアンと運動量演算子が交換するのは一様系するとき、並進対称性が破れているときである。

1.1.3 演算子の対角化

“演算子を対角化できている” の直感的理解について。エルミート演算子の固有値問題

$$\hat{H} |u_i\rangle = E_i |u_i\rangle \quad (1.1)$$

が解けると演算子は対角化できていると表現する。左から $\langle u_j|$ を作用させる：

$$\langle u_j| \hat{H} |u_i\rangle = E_i \langle u_j|u_i\rangle = E_i \delta_{ij} \quad (1.2)$$

$|u\rangle$ はエルミート演算子の固有関数なので直交完全系を張っている。これを行列表示すると

$$\begin{pmatrix} \langle u_0| \hat{H} |u_0\rangle & \langle u_0| \hat{H} |u_1\rangle & \langle u_0| \hat{H} |u_2\rangle & \cdots \\ \langle u_1| \hat{H} |u_0\rangle & \langle u_1| \hat{H} |u_1\rangle & & \\ \langle u_2| \hat{H} |u_0\rangle & & \langle u_2| \hat{H} |u_2\rangle & \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & E_1 & & \\ 0 & & E_2 & \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

ハミルトニアンは対角成分のみ値を持つ。

1.1.4 ユニタリー非同値

ある直交完全系 $\{|\psi'_n\rangle\}$ があったとき別の正規直交系 $\{|\psi_n\rangle\}$ は

$$1 = \sum_j |\psi'_j\rangle \langle \psi'_j| \implies |\psi_i\rangle = \sum_j \langle \psi'_j|\psi_i\rangle |\psi'_j\rangle \quad (1.4)$$

というような線型結合で表現できるはずである。そして、 $\langle \psi'_j | \psi_i \rangle$ はユニタリー行列の成分である。つまり $\{\psi_n\}$ と $\{\psi'_n\}$ はユニタリー変換で結ばれているということ。これをユニタリー同値と呼ぶ。またこれは正準変数を正準変換して新たに得られた演算子で直交完全系を張ったとも解釈できる。正準変換もユニタリー変換である。量子力学は有限自由度系なので、すべての正準変換はユニタリー同値であることが約束されている (von Neumann の一意性定理)。

ユニタリー同値な基底同士は基本的に直交せず、量子力学はその枠組みの上で議論される。しかしながら、無限自由度の場の量子論においてはその限りではなく、ユニタリー非同値な (ある Fock 空間の基底の重ね合わせで表現できない) 真空が存在する場合がある。この非同値真空同士は直交し、これが自発的対称性の破れを説明する。Gell-Mann-Low の定理も、Free Hamiltonian H_0 (固有関数 $|\Phi_0\rangle$) と Full Hamiltonian H (固有関数 $|\Psi_0\rangle$) がユニタリー同値であることを仮定しなければならない。詳しくは奥村さん・高橋さんの D 論参照。

1.1.5 混合状態と密度行列

熱が存在する場合、一般に系は混合状態である。混合状態をやさしく説明すると...

気体分子が 100 個と、その粒子の速度を測定する観測器がある系を考える。仮に速度が v_1 の分子が 20 個、 v_2 の分子が 80 個あったとする。その気体分子の速度の平均は、速度 v_1 付近の粒子の状態を $|\psi_1\rangle$ 、 v_2 付近の粒子の状態を $|\psi_2\rangle$ とすると、

$$\langle \hat{v} \rangle = \frac{1}{5} \langle \psi_1 | \hat{v} | \psi_1 \rangle + \frac{4}{5} \langle \psi_2 | \hat{v} | \psi_2 \rangle$$

で与えられる。こういう形で期待値が与えられる場合、系は混合状態であるという。ここで $1/5$ と $4/5$ は統計由来の確率であり、量子力学的な確率とは別物であることに注意。前者が与えるのは粒子分布である。古典粒子であれば Maxwell-Boltzmann 分布、同種粒子であれば Fermi-Dirac 分布とか Bose-Einstein 分布。その一方で、後者が与えるのは量子論的な揺らぎである。揺らぎは $\Delta v_1, \Delta v_2$ 。 $\langle \psi | \hat{v} | \psi \rangle$ は v の平均 (期待値)。

つまり熱がある場合、測定器で速度 v_1 の粒子が検出される確率は分布関数で与えられる。その粒子の速度を測定するとき、期待される v_1 という値からは少しずれて $v_1 + \Delta v_1$ という値を取る。これが「値が確定しない」ということ。 Δv_1 の値は量子力学的な確率で与えられる。

期待値を得るもっと便利な表式を用意したい。ここで

$$\rho = \sum_n p_n |\psi_n\rangle \langle \psi_n| \quad (1.5)$$

を用意する。上の例で言えば $p_1 = 1/5, p_2 = 4/5$ である。これを密度行列と呼ぶ。密度行列に求めたい物理量 (今回は \hat{v}) を掛けてトレースを取る:

$$\begin{aligned} \text{Tr} \rho \hat{v} &= \sum_n \sum_m \langle \Psi_m | p_n |\psi_n\rangle \langle \psi_n | \hat{v} | \Psi_m \rangle = \sum_n p_n \langle \psi_n | \hat{v} \sum_m (|\Psi_m\rangle \langle \Psi_m|) |\psi_n\rangle \\ &= \sum_n p_n \langle \psi_n | \hat{v} | \psi_n \rangle = \langle \hat{v} \rangle \end{aligned} \quad (1.6)$$

これは混合状態期待値である。ここで、c-数は交換可能、完全系の性質 $\sum_m |\Psi_m\rangle \langle \Psi_m| = 1$ である性質を用いている。またトレースの巡回対称性¹ ($\text{Tr} ABC = \text{Tr} CAB = \text{Tr} BCA$) より、 \hat{v} を掛けるのは前からでも後ろからでもよい。

これで混合状態期待値を記述する統一的な表式が得られた。密度行列に物理量を掛けてトレースを取ることで期待値が得られるということは、密度行列は系の情報を全て持っているということになる。系の情報を保持しているのはハミルトニアンであり、つまるところ密度行列を確定させるためにはハミルトニアンが必要である。現に、平衡状態における密度行列は $\rho = e^{-\beta H}$ で与えられる²。

¹証明してみよう!

²なぜこういう形で与えられるか考えてみよう!例えば $\langle n \rangle = \text{Tr} a^\dagger a \rho$ が Bose-Einstein 分布になることを確認すればいい!

$\text{Tr} A\rho$ は、密度行列に含まれる情報のうち A 以外の情報を切り捨てることを意味する。これをトレースアウトという。マスター方程式で密度演算子の時間発展を追えるが、Full の密度演算子を計算するのは自由度が大きすぎて大変なので、求めたい物理量以外をトレースアウトした形を用いるのが普通³。

1.1.6 固有状態と不確定性

状態が \hat{v} の固有状態なら、何度測定しても観測値は v になり量子的な揺らぎ Δv はなくなる。しかしながら不確定性原理は守られなければならないので、運動量が確定する代わりに位置の不確定性が発散する。これは現実との対応を考えるとあまりにピーキーな設定である。固有状態というのは量子力学の本質である揺らぎが存在しないとても特別な状態です。量子力学の固有状態でよく見かけるのは「エネルギー固有状態」ですが、これもエネルギーが確定する代わりにエネルギーと共役な物理量である時間の不確定性が発散します。ここでいう時間の不確定性とは「波動関数の時間的広がり」を表しています。エネルギー固有状態においては波動関数 $\psi(x)e^{-iEt/\hbar}$ の確率密度は変化しないので、確率振幅の半値幅は無限大になります。これが $\Delta t = \infty$ の意味です。

1.1.7 ヒルベルト空間と平面波

運動量の固有状態がマズいのは設定が現実的ではないということだけでなく、量子力学の数学的構造にも反していることにあります。量子力学における状態というのはヒルベルト空間 (L^2) で定義されるべきだが、運動量の固有状態である平面波 e^{ipx} は L^2 をはみ出しており、自乗可積分ではない⁴。つまり、運動量の固有状態は量子力学では一般的に取り扱えないものなのである。しかし、平面波というのは量子力学のいたるところで現れる。例えば自由粒子の波動関数は平面波で記述されるし、「平面波展開」というテクニックは様々なところで用いられる。

重要なのは境界条件である。自由粒子は境界条件をなにも課していない⁵。Dirichlet 境界条件を課すると状態は平面波ではなくなる。一方で、周期的境界条件が許される固体結晶では状態を Bloch 波で記述できる。平面波で固体中の電子状態が記述できるということは、固体中の電子は自由粒子とほぼ同等の状況下であり、これが金属の電子伝導性を如実に説明している⁶。また、 L^2 ではない平面波も、適切な重み付けをして和、ないしは積分を取ると L^2 になる場合がある。これがフーリエ級数展開とかフーリエ変換とか呼ばれているもの。

1.1.8 第二量子化と Fock 空間

第二量子化した量子力学は場の量子論とは異なる理論です⁷。なので、第二量子化は場の理論ではなく多体量子力学の一形式と捉えられるべきです⁸。第二量子化された量子力学における最も気をつけなければいけない点は、「生成消滅演算子で記述されるモードは原子の生成・消滅を記述しているわけではない」ということ。生成消滅演算子は場の各点における励起を与えておりそれを素励起と呼ぶ。素励起は波であり、素励起の集まりが原子を記述している⁹と考えてもいいかもしれない。素励起のモードの固有状態 (調和振動子における粒子数状態) のテンソル積で定義されるのが Fock 空間である。Fock 空間は Hilbert 空間を無限自由度に拡張したものだとして捉えて問題ない。つまり、第二量子化では場の各点に調和振動子を設置し、それを無限個連結させたものであり、そのモードは素励起を表現するわけである。

³山中研究室における普通です。量子開放系の理論は完成していないので、系統的にマスター方程式を作り、解く方法はまだまだとまっていな
い。他の研究室では他の流儀があるかもしれない

⁴自乗可積分でないものを量子力学の枠組みに取り込むと Born の確率解釈が死にます

⁵自由なのだから当然といえば当然

⁶古典的な Drude モデルなどでは金属結晶の電子伝導性を説明しきれなかったようです

⁷一般的に混同されがちですが、山中研究室ではこれを断固として主張しています。

⁸もっとも異なることは、「量子力学における状態は Schrödinger 方程式で決定されるが、場の理論における状態は理論を閉じるように選択されるもの」であること。粒子の生成・消滅で状態を記述する点は第二量子化された量子力学でも場の理論でも変わらない。ならば量子力学における真空 (基底状態) は「粒子がひとつも存在しない状態」である。しかし、そのように真空を定義すると量子相転移を記述できなくなる。例えば、Bose-Einstein 凝縮 (BEC) はひとつの相であり、多数の Bose 粒子がエネルギー最低状態に落ち込み「真空」を形成しているものである。この「真空」には粒子が存在しているので量子力学では記述できない。場の量子論では BEC が存在する状態を真空として定義することができる。

⁹原子にももちろん波動性がある

今回の課題で与えられた生成消滅演算子がどのような粒子の生成消滅を記述しているのかはわからないが、仮に第二量子化されたものを仮定するならば、そのモードは単純な粒子の追加とは違った意味合いを持つことは理解するべきでしょう¹⁰。

1.1.9 時間発展とユニタリー性

量子マスター方程式による時間発展と Heisenberg 方程式 (Schrödinger 方程式) による時間発展は何が違うのかというと、緩和が記述できるかどうか。量子力学におけるユニタリーな時間発展では系のノルムが保存しなければならないので、物理量の時間発展は振動し、緩和することはない。Schrödinger 方程式で物理量が減衰するようなグラフが得られたとしても、時間領域を広げれば再び値が立ち上がる (revival) はずである。仮に revival しないとしたら、それは時間発展のユニタリー性が壊れていることになる¹¹。時間発展のユニタリー性を壊すのは番先生の本でもやってます¹²。一方、開放系の統計力学では系・熱浴のハミルトニアンを分けて熱浴をトレースアウトするテクニックを用いてユニタリーな時間発展で緩和が記述できる。

1.2 パリティ選択則

1.2.1 あらまし

$n = 2$ 水素原子は 2s-軌道 ($l = 0$) と p-軌道 ($l = 1$) についての 3 重縮退 ($m = -1, 0, 1$) によって 4 重に縮退している。これに一樣な電場をかけると縮退していた準位が一部 Split する現象が見られる。これを Stark 効果と呼ぶ。 $n = 3$ 以上の励起状態についても同様の議論が可能。

一樣な電場のもとにある電子のエネルギーを求めようとすると、縮退のある摂動論に頼ることになる。が、その計算はなかなか面倒。具体的には水素原子の波動関数を

$$\langle r, \theta, \phi | \psi_{nlm} \rangle = \psi_{nlm}(r, \theta, \phi) = R_{nl}(r) Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (1.7)$$

と記述するとき、永年方程式

$$\begin{vmatrix} \langle \psi_{200} | \hat{z} | \psi_{200} \rangle - E_2^{(1)} & \langle \psi_{200} | \hat{z} | \psi_{210} \rangle & \langle \psi_{200} | \hat{z} | \psi_{211} \rangle & \langle \psi_{200} | \hat{z} | \psi_{21-1} \rangle \\ \langle \psi_{210} | \hat{z} | \psi_{200} \rangle & \langle \psi_{210} | \hat{z} | \psi_{210} \rangle - E_2^{(1)} & \langle \psi_{210} | \hat{z} | \psi_{211} \rangle & \langle \psi_{210} | \hat{z} | \psi_{21-1} \rangle \\ \langle \psi_{211} | \hat{z} | \psi_{200} \rangle & \langle \psi_{211} | \hat{z} | \psi_{210} \rangle & \langle \psi_{211} | \hat{z} | \psi_{211} \rangle - E_2^{(1)} & \langle \psi_{211} | \hat{z} | \psi_{21-1} \rangle \\ \langle \psi_{21-1} | \hat{z} | \psi_{200} \rangle & \langle \psi_{21-1} | \hat{z} | \psi_{210} \rangle & \langle \psi_{21-1} | \hat{z} | \psi_{211} \rangle & \langle \psi_{21-1} | \hat{z} | \psi_{21-1} \rangle - E_2^{(1)} \end{vmatrix} = 0 \quad (1.8)$$

を計算することになる。 $E_2^{(1)}$ は $n = 2$ における 1 次摂動エネルギー。 $E_2^{(1)}$ の 4 次方程式になって各軌道のエネルギーが求まる... というシナリオだが、真面目にやると計算がめんどくさい:

$$\langle \psi_{200} | \hat{z} | \psi_{210} \rangle \sim \int_0^\infty dr r^2 \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\phi (2-r) r e^{-r} r \cos \theta \quad (1.9)$$

みたいなのを 10 個くらい計算しなければいけない。とはいえ z 方向に一樣な電場を掛けるだけなら結構な数の項が消えそう。対称性を使って計算を簡略化したい。

1.2.2 奇関数・偶関数

ブラケット表記の期待値を波動関数に置き換える:

$$\langle \psi_\alpha | X | \psi_\beta \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi_\alpha^*(x) X(x) \psi_\beta(x) \quad (1.10)$$

¹⁰何言ってるかわからないかもしれませんが、場の理論界隈の誤解されやすいかなり難しい話です。

¹¹一般解の一部を捨てることにより、意図的にユニタリー性を壊すこともできる。

¹²量子と非平衡系の物理 量子力学の基礎と量子情報・量子確率過程 (2009)

積分区間から、被積分関数が奇関数ならゼロになる。奇関数、つまり空間反転¹³に対して符号が反転するものを「パリティが−」、偶関数を「パリティが+」と呼ぶことにする。

つまるところ永年方程式の各成分は積分なので、その関数 (ψ) やら演算子 (\hat{z}) やらのパリティを調べてあげれば消える項を見つけることができる。この性質を水素原子に限定せずに体系的に語るのがパリティ選択律である。

1.2.3 パリティ

永年方程式に含まれる要素に対するパリティを調べる。以下適当に無次元化してます。

動径波動関数 $R_{nl}(r)$

動径 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ のパリティ変換に関与しそうなのが動径波動関数 $R_{nl}(r)$ 。動径波動関数のざっくりとした具体形は

$$R_{nl}(r) \sim r^l e^{-r} L_{n+l}^{2l+1}(r) \quad (1.11)$$

L_{α}^{β} は Laguerre 陪多項式。とはいえこの形に特に重要ではない。空間反転は $\mathcal{P} : (x, y, z) \mapsto (-x, -y, -z)$ のように作用するので、そもそもパリティ変換によって r の符号は変化しない。動径 r がマイナスになることは物理的にあり得ない。

球面調和関数 Y_{lm}

角度成分 θ, ϕ のパリティは球面調和関数 Y_{lm} で決定される。ざっくりとした具体形:

$$Y_{lm} \sim (-1)^{(m+|m|)/2} P_l^{|m|}(\cos \theta) e^{im\phi} \quad (1.12)$$

P_{α}^{β} は Legendre 陪関数。 θ のパリティは $(-1)^m(-1)^l$, ϕ は $(-1)^m$ なので、磁気量子数のパリティ依存性は消える。

電場 \hat{z}

パリティ変換 $\mathcal{P} : (x, y, z) \mapsto (-x, -y, -z)$ より明らか。

ヤコビアン J

3次元球座標系のヤコビアン

$$J = r^2 \sin \theta \quad (1.13)$$

について。 r はパリティ変換に関与せず、 $\mathcal{P} : \sin \theta \mapsto \sin(\pi - \theta) = \sin \theta$ より θ についてもパリティは+。

パリティまとめ

以上の各要素についてのパリティをまとめる:

- 動径波動関数のパリティは+
- 球面調和関数のパリティは $(-1)^l$
- 電場のパリティは−
- ヤコビアンのパリティは+

¹³ここでいう「空間」とは、測度空間のこと。今回のお話で言えば r, θ, ϕ 。パリティ変換を \mathcal{P} とすると、 $\mathcal{P} : (x, y, z) \mapsto (-x, -y, -z)$, もしくは $\mathcal{P} : (r, \theta, \phi) \mapsto (r, \pi - \theta, \phi + \pi)$ である。これは三次元の図を書いてみればわかるでしょう。

1.2.4 パリティによる選択律構築の限界

まとめると、期待値のパリティは $(-1)^{l+l'+1}$ である。今回の $n = 2$ の水素原子であれば、 $l, l' = 0$ or 1 なので、期待値 $\langle \psi_{n'l'm'} | \hat{z} | \psi_{nlm} \rangle$ は方位量子数については $(l, l') = (1, 0), (0, 1)$ しか生き残らない。

今回対称性で語れるのはこの程度である¹⁴。他にも消せる項はあるが、これ以上は対称性だけではなく具体的に被積分関数を見ていく必要がある。積分のおおまかな具体系は以下の通り：

$$\langle \psi_{n'l'm'} | \hat{z} | \psi_{nlm} \rangle \sim \int dr r^3 R_{n'l'}(r) R_{nl}(r) \int d\theta P_{l'}^{m'}(\cos \theta) \cos \theta P_l^m(\cos \theta) \sin \theta \int d\phi e^{i(m'-m)\phi} \quad (1.14)$$

ここで $z = r \cos \theta$ としている。

Legendre 陪関数

パリティのみを考慮すると、 $\Delta l = l - l' = \text{odd}$ である全ての遷移¹⁵が許されることになるが、実験的には $\Delta l = \pm 1$ のみが許される。これはパリティからは導かれませんが数学的に導出は可能¹⁶。Legendre 陪関数は以下の漸化式を満たす：

$$z P_l^m(z) = \frac{l-m+1}{2l+1} P_{l+1}^m(z) + \frac{l-m}{2l+1} P_{l-1}^m(z) \quad (1.15)$$

式 (1.14) に代入すると、Legendre 陪関数の直交性

$$\int dz P_{l'}^{m'} P_l^m \sim \delta_{ll'} \quad (1.16)$$

より、 $\Delta l = \pm 1$ のみが許されることがわかる。

1.2.5 ϕ の積分

式 (1.14) を見てわかる通り、 $m = m'$ 以外では積分がゼロになる。

1.2.6 選択律まとめ

$n = 2$ 励起状態にある水素原子の Stark 効果の一次摂動における選択律は

- $\Delta l = \pm 1$
- $m = m'$

であることがわかった。つまり残るのは $\langle \psi_{200} | \hat{z} | \psi_{210} \rangle$ とその複素共役のみである。この結果は系の空間反転対称性の考察のみから得られたわけではないので「パリティ選択律」と呼ぶべきではないと思う。「 $n = 2$ 水素の Stark 効果における選択律」と呼ぶべき。

その他の励起の選択律はまた少し違う形になる可能性はある。また、2 次摂動まで考慮した場合にどうなるかも考えていない¹⁷。

¹⁴もちろん、もっと複雑な系を考えるとパリティのみでもっと踏み込んで語ることができる。例えば LS 結合を考えた系とか。

¹⁵ $\langle f | X | i \rangle$ の意味するところは、「 $|i\rangle$ に演算子 X が作用した結果を $|i'\rangle$ とすると、 $|i'\rangle$ は $\langle f |$ とどの程度重なるか」ということである。これ ($\langle f | i' \rangle \langle i' | f \rangle$) を遷移確率と呼ぶ。つまり Stark 効果の計算は物理的に「一様な電場がかかることによって状態は各量子数に対してどのような遷移が許されるか」という話に還元される。

¹⁶量子力学の枠組みで数学的に導けないが実験的に現れるような現象があった場合はそういう「要請」を課することになる。例えば、波動関数の境界条件（ディリクレ境界条件）は確率解釈の要請であるし、波動関数の時間発展が Schrödinger 方程式で記述されるのもまた量子力学の要請である。また、粒子と呼ばれるものはすべて Boson と Fermion に分類できる、ということも要請のひとつ。

¹⁷暇があったら考えてみてください。そんなに難しくはないはず

1.2.7 物理的解釈

一様電場には電子の回転運動¹⁸の向きを変えることはできないことから、磁気量子数 m が変化するような遷移が禁制であることは直感と一致している。一方で回転の向きを変えることができる可能性があるのは電場ではなく磁場である。磁場がかかった系で縮退していた準位が Split する現象のことを Zeeman 効果という。こちらでは $\Delta m = 0, \pm 1$ の遷移が許されている¹⁹。

1.3 Fermion 界限 Tips

山中研が苦手とする角運動量量子化・Fermion の反対称性と Slater 行列・スピン自由度などをまとめる。

1.3.1 角運動量演算子

3次元球座標 Schrödinger 方程式:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) + V(r) \right] \psi = E\psi \quad (1.17)$$

下線部が運動エネルギー項となっている。古典論ではこの運動エネルギー項をさらに動径方向 r と角度方向 θ, ϕ に分解できた。角度方向の運動エネルギーは角運動量ベクトル

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad (1.18)$$

を用いて表現できる²⁰:

$$|\mathbf{p}|^2 = \left(\frac{1}{r} \mathbf{r} \cdot \mathbf{p} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} |\mathbf{L}| \right)^2 \quad (1.19)$$

この推論から言えば、Schrödinger 方程式は

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{2\mu r^2} |\mathbf{L}|^2 + V(r) \right] \psi = E\psi \quad (1.20)$$

となると考えられる。これを満たすような \mathbf{L} を探したい。もちろん、 \mathbf{L} の定義に含まれる x, p が演算子なので本来は $\hat{\mathbf{L}}$ 書くべき角運動量を量子化した演算子になっている。

具体系を書き下す:

$$\mathbf{L} = \hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{p}} = -i\hbar \mathbf{x} \times \nabla = \begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = -i\hbar \begin{pmatrix} y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \\ z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \\ x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \quad (1.21)$$

これは極座標に書き直すと

$$\mathbf{L} = -i\hbar \left(\mathbf{e}_\phi \frac{\partial}{\partial \theta} - \mathbf{e}_\theta \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \quad (1.22)$$

¹⁸もちろん電子が原子の周りを回転しているというのは古典的解釈であることに注意。

¹⁹しかしながら、この古典的な描像とのアナロジーをもってして現象を正当化するのはとてもよくない。なぜなら、量子と古典との対応関係は(当然ながら)何も保証されていないから。全ての量子系の現象が古典とのアナロジーで説明できたら、もはや量子論は必要なくなる。

²⁰前野昌弘: よくわかる量子力学 (東京図書, 2011) pp. 260-261

となるので、これの x, y, z 成分を抜き出すと

$$L_x = \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{L} = -i\hbar \left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \cos \phi \frac{\partial}{\partial \phi} - \sin \phi \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \quad (1.23)$$

$$L_y = \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{L} = -i\hbar \left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \sin \phi \frac{\partial}{\partial \phi} + \cos \phi \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \quad (1.24)$$

$$L_z = \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{L} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (1.25)$$

であることがわかる。こいつを使って $|\mathbf{L}|^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$ を計算する:

$$|\mathbf{L}|^2 = -\hbar^2 \left[\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] \quad (1.26)$$

この項はちゃんと Schrödinger 方程式の角度方向に対応している。つまり、ハミルトニアンを動径方向と角度方向に分割することができたことになる。これによって、波動関数が $R(r)Y(\theta, \phi)$ のように分割でき、 R と Y は別々に解くことができる。

さて、以下ではハミルトニアンと角運動量の同時固有状態を求めていくことにする。 L^2 が方位量子数 l , L_z が磁気量子数 m を司る演算子になり²¹, H, L^2, L_z の同時固有状態が $Y(\theta, \phi) = \langle \theta, \phi | l, m \rangle$ である。 $|l, m\rangle$ は Fock 空間を張るので生成消滅演算子 L_{\pm} で m を上げたり下げたりすることができる。これで角度方向の固有状態が求まる。

1.3.2 スピン演算子

スピンは量子状態に固有の内部自由度であり、 $Y(\theta, \phi)$ の θ, ϕ のような古典力学に対応する外部変数を持たないことが特徴。スピン演算子 \hat{s} は軌道角運動量演算子と同一ような交換関係を持つ:

$$[s_x, s_y] = i\hbar s_z \quad [s_y, s_z] = i\hbar s_x \quad [s_z, s_x] = i\hbar s_y \quad (1.27)$$

このスピン演算子の線型結合で新しい演算子を導入する:

$$s_{\pm} = s_x \pm i s_y \quad s_{\pm}^{\dagger} = s_{\mp} \quad (1.28)$$

軌道角運動量と同様に s^2, s_z は同時固有状態 $|s, m\rangle$ を持ち、 s_{\pm} で m を弄ることができる。

1.3.3 スピン $\frac{1}{2}$ とは?

電子のスピンは $\frac{1}{2}$ だが、これ如何に?

Stern-Gerlach の実験により銀電子のビームが2つにスプリットする現象が見られた。磁場に引き寄せられるものと反発するものの2つである。磁場に関与しているのだから磁気モーメントによる効果であると考えると以下のような論法になる。

方位量子数が l であれば磁気量子数 m が取れる値は $2l + 1$ 個あるので $l = \frac{1}{2}$ にすれば取りうる m は2個になるだろう。また m は $[-l, l]$ の範囲で1ずつ増減したものが存在できるので $m = \pm \frac{1}{2}$ となるだろう。

しかしながら m が整数でないことは de Broglie 条件を破ってしまうのでマズい。なのでこれは m とは関係しているものの、別に議論されるべき自由度だろう。

というわけで、方位量子数 l とは別のスピン量子数 s とスピン磁気量子数 m を持った状態 $|s, m\rangle$ を考えようということ。スピン磁気量子数 m は非整数でも構わないものとする。ここで

$$\left| s = \frac{1}{2}, m = \frac{1}{2} \right\rangle = |\uparrow\rangle \quad (1.29)$$

$$\left| s = \frac{1}{2}, m = -\frac{1}{2} \right\rangle = |\downarrow\rangle \quad (1.30)$$

²¹別に L_x でも L_y でも構わないが、 L_z が一番簡単な形をしているのでこれを選んだ。

のように書いてあげることでアップスピン・ダウンスピンを定義する。これが状態に直積として掛かることになるので、電子 (スピン 1/2 のフェルミオン) の状態は $|r\rangle \otimes |l, m\rangle \otimes |s, m\rangle$ である。

スピン量子数が $s = 1$ のときは、スピン磁気量子数は $m = 0, \pm 1$ という 3 つの値を取ることができる。

1.3.4 Singlet or Triplet

スピン 1 重項・3 重項とはなんぞや？

Pauli の排他律 (というか Fermion の反対称性の要請) により、同じエネルギー準位を 2 つ以上の粒子が占有することが許されていない。スピンが反平行であれば同じエネルギー準位に収まることができるものの、クーロン斥力が大きくなる。スピンが平衡な電子が 1 つ励起した場合、最低エネルギー状態にはフェルミホールができるのでクーロン反発力が小さい分エネルギー的に得をすることになる。どちらが真の基底状態かはよくわからない。反平行なものを Singlet, 平行なものを Triplet と呼ぶ。

Fermion のスピン量子数をそれぞれ s_1, s_2 とすると、全スピン量子数は $S = s_1 + s_2 = 0, 1$ のみが許され、 $S = 0$ のときは m は 1 つ (Singlet) $S = 1$ のときに m は 3 つ (Triplet) の値を取ることができる。これが名前の由来。これ以上は角運動量の合成を勉強しましょう。

1.4 Baker-Campbell-Hausdorff 公式

Schrödinger 方程式の形式解とかで演算子が指数関数の肩に乗っかることはよくある。この処理を具体化する。まず、演算子の指数関数が

$$e^A = I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \cdots = \sum_n \frac{A^n}{n!} \quad (1.31)$$

というお決まりの Taylor 展開で定義されていることから始まる。

1.4.1 Campbell-Hausdorff の公式

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A,B]} \quad \text{where } [A, [A, B]] = [B, [A, B]] \quad (1.32)$$

証明

$$[A^n, B] = n[A, B]A^{n-1} \quad (1.33)$$

$$\begin{aligned} e^{At}B &= Be^{At} + [e^{At}, B] = Be^{At} + \sum_n \frac{t^n}{n!} [A^n, B] \\ &= Be^{At} + t[A, B] \sum_n \frac{(tA)^{n-1}}{(n-1)!} = Be^{At} + t[A, B]e^{At} \end{aligned} \quad (1.34)$$

の 2 つを用いると

$$\partial_t (e^{At}e^{Bt}) = e^{At}Ae^{Bt} + e^{At}Be^{Bt} = e^{At}(A+B)e^{Bt} = (A+B+t[A, B])e^{At}e^{Bt} \quad (1.35)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial_t (e^{At}e^{Bt})}{e^{At}e^{Bt}} = \partial_t \ln(e^{At}e^{Bt}) = (A+B+t[A, B]) \quad (1.36)$$

$$\Rightarrow \ln(e^{At}e^{Bt}) = (A+B)t + \frac{t^2}{2}[A, B] + C \quad (1.37)$$

$$\therefore e^{At}e^{Bt} = Ce^{(A+B)t + \frac{t^2}{2}[A, B]} \quad (1.38)$$

ここで

$$C = 1 \quad \text{where } t = 0 \quad (1.39)$$

$$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]} \quad \text{where } t = 1 \quad (1.40)$$

$$\begin{aligned} \implies e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A,B]} &= e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]} e^{-\frac{1}{2}[A,B]} \\ &= e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]-\frac{1}{2}[A,B]+\frac{1}{2}[A+B+\frac{1}{2}[A,B],-\frac{1}{2}[A,B]]} \\ &= e^{A+B} \end{aligned} \quad (1.41)$$

$[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0$ のときに成立しているように見える... 計算ミス?

1.4.2 Baker-Hausdorff の補助定理

$$e^A B e^A = B + [B, A] + \frac{1}{2!} [[B, A], A] + \dots \quad (1.42)$$

証明

$e^{-\theta A} B e^{\theta A}$ について

$$\partial_\theta e^{-\theta A} B e^{\theta A} = e^{-\theta A} [B, A] e^{\theta A} \quad (1.43)$$

$$\partial_\theta^2 e^{-\theta A} B e^{\theta A} = e^{-\theta A} [[B, A], A] e^{\theta A} \quad (1.44)$$

\vdots

$e^{-\theta A} B e^{\theta A}$ を Taylor 展開:

$$e^{-\theta A} B e^{\theta A} = f(0) + \partial_\theta f(0)\theta + \frac{1}{2!} \partial_\theta^2 f(0)\theta^2 + \dots \quad (1.45)$$

$$= B + [B, A]\theta + \frac{1}{2!} [[B, A], A]\theta^2 + \dots \quad (1.46)$$

$\theta = 1$ を代入すれば証明完了.

かわいい形式

$A \times B \equiv [A, B]$ とすると (1.46) は $e^{A \times B}$ とかける.

1.5 複素積分基礎

1.5.1 Cauchy の積分公式

任意の閉曲線 C によって囲まれる任意の点 a について以下の式が成立する:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C dz \frac{f(z)}{z-a} \quad (1.47)$$

1.5.2 Taylor 展開

点 a を中心とする半径 r の円 C の内部で正則な関数 $f(z)$ について、次の Cauchy の積分公式が成立する:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C ds \frac{f(s)}{s-z} \quad (1.48)$$

さらに

$$\frac{1}{s-z} = \frac{1}{(s-a)-(z-a)} = \frac{1}{s-a} \frac{1}{1 - \frac{z-a}{s-a}} \quad (1.49)$$

$$= \frac{1}{s-a} \left(1 + \frac{z-a}{s-a} + \left(\frac{z-a}{s-a} \right)^2 + \cdots \right) \quad (1.50)$$

これを積分公式に代入:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C ds \frac{f(s)}{s-a} \left(1 + \frac{z-a}{s-a} + \left(\frac{z-a}{s-a} \right)^2 + \cdots \right) \quad (1.51)$$

ここで

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C ds \frac{f(s)}{s-a} \quad (1.52)$$

を a で微分:

$$f'(a) = \frac{1!}{2\pi i} \int_C ds \frac{f(s)}{(s-a)^2} \quad (1.53)$$

$$f''(a) = \frac{2!}{2\pi i} \int_C ds \frac{f(s)}{(s-a)^3} \quad (1.54)$$

$$f'''(a) = \frac{3!}{2\pi i} \int_C ds \frac{f(s)}{(s-a)^4} \quad (1.55)$$

$$\vdots \quad (1.56)$$

これを代入すると Taylor 展開公式を得る:

$$f(z) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n + \cdots \quad (1.57)$$

1.5.3 Laurent 展開

前節の C を C_1 (半径 r_1) とし, C_1 の同心円であつ C_1 よりも半径が小さい円を C_2 (半径 r_2) とする. $r_2 < |z| < r_1$ を満たすとき, $f(z)$ について次の積分公式が成立する:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} ds \frac{f(s)}{s-z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} ds \frac{f(s)}{s-z} \quad (1.58)$$

右辺第一項は前節と同じ. 第二項は C_2 上の複素数 s について

$$\frac{1}{s-z} = \frac{1}{(s-a)-(z-a)} = -\frac{1}{z-a} \frac{1}{1 - \frac{s-a}{z-a}} \quad (1.59)$$

$$= -\frac{1}{z-a} \left(1 + \frac{s-a}{z-a} + \left(\frac{s-a}{z-a} \right)^2 + \cdots \right) \quad (1.60)$$

が成立する. このとき積分公式は

$$\begin{aligned} f(z) &= \cdots + \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \cdots + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n \end{aligned} \quad (1.61)$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C ds \frac{f(s)}{(s-a)^{n+1}} \quad (1.62)$$

$n \geq 0$ については Taylor 展開になっているので, これは $n < 0$ についての拡張になっている.

正則関数は Laurent 展開しても Taylor 展開になってしまう. $f(z)$ が一位の極を持っていれば, Laurent 展開の 2 位以上の極を持つ項は消えてしまう. それは

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C ds \frac{f(s)}{(s-a)^k} = f(a) \delta_{1k} \quad (1.63)$$

であることから明らか.

1.5.4 留数定理

Cauchy の積分公式から $f(z)$ を積分したとき, c_{-1} の項のみが生き残る. ということで m 位の極を持つときの c_{-1} を求めるのが留数定理:

$$\text{Res}(f; a_1) = \lim_{z \rightarrow a} (z-a) f(z) \quad (1.64)$$

$$\text{Res}(f; a_m) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (z-a)^m f(z) \quad (1.65)$$

$$\int_C dz f(z) = 2\pi i \sum_k \text{Res}(f; a_k) \quad (1.66)$$

1.5.5 実関数への応用

1.5.6 Cauchy の主値

1.5.7 Sokhotski-Plemelj の公式

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{x \pm i\varepsilon} = \mathcal{P} \frac{1}{x} \mp i\pi \delta(x) \quad (1.67)$$

第2章 Green関数

2.1 Green関数の一般形

2.1.1 数学寄りの定義

Green 関数

ある微分演算子 \mathcal{D} について

$$\mathcal{D}G(x, x') = \delta(x - x') \quad (2.1)$$

が成立するとき, G を \mathcal{D} に対する Green 関数と呼ぶ.

ただし, 境界条件がないと $G(x, x')$ は一意に決まらない.

2.1.2 物理寄りの定義

ある線形エルミート演算子 L が

$$L|a\rangle = |a\rangle \quad (2.2)$$

のように定義されているとする. $|a\rangle$ の形式解は

$$|a\rangle = L^{-1}|a\rangle \quad (2.3)$$

のように表される. このとき L^{-1} を Green 演算子と呼び $L^{-1} = G$ と書く. (2.3) を任意の連続基底¹で縮約を取り, 完全系を用いて式変形をする:

$$\langle l|a\rangle = \langle l|G|a\rangle \quad (2.4)$$

$$= \int dl' \langle l|G|l'\rangle \langle l'|a\rangle \quad (2.5)$$

$$\left(= \int dl' G(l, l') \psi(l', a) \right) \quad (2.6)$$

このとき, $\langle l|G|l'\rangle$ を演算子 L に対する Green 関数と呼ぶ.

ここで定常 Schrödinger 方程式

$$(E - \hat{H})\psi(x) = 0 \iff \hat{L}\psi(x) = 0 \quad (2.7)$$

が与えられたとする. \hat{L} に対する Green 関数は $G = (E - \hat{H})^{-1}$ と表される. また

$$\hat{L}G = (E - \hat{H})G = I \quad (2.8)$$

という関係に左右からハミルトニアン²の固有状態²を作用させると

$$\langle x|(E - \hat{H})G|x'\rangle = \langle x|I|x'\rangle \quad (2.9)$$

$$\int dx'' \langle x|(E - \hat{H})|x''\rangle \langle x''|G|x'\rangle = \delta(x - x') \quad (2.10)$$

$$\int dx'' (E - H)\delta(x - x'') \langle x''|G|x'\rangle = \delta(x - x') \quad (2.11)$$

¹生成消滅演算子の固有状態などを持ってくると基底は離散になってしまうので Delta 関数が現れない.

²固有状態でないと $\langle x|(E - \hat{H})|x''\rangle = (E - H)\langle x|x''\rangle$ のような変形が正当化されない.

よって見慣れた形式

$$(E - H)G(x, x') = \delta(x - x') \quad (2.12)$$

を得る.

2.1.3 Green 演算子のスペクトル表示

生成消滅演算子の粒子数状態の完全系を用いて

$$G = (E - \hat{H})^{-1} = \sum_{nn'} |n\rangle \langle n| (E - \hat{H})^{-1} |n'\rangle \langle n'| \quad (2.13)$$

$$= \sum_{nn'} (E - E_n)^{-1} |n\rangle \langle n'| \delta_{nn'} \quad (2.14)$$

$$= \sum_{nn'} \frac{|n\rangle \langle n|}{(E - E_n)} \quad (2.15)$$

と表すことができる. ただし, ハミルトニアンが生成消滅演算子の 2 次形式で記述できていなければならない.

2.2 量子力学と Green 関数

2.2.1 摂動展開と Green 関数

定常シュレディンガー方程式

$$H\psi(x) = E\psi(x) \quad (2.16)$$

が与えられており, ハミルトニアンは

$$H = H_u + H_p \quad (2.17)$$

と書けるものとする. H_u, H_p はそれぞれ非摂動ハミルトニアン, 摂動ハミルトニアンである³. (2.16) を変形する:

$$(E - H_u)\psi(x) = H_p\psi(x) \quad (2.18)$$

非摂動ハミルトニアンを線形演算子として線形演算子 L_u 及び Green 関数 G_u を定義する:

$$L_u = E - H_u \quad G_u = (E - H_u)^{-1} \quad (2.19)$$

さらに, Schrödinger 方程式は

$$(L_0 - H_p)\psi(x) = 0 \quad (2.20)$$

と書け, この式の Green 関数は

$$G = (L_0 - H_p)^{-1} \quad (2.21)$$

である. ここで, 一般に非可換な演算子 A, B に対する逆演算子は

$$\frac{1}{A} = \frac{1}{B} + \frac{1}{B}(B - A)\frac{1}{A} \quad (2.22)$$

$$= \frac{1}{B} + \frac{1}{B}(B - A)\left(\frac{1}{B} + \frac{1}{B}(B - A)\frac{1}{A}\right) \quad (2.23)$$

$$= \frac{1}{B} + \frac{1}{B}(B - A)\frac{1}{B} + \frac{1}{B}(B - A)\frac{1}{B}(B - A)\frac{1}{A} \quad (2.24)$$

$$= \frac{1}{B} + \frac{1}{B}(B - A)\frac{1}{B} + \frac{1}{B}(B - A)\frac{1}{B}(B - A)\left(\frac{1}{B} + \frac{1}{B}(B - A)\frac{1}{A}\right) \quad (2.25)$$

$$= \dots$$

³摂動部を解析的に解ける線形項に, 非摂動部を解析的に解けない非線形項にするのが一般的. 量子力学において解析的に解けるものは調和振動子くらいしかないが, 生成消滅演算子の 2 次形式になってさえいれば Bogoliubov 変換などを通して対角化が可能な形式にできる. 一方相互作用項は非線形 (生成消滅演算子の 4 次) になっているので解析的に解けない.

のように逐次展開を繰り返すことができる. $A \rightarrow A - B$, $B \rightarrow A$ と変形することにより

$$\frac{1}{A - B} = A^{-1} + A^{-1}BA^{-1} + A^{-1}BA^{-1}BA^{-1} + \dots \quad (2.26)$$

という公式を得る. これを用いると

$$G = \frac{1}{L_u - H_p} = L_u^{-1} + L_u^{-1}H_pL_u^{-1} + L_u^{-1}H_pL_u^{-1}H_pL_u^{-1} + \dots \quad (2.27)$$

$$= G_0 + G_0H_pG_0 + G_0H_pG_0H_pG_0 + \dots \quad (2.28)$$

$$= G_0 + G_0H_pG = G_0 + GH_pG_0 \quad (2.29)$$

のように, Full のハミルトニアン \hat{H} の Green 関数は非摂動 Green 関数を用いて展開できる.

ここで, ハミルトニアン $\hat{H} = \hat{H}_u + \hat{H}_p$ の固有状態 $|n\rangle$ について

$$(E - \hat{H})|n\rangle = 0 \quad (2.30)$$

$$(E - \hat{H}_u)|n\rangle = \hat{H}_p|n\rangle \quad (2.31)$$

$$|n\rangle = \frac{\hat{H}_p}{E - \hat{H}_u}|n\rangle = G_u\hat{H}_p|n\rangle \quad (2.32)$$

が成立している. さらに左から $\langle x|$ を作用させる:

$$\langle x|n\rangle = \int dx' dx'' \langle x|G_u|x''\rangle \langle x''|\hat{H}_p|x'\rangle \langle x'|n\rangle \quad (2.33)$$

$$\psi_n(x) = \int dx' dx'' G_u(x, x'')H_p(x'')\delta(x' - x'')\psi_n(x') \quad (2.34)$$

$$= \int dx' G_u(x, x')H_p(x')\psi_n(x') \quad (2.35)$$

$\langle x|$ を作用させるのは x 表示にして微分方程式を解くようなものなので, これには境界条件が足りない. $H_p = 0$, つまり摂動項がない場合の特解を $\langle x|n\rangle_0 = \psi_{0n}(x)$ とすると

$$\psi_n(x) = \psi_{0n}(x) + \int dx' G_u(x, x')H_p(x')\psi_n(x') \quad (2.36)$$

となる. ただしこれはあくまで形式解である. 両辺に未知関数 $\psi_n(x)$ があるので, 繰り返し代入することで展開していく:

$$\begin{aligned} \psi_n(x) &= \psi_{0n}(x) + \int dx' G_u(x, x')H_p(x') \left[\psi_{0n}(x') + \int dx'' G_u(x', x'')H_p(x'')\psi_n(x'') \right] \\ &= \psi_{0n}(x) + \int dx' G_u(x, x')H_p(x')\psi_{0n}(x') + \int dx' \int dx'' G_u(x, x')H_p(x')G_u(x', x'')H_p(x'')\psi_n(x'') \\ &= \dots \end{aligned} \quad (2.37)$$

これが Green 関数による具体的な摂動計算手法である.

2.2.2 散乱問題における Green 関数

ポテンシャル壁の幅を a , 入射波の波数を k_1 , ポテンシャル壁内部の波数を k_2 , 透過波の波数を k_3 , また各波動の規格化係数を c_i とするような散乱問題を考える. 入射波を平面波として波動関数の接続条件を考慮することにより, 透過率は

$$\frac{c_3}{c_1} = \frac{4k_1k_2e^{i(k_2-k_1)a}}{(k_1-k_2)^2 - (k_1+k_2)^2e^{2ik_2a}} \quad (2.38)$$

と計算できる. この手の散乱問題は Green 関数を形式的に求めることができる. 入射波が平面波であることから Green 演算子のスペクトル表示を用いると

$$G = \int dk' \frac{|k'\rangle \langle k'|}{(k^2 - k'^2)} \quad (2.39)$$

となる⁴。よってグリーン関数は

$$G(x, x') = \langle x | G | x' \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dk' \frac{\langle x | k' \rangle \langle k' | x' \rangle}{(k^2 - k'^2)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk' \frac{e^{ik'(x-x')}}{(k^2 - k'^2)} \quad (2.40)$$

のようにして得られる。この積分を具体的に計算することになるが、被積分関数に極が存在するので留数定理を用いることになる。 k' 軸上に特異点があると計算が面倒になるので、 $k \rightarrow i\epsilon$ のように極を移動し、後々 $\epsilon \rightarrow 0$ とする極限を取ることにする。極を移動した Green 関数は

$$G^\epsilon(x, x') = -\frac{1}{2\pi} \int dk' \frac{e^{ik'(x-x')}}{(k' + k + i\epsilon)(k' - k - i\epsilon)} \quad (2.41)$$

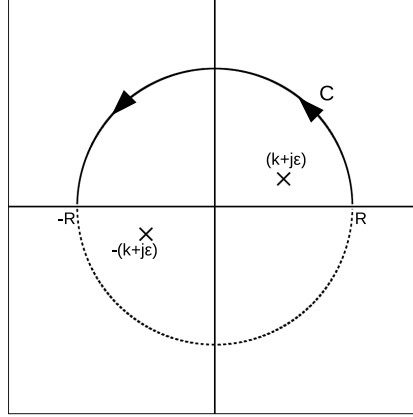
とする。極が k' 軸をはさんで上下に分かれているので

$$G^\epsilon(x, x') = \begin{cases} G_+^\epsilon(x, x') & (x > x') \\ G_-^\epsilon(x, x') & (x < x') \end{cases} \quad (2.42)$$

と分割することにする。

⁴ k は連続変数なので和が積分に変化した。

i) $x > x'$ の場合



$$F_+ = \int_C dk' \frac{e^{ik'(x-x')}}{(k' + k + i\epsilon)(k' - k - i\epsilon)} = \int_{-R}^R dk' f_+(k') + \int_{C_1} dk' f_+(k') \quad (2.43)$$

ただし

$$f_+(k') = \frac{e^{ik'(x-x')}}{(k' + k + i\epsilon)(k' - k - i\epsilon)} \quad (2.44)$$

ここで留数定理

$$\int_C dz f(z) = 2\pi i \sum_j R(a_j) \quad (2.45)$$

を用いる. 極を a_j , Laurent 展開における $(z - a)^{-n}$ の係数を $R(a)$ としている. 今回の積分には 1 位の極しか含まれていないので Laurent 展開は

$$R(a) = \lim_{z \rightarrow a} (z - a) f(z) \quad (2.46)$$

で与えられる. 以上より, (2.43) は

$$F_+ = 2\pi i \lim_{k' \rightarrow k + j\epsilon} \left[(k' - k - j\epsilon) \frac{e^{ik'(x-x')}}{(k' + k + i\epsilon)(k' - k - i\epsilon)} \right] \quad (2.47)$$

$$= \pi i \frac{e^{i(x-x')(k+j\epsilon)}}{k + j\epsilon} \quad (2.48)$$

と計算できる. さらに

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_1} dk' f_+(k') = 0 \quad (2.49)$$

であることはすぐにわかる. 以上から

$$G_+^\epsilon(x, x') = -\frac{1}{2\pi} \pi i \frac{e^{i(x-x')(k+j\epsilon)}}{k + j\epsilon} \quad (2.50)$$

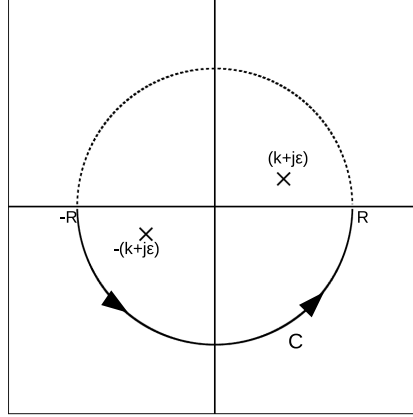
$$\therefore G_+(x, x') = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} G_+^\epsilon(x, x') = -\frac{i}{2k} e^{ik(x-x')} \quad (2.51)$$

のように, Green 関数を具体的に計算できた.

ii) $x < x'$ の場合 先程と同様の計算より,

$$G_-(x, x') = -\frac{i}{2k} e^{-ik(x-x')} \quad (2.52)$$

となる.



まとめると,

$$G_{\pm}(x, x') = -\frac{i}{2k} e^{\pm ik(x-x')} \quad (2.53)$$

グリーン関数が求まったので, これを用いて波動関数を求める. 波動関数の摂動展開は

$$\psi(x) = \psi_0(x) + \int dx' G_+(x, x') H_p(x') \psi(x') \quad (2.54)$$

と表される. $\psi_0(x)$ は非摂動解なので平面波であり, H_p はポテンシャルである. つまり, 領域ごとに H_p を変えてこの積分を計算すれば良い.

2.3 場の理論における Green 関数

場の理論と書きましたが, 以下では第二量子化された量子力学⁵における Green 関数についてまとめます.

2.3.1 時間依存自由粒子 Green 関数

場の演算子 $\psi(x, t)$ は Schrödinger 方程式

$$(i\hbar\partial_t - H) \psi(x, t) = 0 \quad (2.55)$$

で記述される. 今までの 1 粒子波動関数と同様に, 非摂動部の Green 演算子は

$$G_0(x, t) = (i\hbar\partial_t - H_0)^{-1} \quad (2.56)$$

と表せ, グリーン関数は

$$(i\hbar\partial_t - H_0) G_0(x, x'; t, t') = \delta(t - t') \delta(x - x') \quad (2.57)$$

である. この微分方程式の解は 2 つ存在する:

$$G_0^R(k, \tau) = -i\theta(\tau)e^{-iE_k\tau} \quad \tau = t - t' \quad (2.58)$$

$$G_0^A(k, \tau) = i\theta(\tau)e^{-iE_k\tau} \quad \tau = t' - t \quad (2.59)$$

G^R を遅延グリーン関数, G^A を先進グリーン関数と呼ぶ. 現象が時間に対して未来に進むのが遅延グリーン関数, 過去に進むのが先進グリーン関数になっている⁶. 因果律を考慮しなくて良い場合であればどちらを用いてもよいが, 遅延グリーン関数の方が物理的な直感と合致している.

⁵「第二量子化された量子力学」と「場の量子論」は明確に区別されるべきです. 量子力学はあくまで Schrödinger 方程式によって真空 (基底状態) が決まるが, 場の量子論では真空は理論を閉じるように選ぶものである. 第二量子化における真空は消滅演算子 a が消去する状態で確定しますが, 場の量子論においては真空期待値 $\langle 0 | \psi | 0 \rangle$ がゼロでない値を持つことが許されます. こういう構造がないと, 粒子が存在する状態を真空とする BEC のような物理を記述できなくなります.

⁶数学的には時間が反転するような解を持っていたりもおかしいし, むしろ持っているべき. 時間発展がユニタリーなら解は時間反転対称性がある.

2.3.2 相関関数と温度 Green 関数

系が熱平衡状態にあるとき, $t = 0$ の基底状態 $|\psi(0)\rangle$ を用いて Green 関数は, 可観測量 A, B の時間相関関数で与えられる⁷:

$$G(t - t') \equiv \langle\langle A(t)B(t') \rangle\rangle = -i \langle\psi(0)| T[A(t)B(t')] |0\rangle \quad (2.60)$$

$A(t), B(t')$ は Heisenberg 描像, $T[]$ は時間順序積. T 積は因果律を守るために導入されている.
有限温度系における期待値は

$$\langle A \rangle = \frac{\text{Tr} A e^{-\beta H}}{\text{Tr} e^{-\beta H}} \quad (2.61)$$

で与えられるので, 上の Green 関数は

$$G(t - t') = -i \frac{\text{T}[\text{Tr} A(t)B(t')e^{-\beta H}]}{\text{Tr} e^{-\beta H}} \quad (2.62)$$

$$= -i \frac{\text{T}[\text{Tr} e^{iHt/\hbar} A e^{-iHt/\hbar} e^{iHt'/\hbar} B e^{-iHt'/\hbar} e^{-\beta H}]}{\text{Tr} e^{-\beta H}} \quad (2.63)$$

$$= -i \frac{\text{T}[\text{Tr} e^{iHt/\hbar} A B e^{-(it/\hbar + \beta)H}]}{\text{Tr} e^{-\beta H}} \quad (2.64)$$

これを温度 Green 関数 (松原 Green 関数) と呼ぶ.

⁷Green 関数が系に何かしらの揺動を与えた時の応答と解釈するなら自然な定義と言える.

第3章 超伝導

超伝導の現象論である Ginzburg-Landau 理論と BCS 理論を扱う.

3.1 超電導の基礎

3.1.1 超電導体の性質

- 電気抵抗ゼロ
- 磁束の侵入を許さない (flux exclusion)
- 磁束の排除が起こる (flux expulsion)

超伝導でない抵抗ゼロの金属では flux expulsion はない.

3.1.2 磁束の量子化

磁束の量子化は超伝導の巨視波動関数 $\psi = \psi_0 e^{i\theta}$ の一価性の要請から導かれる.

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_s &= \frac{e}{2m} \frac{\hbar}{i} (\psi^* \nabla - \nabla \psi) - \frac{e^2}{m} |\psi|^2 \mathbf{A} \\ &= -\frac{e}{m} |\psi|^2 (\hbar \nabla \theta + e \mathbf{A}) \end{aligned} \quad (3.1)$$

$\mathbf{J}_s = n_s e v_s = |\psi|^2 e v_s$ であることに着目すると

$$\nabla \theta = -\frac{m}{\hbar} \mathbf{v}_s - \frac{e}{\hbar} \mathbf{A} \quad (3.2)$$

となる. 波動関数の一価性が保証されるには, 閉曲面 C に沿って線積分したものが 2π の整数倍でなければならない:

$$\int_C d\ell \nabla \theta = \int_C d\ell v_s = 2\pi n \quad (3.3)$$

循環が量子化されている.

3.2 超伝導の現象論 : Ginzburg-Landau 理論

超伝導を現象論的にモデル化した Ginzburg-Landau 理論について.

3.2.1 相転移と Oder parameter

ハミルトニアンが

$$H = -2 \sum_{i,j} J s_i \cdot s_j \quad (3.4)$$

と書けるようなスピン相互作用を考える。これをハイゼンベルグ模型という。系の平衡状態は Helmholtz 自由エネルギー

$$F = U - TS \quad (3.5)$$

を最小にするように決まる。低温 ($T \ll U/S$) ならば内部エネルギー $U = \langle H \rangle$ が leading であり、これを最小化するようにスピンの向きが揃う。これを強磁性体と呼ぶ。一方で高温ならばエントロピーの項が優勢なのでエントロピーが最大になるようにスピンの向きがバラバラになる。これを常磁性体と呼ぶ。

スピンの向きが揃うときに真空期待値が値を持ち、これを秩序変数と呼ぶ。秩序変数がゼロでない値に変化するとき、これを相転移と呼ぶ。

3.2.2 Ginzburg-Landau 方程式

自由エネルギーを秩序変数 ψ の冪で展開:

$$\mathcal{F}[\psi] = \mathcal{F}_0 + \alpha |\psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\psi|^4 \quad (3.6)$$

ここで $\alpha = a(T - T_C)$ である。自由エネルギーの最小を与える $|\psi|$ は微分すれば

$$|\psi| = \begin{cases} 0 & (T > T_C) \\ \sqrt{\frac{a(T_C - T)}{\beta}} & (T < T_C) \end{cases} \quad (3.7)$$

と求められる。そもそも $|\psi| = M$ (磁化) と考えるのが自然で、なおかつ時間反転対称性を持っているので M の奇数次はない。 $\alpha < 0$ のときに $|\psi| = 0$ 以外の極値を持つようになる。 $\alpha(T) = a(T - T_C)$ とすれば相転移を記述できる。

ψ が空間一様でない、つまり ψ が r 依存性を持つ場合は

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 + \int d\mathbf{r} f(\mathbf{r}) \quad (3.8)$$

$$= \mathcal{F}_0 + \int dV \left[\alpha |\psi(\mathbf{r})|^2 + \frac{\beta}{2} |\psi(\mathbf{r})|^4 \right] \quad (3.9)$$

と書くことにする。外部磁場などがある場合、粒子の運動エネルギーによる補正項を加えなければならない:

$$\int dV \frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \psi(\mathbf{r})|^2 \quad (3.10)$$

自由エネルギーにはゲージ対称性があるので、ゲージ変換に対して不変な形で導入しなければならない:

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 + \int dV \left[\frac{\hbar^2}{2m} \left| \left(\nabla - \frac{ie}{\hbar} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \right) \psi(\mathbf{r}) \right|^2 + \alpha |\psi(\mathbf{r})|^2 + \frac{\beta}{2} |\psi(\mathbf{r})|^4 + \frac{\mu_0}{2} (\nabla \times \mathbf{A})^2 \right] \quad (3.11)$$

この変分がゼロになるところを探す:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{F} &= \int dV \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\nabla - \frac{ie}{\hbar} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \right)^2 \psi(\mathbf{r}) + \alpha \psi(\mathbf{r}) + \beta |\psi(\mathbf{r})|^2 \psi(\mathbf{r}) \right] \delta \psi^*(\mathbf{r}) \\ &+ \int \left[\frac{\hbar^2}{2m} \left(\nabla - \frac{ie}{\hbar} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \right) \psi(\mathbf{r}) \right] \delta \psi^*(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} \end{aligned} \quad (3.12)$$

右辺第一項の被積分関数がゼロになることから

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\nabla - \frac{ie}{\hbar} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \right)^2 + \alpha + \beta |\psi(\mathbf{r})|^2 \right] \psi(\mathbf{r}) = 0 \quad (3.13)$$

を得る。これが秩序変数を記述する Ginzburg-Landau (GL) 方程式である。ちなみに今回は \mathcal{F} について ψ の変分を取ったが、 A についての変分を取るとアンペールの法則が出てくる。

3.2.3 ゲージ変換の復習

Maxwell 方程式

電磁気学におけるゲージ変換のおはなし。Maxwell 方程式

$$\text{rot} \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (\text{ファラデーの法則}) \quad (3.14)$$

$$\text{rot} \mathbf{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{i} \quad (\text{アンペールの法則}) \quad (3.15)$$

$$\text{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (\text{電荷のガウスの法則}) \quad (3.16)$$

$$\text{div} \mathbf{B} = 0 \quad (\text{電荷のガウスの法則}) \quad (3.17)$$

について、 $\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A}$ という仮定をすると $\text{div} \mathbf{B} = \text{div} \text{rot} \mathbf{A} = 0$ という関係が自明に出てくる (ただし、これは \mathbf{A} に特異点がない場合)。この仮定をファラデーの法則に代入:

$$\text{rot} \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (3.18)$$

もし

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\text{grad} \phi \quad \implies \quad \mathbf{E} = -\text{grad} \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (3.19)$$

という仮定をすればファラデーの法則も自明となる。 ϕ と \mathbf{A} が導入できれば Maxwell 方程式がとてもカンタンになる。 ϕ と \mathbf{A} をまとめて電磁ポテンシャルと呼ぶ。新しい方程式は

$$\left(\nabla^2 - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{A} - \text{grad} \left(\text{div} \mathbf{A} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = -\mu_0 \mathbf{i} \quad (3.20)$$

$$\nabla^2 \phi + \text{div} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (3.21)$$

となる。ここで

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \text{grad} \chi \quad (3.22)$$

という量を定義しても、磁束密度 \mathbf{B} は変わらない。その代わり電場は変わってしまうので

$$\phi' = \phi - \frac{\partial \chi}{\partial t} \quad (3.23)$$

を導入すると全て辻褄が合う。この $(\phi, \mathbf{A}) \mapsto (\phi', \mathbf{A}')$ の変換をゲージ変換と呼び、Maxwell 方程式はゲージ不変性を持つ。

ローレンツゲージ

(3.20)(3.21) には各々 ϕ, \mathbf{A} が含まれているので計算がめんどくさい。せめて

$$\text{div} \mathbf{A} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (3.24)$$

となってくれば (3.20) は

$$\left(\nabla^2 - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\right) \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{i} \quad (3.25)$$

のように \mathbf{A} だけの式になり, (3.24) を (3.21) に代入すると

$$\left(\nabla^2 - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (3.26)$$

という対称性のとてもよい形になる. (3.24) をローレンツ条件という.

——— ローレンツゲージにおける Maxwell 方程式 ———

$$\begin{aligned} \left(\nabla^2 - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\right) \mathbf{A} &= -\mu_0 \mathbf{i} \\ \left(\nabla^2 - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \phi &= -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \end{aligned}$$

ただし

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

$$(\phi, \mathbf{A}) \mapsto (\phi', \mathbf{A}') \implies \begin{cases} \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \operatorname{grad} \chi \\ \phi' = \phi - \frac{\partial \chi}{\partial t} \end{cases} \quad (3.27)$$

がローレンツ条件 (3.24) を満たすような χ が存在すれば, この以上の変形が正当化される. ローレンツゲージによる Maxwell 方程式はローレンツ共変である.

クーロンゲージ

ローレンツ条件に対して

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0 \quad (3.28)$$

という条件を課すと, クーロンの法則と等価なポアソン方程式が導かれることからこれをクーロン条件 (クーロンゲージ) と呼ぶ.

——— クーロンゲージにおける Maxwell 方程式 ———

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi &= -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \nabla^2 \mathbf{A} - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{grad} \phi &= \mu_0 \mathbf{i} \end{aligned}$$

ただし

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$$

クーロンゲージはローレンツ共変ではなくあまり方程式の対称性は良くないが, 電磁場の量子化などでは便利なので用いられることがある.

3.2.4 GL コヒーレンス長と侵入長

外部磁場がない場合の一次元 GL 方程式 (3.13) を境界条件 $\psi(0) = 0$ のもとで解く:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \alpha + \beta |\psi(x)|^2 \right] \psi(x) = 0 \quad (3.29)$$

これは $x = 0$ の境界には超伝導体はなく, $x > 0$ を超伝導体で占められているような状況である. コヒーレンス長 ξ を

$$\xi^2 = \frac{\hbar^2}{2m|\alpha|} \quad (3.30)$$

と定義する. 超伝導状態では $\alpha < 0$ である¹. 両辺を $\psi_0 = \sqrt{|\alpha|/\beta}$ を用いて整理して

$$-\frac{d^2\psi}{dx^2} - \psi + \psi^3 = 0 \quad (3.31)$$

を得る. 左辺に $2\frac{d\psi}{dx}$ を掛ける:

$$2\frac{d\psi}{dx} \left[-\frac{d^2\psi}{dx^2} - \psi + \psi^3 \right] = 0 \quad (3.32)$$

ここで

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{d\psi}{dx} \right)^2 = 2\frac{d\psi}{dx} \left(\frac{d^2\psi}{dx^2} \right), \quad \frac{d\psi^2}{dx} = 2\psi \frac{d\psi}{dx}, \quad \frac{d\psi^4}{dx} = 4\psi^3 \frac{d\psi}{dx} \quad (3.33)$$

を用いて変形する:

$$\frac{d}{dx} \left[-\xi^2 \left(\frac{d\psi}{dx} \right)^2 - \psi^2 + \frac{1}{2}\psi^4 \right] = 0 \quad (3.34)$$

微分がゼロなので微分関数は定数:

$$-\xi^2 \left(\frac{d\psi}{dx} \right)^2 - \psi^2 + \frac{1}{2}\psi^4 = A \text{ (const)} \quad (3.35)$$

また, 境界条件 $d\psi/dx \rightarrow 0, \psi \rightarrow 1$ ($x \rightarrow +\infty$) を課すと $A = -\frac{1}{2}$ であることがわかる. これにより

$$\xi^2 \left(\frac{d\psi}{dx} \right)^2 = \frac{1}{2} (1 - \psi^2) \quad (3.36)$$

という方程式が得られる.

これは非線形微分方程式だが特解を持っている:

$$\psi(x) = \tanh\left(\frac{x}{\sqrt{2}\xi}\right) \quad (3.37)$$

これはソリトン解と呼ばれる. $x = 0$ で強制的にゼロにされた ψ が ξ 程度で回復している. また

$$\xi = \left(\frac{\hbar^2}{2m|\alpha|} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\hbar^2}{2ma(T - T_C)} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\hbar^2}{2maT_C} \right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{T}{T_C} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.38)$$

$T \rightarrow T_C$ ($T_C > T$) でコヒーレンス長は発散していく自然な結果が得られる.

3.2.5 ソリトンの特徴

普通の線形波なら波動方程式で記述される異なる波長を持つ波の重ね合わせで記述できる. 異なる波長の波は $v = f\lambda$ に従って伝搬速度も異なるので, 波束は次第に崩壊していく (分散が発散していく). しかしソリトンはある非線形微分方程式の定常解なので形を変えずに伝搬していき, 波束も崩壊しない.

¹ こうしないと GL ヘルムホルツエネルギーが $\psi > 0$ の領域で最小値を持たなくなる.

3.3 超伝導の微視的理論：Bardeen-Cooper-Schrieffer 理論

3.3.1 金属の基本性質

一辺 L の箱に閉じ込められた自由電子について考える。周期境界条件を課すと、波動関数は平面波で記述できる：

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{L^3}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad (3.39)$$

エネルギー分散関係は

$$\varepsilon_{\mathbf{k}} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad (3.40)$$

である。ここで波数は

$$k_i = n_i \left(\frac{2\pi}{L} \right) \quad (i = x, y, z) \quad (3.41)$$

で与えられる。3次元 k 空間の単位体積 $(2\pi/L)^3$ あたりに 1 つ (スピン自由度を考えると 2 つ) の状態が入れる。下の準位から埋めていくと、状態が埋まった空間は球になる。これをフェルミ球と呼び、その境界をフェルミ面と呼ぶ。フェルミ面の半径を k_F とすると

$$N = 2 \left(\frac{L}{2\pi} \right)^3 \times \frac{4}{3} \pi k_F^3 \quad (3.42)$$

である。電子密度を $n = N/L^3$ とすると

$$k_F = (3\pi n)^{\frac{1}{3}} \quad (3.43)$$

となる。エネルギー ε の状態を電子が占める確率は Fermi-Dirac 分布関数

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{\exp[(\varepsilon - \varepsilon_F)/k_B T] + 1} \quad (3.44)$$

で与えられる。

3.3.2 電子-格子間相互作用

電子と金属イオンの間の相互作用は電子がイオン構造を歪めるという描像で理解される²。つまり、電子がフォノンを放出して異なる波数を持つモードへ遷移する、という描像である。フォノンを介した 2 電子間相互作用とは、波数 k_1, k_2 の電子が $k_1 - q, k_2 + q$ となる過程である。

フォノンを介した相互作用ハミルトニアンを H' とすると、エネルギーの 2 次摂動は

- 同じ電子がフォノンを出して吸収した場合は自己エネルギー
- 異なる電子同士がフォノンのやりとりをした場合は相互作用

²金属イオン中に電子があると電子と金属イオンが引力相互作用で近づき合い、金属イオンの配列が微妙に歪むことになる。この電子が金属中を移動すると、金属イオンの配列の歪みも一緒に伝搬していくように見える。これが格子振動であり、これを量子化するとフォノンになる。さて、この場合は電子の運動エネルギーが格子振動に一部持って行かれることになり、これが電気抵抗の由来になる。しかし、この電子の近くに別の電子がある場合は、格子振動により正電荷密度が大きくなっているところからさらに引力相互作用を受けて加速することができる。つまり、ある電子が創りだした格子振動エネルギーを別の電子が受け取る、というメカニズムである。もちろんこれは古典的な描像であり、全ての格子振動エネルギーが別の電子に引き継がれることは一見なさそうだが、格子振動を量子化したフォノンであれば discrete なエネルギーのやりとりしかできないことになるので、電子がフォノンのやりとりをすることでエネルギーの散逸を防ぐ枠組みを正当化することができそうである。このフォノンのやり取りをする電子の組を Cooper-pair という。

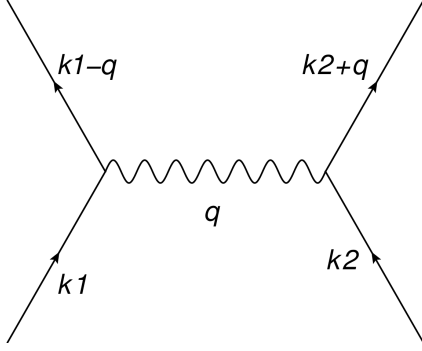


図 3.1: k_1 がフォノン q を放出する過程

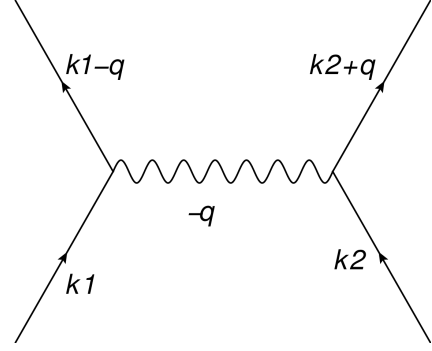


図 3.2: k_1 がフォノン $-q$ を吸収する過程

を表すことになる。さて、上の 2 種類の過程を考慮すると相互作用項の期待値は

$$U_2 = \sum_m \frac{\langle f | H' | m \rangle \langle m | H' | i \rangle}{E_i - E_m} \quad (3.45)$$

$$E_i = \varepsilon_{\mathbf{k}_1} + \varepsilon_{\mathbf{k}_2} \quad (3.46)$$

$$E_m = \begin{cases} \varepsilon_{\mathbf{k}_1 - \mathbf{q}} + \varepsilon_{\mathbf{k}_2} + \hbar\omega_{\mathbf{q}} \\ \varepsilon_{\mathbf{k}_1} + \varepsilon_{\mathbf{k}_2 + \mathbf{q}} + \hbar\omega_{\mathbf{q}} \end{cases} \quad (3.47)$$

より

$$U_2 = \frac{|V_{\mathbf{q}}|^2}{\varepsilon_{\mathbf{k}_1 - \mathbf{q}} + \varepsilon_{\mathbf{k}_1} + \hbar\omega_{\mathbf{q}}} + \frac{|V_{\mathbf{q}}|^2}{\varepsilon_{\mathbf{k}_2} + \varepsilon_{\mathbf{k}_2 + \mathbf{q}} + \hbar\omega_{\mathbf{q}}} \quad (3.48)$$

$$= \frac{2|V_{\mathbf{q}}|\hbar\omega_{\mathbf{q}}}{(\varepsilon_{\mathbf{k}_1 - \mathbf{q}} + \varepsilon_{\mathbf{k}_1})^2 - (\hbar\omega_{\mathbf{q}})^2} \quad (3.49)$$

となる。ここではエネルギー保存則を用いた。 $|\varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{k} - \mathbf{q}}| \ll \hbar\omega_{\mathbf{q}}$ であれば電子間相互作用は引力となる。つまり、フェルミ面上の電子間にはフォノンを介した引力相互作用が働く可能性がある。

3.3.3 Cooper 問題

次に問題になるのが、「フェルミ面直上にある 2 つの電子間相互作用を考えると、この電子対が束縛状態を作るか」ということ。言い換えると、「いかに弱くても引力相互作用があれば電子対の束縛状態が実現するかどうか」。着目する 2 電子の波動関数を

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \sigma_1, \mathbf{r}_2, \sigma_2) = \psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)\chi(\sigma_1, \sigma_2) \quad (3.50)$$

とする。 ψ が満たすのは Schrödinger 方程式

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} (\nabla_1^2 + \nabla_2^2) + V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \right] \psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = E\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \quad (3.51)$$

$$\chi(\sigma_1, \sigma_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle|\uparrow\rangle) \quad (3.52)$$

重心・相対座標 $\mathbf{R} = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/2$, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ を用いて

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \varphi(\mathbf{r})e^{i\mathbf{K}\mathbf{R}} \quad (3.53)$$

第4章 Anderson 局在とその周辺

4.1 Anderson 局在とは

不純物がある系において, Drude の電子論などでは説明できない電気伝導度が実験的に確かめられた. 具体的には, Drude モデルでは電気伝導度は平均自由行程に比例するはずだが, ある点を境に相転移のごとく電気伝導度が落ち込む結果が得られた¹.

Anderson はこの不純物による電子の局在という問題に対して新しい理論を作った.

4.2 P.W.Anderson. Phys. Rev. 109, 1492(1958)

4.2.1 Tight-Binding 近似

電子が規則正しい格子の上にある場合を考える. このとき電子の波動関数は原子軌道 ϕ の相対座標表示を用いて

$$|\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})\rangle = \sum_{\mathbf{R}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}} |\phi_0(\mathbf{r} - \mathbf{R})\rangle \quad (4.1)$$

のように展開できる². 展開係数は Bloch 条件を守るために平面波になっている. これが TB 近似³である.

今回は不純物が混じった系を考えるので展開係数は平面波ではない:

$$|\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})\rangle = \sum_{\mathbf{R}} a_{\mathbf{R}}^{\dagger} |\phi_0(\mathbf{r} - \mathbf{R})\rangle \quad (4.2)$$

これを各格子点のインデックスごとに和を取ることを考えて以下のように簡略化した記号を導入する:

$$\sum_{\mathbf{R}} a_{\mathbf{R}}^{\dagger} |\phi_0(\mathbf{r} - \mathbf{R})\rangle = \sum_j a_j^{\dagger} |j\rangle \quad (4.3)$$

Schrödinger 方程式は以下ようになる:

$$H |\psi\rangle = (H_{\text{atom}} + \Delta V(\mathbf{r})) |\psi\rangle \quad (4.4)$$

$$= \sum_j \epsilon_j |j\rangle a_j + \sum_j \Delta V(\mathbf{r}) |j\rangle a_j \quad (4.5)$$

ΔV は全ポテンシャルから孤立原子中で電子が感じるポテンシャルを引いたもの. これの右から $\langle i|$ を作用させると

$$\langle i| H |\psi\rangle = \epsilon_i a_i + \sum_j V_{ij} a_j \quad (4.6)$$

となる. $V_{ij} = \langle i| \Delta V(\mathbf{r}) |j\rangle$ であり, $\langle i|j\rangle \simeq \delta_{ij}$ であることを用いている. 以上からハミルトニアンは

$$H = \sum_i \epsilon_i |i\rangle \langle i| + \sum_{i \neq j} V_{ij} |i\rangle \langle j| \quad (4.7)$$

であることがわかる⁴.

¹Anderson 転移と呼ぶ

²ケットの中に位置依存性 \mathbf{r} を入れる不自然さには目を瞑る方向で

³LCAO 近似とも

⁴量子力学・場の理論ではまずハミルトニアンがあり, そこから Schrödinger 方程式やら Heisenberg 方程式やらを導出することが多いが, 今回の文脈ではその逆を行っている. つまり波動関数を作り, その波動関数で Schrödinger 方程式を作り, ハミルトニアンを推定している. 一見不思議に思えるがこのような議論は論文でもよく見かける. 理論が Self-consistent であればどこからスタートするかは任意であるということか

これらを用いて時間依存 Schrödinger 方程式

$$i\hbar \frac{\partial \psi_t}{\partial t} = H\psi_t \quad (4.8)$$

を時間依存性を展開系数に押し付けた波動関数の展開

$$\psi_t = \sum_j a_j(t) |j\rangle \quad (4.9)$$

を用いて書き換える:

$$i\hbar \frac{\partial a_i(t)}{\partial t} = \epsilon_i a_i(t) + \sum_{j(\neq i)} V_{ij} a_j(t) \quad (4.10)$$

4.2.2 Anderson の理論

初期時刻にあるサイト $i = 0$ に電子を一つ置いて時間発展させたとき, a_i が時刻 ∞ で有限の値を取る場合, 電子は局在していると言える. これを計算するために (4.10) を Laplace 変換する:

$$i[sf_j(s) - a_j(0)] = \epsilon_j f_j(s) + \sum_{k(\neq j)} V_{jk} f_k(s) \quad (4.11)$$

$$f_j(s) = \frac{i\delta_{j0}}{is - \epsilon_j} + \sum_{k(\neq j)} \frac{1}{is - \epsilon_j} V_{jk} f_k(s) \quad (4.12)$$

ここでは $\hbar = 1$ の単位系を用いている. また $a_j(0) = \delta_{j0}$ という性質も用いている. なぜこんなことをするのかというと, $sf_j(s) \rightarrow a_j(\infty)$ ($s \rightarrow 0^+$) という性質があるから. $f_j(s)$ から $a_j(\infty)$ の情報が得られるのである.

この右辺第二項の f_k に逐次代入してき, $j = 0$ を代入すると

$$\begin{aligned} f_0(s) &= \frac{i}{is - \epsilon_0} + \sum_k \frac{1}{is - \epsilon_0} V_{0k} \frac{1}{is - \epsilon_k} V_{k0} \frac{1}{is - \epsilon_0} \\ &+ \sum_{k,m} \frac{1}{is - \epsilon_0} V_{0k} \frac{1}{is - \epsilon_k} V_{km} \frac{1}{is - \epsilon_m} V_{m0} \frac{1}{is - \epsilon_0} + \dots \end{aligned} \quad (4.13)$$

となる. これは $j = 0$ からスタートして様々な格子点を通り過ぎてまた $j = 0$ に戻ってくる経路を全て足し合わせるような計算を行っている. その経路の中にはループを作るものも存在するが, 自己エネルギーは

$$\mathcal{L}_k(s) = \frac{1}{is - \epsilon_k - \varsigma} \quad (4.14)$$

というようにカウンター項 ς でくりこみが可能である. よってループのない経路のみを考えれば良い. また, コネクティビティが最近接サイト数 z を用いて $z - 2 < K \leq z - 1$ と書けること, P ステップ後のコネクティビティが K^P で概算できることを用いて (4.13) を摂動的に処理し, $a_i(\infty)$ がゼロになるところと有限の値を取るところを解析したのが Anderson の 1958 年の論文である.

しかしこの取り扱いはなかなか難しい. この見通しを良くするのがスケーリング理論である.

4.3 E.Abrahams et al. Phys. Rev. Lett. 42, 673(1979)

第5章 熱・統計・量子統計力学

5.1 熱力学

5.1.1 状態量

系の状態のみで一意に決まり、過去の履歴・経路に依らない (積分値が経路に依らない) ものを状態量と呼ぶ。

5.1.2 完全な熱力学関数

系の平衡状態における熱力学的性質の情報を全て持っているものを完全な熱力学関数と呼ぶ。示量性状態量。系の情報を全て持っているというのは、状態量がこの関数の偏微分で全て求まるということ。例えば内部エネルギー $U(S, N, V)$ を用いて

$$\partial_S U = T \quad (5.1)$$

$$\partial_N U = \mu \quad (5.2)$$

$$\partial_V U = -p \quad (5.3)$$

という状態量が求まる。全微分は

$$dU = TdS - pdV + \mu dN \quad (5.4)$$

である。これを変形して

$$dS = \frac{1}{T}dU + \frac{p}{T}dV - \frac{\mu}{T}dN \quad (5.5)$$

となり、 S は U, V, N を変数とする関数として表された時に完全な熱力学関数となる。統計力学においては温度を定義するときに

$$\partial_U S = \frac{1}{T} \quad (5.6)$$

という表式をしばしば用いる。

5.1.3 自由エネルギー

熱力学第二法則より、系は自由エネルギーが減少する方向に遷移する。

ヘルムホルツ自由エネルギー

等温下で仕事として取り出し可能なエネルギーを表す。ヘルムホルツエネルギーが極小値を取るとき、系は熱平衡状態にある。

定義:

$$F(T, V, N) = U(S(T, V, N), V, N) - TS(T, V, N) \quad (5.7)$$

ここで現れるエントロピーは完全な熱力学関数ではない。各変数による偏微分は

$$\partial_T F = -S \quad (5.8)$$

$$\partial_V F = -p \quad (5.9)$$

$$\partial_N F = \mu \quad (5.10)$$

である。全微分は

$$dF = -S(T, V, N)dT - p(T, V, N)dV + \mu(T, V, N)dN \quad (5.11)$$

ギブズ自由エネルギー

等温等圧下で仕事として取り出し可能なエネルギーを表す。ヘルムホルツエネルギーとの違いは等圧条件の有無。
定義:

$$G(T, p, N) = U(S(T, p, N), p, N) - TS(T, p, N) \quad (5.12)$$

以下ヘルムホルツエネルギーと同様。

5.2 統計力学

5.2.1 目的

微視的状態の数をかぞえて巨視的状态を導く。

5.2.2 ミクロカノニカルアンサンブル

5.2.3 Langevin 方程式

ブラウン粒子の運動を記述する方程式として Langevin が導入した。

$$M \frac{dv}{dt} = -\frac{v}{\mu} + F_{\text{ext}} + R(t) \quad (5.13)$$

ここで μ を移動度, F_{ext} をマクロな外力, $R(t)$ をミクロなノイズとする。 R が確率過程であるので, 初期条件を与えても v が決定論的に定まらない。

速度を Fourier 変換する:

$$v(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\omega e^{-i\omega t} \tilde{v}(\omega) \quad (5.14)$$

$$\tilde{v}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dt e^{i\omega t} v(t) \quad (5.15)$$

さらに速度の時間相関関数とその Fourier 変換を定義する:

$$C_v(t) = \langle v(t_0)v(t_0+t) \rangle \quad (5.16)$$

$$\tilde{C}_v(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dt' e^{i\omega' t'} \langle v(t_0)v(t_0+t') \rangle \quad (5.17)$$

ここで $\tilde{v}^*(\omega) = \tilde{v}(-\omega)$ が成立している。(5.15) より

$$\langle \tilde{v}(\omega) \tilde{v}^*(\omega') \rangle = \frac{1}{2\pi} \int dt dt' e^{i\omega t - i\omega' t'} \langle v(t)v(t') \rangle \quad (5.18)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int dt dt' |\det(J)| e^{i\omega t'} e^{i(\omega - \omega')t} \langle v(t+t')v(t) \rangle \quad (5.19)$$

$$= \delta(\omega - \omega') \int dt' e^{i\omega' t'} \langle v(t+t')v(t) \rangle \quad (5.20)$$

$$= \delta(\omega - \omega') I_v(\omega') \quad (5.21)$$

ただし

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial(t+t')}{\partial t} & \frac{\partial(t+t')}{\partial t'} \\ \frac{\partial t'}{\partial t} & \frac{\partial t'}{\partial t'} \end{pmatrix} \quad |\det(J)| = 1 \quad (5.22)$$

である。この式から

$$I_v(\omega) = \int dt C_v(t) e^{i\omega t} = \tilde{C}(\omega) \quad (5.23)$$

がわかる。これを Wiener-Khinchin の定理という。相関関数とパワースペクトルは Fourier 変換を通して関係付けられる。 $\tilde{R}(\omega)$ についても同様のことが言える:

$$\tilde{R}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dt e^{i\omega t} R(t) \quad (5.24)$$

$$\tilde{C}_R(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dt e^{i\omega t} \langle R(t_0) R(t_0 + t) \rangle \quad (5.25)$$

$$\langle \tilde{R}(\omega) \tilde{R}^*(\omega') \rangle = \tilde{C}_R(\omega) \delta(\omega - \omega') \quad (5.26)$$

以降 $F_{\text{ext}} = 0$ のもとで Langevin 方程式の解析をする。(5.13) に (5.14) を代入:

$$M \frac{d}{dt} \int d\omega e^{-i\omega t} \tilde{v}(\omega) = \int d\omega e^{-i\omega t} \left(-\frac{\tilde{v}(\omega)}{\mu} + \tilde{R}(\omega) \right) \quad (5.27)$$

$$\iff M(-i\omega) \tilde{v}(\omega) = -\frac{\tilde{v}(\omega)}{\mu} + \tilde{R}(\omega) \quad (5.28)$$

$\gamma = (M\mu)^{-1}$ とすると

$$\tilde{v}(\omega) = \frac{1}{-i\omega + \gamma} \frac{\tilde{R}(\omega)}{M} \quad (5.29)$$

であることがわかる。時間相関関数は

$$\tilde{C}_v(\omega) = \int d\omega' \langle \tilde{v}(\omega) \tilde{v}^*(\omega') \rangle = \frac{1}{(-i\omega + \gamma)(i\omega' + \gamma)M^2} \int d\omega' \langle R(\omega) R^*(\omega') \rangle \quad (5.30)$$

$$= \frac{1}{(-i\omega + \gamma)(i\omega' + \gamma)M^2} \int d\omega' \tilde{C}_R(\omega') \delta(\omega - \omega') = \frac{1}{\omega^2 + \gamma^2} \frac{\tilde{C}_R(\omega)}{M^2} \quad (5.31)$$

R の確率過程の性質が与えられてパワースペクトル C_R が定まると速度 v の相関関数やパワースペクトルが決定される。 R がホワイトノイズだと仮定すると,

$$C_R(t) = \langle R(t_0 + t) R(t_0) \rangle = C_R \delta(t) \quad (5.32)$$

$$\tilde{C}_R(\omega) = \int dt e^{-i\omega t} C_R(t) = C_R \quad (5.33)$$

ということで, \tilde{C}_R は ω によらない定数になる。このようなノイズを仮定すると, 速度相関関数は

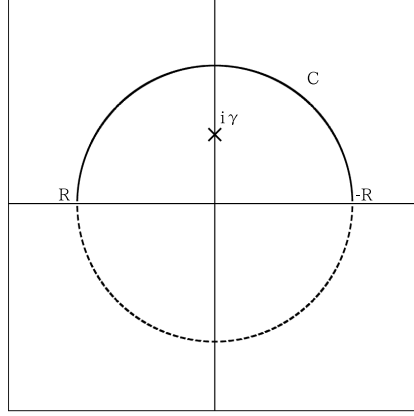
$$C_v(t) = \int d\omega e^{-i\omega t} \tilde{C}_v(\omega) = \int d\omega \frac{C_R e^{-i\omega t}}{M^2(\omega^2 + \gamma^2)} \quad (5.34)$$

この積分を実行するために複素積分の応用を用いる:

$$\int_C dz \frac{C_R e^{-izt}}{M^2(z^2 + \gamma^2)} = \int_{C_1} \frac{C_R e^{-izt}}{M^2(z^2 + \gamma^2)} + \int_{-R}^R \frac{C_R e^{-izt}}{M^2(z^2 + \gamma^2)} \quad (5.35)$$

極は $\omega = \pm i\gamma$ で一位の極。積分経路は上半円とする。留数定理より

$$R(i\gamma) = \lim_{z \rightarrow i\gamma} (z - i\gamma) f(z) = \frac{C_R e^{\gamma t}}{2i\gamma} \quad (5.36)$$



ここで $z = Re^{i\theta}$ の変数変換を施すことにより

$$\int_{C_1} dz \frac{e^{-izt}}{(z^2 + \gamma^2)} = \int_0^\pi d\theta \frac{iRe^{-iRe^{i\theta}t}}{(R^2e^{2i\theta} + \gamma^2)} = \int_0^\pi d\theta \frac{iRe^{-iRt \cos \theta} e^{Rt \sin \theta}}{(R^2e^{2i\theta} + \gamma^2)} \quad (5.37)$$

かつ一般に $|\alpha + \beta| > |\alpha| - |\beta|$ が成立することから

$$\left| \frac{iRe^{-iRt \cos \theta} e^{Rt \sin \theta}}{(R^2e^{2i\theta} + \gamma^2)} \right| < \frac{Re^{Rt \sin \theta}}{R^2 - \gamma^2} \quad (5.38)$$

これが $R \rightarrow \infty$ で発散しないためには $t < 0$ である必要があるが, $t > 0$ の場合も発散しないようにしたい. そのためには $e^{-izt} \rightarrow e^{iz|t|}$ とすればよい. つまり, (5.36) は

$$R(i\gamma) = \lim_{z \rightarrow i\gamma} (z - i\gamma)f(z) = \frac{C_R e^{-\gamma|t|}}{2i\gamma} \quad (5.39)$$

とすべきである. 以上からコーシーの積分定理より

$$C_v(t) = \frac{C_R e^{-\gamma|t|}}{2M^2\gamma} \quad (5.40)$$

となる. 同時刻 ($t = 0$) の相関は

$$C_v = \frac{C_R}{2M^2\gamma} \quad (5.41)$$

であり, 熱平衡状態のエネルギー等分配則

$$M \langle v^2 \rangle = k_B T \quad (5.42)$$

を認めれば

$$C_R = 2k_B T M \gamma \quad (5.43)$$

となる. これは Nyquist の定理と呼ばれ, 揺動散逸定理のひとつである.

5.3 Born-Markov 型量子マスター方程式

熱浴と接している一次元調和振動子系の Born-Markov 型量子マスター方程式を解く.

- 系のハミルトニアンは調和振動子 $H = \hbar\omega a^\dagger a$.
- Born-Markov 近似なので熱浴の密度演算子は時間発展せず, 回転波近似 (弱結合) も有効.

- マスター方程式は系の密度演算子の時間発展を与えている。¹.
- 生成消滅演算子と粒子数状態
- 交換関係の計算

あたりの知識が必要です.

5.3.1 問題設定

量子マスター方程式が与えられている:

$$\begin{aligned}\partial_t \rho(t) = & -i\omega[a^\dagger a, \rho(t)] + \kappa \bar{n}(2a^\dagger \rho(t)a - aa^\dagger \rho(t) - \rho(t)aa^\dagger) \\ & + \kappa(\bar{n}+1)(2a\rho(t)a^\dagger - a^\dagger a\rho(t) - \rho(t)a^\dagger a)\end{aligned}\quad (5.44)$$

ただし

$$\kappa > 0, \quad \bar{n} = \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}, \quad [a, a^\dagger] = 1 \quad (5.45)$$

であり, κ は減衰定数, \bar{n} は Bose-Einstein 分布関数, a, a^\dagger は生成消滅演算子である.

5.3.2 熱平衡 (問題 1)

熱浴の温度が T であることから, 系の温度を T とする有限温度系を考えればそれが熱平衡状態にあることは明らか. 平衡状態なので密度演算子が系のハミルトニアンを用いて

$$\rho_{th} = \frac{e^{-H/kT}}{\text{Tr} e^{-H/kT}} \quad (5.46)$$

と書ける. (8.20) の分母は規格化条件であり, 以下のように計算できる²(以下, 逆温度 $1/kT$ を β と置き換えています):

$$\begin{aligned}\text{Tr} e^{-\beta\hbar\omega a^\dagger a} &= \sum_n \langle n | e^{-\beta\hbar\omega a^\dagger a} | n \rangle \\ &= \sum_n e^{-\beta\hbar\omega n} \\ &= \frac{1}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}} = (\bar{n} + 1)\end{aligned}\quad (5.47)$$

密度演算子は Liouville-von Neumann 方程式を満たす:

$$i\hbar\partial_t \rho_{th} = [H, \rho_{th}] \quad (5.48)$$

$$= \frac{\hbar\omega}{\bar{n} + 1} [a^\dagger a, e^{\beta\hbar\omega a^\dagger a}] \quad (5.49)$$

$[A, [B, A]] = [B, [B, A]] = 0$ が成立しているときに $[B, e^{\lambda A}] = \lambda[B, A]e^{\lambda A}$ であることを利用して³

$$(5.49) = \frac{\hbar\omega}{\bar{n} + 1} \beta\hbar\omega [a^\dagger a, a^\dagger a] e^{\beta\hbar\omega a^\dagger a} = 0 \quad (5.50)$$

したがって, ρ_{th} の時間微分がゼロであることから時間発展しない熱平衡状態であることがわかる⁴.

¹描像によっては生成消滅演算子も時間依存しそうである. 普通 (?) マスター方程式を導出するときは相互作用描像を経由するので生成消滅演算子も一般に時間依存性を持つ. しかし今回は回転波近似が有効であるため, $a(t) = a(0)e^{-i\omega t}$ のように分解できる. 後述のマスター方程式には a^\dagger, a がペアになって現れているので, マスター方程式には生成消滅演算子に依る時間依存性は現れない. a^\dagger, a がペアになっていないような項が現れたら生成消滅演算子由来の時間依存性を考慮しなければならないが, そもそもそういう項を落とすのが Born-Markov 近似である.

²トレースは直行完全系ではちゃんと和を取ればいい. 規格化は後でできるので, 正規直行完全系でなくてもいいらしい. つまりどんな完全系を選んできても規格化係数を除けば同じ結論に辿り着く. 今回は明らかに $a^\dagger a$ の固有状態 $|n\rangle$ を用いるのが簡単.

³証明してみよう!

⁴式 (5.44) を使っていないが良いのか? と思うかもしれないが, そもそも量子マスター方程式を導出するときは Liouville-von Neumann 方程式からスタートするので, QMECLvNE である

5.3.3 調和振動子のエネルギー (問題 2)

続いて式 (5.44) を用いてエネルギー期待値の時間発展を追う。物理量の期待値はハミルトニアンに密度演算子を掛けてトレースアウトすればよい⁵:

$$\partial_t E(t) = \partial_t \text{Tr}[H\rho(t)] = \hbar\omega \partial_t \sum_n \langle n | a^\dagger a \rho(t) | n \rangle = \hbar\omega \partial_t \sum_n n \langle n | \rho(t) | n \rangle \quad (5.51)$$

また、式 (5.44) に左から $H = \hbar\omega a^\dagger a$ を掛けてトレースアウトする:

$$\begin{aligned} \partial_t E(t) = & -i\hbar\omega^2 \text{Tr}(a^\dagger a [a^\dagger a, \rho(t)])_1 + \kappa \bar{n} \hbar\omega \left(\text{Tr} a^\dagger a a^\dagger \rho(t) a_2 - \text{Tr} a^\dagger a a a^\dagger \rho(t)_3 - \text{Tr} a^\dagger a \rho(t) a a^\dagger_4 \right) \\ & + \kappa(\bar{n} + 1) \hbar\omega \left(\text{Tr} a^\dagger a a \rho(t) a^\dagger_5 - \text{Tr} a^\dagger a a^\dagger a \rho(t)_6 - \text{Tr} a^\dagger a \rho(t) a^\dagger a_7 \right) \end{aligned} \quad (5.52)$$

式 (5.52) の右辺は,

$$\begin{aligned} 1. \quad \text{Tr}(a^\dagger a [a^\dagger a, \rho(t)]) &= \text{Tr}[a^\dagger a (a^\dagger a \rho(t) - \rho(t) a^\dagger a)] \\ &= \sum_n [\langle n | a^\dagger a a^\dagger a \rho(t) | n \rangle - \langle n | a^\dagger a \rho(t) a^\dagger a | n \rangle] \\ &= \sum_n [n^2 \langle n | \rho(t) | n \rangle - n^2 \langle n | \rho(t) | n \rangle] = 0 \end{aligned} \quad (5.53)$$

$$2. \quad \text{Tr} a^\dagger a a^\dagger \rho(t) a = \sum_n (n+1)^2 \langle n | \rho(t) | n \rangle \quad (5.54)$$

$$3. \quad \text{Tr} a^\dagger a a a^\dagger \rho(t) = \sum_n n(n+1) \langle n | \rho(t) | n \rangle \quad (5.55)$$

$$4. \quad \text{Tr} a^\dagger a \rho(t) a a^\dagger = \sum_n n(n+1) \langle n | \rho(t) | n \rangle \quad (5.56)$$

$$5. \quad \text{Tr} a^\dagger a a \rho(t) a^\dagger = \sum_n (n-1)n \langle n | \rho(t) | n \rangle \quad (5.57)$$

$$6. \quad \text{Tr} a^\dagger a a^\dagger a \rho(t) = \sum_n n^2 \langle n | \rho(t) | n \rangle \quad (5.58)$$

$$7. \quad \text{Tr} a^\dagger a \rho(t) a^\dagger a = \sum_n n^2 \langle n | \rho(t) | n \rangle \quad (5.59)$$

用いて整理することができる⁶:

$$\begin{aligned} \partial_t E(t) &= \sum_n 2\hbar\omega [\kappa \bar{n} ((n+1)^2 - n(n+1)) + \kappa(\bar{n} + 1)((n-1)n - n^2)] \langle n | \rho(t) | n \rangle \\ &= \sum_n 2\hbar\omega [\kappa \bar{n}(n+1) - \kappa(\bar{n} + 1)n] \langle n | \rho(t) | n \rangle \end{aligned} \quad (5.60)$$

$$= \sum_n 2\hbar\omega \kappa (\bar{n} - n) \langle n | \rho(t) | n \rangle \quad (5.61)$$

式 (5.51) と比較すると

$$\hbar\omega \sum_n \partial_t n \langle n | \rho(t) | n \rangle = \sum_n 2\hbar\omega \kappa (\bar{n} - n) \langle n | \rho(t) | n \rangle \quad (5.62)$$

$$\partial_t n \langle n | \rho(t) | n \rangle = 2\kappa (\bar{n} - n) \langle n | \rho(t) | n \rangle \quad (5.63)$$

$$\therefore n \langle n | \rho(t) | n \rangle = C_n e^{2\kappa(\frac{\bar{n}}{n} - 1)t} \quad (5.64)$$

よってエネルギー固有値は式 (5.51) より

$$E(t) = \sum_n C_n e^{2\kappa(\frac{\bar{n}}{n} - 1)t} \quad (5.65)$$

⁵本来、密度演算子を用いた物理量の期待値は $\langle A \rangle = \frac{\text{Tr} A \rho(t)}{\text{Tr} \rho(t)}$ で記述されるが、今回は $\text{Tr} \rho(t) = 1$ を課している。つまり $\rho(t)$ が規格化されているという条件である。

⁶ n の和については $n = 0$ とか $n = \infty$ の境界を雑に扱っているように見えるが、ちゃんと Dirichlet 境界条件を考慮してあげれば問題は起きない(と思う)

となる⁷. C_n は積分定数⁸. 初期状態 $t = 0$ のエネルギー平均が $E(0)$ であることから

$$E(0) = \sum_n n \langle n | \rho(0) | n \rangle = \sum_n C_n \quad (5.66)$$

となる.

5.3.4 位置・運動量平均の時間発展 (問題 3)

(問題 2) と同様にマスター方程式のトレースアウトで期待値を見積もる. 以下, 位置と運動量は $m = \hbar = \omega = 1$ で無次元化している⁹.

生成消滅演算子の言葉で位置は $q = \frac{1}{\sqrt{2}}(a^\dagger + a)$ と表されることを用いて

$$\begin{aligned} \partial_t q(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \partial_t \text{Tr}(a^\dagger + a) \rho(t) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \partial_t \sum_n [\sqrt{n} \langle n-1 | \rho(t) | n \rangle + \sqrt{n+1} \langle n+1 | \rho(t) | n \rangle] \end{aligned} \quad (5.67)$$

マスター方程式の右边をトレースアウト:

$$\begin{aligned} (5.44) \rightarrow & \frac{1}{\sqrt{2}} \left[-i\omega \text{Tr}(a^\dagger + a)(a^\dagger a \rho(t) - \rho(t) a^\dagger a)_1 \right. \\ & + \kappa \bar{n} \left(2\text{Tr}(a^\dagger + a) a^\dagger \rho(t) a_2 - \text{Tr}(a^\dagger + a) a a^\dagger \rho(t)_3 - \text{Tr}(a^\dagger + a) \rho(t) a a^\dagger_4 \right) \\ & \left. + \kappa(\bar{n} + 1) \left(2\text{Tr}(a^\dagger + a) a \rho(t) a^\dagger_5 - \text{Tr}(a^\dagger + a) a^\dagger a \rho(t)_6 - \text{Tr}(a^\dagger + a) \rho(t) a^\dagger a_7 \right) \right] \end{aligned} \quad (5.68)$$

各項について整理:

$$1. \quad \sum_n [-\sqrt{n} \langle n-1 | \rho(t) | n \rangle + \sqrt{n+1} \langle n+1 | \rho(t) | n \rangle] \quad (5.69)$$

$$2. \quad \sum_n [(n+1)\sqrt{n} \langle n-1 | \rho(t) | n \rangle + \sqrt{n+1}(n+2) \langle n+1 | \rho(t) | n \rangle] \quad (5.70)$$

$$3. \quad \sum_n [n\sqrt{n} \langle n-1 | \rho(t) | n \rangle + \sqrt{n+1}(n+2) \langle n+1 | \rho(t) | n \rangle] \quad (5.71)$$

$$4. \quad \sum_n [(n+1)\sqrt{n} \langle n-1 | \rho(t) | n \rangle + \sqrt{n+1}(n+1) \langle n+1 | \rho(t) | n \rangle] \quad (5.72)$$

$$5. \quad \sum_n [(n-1)\sqrt{n} \langle n-1 | \rho(t) | n \rangle + n\sqrt{n+1} \langle n+1 | \rho(t) | n \rangle] \quad (5.73)$$

$$6. \quad \sum_n [(n-1)\sqrt{n} \langle n-1 | \rho(t) | n \rangle + (n+1)\sqrt{n+1} \langle n+1 | \rho(t) | n \rangle] \quad (5.74)$$

$$7. \quad \sum_n [n\sqrt{n} \langle n-1 | \rho(t) | n \rangle + n\sqrt{n+1} \langle n+1 | \rho(t) | n \rangle] \quad (5.75)$$

式 (5.68) をまとめる:

$$\begin{aligned} (5.68) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n \left[-i\omega (-\sqrt{n} \langle n-1 | \rho(t) | n \rangle + \sqrt{n+1} \langle n+1 | \rho(t) | n \rangle) \right. \\ &\quad + \kappa \bar{n} (\sqrt{n} \langle n-1 | \rho(t) | n \rangle + \sqrt{n+1} \langle n+1 | \rho(t) | n \rangle) \\ &\quad \left. + \kappa(\bar{n} + 1) (-\sqrt{n} \langle n-1 | \rho(t) | n \rangle - \sqrt{n+1} \langle n+1 | \rho(t) | n \rangle) \right] \end{aligned} \quad (5.76)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n \left[\sqrt{n} (i\omega - \kappa) \langle n-1 | \rho(t) | n \rangle - \sqrt{n+1} (i\omega + \kappa) \langle n+1 | \rho(t) | n \rangle \right] \quad (5.77)$$

⁷ 熱平衡状態では物理量に温度が関与していそうだが, (平衡状態ではない) 非平衡の形式では系の温度が式に現れていないことを不思議に思うかもしれない. しかし, そもそも温度とは平衡状態でなければ定義できない. むしろ平衡状態によって定義される量である. 熱力学においては温度という概念が当たり前のよう存在するが, そもそもは熱力学第零法則に則って熱平衡の下で定義される (熱力学は平衡状態に関する理論). つまり我々は平衡有限温度系では式 (8.20) を用いて温度を定義することになる. この式だけでは定義のしようがないと思うかもしれないが, 場の量子論の形式においては理論を閉じるようにうまく繰り込み条件を選ぶことにより, 自己無同着的に定義されることになる.

⁸ C が n 依存性を持っていないと式 (5.66) が発散してしまう.

⁹ マスター方程式は無次元化されていないのでアンバランスなあまり良い notation ではない. 本来ならマスター方程式, \bar{n} も合わせて無次元化すべき.

(5.67) と比較:

$$\sum_n \partial_t \langle n-1 | \rho(t) | n \rangle = \sum_n (i\omega - \kappa) \langle n-1 | \rho(t) | n \rangle \quad (5.78)$$

$$\sum_n \partial_t \langle n+1 | \rho(t) | n \rangle = - \sum_n (i\omega + \kappa) \langle n+1 | \rho(t) | n \rangle \quad (5.79)$$

これを解くと

$$\langle n-1 | \rho(t) | n \rangle = C_1 e^{(i\omega - \kappa)t} \quad (5.80)$$

$$\langle n+1 | \rho(t) | n \rangle = C_2 e^{-(i\omega + \kappa)t} \quad (5.81)$$

以上より

$$q = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n \left[\sqrt{n} C_1 e^{(i\omega - \kappa)t} + \sqrt{n+1} C_2 e^{-(i\omega + \kappa)t} \right] \quad (5.82)$$

$$\dot{q} = p = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n \left[\sqrt{n} C_1 (i\omega - \kappa) e^{(i\omega - \kappa)t} - \sqrt{n+1} C_2 (i\omega + \kappa) e^{-(i\omega + \kappa)t} \right] \quad (5.83)$$

$$\ddot{q} = \dot{p} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n \left[\sqrt{n} C_1 (i\omega - \kappa)^2 e^{(i\omega - \kappa)t} - \sqrt{n+1} C_2 (i\omega + \kappa)^2 e^{-(i\omega + \kappa)t} \right] \quad (5.84)$$

ここでは $\dot{q} = p$ であることを用いている. 以上から \dot{p}, p, q による微分方程式を立てる¹⁰:

$$\dot{p} = -(\omega^2 + \kappa^2)q - 2\kappa p \quad (5.85)$$

右辺第2項が速度に比例する減衰を表している. 角振動数に κ が入っており, 減衰の幅が増加するほど角振動数も大きくなる. 古典的な減衰振動を摩擦のあるばねの振動と解釈する場合, 角振動数は減衰 (摩擦) がない場合と変わらないはずなので, 古典と完全には対応していないように見える. 一方で, 減衰をエネルギーの散逸と捉えるならば, 低温の熱浴からの影響で角振動数が大きくなるという解釈は, 低温ではばね定数が大きくなる古典的な解釈と一致する.

きれいになったとはいえまだミスがないか不安です...

5.3.5 数値計算

問題2の和が計算しきれなかったので, 数値計算で (5.66) が本当に緩和するかどうかを確認. $E(0)$ の情報は C_n

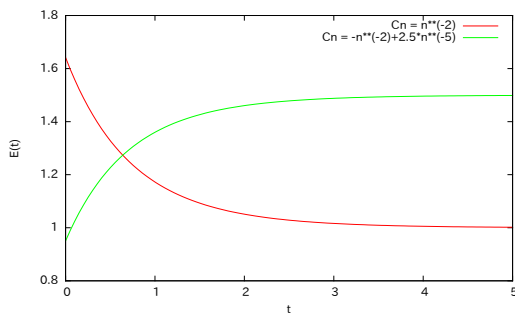


図 5.1: $\kappa = \bar{n} = 1$

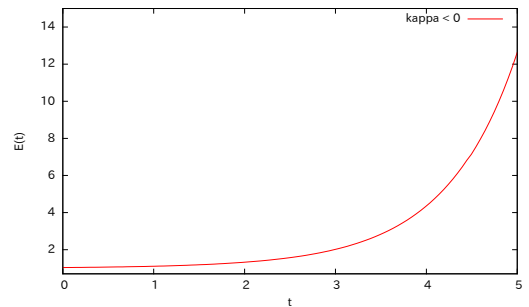


図 5.2: κ が負の場合

に組み込まれており, さらに C_n の関数列の形に制限は収束すること以外には特にはない. $E(0)$ は C_n の汎関数だとも言える. つまり, C_n の与え方によって熱浴を通じてエネルギーが流出するか流入するかが決まる¹¹. 汎関数は

¹⁰ちょっと式とにらめっこしてれば簡単

¹¹系の初期温度が熱浴の温度 T より大きければ流出するし, 逆なら流入するのが普通. 非平衡状態では温度は定義できないので, 正確には流入・流出を支配しているのは温度ではなくエントロピーである.

無限個の自由度を持つ関数なので $E(0)$ は単なる系のエネルギーの初期値だけでなく、熱浴との相関具合などの自由度を含んでいる (かもしれない). 図 1 にエネルギーが緩和する様子を示した. 今回は $C_n = \frac{1}{n^2}, -\frac{1}{n^2} + \frac{5}{2n^5}$ の 2 つを計算. これは単に流入と流出を見たかったために選んできたものであり, C_n が収束するような関数列を選べば緩和は観測できるはず.

また, κ が負の場合, 振幅は減衰することなく増幅することを図 2 で確認している.

5.4 線形応答理論

5.4.1 概要

ある平衡系に $t = t_0$ で何かしらの外場がかかったときの非平衡過程を見る理論. 摂動 1 次までの応答を見るので線形応答と呼ばれる.

5.4.2 線形応答理論の基本概念

平衡系のハミルトニアンを H , 外場 $H_{\text{ex}}(t)$ として Full Hamiltonian

$$H_T = H + H_{\text{ex}}(t) \quad (5.86)$$

を考える. $H_{\text{ex}}(t)$ は $t < t_0$ においてはゼロである. 平衡系の時間依存 Schrödinger 方程式:

$$i\partial_t |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle \quad (5.87)$$

に対して外場を加えた Schrödinger 方程式:

$$i\partial_t |\Psi(t)\rangle = (H + H_{\text{ex}}(t)) |\Psi(t)\rangle \quad (5.88)$$

がある. $|\Psi(t)\rangle$ は非平衡系の状態である. 平衡系の形式解が

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iHt} |\psi(0)\rangle \quad (5.89)$$

であることから, ユニタリー演算子を用いて $|\Psi(t)\rangle$ が

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-iHt} U(t) |\psi(0)\rangle \quad (5.90)$$

と書けるものとする. これを Schrödinger 方程式に代入すると

$$i\partial_t U(t) = e^{iHt} H_{\text{ex}}(t) e^{-iHt} U(t) = H'_{\text{ex}}(t) U(t) \quad (5.91)$$

という $U(t)$ の時間発展方程式が得られる. ここで $H'_{\text{ex}}(t)$ は H による $H_{\text{ex}}(t)$ の Heisenberg 描像になっている. 相互作用描像のときの議論と同様に

$$U(t) = 1(t < t_0) \quad (5.92)$$

という条件を課すと

$$U(t) = 1 - i \int_{t_0}^t dt_1 H'_{\text{ex}}(t_1) + (-i)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H'_{\text{ex}}(t_1) H'_{\text{ex}}(t_2) + \cdots \quad (5.93)$$

が得られる. 外場に対して 1 次のオーダーのみを扱うことにすると, 状態は

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-iHt} |\psi(0)\rangle - ie^{-iHt} \int_{t_0}^t dt_1 H'_{\text{ex}}(t_1) |\psi(0)\rangle \quad (5.94)$$

となる。これを用いて任意の演算子 $O(t)$ (Schrödinger 描像) の期待値は

$$\langle \Psi(t) | O(t) | \Psi(t) \rangle = \langle \psi(0) | \left(1 + i \int_{t_0}^t dt_1 H'_{\text{ex}}(t_1) \right) e^{iHt} O(t) e^{-iHt} \left(1 - i \int_{t_0}^t dt_1 H'_{\text{ex}}(t_1) \right) | \psi(0) \rangle \quad (5.95)$$

$$= \langle \psi(0) | O'(t) | \psi(0) \rangle + i \langle \psi(0) | \int_{t_0}^t dt_1 [H'_{\text{ex}}(t_1), O'(t)] | \psi(0) \rangle + \dots \quad (5.96)$$

$O'(t) = e^{iHt} O(t) e^{-iHt}$ であり, これまた H による Heisenberg 描像である。外場が無い場合の期待値との差は $|\psi_S(t)\rangle = e^{-iH(t-t_0)} |\psi_H(t_0)\rangle$ を用いて

$$\begin{aligned} \delta \langle \Psi(t) | O(t) | \Psi(t) \rangle &= \langle \Psi(t) | O(t) | \Psi(t) \rangle - \langle \psi(t) | O(t) | \psi(t) \rangle \\ &= \langle \Psi(t) | O(t) | \Psi(t) \rangle - \langle \psi(0) | e^{iHt} O(t) e^{-iHt} | \psi(0) \rangle \\ &= \langle \Psi(t) | O(t) | \Psi(t) \rangle - \langle \psi(0) | O'(t) | \psi(0) \rangle \\ &= i \langle \psi(0) | \int_{t_0}^t dt_1 [H'_{\text{ex}}(t_1), O'(t)] | \psi(0) \rangle \end{aligned} \quad (5.97)$$

外場が弱いと仮定して一次のオーダーまでその寄与を見ようというのが線形応答理論 (linear response theory, 久保理論)。上式は描像がごちゃまぜになっているように見えるが Schrödinger 描像と Heisenberg 描像は

$$|\psi(0)\rangle_S = |\psi(0)\rangle_H \quad (5.98)$$

という関係にあるのであえてラベル付けをしていない。

5.4.3 有限温度系へ

次に (5.97) を有限温度の期待値に拡張する。これは単純に期待値の取り方を変えれば良い:

$$\delta \langle O(t) \rangle = \frac{\sum_j e^{\beta H_j} \delta \langle i | O(t) | i \rangle}{\sum_j e^{\beta H_j}} = \frac{\text{Tr}[\rho \delta O(t)]}{\text{Tr}[\rho]} = i \int_{t_0}^t dt_1 \text{Tr}(\rho [H'_{\text{ex}}(t_1), O'(t)]) \quad (5.99)$$

ここで重要なことは (5.97) を見てもわかる通り, 非平衡系を記述するのに平衡系の情報しか用いていないことである。逆を言えば取り扱いの難しい非平衡系の相互作用みたいな項は 2 次のオーダーから効いてくるということである¹²。線形応答は非平衡系のとても簡単な取り扱いの方法になっている。

5.4.4 簡単な例

$t = t_0$ での外場の影響を

$$H_{\text{ex}}(t) = \int d\mathbf{x} J(\mathbf{x}, t) \phi(\mathbf{x}, t) \quad (5.100)$$

のような形で考える。 J はただの c-数で ϕ は実スカラー場。場の演算子 $\phi(\mathbf{x}, t)$ の熱平均を見ると

$$\delta \langle \phi(\mathbf{x}, t) \rangle = i \int_{t_0}^t dt_1 \text{Tr} \left(\rho \int d\mathbf{x}_1 [J(\mathbf{x}_1, t_1) \phi'(\mathbf{x}_1, t_1), \phi'(\mathbf{x}, t)] \right) \quad (5.101)$$

$$= -i \int_{t_0}^t dt_1 \int d\mathbf{x}_1 J(\mathbf{x}_1, t_1) \text{Tr}(\rho [\phi(\mathbf{x}, t), \phi'(\mathbf{x}_1, t_1)]) \quad (5.102)$$

ここでトレース部分はグリーン関数 (2 点相関関数) の定義になっている。密度行列が規格化されていると仮定すると温度グリーン関数は

$$iD(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_1, t_1) = \langle T[\phi'(\mathbf{x}, t) \phi'(\mathbf{x}_1, t_1)] \rangle = \text{Tr}[\rho T(\phi(\mathbf{x}, t) \phi(\mathbf{x}_1, t_1))] \quad (5.103)$$

¹² 平衡系から大きくずれた非平衡系を取り扱うのに線形応答理論は不適切である。尤も, そのような非平衡系の取り扱いはまだ明確に確立されていない。量子マスター方程式は線形応答を超える枠組みとして期待されている。

であり、遅延グリーン関数を

$$iD_R(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_1, t_1) = \langle [\phi'(\mathbf{x}, t), \phi'(\mathbf{x}_1, t_1)] \rangle \theta(t - t_1) = \text{Tr}(\rho[\phi'(\mathbf{x}, t), \phi'(\mathbf{x}_1, t_1)]) \theta(t - t_1) \quad (5.104)$$

と定義すれば (5.102) はこれを用いて

$$\delta \langle \phi(\mathbf{x}, t) \rangle = - \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int d\mathbf{x} D_R(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_1, t_1) J(\mathbf{x}_1, t_1) \quad (5.105)$$

$$= - \int d^4x D_R(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_1, t_1) J(\mathbf{x}_1, t_1) \quad (5.106)$$

とまとめることができる。時間 t をまとめて 4 元ベクトルにしてしまっているが、遅延グリーン関数の θ 関数で t が負のところは消えるので問題はない。

さて、これを今度は運動量表示に持っていく。外場を加えているものの時間は平衡系のハミルトニアン H で発展しているので、空間の一様性は保たれていると考える¹³。 D_R, J それぞれをフーリエ変換すると

$$D_R(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_1, t_1) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-x_1)} D_R(\mathbf{p}, p_0) \quad (5.107)$$

$$J(\mathbf{x}_1, t_1) = \int \frac{d^4p'}{(2\pi)^4} e^{-ip'x_1} J(\mathbf{p}', p'_0) \quad (5.108)$$

これを代入すると

$$\delta \langle \phi(\mathbf{x}, t) \rangle = - \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ipx} J(\mathbf{p}, p_0) D_R(\mathbf{p}, p_0) \quad (5.109)$$

$$\delta \langle \phi(\mathbf{p}, p_0) \rangle = -J(\mathbf{p}, p_0) D_R(\mathbf{p}, p_0) \quad (5.110)$$

というとても簡単な形に落ち着く。結論としては、外場の影響による熱平均の変化は運動量空間において外場の Source J と遅延グリーン関数 D_R ¹⁴ を掛けたものになる。

¹³もちろんこれは線形部分までしか考えていないから。

¹⁴これも当然、外場のないときの遅延グリーン関数である。

第6章 Wigner関数

6.1 Winger表示

6.1.1 定義

Wigner 関数の定義は以下の通り:

$$f_W(q, p, t) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} ds \left\langle q - \frac{s}{2} \left| \psi(t) \right\rangle \left\langle \psi(t) \left| q + \frac{s}{2} \right\rangle e^{ips/\hbar} \quad (6.1)$$

もしくは

$$f_W(q, p, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{q}_{12} \langle q_1 | \psi(t) \rangle \langle \psi(t) | q_2 \rangle e^{-ip\bar{q}_{12}/\hbar} \quad (6.2)$$

とすることもできる. ここでは $q_{12} = (q_1 + q_2)/2$, $\bar{q}_{12} = q_1 - q_2$ である.

6.1.2 任意の演算子に対する Wigner 表示

任意の演算子 \hat{A} に対する Wigner 表示は

$$A_W(q_{12}, p) = \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{q}_{12} \langle q_1 | \hat{A} | q_2 \rangle e^{-ip\bar{q}_{12}/\hbar} \quad (6.3)$$

である. ここで

$$\langle q_1 | \hat{A} | q_2 \rangle = \frac{1}{2\pi} \int dp A_W(q_{12}, p) e^{-ip\bar{q}_{12}} \quad (6.4)$$

が成立している.

6.2 Wigner 分布関数の時間発展

$f_W(q, p, t)$ の時間発展方程式を導く. その準備として 2 つの演算子同士の積 $(\hat{A}\hat{B})$ の Wigner 変換がどのように計算できるかを考える.

6.2.1 $(\hat{A}\hat{B})_W$ の計算

今回は式 (6.1) の流儀を採用する:

$$(\hat{A}\hat{B})_W = \int_{-\infty}^{\infty} ds \left\langle q - \frac{s}{2} \left| \hat{A}\hat{B} \right| q + \frac{s}{2} \right\rangle e^{ips/\hbar} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} ds dq' \left\langle q - \frac{s}{2} \left| \hat{A} \right| q' \right\rangle \left\langle q' \left| \hat{B} \right| q + \frac{s}{2} \right\rangle e^{ips/\hbar} \quad (6.5)$$

ここで式 (6.4) を用いて変形する:

$$\frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \int ds dq' dp' dp'' e^{ips/\hbar} e^{-ip'(q-q'-\frac{s}{2})/\hbar} e^{-ip''(q'-q-\frac{s}{2})/\hbar} A_W\left(\frac{q+q'}{2} - \frac{s}{4}, p'\right) B_W\left(\frac{q+q'}{2} + \frac{s}{4}, p''\right) \quad (6.6)$$

\exp の肩の変数に着目して A_W, B_W の変数を変形する:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \int ds dq' dp' dp'' & e^{ips/\hbar} e^{-ip'(q-q'-\frac{s}{2})/\hbar} e^{-ip''(q'-q-\frac{s}{2})/\hbar} \\ & \times A_W\left(q + \frac{1}{2}\left(q' - q - \frac{s}{2}\right), p'\right) B_W\left(q - \frac{1}{2}\left(q - q' - \frac{s}{2}\right), p''\right) \end{aligned} \quad (6.7)$$

これを並進演算子を用いて

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \int ds dq' dp' dp'' & e^{ips/\hbar} e^{-ip'(q-q'-\frac{s}{2})/\hbar} e^{-ip''(q'-q-\frac{s}{2})/\hbar} \\ & \times \left(e^{\frac{1}{2}(q'-q-\frac{s}{2})\partial_q} A_W(q, p') \right) \left(e^{-\frac{1}{2}(q-q'-\frac{s}{2})\partial_q} B_W(q, p'') \right) \end{aligned} \quad (6.8)$$

と変形. さらに並進変換 $e^{a\partial_q} e^{pq} = e^{p(q+a)}$ を用いて

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \int & ds dq' dp' dp'' e^{ips/\hbar} \\ & \times \left(A_W(q, p') e^{\frac{i\hbar}{2} \overleftarrow{\partial}_q \overrightarrow{\partial}_{p''}} e^{-ip''(q'-q-\frac{s}{2})/\hbar} \right) \left(e^{-ip'(q-q'-\frac{s}{2})/\hbar} e^{-\frac{i\hbar}{2} \overleftarrow{\partial}_{p'} \overrightarrow{\partial}_q} B_W(q, p'') \right) \end{aligned} \quad (6.9)$$

とする. ここで $\overleftarrow{\partial}, \overrightarrow{\partial}$ はそれぞれ左側, 右側に作用する演算子である. 次に q' の積分を計算する:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi\hbar} \int & ds dp' dp'' e^{ips/\hbar} \\ & \times \left(A_W(q, p') e^{\frac{i\hbar}{2} \overleftarrow{\partial}_q \overrightarrow{\partial}_{p''}} e^{i(p'-p'')q/\hbar} \delta(p'' - p') e^{-\frac{i}{2}(p''+p')s/\hbar} e^{-\frac{i\hbar}{2} \overleftarrow{\partial}_{p'} \overrightarrow{\partial}_q} B_W(q, p'') \right) \end{aligned} \quad (6.10)$$

p'' で積分:

$$\frac{1}{2\pi\hbar} \int ds dp' e^{ips/\hbar} \left(A_W(q, p') e^{\frac{i\hbar}{2} \overleftarrow{\partial}_q \overrightarrow{\partial}_{p'}} e^{-ip's/\hbar} e^{-\frac{i\hbar}{2} \overleftarrow{\partial}_{p'} \overrightarrow{\partial}_q} B_W(q, p') \right) \quad (6.11)$$

$$= \frac{1}{2\pi\hbar} \int ds dp' \left(A_W(q, p') e^{\frac{i\hbar}{2} \overleftarrow{\partial}_q \overrightarrow{\partial}_{p'}} e^{i(p-p')s/\hbar} e^{-\frac{i\hbar}{2} \overleftarrow{\partial}_{p'} \overrightarrow{\partial}_q} B_W(q, p') \right) \quad (6.12)$$

s で積分:

$$\int dp' \left(A_W(q, p') e^{\frac{i\hbar}{2} \overleftarrow{\partial}_q \overrightarrow{\partial}_{p'}} \delta(p - p') e^{-\frac{i\hbar}{2} \overleftarrow{\partial}_{p'} \overrightarrow{\partial}_q} B_W(q, p') \right) \quad (6.13)$$

最後に p' で積分:

$$\left(A_W(q, p) e^{\frac{i\hbar}{2} \overleftarrow{\partial}_q \overrightarrow{\partial}_p} e^{-\frac{i\hbar}{2} \overleftarrow{\partial}_p \overrightarrow{\partial}_q} B_W(q, p) \right) \quad (6.14)$$

つまり, $e^{\frac{i\hbar}{2} (\overleftarrow{\partial}_q \overrightarrow{\partial}_p - \overleftarrow{\partial}_p \overrightarrow{\partial}_q)} = e^{\frac{i\hbar}{2} \Lambda}$ とおくと,

$$(\hat{A}\hat{B})_W = A_W(q, p) e^{\frac{i\hbar}{2} \Lambda} B_W(q, p) \quad (6.15)$$

6.2.2 $f_W(q, p, t)$ の時間発展

以上の結果を基に $f_W(q, p, t)$ の時間発展方程式を導く. Schrödinger 方程式

$$i\hbar \partial_t |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle \quad (6.16)$$

を用いて, 式 (6.2) の時間微分は以下のようにまとめられる:

$$i\hbar\partial_t f_W(q, p, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{q}_{12} \langle q_1 | (i\hbar\partial_t |\psi(t)\rangle \langle \psi(t)|) | q_2 \rangle e^{-ip\bar{q}_{12}/\hbar} \quad (6.17)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{q}_{12} \langle q_1 | (i\hbar\partial_t |\psi(t)\rangle) \langle \psi(t) | q_2 \rangle e^{-ip\bar{q}_{12}/\hbar} \\ + \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{q}_{12} \langle q_1 | \psi(t) \rangle (i\hbar\partial_t \langle \psi(t) |) | q_2 \rangle e^{-ip\bar{q}_{12}/\hbar} \quad (6.18)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{q}_{12} \left\langle q_1 \left| \left[\hat{H}, |\psi(t)\rangle \langle \psi(t)| \right] \right| q_2 \right\rangle e^{-ip\bar{q}_{12}/\hbar} \quad (6.19)$$

$$= (\hat{H} |\psi(t)\rangle \langle \psi(t)|)_W - (|\psi(t)\rangle \langle \psi(t)| \hat{H})_W \quad (6.20)$$

$$= H_W(q, p) e^{\frac{i\hbar}{2}\Lambda} f_W(q, p, t) - f_W(q, p, t) e^{\frac{i\hbar}{2}\Lambda} H_W(q, p) \quad (6.21)$$

6.3 具体的な問題

以上の定式化を具体的なモデルに落とし込み, 数値計算で相空間上の運動を見る.

6.3.1 調和振動子系の Wigner-Moyal 方程式

ハミルトニアンを

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{q}^2 \quad (6.22)$$

とする. このハミルトニアンの Wigner 表示は

$$H_W(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2q^2 \quad (6.23)$$

である. これを (6.21) に代入:

$$i\hbar\partial_t f_W(q, p, t) = \left(\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2q^2 \right) e^{\frac{i\hbar}{2}\Lambda} f_W(q, p, t) - f_W(q, p, t) e^{\frac{i\hbar}{2}\Lambda} \left(\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2q^2 \right) \quad (6.24)$$

これを計算する. 面倒なので以下では $m = \omega = \hbar = 1$ の単位系を採用.

$$\partial_t f_W(q, p, t) = (q\partial_p - p\partial_q) f_W(q, p, t) \quad (6.25)$$

のような偏微分方程式が導出される. これを数値的に解きたい.

6.3.2 数値計算

差分化

今回は簡単のため, 普通に差分化する. 差分化した方程式は Moyal 方程式は

$$f(t_{n+1}) = k_1[q_l f(p_{m+1}) - p_m f(q_{l+1})] + [k_1(-q_l + p_m) + 1]f \quad (6.26)$$

となる. ここでいくつかの記号の省略ルールを示す:

- Wigner 表示の添字 W は省略
- $f(q_l, p_m, t_n)$ のように差分化しており, q, p の幅は h_{qp} , t の幅は h_t .
- $f(q_l, p_m, t_n) \rightarrow f$, $f(q_{l+1}, p_m, t_n) \rightarrow f(q_{l+1})$ などの表記を用いている.
- $h_t/h_{qp} = k_1$.

これで数値計算が可能な形になった.

問題点

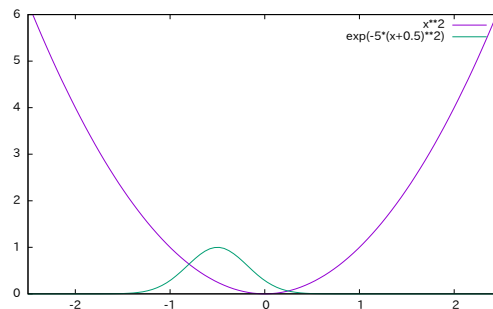
上の差分化は単なる前進差分なので $\mathcal{O}(h_{qp}), \mathcal{O}(h_t)$ の誤差を生じる. これで計算すると, よほど細かく差分化しないとヤバいです. 誤差が累積して襲ってきます. せめて中央差分にしましょう.

初期条件

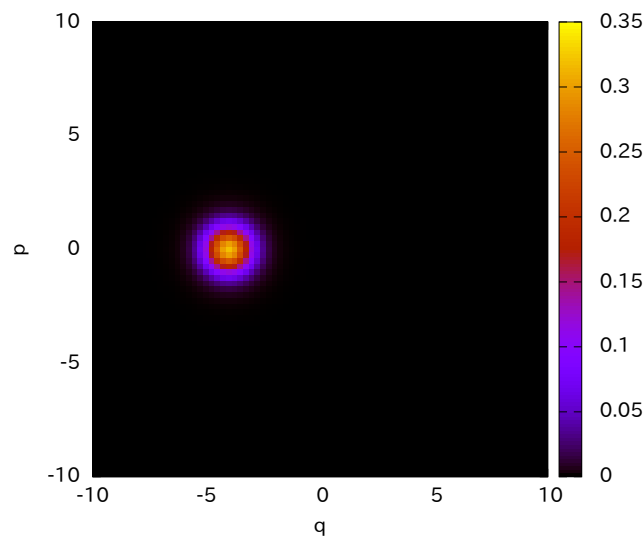
あるガウス波束 f_0 の Wigner 表示として

$$f_{0W} = \frac{1}{\pi} e^{-(q+4)^2 - p^2} \quad (6.27)$$

を用意する. f_0 はこんなかんじ:



この波束が調和型トラップによって振動する. 古典粒子が調和振動子トラップ内で振動するとき, 位相空間上の点は楕円を描くように動くはずであり Wigner 関数も同様の動きをするが, 相空間上では q, p 方向の広がりがある.



こんなほんやりした玉みたいなのが位相空間上をぐるぐる回るはず.

第7章 経路積分

7.1 量子力学の復習

7.1.1 自由粒子

自由粒子を記述する Schrödinger 方程式は

$$i\partial_t |\psi(t)\rangle = \frac{\hat{p}^2}{2m} |\psi(t)\rangle \quad (7.1)$$

これを p -表示に移すと簡単に解ける:

$$i\partial_t \langle p|\psi(t)\rangle = \langle p|\frac{\hat{p}^2}{2m}|\psi(t)\rangle = \frac{p^2}{2m} \langle p|\psi(t)\rangle \quad (7.2)$$

$$\therefore \langle p|\psi(t)\rangle = C e^{-i\frac{p^2}{2m}t} \quad (7.3)$$

これを運動量固有値 p でパラメトライズされたケットで表現すると

$$|p, t\rangle_S = |p\rangle e^{-i\frac{p^2}{2m}t} \quad (7.4)$$

ということ. もちろん ${}_S\langle p', t|p, t\rangle_S = \delta(p - p')$. 一般解はこの線型結合で書ける:

$$|\Psi, t\rangle = \int dp f(p) |p\rangle e^{-i\frac{p^2}{2m}t} \quad (7.5)$$

これは規格化条件 $\langle \Psi, t|\Psi, t\rangle = 1$ を満たしているものとする. ここで, $t = 0$ で $x = 0$ に局在している波束を用意する:

$$\langle x|\psi\rangle = \frac{1}{(\pi\alpha)^{\frac{1}{4}}} e^{-\frac{1}{2\alpha}x^2} \quad (7.6)$$

この p -表示は完全系を挿入することで求まる:

$$\langle p|\psi\rangle = \int dx \langle p|x\rangle \langle x|\psi\rangle = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{\alpha}{2}p^2} \quad (7.7)$$

問 1 $\langle x|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ipx}$ であることを示せ. また, この操作が Fourier 変換と等価であることを確認せよ.

ここで Δt だけ時間発展させると

$$\langle p|e^{-iH\Delta t}|\psi\rangle = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{\alpha}{2}p^2} e^{-i\frac{p^2}{2m}\Delta t} \quad (7.8)$$

である.

問 2 $i\partial_t |\psi\rangle = \hat{H} |\psi\rangle$ の形式解が $e^{-i\hat{H}t} |\psi\rangle$ であることを確かめよ.

これを x -表示に移すと

$$\langle x|\psi\rangle = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{1}{\alpha + i\frac{\Delta t}{m}}} e^{-\frac{1}{\alpha + i\frac{\Delta t}{m}}x^2} \quad (7.9)$$

となる. 自由粒子の波束の幅は時間発展と共に広がっていくことがわかる.

7.1.2 Green 関数

以上のような「様々な初期波束を置いてみて、時間発展に従って波動関数がどのように変化するのか」を考える問題では Green 関数 (伝搬関数, propagator) を計算しておくとう便利。

$$\langle x|\psi(t)\rangle = \langle x|e^{-iH(t-t_0)}|\psi(t_0)\rangle = \int dx' \langle x|e^{-iH(t-t_0)}|x'\rangle \langle x'|\psi(t_0)\rangle \quad (7.10)$$

$$= \int dx' G(x, t; x', t_0) \langle x'|\psi(t_0)\rangle \quad (7.11)$$

Green 関数 $G(x, t; x', t_0)$ は、時刻 t_0 に場所 x_0 にいた粒子が時刻 t に場所 x に移動している確率振幅密度のようなもの。この Green 関数が分かりさえすれば波束を掛けて積分することで時間発展を追うことができる。この Green 関数を計算する方法としてよく用いられるのが経路積分である。

Green 関数の数学的な定義などについては別途勉強しましょう。

7.2 経路積分の基礎

7.2.1 経路積分の導出

伝搬関数は初期状態を (q_i, t_i) , 終状態を (q_f, t_f) とすると

$$K(q_f, t_f; q_i, t_i) \equiv \langle q_f, t_f | e^{-i\hat{H}(t_f-t_i)} | q_i, t_i \rangle \quad (7.12)$$

と定義できる¹。 $|q, t\rangle$ は時刻 t で粒子が座標 q に局在している \hat{q} の固有状態である。自由粒子などの簡単なモデルであれば伝搬関数の計算もそんなに大変ではないが、もっと複雑なモデルではそう簡単に求まらない。これをうまく計算するために経路積分 (Path Integral) を導出する。

まず時間を微小区間 δt に分割する:

$$e^{-i\hat{H}(t_f-t_i)} = \prod_{I=1}^N e^{-i\hat{H}\delta t}, \quad \delta t = \frac{t_f-t_i}{N} \quad (7.13)$$

時間を $N+1$ 分割したことになる。 \hat{q} が \hat{p} より右側にあることを仮定し、各分割点に位置演算子 $\hat{q}(t_i + I\delta t)$ の固有状態 $|q_I\rangle$ の完全系

$$\int dq_I |q_I\rangle \langle q_I| = 1 \quad (7.14)$$

を挟むと伝搬関数は以下のように書き直せる:

$$K(q_f, t_f; q_i, t_i) = \int dq_{N-1} dq_{N-2} \cdots dq_I \cdots dq_2 dq_1 \langle q_f | e^{-i\hat{H}\delta t} | q_{N-1} \rangle \langle q_{N-1} | e^{-i\hat{H}\delta t} | q_{N-2} \rangle \langle q_{N-2} | \cdots \\ \cdots \langle q_{I+1} | e^{-i\hat{H}\delta t} | q_I \rangle \cdots \langle q_2 | e^{-i\hat{H}\delta t} | q_1 \rangle \langle q_1 | e^{-i\hat{H}\delta t} | q_i \rangle \quad (7.15)$$

以下では $\langle q_{I+1} | e^{-i\hat{H}\delta t} | q_I \rangle$ を計算することを考える。これに運動量演算子 $\hat{p}(t_i + I\delta t)$ の固有状態 $|p_I\rangle$ の完全系

$$\int dp_I |p_I\rangle \langle p_I| = 1 \quad (7.16)$$

を挿入する:

$$\langle q_{I+1} | e^{-i\hat{H}\delta t} | q_I \rangle = \int dp_I \langle q_{I+1} | p_I \rangle \langle p_I | e^{-i\hat{H}\delta t} | q_I \rangle \quad (7.17)$$

$$= \int dp_I \langle q_{I+1} | p_I \rangle e^{-iH(q_I, p_I)\delta t} \langle p_I | q_I \rangle \quad (7.18)$$

¹以降伝搬関数は K と書く。これを Feynman 核 (Feynman kernel) と呼ぶ。 $t > 0$ を約束すれば Green 関数と Feynman 核は同じもの。

問3 \hat{H} に演算子 \hat{q}, \hat{p} が含まれていることから, $\langle p_I | e^{-i\hat{H}\delta t} | q_I \rangle$ のハットハミルトニアンが c -数の $H(q_I, p_I)$ に化けることを示せ.

$\langle q|p \rangle$ は平面波になることから

$$\langle q_{I+1} | e^{-i\hat{H}\delta t} | q_I \rangle = \frac{1}{2\pi} \int dp_I e^{i\left(p_I \frac{q_{I+1}-q_I}{\delta t} - iH(q_I, p_I)\right)\delta t} \quad (7.19)$$

$\delta t \rightarrow 0$ の極限では $\frac{q_{I+1}-q_I}{\delta t} \rightarrow \frac{dq}{dt}$ であることから

$$K(q_f, t_f; q_i, t_i) = \int \mathcal{D}p \mathcal{D}q e^{i \int_{t_i}^{t_f} dt \left(p \frac{dq}{dt} - H\right)} \quad (7.20)$$

$$\mathcal{D}p \mathcal{D}q = \prod_{I=0}^N \frac{\mathcal{D}p \mathcal{D}q}{2\pi} \quad (7.21)$$

問4 \exp の肩が (和ではなく) 積分になることを確認せよ.

N はいずれ ∞ になるので, 無限回の積分を行わなくてはならない. この積分は $q(t_i) = q_i, q(t_f) = q_f$ となるような境界条件をつけて行うとする.

$H = \frac{p^2}{2m} + V(q)$ の場合について考える:

$$K(q_f, t_f; q_i, t_i) = \int \mathcal{D}p \mathcal{D}q e^{i \int_{t_i}^{t_f} dt \left(p \frac{dq}{dt} - \frac{p^2}{2m} - V(q)\right)} = \int \mathcal{D}p \mathcal{D}q e^{i \int_{t_i}^{t_f} dt \left(-\frac{(p-m\dot{q})^2}{2m} + \frac{\dot{q}^2}{2m} - V(q)\right)} \quad (7.22)$$

これで p について積分が可能. q の積分は $V(q)$ の具体系が与えられて初めて計算が可能になる. p の積分を実行し, その解が \mathcal{N} だったとすると

$$K(q_f, t_f; q_i, t_i) = \mathcal{N} \int \mathcal{D}q e^{i \int_{t_i}^{t_f} dt \left(\frac{\dot{q}^2}{2m} - V(q)\right)} \quad (7.23)$$

\exp の肩に作用 (action) $S[q(t)] = \int_{t_i}^{t_f} dt \left(\frac{\dot{q}^2}{2m} - V(q)\right)$ に虚数単位を掛けて積分すれば伝搬関数が求まることがわかる. これが経路積分である.

作用が (プランク定数より) 十分大きい場合 $\exp(iS)$ は極値の近傍を除いて激しく振動して積分に効いてこないことが期待される. この極値のみを取り出してきたものを「古典極限」と呼ぶ. 作用がプランク定数と同程度のオーダーを持つ場合, 極値近傍以外にも積分に効いてくる可能性があり, これが量子効果として取り入れられることになる.

問5 無次元化をしない場合, 経路積分の被積分関数は $\exp(iS/\hbar)$ と書ける. S がプランク定数 \hbar より十分大きい時, S の極値以外の積分が値に効いてこない理由を考えよ.

7.2.2 自由粒子: 経路積分を使わない方法

自由粒子 ($V(q) = 0$) の場合は経路積分を使わなくても伝搬関数がすぐに求まる. まず p -表示で確率振幅を書き下す:

$$\langle p_f | e^{-i\frac{\hat{p}^2}{2m}(t_f-t_i)} | p_i \rangle = e^{-i\frac{p_f^2}{2m}(t_f-t_i)} \delta(p_f - p_i) \quad (7.24)$$

これを x -表示に移す:

$$K(x_f, t_f; x_i, t_i) = \langle x_f | e^{-i\frac{p^2}{2m}(t_f-t_i)} | x_i \rangle = \int dp \langle x_f | p \rangle \langle p | e^{-i\frac{p^2}{2m}(t_f-t_i)} | x_i \rangle \quad (7.25)$$

$$= \sqrt{\frac{m}{2\pi i(t_f-t_i)}} e^{-i\frac{m}{2(t_f-t_i)}(x_f-x_i)^2} \quad (7.26)$$

問 6 (7.26)(7.9) を用いて (7.6) を再現せよ.

7.2.3 自由粒子：経路積分の方法

まずは伝搬関数 (の被積分関数) を時間について離散化する ($\dot{x} = \frac{x_{j+1} - x_j}{\delta t}$):

$$e^{-i \int dt \frac{m(\dot{x})^2}{2}} \rightarrow \prod_{j=0}^N e^{i\frac{m}{2} \left(\frac{x_{j+1} - x_j}{\delta t} \right)^2 \delta t} \quad (7.27)$$

ただし $x_0 = x_i, x_{N+1} = x_f$ とする. これに $\int dx_1 dx_2 \cdots dx_N$ をかけて積分すれば (7.23) が計算できたことになる. ここで公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ia(x-x_1)^2 + ib(x-x_2)^2} = \sqrt{\frac{i\pi}{a+b}} e^{i\frac{ab}{a+b}(x_1-x_2)^2} \quad (7.28)$$

を用いる.

問 7 (7.28) を証明せよ.

x_1 に関する積分:

$$\int dx_1 e^{i\frac{m}{2\delta t}((x_i-x_1)^2 - (x_1-x_2)^2)} = \sqrt{\frac{i\pi\delta t}{m}} e^{-i\frac{m}{4\delta t}(x_i-x_2)^2} \quad (7.29)$$

これより, x_2 の積分は:

$$\int dx_2 e^{i\frac{m}{2\delta t}(\frac{1}{2}(x_i-x_2)^2 - (x_2-x_3)^2)} = \sqrt{\frac{4i\pi\delta t}{3m}} e^{-i\frac{m}{6\delta t}(x_i-x_3)^2} \quad (7.30)$$

これを繰り返していくと x_n の積分因子として $\sqrt{\frac{i2n\pi\delta t}{(n+1)m}}$ が現れることがわかる. 全積分が終わったとき

$$K(x_f, t_f; x_i, t_i) = \langle x_f | e^{-i\frac{p^2}{2m}(t_f-t_i)} | x_i \rangle = \mathcal{N} \left(\sqrt{\frac{i2\pi\delta t}{m}} \right)^N \sqrt{\frac{1}{N+1}} e^{i\frac{m}{2(N+1)\delta t}(x_f-x_i)^2} \quad (7.31)$$

\mathcal{N} は p 積分の結果出てくる因子で, 積分 1 回につき $\sqrt{\frac{m}{2\pi i\delta t}}$ が出てくる. さらに $\delta t(N+1) = t_f - t_i$ であることを用いると

$$K(x_f, t_f; x_i, t_i) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i(t_f-t_i)}} e^{-i\frac{m}{2(t_f-t_i)}(x_f-x_i)^2} \quad (7.32)$$

となり, (7.26) と一致している.

問 8 p 成分の積分を計算せよ.

問 9 数学的帰納法を用いて Feynman kernel が (7.31) のように計算できることを示せ.

経路積分を使わない方法に比べてかなり面倒ですが, モデルがもっと複雑になると有り難みが出てきます.

7.3 数値計算の準備及び経路積分のイメージ

直感的理解へ向けて経路積分について数値計算を行う。

7.3.1 基底波動関数と伝搬関数

伝搬関数を束縛状態の固有関数 $|n\rangle$ で展開:

$$G(x, t; x_0, t_0 = 0) \equiv \langle x | e^{-i\hat{H}(t-t_0)} | x_0 \rangle = \sum_n \langle x | n \rangle \langle n | e^{-i\hat{H}t} | x_0 \rangle = \sum_n \psi_n(x) \psi_n^*(x_0) e^{-iE_n t} \quad (7.33)$$

ここで $t = -i\tau$ として $\tau \rightarrow \infty$ を考えると, 高い励起状態は指数関数的に減衰していくことがわかる。これより伝搬関数と基底波動関数の関係

$$G(x, t = 0 - i\tau; x_0, t_0 = 0) \rightarrow \psi_0(x) \psi_0^*(x_0) e^{E_0 \tau} \quad (7.34)$$

$$\therefore |\psi_0(x)|^2 \rightarrow e^{-E_0 \tau} G(x, t = 0 - i\tau; x_0 = x, t_0 = 0) \quad (7.35)$$

が明らかになる。第二式は始点と終点が同じになっていることに注意。Green 関数から基底波動関数の情報を抜き出すためには, 虚時間を導入し時間発展を行えば良い。これを虚時間発展法と呼ぶ。

7.3.2 作用とラグランジアン

ラグランジアンを虚時間で記述すると, ハミルトニアンに化ける:

$$L\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = \frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - V(x) \quad (7.36)$$

$$\rightarrow L\left(x, \frac{dx}{-id\tau}\right) = -\frac{m}{2} \left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 - V(x) = -H\left(x, \frac{dx}{d\tau}\right) \quad (7.37)$$

これにより作用がラグランジアンの積分からハミルトニアンの積分に書き換えられる:

$$S[x(t)] = \int_{t_0=0}^t dt L(x, t) = i \int_{\tau_0=0}^{\tau} d\tau H(x, \tau) \quad (7.38)$$

$$G(x, -i\tau; x_0, 0) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{N+1} \int dx_1 dx_2 \cdots dx_N e^{-\int_0^{\tau} H(\tau)} \quad (7.39)$$

問 10 (7.38)(7.39) を確かめよ。

7.3.3 作用積分の簡略化

前述のハミルトニアンの積分を差分化で書き直し, 数値計算に持ち込めるようにする:

$$\int H(\tau) \simeq \sum_j \epsilon E_j = \epsilon W(\{x_j\}) \quad (7.40)$$

$$W(\{x_j\}) \equiv \sum_j \left[\frac{m}{2} \left(\frac{x_j - x_{j-1}}{\epsilon} \right)^2 + V\left(\frac{x_j + x_{j-1}}{2}\right) \right] \quad (7.41)$$

規格化を考慮したうえで (7.35) に代入する:

$$|\psi_0(x)|^2 = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{G(x, t = -i\tau; x_0 = x, t_0 = 0)}{\int dx G(x, t = -i\tau; x_0 = x, t_0 = 0)} \quad (7.42)$$

$$= \frac{1}{Z} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int dx_1 dx_2 \cdots dx_N e^{-\epsilon W(x, x_1, \dots, x_N)} \quad (7.43)$$

$$Z = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int dx dx_1 dx_2 \cdots dx_N e^{-\epsilon W} \quad (7.44)$$

W はエネルギー線積分になっている。また $W(x, x_1, \dots, x_N)$ は始点と終点を x に固定している。

7.3.4 経路とは

(7.39) の \exp の肩においてハミルトニアンを時間軸に沿って積分している。また $S[x(t)] = i \int_{\tau_0=0}^{\tau} d\tau H(x, \tau)$ から作用は $x(t)$ の経路によって決定される。つまり、「取りうるすべての $x(t)$ の経路についてエネルギー (ハミルトニアン) を足しあげていく」ことが経路積分の具体的なイメージである。エネルギーが大きい経路が効いてこない理由は (7.39) から直感的にわかる。

7.3.5 経路の取り方

$|\psi_0(x)|^2$ を求めたい訳だが、数値計算の上では離散化するので $|\psi_0(x[1])|^2, |\psi_0(x[2])|^2, |\psi_0(x[3])|^2 \dots |\psi_0(x[N-1])|^2$ を求めることになる。本来なら $G(x[1], -i\tau; x[1], 0), G(x[2], -i\tau; x[2], 0), G(x[3], -i\tau; x[3], 0), \dots G(x[N-1], -i\tau; x[N-1], 0)$ について別々の初期設定で計算する必要がある。これを別々に計算すると計算コストが非常に高くなる。 x_j は時間で差分、 $x[j]$ は空間で差分化していることに注意。

具体的な計算においては (7.43) を各 $x[1], x[2] \dots$ について計算すればよいのだが

$$|\psi_0(x[1])|^2 = \frac{1}{Z} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int dx_1 dx_2 \cdots dx_N e^{-\epsilon W(x[1], x_1, x_2, \dots)} \quad (7.45)$$

$$|\psi_0(x[2])|^2 = \frac{1}{Z} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int dx_1 dx_2 \cdots dx_N e^{-\epsilon W(x[2], x_1, x_2, \dots)} \quad (7.46)$$

⋮

における $W(x[1], x_1, x_2, \dots)$ と $W(x[2], x_1, x_2, \dots)$ は始点 (終点) が異なるので、それぞれ別々に計算を実行しなければならない。これが計算コストの肥大化の原因である。

7.3.6 処方箋

この問題に関する処方箋は Rubin の本²にあるのでこれを参考勉強するのがいいと思います。が、翻訳があまり良くないのかそもそも原文の内容が丁寧でないためか、理解するのはなかなか難しいと思います。理解のための重要なポイントは

1. x_0 が始点 (終点) の経路における x_i を x'_i にフリップしたときに x_0 からの作用積分が x_i からの作用積分と同じ値であることを利用して $|\psi(x'_i)|^2$ を求めることが経路積分の計算と等価であること
2. 作用を計算して確率分布に計上することと、フリップする確率を Boltzmann 分布で与えてその経路 (格子点) に乗った粒子をそのまま足し上げることがだいたい等価であること

の2点にあると思います。この2つが Monte Carlo 法・Metropolis 法による数値計算を正当化しています。是非一緒にお勉強しましょう。

²Rubin H. Landau, *Computational Physics* (1997) pp. 313-317

第8章 Ising 模型

8.1 Ising 模型と熱統計力学の基礎

強磁性体を記述するモデルのひとつ.

8.1.1 ハミルトニアン

ハミルトニアンを

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} s_i \cdot s_j \quad (8.1)$$

とする. $\langle i,j \rangle$ は隣接サイト間のみの和を表す. J は相互作用定数. s はスピン. スピンはアップ ($s = 1$) とダウン ($s = -1$) の2種類. 非常に単純なスピン系モデルでありながら相転移の記述が可能である. 1・2次元系については厳密解が求められている.

外部磁場を考慮したモデルもある:

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} s_i \cdot s_j - h \sum_i s_i \quad (8.2)$$

8.1.2 平衡状態

系の平衡状態は Helmholtz エネルギー

$$F = U - TS \quad (8.3)$$

が最小になるように決まる. 低温 ($T \ll U/S$) ならば内部エネルギー $U = \langle H \rangle$ が leading であり, これを最小化するようにスピンの向きが揃う. これを強磁性体と呼ぶ. 一方で高温ならばエントロピーの項が優勢なのでエントロピーが最大になるようにスピンの向きがバラバラになる. これを常磁性体と呼ぶ.

8.1.3 相転移

Gibbs 自由エネルギーの1回微分が不連続変化をするときこれを第一種相転移と呼び, Gibbs 自由エネルギーの2回微分については第二種相転移と呼ぶ. 第一種は体積, エントロピーとか.

$$\left(\frac{\partial G}{\partial p} \right)_T = V, \quad \left(\frac{\partial G}{\partial T} \right)_p = -S \quad (8.4)$$

第二種は比熱など.

$$\frac{\partial^2 G}{\partial T^2} = -\frac{\partial S}{\partial T} = -\frac{C_P}{T} \quad (8.5)$$

有限温度 1次元 Ising 模型は相転移を起こさないが, 2次元系はその限りではない.

8.2 Ising 模型の厳密解

8.2.1 1 次元 Ising 模型：平均場近似

まずは厳密解の前に Ising 模型を平均場近似で解析してみる。多体系で相互作用を平均場として理解することは非常に重要なので、手法として知っておく必要がある。

平均場近似ではまず任意のサイトのスピンに着目し、その周囲のスピンからの影響を時間や空間によらない平均値で置き換える。スピンを

$$s_i = \langle s \rangle + \delta s_i \quad (8.6)$$

置くことにする。これを (8.2) に代入：

$$H = -H_{\text{eff}} \sum_{i=1}^N s_i + \frac{NzJ\langle s \rangle^2}{2} \quad (8.7)$$

$$H_{\text{eff}} = h + zJ\langle s \rangle \quad (8.8)$$

ここで δs の 2 次は無視している。 N はスピンの総数、 z は最隣接サイト数 (1 次元なら 2, 2 次元なら 4) である。計算途中で

$$\sum_{\langle i,j \rangle} s_i = z \sum_i s_i, \quad \sum_{\langle i,j \rangle} 1 = \frac{1}{2}zN \quad (8.9)$$

を用いている。これより分配関数は

$$Z = \exp(-\beta H) = \exp \left[-\beta \left(-H_{\text{eff}} \sum_{i=1}^N s_i + \frac{NzJ\langle s \rangle^2}{2} \right) \right] = Z_0 \left(\prod_i Z_i \right) = Z_0 (Z_i)^N \quad (8.10)$$

$$Z_0 = \exp \left(-\beta \frac{NzJ\langle s \rangle^2}{2} \right), \quad Z_i = \sum_{s_i=1,-1} e^{\beta H_{\text{eff}} s_i} = 2 \cosh(\beta H_{\text{eff}}) \quad (8.11)$$

全体の分配関数は

$$Z = \exp \left(-\beta \frac{NzJ\langle s \rangle^2}{2} \right) 2^N \cosh^N(\beta H_{\text{eff}}) \quad (8.12)$$

Helmholtz エネルギーは

$$F = \frac{NzJ}{2} \langle s \rangle^2 - Nk_B T \log [2 \cosh(\beta H_{\text{eff}})] \quad (8.13)$$

磁化は単位体積あたりのスピン数を n としたときに $M = n \langle s \rangle$ であるが、今回すべてのスピンは等価と考えているので $\langle s_i \rangle$ を計算すれば十分である：

$$\langle s_i \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{s_i} \cdots \sum_{s_i} \cdots s_i e^{-\beta H} = \frac{1}{Z_i} \sum_{s_i=-1,1} s_i e^{\beta s_i H_{\text{eff}}} \quad (8.14)$$

$$= \tanh(\beta H_{\text{eff}}) \quad (8.15)$$

これは自己無同着方程式である。

8.2.2 1 次元 Ising 模型：厳密解

教科書を参考にしながら是非自分で手を動かして解いてみてください。

8.2.3 2次元 Ising 模型

2次元 Ising 模型の厳密解は Onsager によって求められている:

$$\frac{U}{N} = -J \coth 2\beta J \left[1 + \frac{2}{\pi} \kappa_1 K(\kappa) \right] \quad (8.16)$$

$$\frac{C_H}{N} = k_B (\beta J \coth 2\beta J)^2 \frac{2}{\pi} \left[2K(\kappa) - 2E(\kappa) - (1 - \kappa_1) \left(\frac{2}{\pi} + \kappa_1 K(\kappa) \right) \right] \quad (8.17)$$

$K(\kappa), E(\kappa)$ は楕円積分:

$$K(\kappa) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \theta}} \quad (8.18)$$

$$E(\kappa) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \theta} \quad (8.19)$$

導出は難しいので、これが数値計算と一致するかどうかを確かめたい。

8.3 数値計算

8.3.1 Monte Carlo 法

系は Helmholtz エネルギーを最小にするように平衡状態を決める (ゼロ温度の場合は内部エネルギーが最小). これを実現するためには, 任意のサイトの状態を変化させて内部エネルギーが小さくなるようにする操作を繰り返せば良い. 「任意のサイトを選ぶ」ために乱数を用いることになるが, 乱数を用いるアルゴリズムの総称が Monte Carlo 法である.

単純に前述の通り内部エネルギーが最小な平衡状態はゼロ温度なので, 有限温度系に拡張するためには工夫が必要である.

8.3.2 Metropolis 法

系が平衡状態にあるとき, 内部エネルギーの分布を $P(E)$, エネルギー $E' \rightarrow E$ 遷移確率を $W(E, E')$ とすると

$$W(E, E')P(E') = W(E', E)P(E) \quad (8.20)$$

が成立している. $P(E')$ の状態が $P(E)$ の状態に遷移しようとする流れとその逆の流れが平衡状態にあるということである. 系のエネルギー分布がカノニカル分布になることを仮定すると,

$$P(E) = \frac{e^{-\beta E}}{Z(\beta)} \quad (8.21)$$

であることがわかる. $Z(\beta)$ は分配関数. これを (8.20) に代入すると以下の関係式を得る:

$$e^{-\beta(E-E')} = \frac{W(E, E')}{W(E', E)} \quad (8.22)$$

ここで, (8.22) を満たすような $W(E, E')$ を与える:

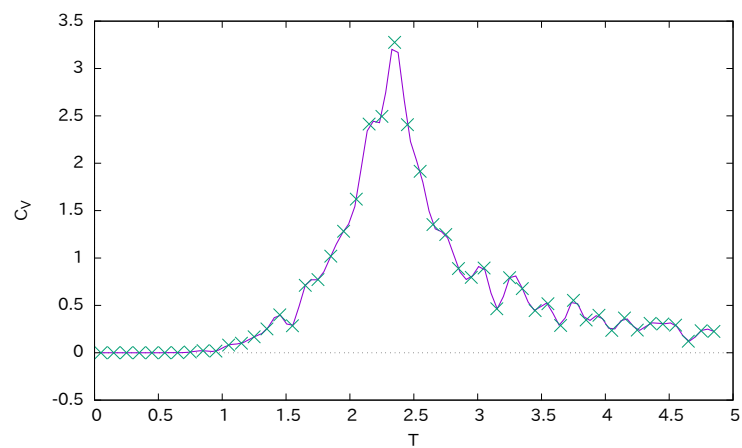
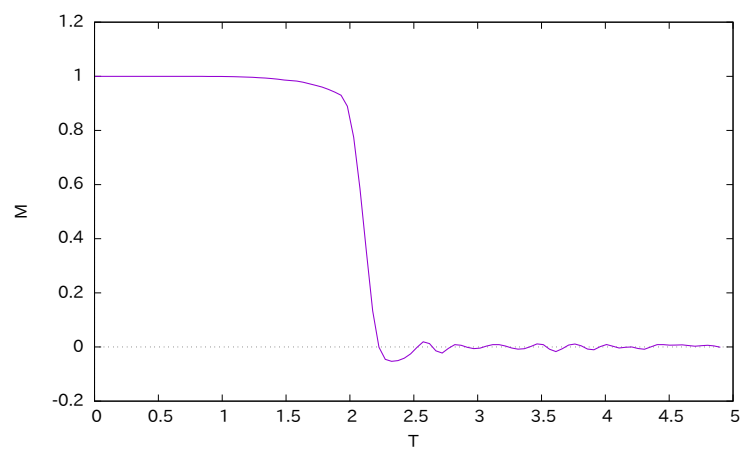
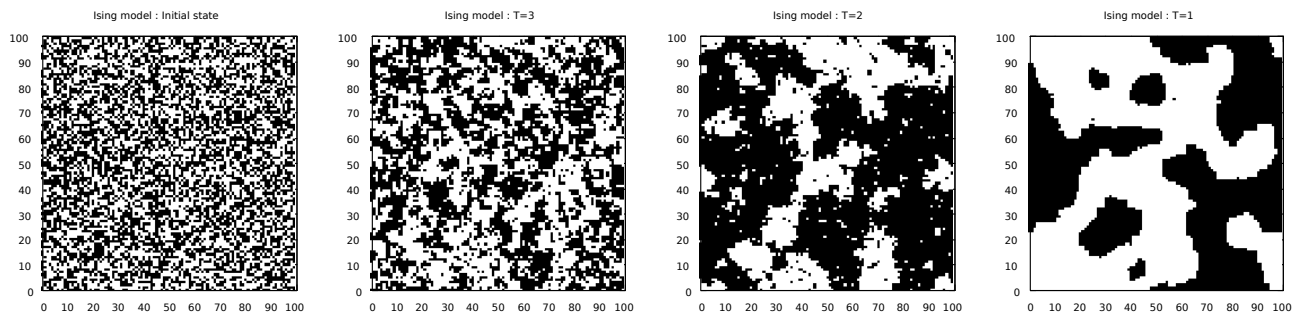
$$W(E, E') = \begin{cases} 1 & (E \leq E') \\ e^{-\beta(E-E')} & (E > E') \end{cases} \quad (8.23)$$

これが Metropolis 法である.

Ising モデルに置き換えると, スピンをフリップしたときにエネルギー的に安定ならばそのままにして, 不安定な場合も, ボルツマン因子に依る確率でフリップを許可する. これで有限温度系への拡張が可能になる.

8.3.3 2次元 Ising 模型

シミュレーション結果:



磁区の図は $N = 100^2$, $J = 1$, 磁化と比熱は $N = 16^2$, $J = 1$ で計算した. 以上の図から

- 温度が下がるほどはっきりとした磁区が形成されること
- 磁化・比熱は転移温度 ($T_C \simeq 2.26$) 付近で drastic に変化していること

- 2 次相転移が起こっている (であろう) こと

などがわかる.

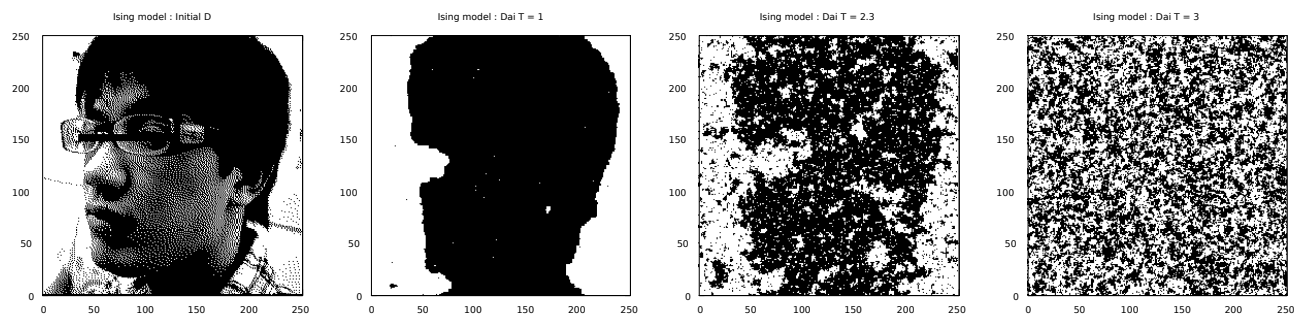
8.3.4 数値計算上の注意

乱数

なるべく良い乱数を用いるようにしましょう. C 言語の `rand()` はあまり良くありません. 単純な線形合同法では周期が短く大量の乱数を用いるシミュレーションには向きません. Mersenne twister などのアルゴリズムを用いましょう.

ローカルな極小点

ゼロ温度系ではあまり明確な磁区が生まれません. ただの Monte Carlo 法ではローカルな極小点にハマるとそこから抜け出せないからです. Metropolis 法を適応するとある程度解決しますが, やはり正の磁区と負の磁区に分かれるのでグローバルな磁化は熱力学極限とは異なる値を示します. 上の図の $T = 1$ もやはりローカルな極小点であり真の最小点であるスピンの全て揃った状態にはなりません. これを解決するために, 物理量の計算の際は $T = 0$ でスピンが全て揃った状態を用意しそこから Monte Carlo シミュレーションを行っています. 焼きなまし法を用いるとどんな初期状態でも Helmholtz エネルギーが最小な状態を作れるかもしれません.



ご覧の通り, Metropolis 法だと磁化の形成は初期状態の選び方に強く依存します.

第9章 場の量子論

9.1 Wick の定理

摂動計算において重要な役割を果たす。ただし、この定理が成立するのは生成消滅演算子の代数を満たすものに限られる。つまり、ゼロモード演算子は Wick の定理を満たさない。

9.1.1 概要

ざっくり言うと

場の演算子の時間順序積 (T 積) はそれらの演算子から構成される全ての可能な正規積 (N 積) と伝搬関数の積の和で表される。

伝搬関数 (因果 Green 関数, Feynman propagator) は

$$\Delta_F(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, t_1 - t_2) = -i \langle 0 | T [\phi(\mathbf{x}_1, t_1) \phi^\dagger(\mathbf{x}_2, t_2)] | 0 \rangle \quad (9.1)$$

で与えられるので、 ϕ の可能な組を全て足し上げればよい。伝搬関数は ϕ^\dagger, ϕ の組で作られるので、 $\phi\phi, \phi^\dagger\phi^\dagger$ の組は考えなくても良い。N 積は生成演算子を前に、消滅演算子を後ろに持ってくる順序積:

$$: \phi_1 \phi_2^\dagger \phi_3 \phi_4^\dagger : = \phi_2^\dagger \phi_4^\dagger \phi_1 \phi_3 \quad (9.2)$$

大事なことは、N 積の真空期待値は必ずゼロになるということと、演算子が時間に依存していないならば勝手に T 積をつけてもよいということ。期待値を計算するための面倒な交換関係計算があるとき、Wick が使えることがある。基本的には伝搬関数が真空中で作られているので有限温度では使えないが、議論を有限温度期待値に拡張した Block-de Dominics の定理というのがある。有限温度系における Wick の定理とかも呼ばれる。

9.1.2 具体例

n=2 の場合

$$T[\phi_1 \phi_2] = : \phi_1 \phi_2 : + \langle 0 | T[\phi_1 \phi_2] | 0 \rangle \quad (9.3)$$

n=3 の場合

$$T[\phi_1 \phi_2 \phi_3] = : \phi_1 \phi_2 \phi_3 : + \langle 0 | T[\phi_1 \phi_2] | 0 \rangle \phi_3 + \langle 0 | T[\phi_1 \phi_3] | 0 \rangle \phi_2 + \langle 0 | T[\phi_2 \phi_3] | 0 \rangle \phi_1 \quad (9.4)$$

9.1.3 証明

Fetter の章を参照のこと。

9.2 TFD 形式による期待値計算

k が連続自由度を持つ場合の期待値を TFD の力を借りて計算する.

9.2.1 TFD のド基礎

熱的真空は

$$|0\rangle = (1-f) \sum_m f^m |m, m\rangle \quad (9.5)$$

$$\langle 0| = \sum_m \langle\langle m, m| \quad (9.6)$$

で定義される. f はボルツマン因子. $f \neq e^{-\beta\omega}$ のとき非平衡であるという. 熱的ブラ・ケットは双対ではない. 超演算子形式における $\langle\langle I_R | \bullet | \rho_R \rangle\rangle$ は熱的真空期待値 $\langle 0 | \bullet | 0 \rangle$ に置き換えが可能¹. また Boson の熱的 Bogoliubov 変換の具体形は

$$b_k^\dagger = \tilde{\xi}_k + (1+n_k)\xi_k^\dagger \quad (9.7)$$

$$b_k = \xi_k + n_k \tilde{\xi}_k^\dagger \quad (9.8)$$

で与えられ, ξ 演算子は熱的真空を消去する消滅演算子である:

$$\xi |0\rangle = \tilde{\xi} |0\rangle = 0, \quad \langle 0| \xi^\dagger = \langle 0| \tilde{\xi}^\dagger = 0 \quad (9.9)$$

$$[\xi, \xi^\dagger] = [\tilde{\xi}_k, \tilde{\xi}_{k'}^\dagger] = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad [\xi_k, \tilde{\xi}_k] = [\xi_k, \tilde{\xi}_{k'}^\dagger] = 0 \quad (9.10)$$

この熱的真空, ξ 演算子を用いて計算をする. 以下 $x = (x, t), y = (y, s)$ とする.

9.2.2 具体計算

例として以下の計算をする:

$$\begin{aligned} \langle R_3(x) R_3(y) \rangle &\equiv \langle 0 | \frac{1}{(2\pi)^6} \int dk_1 dk_2 dk_3 dk_4 b_{k_1}^\dagger b_{k_2} b_{k_3}^\dagger b_{k_4} e^{-i(k_1-k_2)x} e^{-i(k_3-k_4)y} e^{i(\omega_{k_1}-\omega_{k_2})t} e^{i(\omega_{k_3}-\omega_{k_4})s} |0\rangle \\ &= \frac{1}{(2\pi)^6} \int dk_1 dk_2 dk_3 dk_4 e^{-i(k_1-k_2)x} e^{-i(k_3-k_4)y} e^{i(\omega_{k_1}-\omega_{k_2})t} e^{i(\omega_{k_3}-\omega_{k_4})s} \\ &\quad \langle 0 | \left(\tilde{\xi}_1 + (1+n_1)\xi_1^\dagger \right) \left(\xi_2 + n_2\tilde{\xi}_2^\dagger \right) \left(\tilde{\xi}_3 + (1+n_3)\xi_3^\dagger \right) \left(\xi_4 + n_4\tilde{\xi}_4^\dagger \right) |0\rangle \end{aligned} \quad (9.11)$$

ここでは ξ, n の添字について $(k_1, k_2, k_3, k_4) \rightarrow (1, 2, 3, 4)$ という置換をしている. 上式の熱的真空期待値を計算する:

$$\langle 0 | \left(\tilde{\xi}_1 + (1+n_1)\xi_1^\dagger \right) \left(\xi_2 + n_2\tilde{\xi}_2^\dagger \right) \left(\tilde{\xi}_3 + (1+n_3)\xi_3^\dagger \right) \left(\xi_4 + n_4\tilde{\xi}_4^\dagger \right) |0\rangle \quad (9.13)$$

$$= \langle 0 | \tilde{\xi}_1 \left(\xi_2 + n_2\tilde{\xi}_2^\dagger \right) \left(\tilde{\xi}_3 + (1+n_3)\xi_3^\dagger \right) n_4\tilde{\xi}_4^\dagger |0\rangle \quad (9.14)$$

$$= \langle 0 | \left(\tilde{\xi}_1 \xi_2 + n_2\tilde{\xi}_1\tilde{\xi}_2^\dagger \right) \left(n_4\tilde{\xi}_3\tilde{\xi}_4^\dagger + n_4(1+n_3)\xi_3^\dagger\tilde{\xi}_4^\dagger \right) |0\rangle \quad (9.15)$$

$$= \langle 0 | \left(\tilde{\xi}_1 \xi_2 + n_2 \left\{ \tilde{\xi}_2^\dagger \tilde{\xi}_1 + [\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2^\dagger] \right\} \right) \left(n_4 \left\{ \tilde{\xi}_4^\dagger \tilde{\xi}_3 + [\tilde{\xi}_3, \tilde{\xi}_4^\dagger] \right\} + n_4(1+n_3)\xi_3^\dagger\tilde{\xi}_4^\dagger \right) |0\rangle \quad (9.16)$$

$$= \langle 0 | \left(\tilde{\xi}_1 \xi_2 + n_2\delta(1-2) \right) \left(n_4\delta(3-4) + n_4(1+n_3)\xi_3^\dagger\tilde{\xi}_4^\dagger \right) |0\rangle \quad (9.17)$$

$$= \langle 0 | \left(\tilde{\xi}_1 \xi_2 n_4\delta(3-4) + \tilde{\xi}_1 \xi_2 \xi_3^\dagger \tilde{\xi}_4^\dagger n_4(1+n_3) + n_2 n_4 \delta(1-2)\delta(3-4) + \xi_3^\dagger \tilde{\xi}_4^\dagger n_2 n_4 (1+n_3)\delta(1-2) \right) |0\rangle \quad (9.18)$$

$$= \langle 0 | \left(\tilde{\xi}_1 \xi_2 \xi_3^\dagger \tilde{\xi}_4^\dagger n_4(1+n_3) + n_2 n_4 \delta(1-2)\delta(3-4) \right) |0\rangle \quad (9.19)$$

$$= \langle 0 | \{ n_4(1+n_3)\delta(1-4)\delta(2-3) + n_2 n_4 \delta(1-2)\delta(3-4) \} |0\rangle \quad (9.20)$$

¹超演算子形式のチェック・チルダと TFD のノンチルダ・チルダは単射同型の関係にある.

よって

$$\langle R_3(x)R_3(y) \rangle \equiv \left(\frac{1}{(2\pi)^3} \int dk n_k \right)^2 + \frac{1}{(2\pi)^6} \int dk_1 dk_2 e^{-i(k_1-k_2)(x-y)} e^{i(\omega_{k_1}-\omega_{k_2})(t-s)} n_1(1+n_2) \quad (9.21)$$

9.2.3 Block-de Dominics の定理

TFD 形式だと計算が簡単になることがわかった²。ただ、熱平均については Block-de Dominics の定理という Wick の定理に対応するものがあるので、もっと簡単に計算できそうである。 $b_1 \sim b_6$ まであるものを考えるが、 x, y が couple するか否かは区別しないといけない³：

$$\langle R_1(x)R_1^\dagger(y) \rangle \sim \langle 0 | b_{1x}^\dagger b_{2x}^\dagger b_{3x} b_{4y}^\dagger b_{5y} b_{6y} | 0 \rangle = \langle 0 | T [b_{1x}^\dagger b_{2x}^\dagger b_{3x} b_{4y}^\dagger b_{5y} b_{6y}] | 0 \rangle \quad (9.22)$$

$$= 2 \langle 0 | T \overbrace{b_{1x}^\dagger b_{2x}^\dagger b_{3x} b_{4y}^\dagger b_{5y} b_{6y}}^{\text{pairing}} | 0 \rangle + 4 \langle 0 | T \overbrace{b_{1x}^\dagger b_{2x}^\dagger b_{3x} b_{4y}^\dagger b_{5y} b_{6y}}^{\text{pairing}} | 0 \rangle \quad (9.23)$$

$$= 2 \langle b_{1x}^\dagger b_{5y} \rangle \langle b_{2x}^\dagger b_{6y} \rangle \langle b_{3x} b_{4y}^\dagger \rangle + 4 \langle b_{1x}^\dagger b_{3x} \rangle \langle b_{2x}^\dagger b_{5y} \rangle \langle b_{4y}^\dagger b_{6y} \rangle \quad (9.24)$$

$$= 2\delta(1-5)\delta(2-6)\delta(3-4)n_1 n_2 (1+n_3) + 4\delta(1-3)\delta(2-5)\delta(4-6)n_1 n_2 n_4 \quad (9.25)$$

ξ 演算子で真面目に計算しなくてもいける。

9.3 Gell-Mann-Low の定理

9.3.1 断熱因子

ハミルトニアンの摂動部が断熱因子を持っている場合を考える：

$$H = H_0 + e^{-\epsilon|t|} H_I \quad (9.26)$$

これは $t = 0$ で full の相互作用を取り入れた系になり、 $t \rightarrow \pm\infty$ で自由粒子になるようなハミルトニアンである。ここで、 $t = t_0$ かつ $t_0 \sim -\infty$ で相互作用描像の状態が非摂動ハミルトニアンの固有状態になっている場合を考える⁴：

$$H_0 |\Psi(t_0)\rangle_I = E_0 |\Psi(t_0)\rangle_I \quad (9.27)$$

さらに $t_0 \sim -\infty$ であることから時間発展演算子を用いてハイゼンベルグ描像は

$$|\Psi\rangle_H = |\Psi(0)\rangle_I = U_\epsilon(0, t_0) |\Psi(t_0)\rangle_I = U_\epsilon(0, -\infty) |\Psi(t_0)\rangle_I \quad (9.28)$$

と書ける。これは、相互作用系の状態が非摂動系の固有状態を用いて表現できたことを意味している。

あとは ϵ について考える必要がある。そもそもこの系は 2 つの粒子の散乱実験をテーマにしたようなものである。2 つの粒子が $t = 0$ で衝突することを考えるとき、相互作用が効いてくるのは $t = 0$ 近傍のみであって、それ以外は自由粒子とほぼ同じ振る舞いをするだろうというアイデアから断熱因子は導入されている。粒子を平面波的に記述するためにも $\epsilon \rightarrow 0$ としたいが、この極限のもとで果たして (9.28) は意味ある結果を与えるのだろうか？

これに答えるのが Gell-Mann-Low の定理である。以降は基底状態に対する議論であることに注意。

²超演算子形式のままだとトレース演算になるのでなかなか面倒。

³たとえば $1x-2x$ が couple すると対応するデルタ関数 $\delta(1-2)$ が出てきて $e^{-i(k_1-k_2)(x-y)}$, $e^{i(\omega_1-\omega_2)(t-s)}$ が消える。これは (9.21) の右辺第一項にあたる項の起源。一方で $x-y$ の cross coupling があると exponential の空間・時間成分が消えずに残る。これが (9.21) の右辺第二項にあたる。

⁴相互作用描像も自由粒子のハイゼンベルグ描像と一致するという近似できる。

9.3.2 概要

Gell-Mann-Low の定理が主張することは

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{U_\epsilon(0, -\infty) |\phi_0(-\infty)\rangle_I}{{}_I \langle \phi_0(-\infty) | U_\epsilon(0, -\infty) |\phi_0(-\infty)\rangle_I} = \frac{|\Psi_0\rangle_H}{{}_I \langle \phi_0(-\infty) | \Psi_0\rangle_H} \quad (9.29)$$

が存在するなら固有状態 $|\Psi_0\rangle_H$ は well-defined であり, 固有値は

$$E - E_0 = \frac{{}_I \langle \phi_0(-\infty) | H_I | \Psi_0 \rangle_H}{{}_I \langle \phi_0(-\infty) | \Psi_0 \rangle_H} \quad (9.30)$$

で与えられるということである. ここで添字の 0 は真空を意味している. また, $|\phi_0(-\infty)\rangle$ は非摂動ハミルトニアン H_0 の固有状態になっているので解析的に求めることができる. あとは, (9.29) が成立するかどうかが問題になる.

これが成立すれば Free Hamiltonian H_0 と Full Hamiltonian H をユニタリー演算子でつなぐことができる. つまり, Free Hamiltonian の固有状態 $|\Phi_0\rangle$ を求めたあとにユニタリー演算子 $U(0, -\infty)$ を All order で取り入れれば Full Hamiltonian の固有状態が求まることになる. もちろん All order は無理なので摂動的に取り入れることになる. これが場の理論における摂動論である.

場の理論で物理量を摂動的に評価するときには Green 関数を計算することが基本になるが, それを計算可能にするためのテクニックが Wick の定理であり, その Wick の定理の証明に Gell-Mann-Low が用いられている. そういう意味でとても重要.

9.3.3 証明

Fetter の章を参照のこと.

9.4 Bethe-Salpeter 方程式

Green 関数の無限次数までの足し上げに関する処方, 特に Ladder 近似についての勉強をする. 一様系の議論が一般的. 有限サイズ系にも応用したいが...

9.4.1 Bethe-Salpeter への準備 : 1 体 Green 関数

まずは普通の 1 体 Green 関数 (2 点 Green 関数) のおはなし. Green 関数の極がハミルトニアンのエネルギーを表していることを用いてエネルギーを求める. Green 関数は

$$iG(x - x') = \langle 0 | T[\varphi(x) \varphi^\dagger(x')] | 0 \rangle \quad (9.31)$$

で定義される. Fourier 変換を

$$iG(x - x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k e^{ik(x-x')} G(k) \quad (9.32)$$

のように導入すると, Dyson 方程式は

$$G(x_1 - x_2) = G_0(x_1 - x_2) + \int d^4y_1 d^4y_2 G_0(x_1 - y_1) \Sigma^*(y_1 - y_2) G(y_2 - x_2) \quad (9.33)$$

$$G(k) = G_0(k) + G_0(k) \Sigma^*(k) G(k) \quad (9.34)$$

$$= G_0(k) + G(k) \Sigma^*(k) G_0(k) \quad (9.35)$$

整理すると

$$G_0^{-1}(k) G(k) = 1 + \Sigma^*(k) G(k) \quad (9.36)$$

$$G(k) G_0^{-1}(k) = 1 + G(k) \Sigma^*(k) \quad (9.37)$$

$$\therefore (G_0^{-1}(k) - \Sigma^*(k)) G(k) = G(k) (G_0^{-1}(k) - \Sigma^*(k)) = 1 \quad (9.38)$$

から, $G(k)$ が極を持つとき

$$\det [G_0^{-1}(k) - \Sigma^*(k)] = 0 \quad (9.39)$$

を満たしている. これで k_0 が k の関数として定まることになる.

9.4.2 2 体 Green 関数

以下「物性研究者のための場の量子論」の表式に沿う. 2 体 Green 関数

$$G_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \langle 0 | T [\varphi(x_1) \varphi(x_2) \varphi^\dagger(x_3) \varphi^\dagger(x_4)] | 0 \rangle \quad (9.40)$$

を定義する. ここで $t_1 = t_2 = t, t_3 = t_4 = t'$ とおくものとする. これは時刻 t' に 2 個の粒子が x_3, x_4 に存在したとき, 時刻 t に 2 個の粒子が x_1, x_2 に存在する確率振幅である. 1 体問題のときと同様に Fourier 変換を導入する:

$$G_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{(2\pi)^8} \int d^4p d^4p' d^4k G_2(p, p'; k) e^{i(\frac{2}{k}+p)x_1} e^{i(\frac{2}{k}-p)x_2} e^{-i(\frac{2}{k}+p')x_3} e^{-i(\frac{2}{k}-p')x_4} \quad (9.41)$$

このうち独立な空間変数は $x_1 - x_2, x_3 - x_4, x_1 + x_2 - x_3 - x_4$ の 3 つである. よくやる重心座標と相対座標による分解も行える:

$$(x_1 + x_2)/2 = X, \quad x_1 - x_2 = x \quad (9.42)$$

$$(x_3 + x_4)/2 = X', \quad x_3 - x_4 = x' \quad (9.43)$$

9.4.3 Bethe-Salpeter 方程式

ここで天下り的に, $G_2(p, p'; k)$ に対して Bethe-Salpeter 方程式を導入する:

$$G_2(p, p'; k) = G_0(p, p'; k) + \int d^4p'' d^4p''' G_0(p, p'; k) K(p'', p'''; k) G_2(p, p'; k) \quad (9.44)$$

右辺第二項の G_0, G_2 は交換しても良い. 形からしても Dyson 方程式で証明はできそう. 後でやる. ここで

$$G_0(p, p'; k) \equiv G(k/2 + p) G(k/2 - p) \{ \delta^4(p - p') - \delta^4(p - p') \} \quad (9.45)$$

であり, K は proper self-energy に対応するとして話を進める. ここで $G_2(p, p'; k)$ を p 行 p' 列の行列と考えて

$$G_2(k) = G_0(k) + G_0(k) K(k) G_2(k) \quad (9.46)$$

$$= G_0(k) + G_2(k) K(k) G_0(k) \quad (9.47)$$

と表現しておく. G_0 は 2 体 Green 関数であることに注意. 先ほどのアナロジーから

$$\det [G_0^{-1} - K(k)] = 0 \quad (9.48)$$

で $G_2(k)$ の極が与えられることは明らか.

9.4.4 $K(k)$ の構成

$K(p, p'; k)$ をどのように構成するかを考える. まずは Feynman diagram を用いて形式的な方程式を書き下してみる.

9.5 ゼロモード演算子と BdG モードの成り立ち

ゼロモード入門 (中村) では各モード表現として W 行列を導入し, いろいろな対称性を議論している. これはゼロモードの完全系が時間発展する場合に必要なが, stationary な議論をする場合はこれは必須ではない. 議論がややこしいので何をしようとしているのかがわかりづらいかもしれないが, 重要なのは

$$\left[a_\ell, a_{\ell'}^\dagger \right] = \delta_{\ell\ell'}, \quad [Q, P] = i \quad (9.49)$$

である. この一見当たり前に見える関係が, どのような仮定のもとで導出されているかを見る. これをしっかりと理解できれば, 場の量子論が本質的に持つ自己無撞着性についての理解が深まると思う.

9.5.1 場の理論の自己無撞着性

ゼロモード入門には「 ξ の決定に $|0\rangle$ が必要・ $|0\rangle$ の決定に ξ が必要」というような文言があるが, これをもう少し詳しく見ると,

0. 公理として ψ の同時刻 CCR(正準交換関係) $[\psi(x), \psi^\dagger(x')] = \delta(x - x')$ がある.
1. $\langle 0|\psi|0\rangle = \xi + \varphi$ を満たす真空 $|0\rangle$ を仮定.
2. (ξ を含む) Bogoliubov-de Gennes 方程式の直交性から完全系を定義.
3. BdG 完全系で展開される場の演算子が $\psi(\varphi)$ の CCR を満たす.

というシナリオを踏むことになる. そもそも「 $|0\rangle$ を決定する」とは「正しい準粒子描像を選択する」ことであり, 「準粒子描像」とは場の演算子がどのようなモード (今回であれば BdG モード $a_\ell, a_\ell^\dagger, u_\ell, v_\ell$ とゼロモード Q, P, ξ, η) で展開されるかを表すこと⁵.

あと「Bogoliubov-de Gennes 完全系を定義」と書いていますが, 正確には「仮定」です. 完全系に先立つ真空 $|0\rangle$ が仮定なわけですから. 場の量子論では, 存在するかどうか分からない $|0\rangle$ を仮定して, その仮定の下で存在するかも分からない ξ を仮定し, さらにその仮定の下で存在するかも分からない Bogoliubov-de Gennes 完全系を仮定し... と繰り返していった結果, 最初の仮定である $|0\rangle$ の選び方が実は正しかった! みたいなことをよくします. これからそれを見ていきます.

9.5.2 完全系の仮定

前節で「完全系を定義」と書いたが, これは論理的に導出できるものではない. 「議論に矛盾がないように構成する」と言ったほうが正確. BdG 完全系は

$$\sum_\ell \left[y_\ell(x) y_\ell^\dagger(x') - z_\ell(x) z_\ell^\dagger(x') \right] + y_0(x) y_{-1}^\dagger(x') + y_{-1}(x) y_0^\dagger(x') = \sigma_3 \delta(x - x') \quad (9.50)$$

である.

⁵と鳥居は思ってます. 割とナイーブな話なので, 山中先生に「違う!」とか言われても知りませんが.

1 正規直交性の関係

$$(y_\ell, y_{\ell'}) = \delta_{\ell\ell'}, \quad (z_\ell, z_{\ell'}) = -\delta_{\ell\ell'}, \quad (y_0, y_{-1}) = 1 \quad (9.51)$$

を用いて場の演算子 $\Phi = (\varphi \ \varphi^\dagger)^t$ を展開すると

$$\sum_\ell [A_\ell y_\ell(x) - B_\ell z_\ell(x)] + C y_0(x) + D y_{-1}(x) = \begin{pmatrix} \varphi(x) \\ \varphi^\dagger(x) \end{pmatrix} \quad (9.52)$$

となる. A_ℓ, B_ℓ, C, D はどうなるか?

このとき, 山中研では $y_\ell(x) = (u_\ell(x) \ v_\ell(x))^t$ という表記がよく用いられる (そのとき $z_\ell(x)$ はどうなる?).

9.5.3 場の展開

さて, 完全系によって場の演算子が展開できたので, 展開した場の演算子が CCR を満たすかどうかを確認したい. そのためには A_ℓ, B_ℓ, C, D 各々の交換関係が必要である.

- 2 A_ℓ, B_ℓ, C, D 各々の交換関係を計算せよ (ゼロにならないのはどの組み合わせか?).
また, A_ℓ, B_ℓ, C, D にはどのような演算子を割り当てるのが妥当か?

ここまでくれば消滅演算子 a_ℓ と, 量子座標 Q, P を用いた

$$\varphi(x) = \sum_\ell \left[u_\ell(x) a_\ell(t) + v_\ell^*(x) a_\ell^\dagger(t) \right] - iQ(t)\xi(x) + P(t)\eta(x) \quad (9.53)$$

のような展開になるのはわかるだろう⁶.

- 3 (9.53) の交換関係を計算し, CCR になっていることを確認せよ.
(完全性 (9.50) に戻せるか?)

これで

CCR \rightarrow $|0\rangle$ を仮定 $\rightarrow \xi$ の存在を仮定 \rightarrow Bogoliubov-de Gennes 完全系を仮定 \rightarrow 場の演算子 φ を展開するモードを仮定 \rightarrow CCR

ときれいに一周するので, つまるところ $|0\rangle, \xi$ 等すべての物理量が自己無撞着に定義できたことになる.

9.5.4 なぜうまくいったか?

あの完全系 (9.50) が恐らく一意的ものだとして, 準粒子描像の選び方たるモードの定義も一意的になり, 議論の自由度がなくなりそうな気もしてくる. 「たまたまうまく $|0\rangle$ を選んだら全てがうまくいった」ところの「たまたま」の自由度はどこにあるのだろうか?

これは非摂動ハミルトニアン H_u にある. 非摂動/摂動ハミルトニアンを選び方は本来任意であるので, 異なる非摂動ハミルトニアンを定義すると異なる真空を選ぶことに対応する. 真空というのは, 相互作用描像の下で定義されるものであり, 相互作用描像は非摂動/摂動ハミルトニアンの選び方に依存するのである⁷. 基本的に, 理論の自由度は非摂動ハミルトニアンの選び方にかかっている⁸.

しかしご存知のように, うまくいったように見えてまだ問題は存在する.

⁶ Q の前に虚数単位 i をつけるのもちょっと考えればわかるはず

⁷ゼロモード入門にも「場の理論では $|0\rangle$ を H_u の基底状態に取る」と書いてあります (ただし, それ以外の真空を選ぶことすらもできます).

⁸いわゆる「繰り込み」も非摂動ハミルトニアンの取り方を変えてあげましょう, ということをやっている.

9.5.5 なぜ問題 (赤外発散) が発生するか

今までの話からわかる通り、非摂動ハミルトニアンを選び方が良くなかったのである。もっと正しい準粒子描像を選びましょう、ということ⁹。その試みが Interacting ZeroMode Formulation (IZMF) である。詳しくはゼロモード入門で。

9.6 Grassmann 代数と Fermion の経路積分

フェルミオンの経路積分のおはなしを理解するために。

(以下、数学 (代数学) のお話になります。自分は数学に明るくないので、厳密な議論ができていないところがたくさんあると思います。とりあえず、物理をやる上で不具合がない程度の説明をしたつもりです。「まあ、これでよからう」のおおらかな精神で読んでください。)

9.6.1 あらまし

Boson におけるコヒーレント状態は以下の通り:

$$a_i |\eta\rangle = \eta_i |\eta\rangle \quad (9.54)$$

実は Fermion でも全く同じようにコヒーレント状態を定義できる。しかしながら、フェルミオンには反交換関係

$$\left[a_i, a_j^\dagger \right]_+ = \delta_{ij}, \quad [a_i, a_j] = 0 \quad (9.55)$$

があるため、以下の等式が成り立つ:

$$[a_i, a_j]_+ |\eta\rangle = a_i a_j |\eta\rangle + a_j a_i |\eta\rangle = 0 \quad (9.56)$$

$$\eta_i \eta_j |\eta\rangle = -\eta_j \eta_i |\eta\rangle \quad (9.57)$$

$$\therefore \eta_i \eta_j = -\eta_j \eta_i \quad (9.58)$$

こういう、「演算子ではないのに交換した時に符号がひっくり返るような数に対する代数¹⁰」を Grassmann 代数 (外積代数) という。ただこれだとざっくりし過ぎなのでもう少し真面目に代数を構築する。「代数」というのは乗法が定義されたベクトル空間のことなので、以下では Grassmann 代数がどういう乗法を持っているのかを考える。

9.6.2 Grassmann 代数

外積代数の名の通り、Grassmann 代数はベクトル空間における外積と似たような構造を持っている。ベクトル空間 V における通常の外積は以下のルールに従う:

$$1. \quad \mathbf{A} \times \mathbf{A} = 0 \quad (9.59)$$

$$2. \quad \mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A} \quad (9.60)$$

$$3. \quad (a\mathbf{A} + b\mathbf{B}) \times \mathbf{C} = a\mathbf{A} \times \mathbf{C} + b\mathbf{B} \times \mathbf{C} \quad (9.61)$$

$$4. \quad \mathbf{A} \times \mathbf{B} \perp \mathbf{A}, \mathbf{B} \quad (9.62)$$

⁹場の理論の欠陥である紫外発散を質量の繰り込みで回避する、ということも、山中研に言わせれば「理論の欠陥ではなく、正しい準粒子描像を選んでない」ということになる。だいたいそういうやつは自由ハミルトニアンを非摂動ハミルトニアンに選んでしまっているようです。そりゃうまくいかないよね。

¹⁰Fock 空間における演算子とは別物。g-数は空間に作用するものではない。

しかしながら、4 番目は内積が定義されていないと議論できないので、1-3 番目のルールに従う演算を「wedge 積」と呼ぶことにし、「 \wedge 」という記号を用いることにする¹¹。ベクトル空間 V の元が 4 番目ののルールに従わないとき、別のルールが生まれる:

$$1. \quad \alpha \wedge \alpha = 0 \quad (9.63)$$

$$2. \quad \alpha \wedge \beta = -\beta \wedge \alpha \quad (9.64)$$

$$3. \quad (a\alpha + b\beta) \wedge \gamma = a\alpha \wedge \gamma + b\beta \wedge \gamma \quad (9.65)$$

$$4. \quad \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) = (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \quad (9.66)$$

4 番目の結合法則はよく知ってるベクトルの外積では成り立たない。ベクトル空間 V がこういう代数を満たす世界を Grassmann 代数と呼び、今後この集合を \mathcal{A} とし、その元を Grassmann 数 (g-数) と呼ぶことにする。ちなみに、外積と違って wedge 積は実は閉じた演算ではないらしい。以後 g-数同士の wedge 積は $\alpha \wedge \beta = \alpha\beta$ のように記号を省略する。

g-数は q-数でもなければ c-数でもないことに注意。Grassmann 代数はベクトル空間 V を部分空間に含んでいる。

9.6.3 g-数の元

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^N c_{i_1, \dots, i_n} \eta_{i_1} \cdots \eta_{i_n} \quad c \in \mathbb{C} \quad (9.67)$$

η が \mathcal{A} の生成子で、コレで表される全ての線型結合を要素に持つのが集合 \mathcal{A} 。なんでこんな言い方をするかというと、先に wedge 積が閉じていないと行った通り、 η_i と $\eta_i \eta_j$ は異なるベクトル空間を張っているから (後者のほうが高次の空間)。別のベクトル空間を構成するがしかし、どちらも \mathcal{A} に含まれていることを明示するためである。

9.6.4 解析手法

ただ代数をつくるだけではなく、解析的 (微積分) な手法についても定義しなければならない。

Taylor 展開

よくある多変数関数の Taylor 展開のように定義:

$$f(\xi_1, \dots, \xi_k) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^k \frac{1}{n!} \frac{\partial^n f}{\partial \xi_{i_1} \cdots \partial \xi_{i_n}} \Big|_{\xi=0} \xi_{i_n} \cdots \xi_{i_1} \quad (9.68)$$

g-数の 1 変数関数なら展開は以下ようになる:

$$f(\eta_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n f}{\partial \eta_{i_1} \cdots \partial \eta_{i_n}} \Big|_{\eta=0, i_1=\dots=i_n=1} \eta_{i_n} \cdots \eta_{i_1} \quad (9.69)$$

$$= f(0) + \frac{1}{1!} \frac{\partial f}{\partial \eta_{i_1}} \Big|_{\eta=0} \eta_{i_1} + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta_{i_1} \partial \eta_{i_2}} \Big|_{\eta=0} \eta_{i_2} \eta_{i_1} + \cdots \quad (9.70)$$

$$= f(0) + f'(0) \eta_1 \quad (9.71)$$

$i_1 = \dots = i_n = 1$ であることと、 $\eta_{i_k} \eta_{i_k} = 0$ を用いている。2 次以降も同様に展開することが可能で、かつ必ず有限項で打ち切られることがすぐにわかる。

¹¹外積の一般化にあたるので、wedge 積をそのまま外積と呼んでしまうこともある。

2 変数関数を考えると Taylor 展開の 1 次と 2 次が残るのでそう単純ではない:

$$f(\eta_1, \eta_2) = 1 + \frac{1}{1!} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta_1} \eta_1 + \frac{\partial f}{\partial \eta_2} \eta_2 \right) + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \eta_1^2} \eta_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta_1 \partial \eta_2} \eta_2 \eta_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta_2^2} \eta_2^2 \right) \quad (9.72)$$

$$= 1 + \frac{\partial f}{\partial \eta_1} \eta_1 + \frac{\partial f}{\partial \eta_2} \eta_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta_1 \partial \eta_2} \eta_2 \eta_1 \quad (9.73)$$

しかしながら, $e^{-\eta_1 \eta_2}$ のように g-数の積でつくられた関数の場合は, $\eta_1 \eta_2 = \eta_3$ と置き直せば¹² やはり

$$e^{-\eta_1 \eta_2} = 1 - \eta_1 \eta_2 \quad (9.74)$$

のように展開できることになる.

微分

g-数の微分を

$$\partial_{\eta_i} \eta_j = \delta_{ij} \quad (9.75)$$

で定義する. 一般的な微分 ($\partial_x x = 1, \partial_y x = 0$) と比較しても妥当であるように見えるが, 本当にこれで良いのか... という問題はとりあえず先送りにする. g-数の交換則より

$$\eta_i \eta_j = -\eta_j \eta_i \quad (9.76)$$

$$\partial_{\eta_i} \eta_i \eta_j = -\partial_{\eta_i} \eta_j \eta_i \quad (9.77)$$

$$\therefore \partial_{\eta_i} \eta_j \eta_i = -\eta_j \partial_{\eta_i} \eta_i = -\eta_j \quad (9.78)$$

のように, 微分演算子も異なるインデックスの g-数とは交換する.

また, g-数を微分することで c-数 (クロネッカーデルタ) に変換されると捉えることもできる.

積分

これがすこし厄介. Altland-Simons には天下り的に定義されているが, もう少し真面目に議論したい. そもそも微分を解析的に定義した訳ではないので積分もまた解析的な定義¹³ は難しそう. 例えば

$$\int d\eta_i \eta_i = \eta_i^2 = 0, \quad \int d\eta_i = \eta_i \quad (9.79)$$

とかでもいいのでは? とと思うけど, どうやら g-数の反交換関係だけではこういった解析計算の定義はできなくて, 他の条件はある程度任意性があるらしい. つまり, Grassmann 代数における微積分の定義は一意ではなく, 経路積分の計算がすっきりするように定義しているらしい. 経路積分において, g-数の微積分は c-数になってくれるとありがたいようなので, 微積分の結果は c-数, つまり積分は定積分のようなもので定義することにする. つまり (9.79) のような定義は経路積分では都合が悪い.

天下りだけでは悲しいので補足を. 積分の構成は「部分積分可能性¹⁴」からの要請らしい:

$$\int d\xi \frac{\partial f}{\partial \xi} = 0 \quad (9.80)$$

なぜこれが部分積分と繋がるのかというと, そもそも部分積分は積の微分がもとになっている:

$$\partial_{\xi_j} (\xi_i \xi_j) = \frac{\partial \xi_i}{\partial \xi_j} \xi_j - \xi_i \frac{\partial \xi_j}{\partial \xi_j} \quad (9.81)$$

¹² η_3 は η_1, η_2 より高次のベクトル空間を構成することになる. もはや η_1, η_2 とは別のベクトル空間になるが, $\eta_3 \in \mathcal{A}$ ではある.

¹³ リーマン積分みたいな定義とか.

¹⁴ これだって天下りだけど, 部分積分 (積の微分) は定義できてほしいよね.

これを両辺 ξ_j で積分すると

$$\int d\xi_j \partial_{\xi_j} (\xi_i \xi_j) = \int d\xi_j \frac{\partial \xi_i}{\partial \xi_j} \xi_j - \int d\xi_j \xi_i \frac{\partial \xi_j}{\partial \xi_j} \quad (9.82)$$

$$\int d\xi_j \xi_i = - \int d\xi_j \partial_{\xi_j} (\xi_i \xi_j) + \delta_{ij} \int d\xi_j \xi_j \quad (9.83)$$

これが部分積分にあたり、右辺第一項は表面項にあたり、これがきちんと処理されれば部分積分が計算できることになる。例えば表面項をゼロにしたとき、 $i \neq j$ のとき左辺の積分はゼロ。 $i = j$ のときは適当に正規化して 1 にすることができる。この「表面項ゼロ¹⁵」というのが「部分積分可能性」にあたる。

ちなみにこの定義において微分と積分は実質的に等価になる。もちろん、積分も g-数と反交換関係を満たす。

9.6.5 コヒーレント状態

Fermion に対するコヒーレント状態を定義するために Fermion 演算子と g-数の反交換関係を要請する：

$$[\eta_i, a_j]_+ = 0, \quad [\eta_i, a_j^\dagger]_+ = 0, \quad (9.84)$$

コヒーレント状態は以下のように構成される：

$$|\eta\rangle = \exp\left(-\sum_i \eta_i a_i^\dagger\right) |0\rangle \quad (9.85)$$

さて、本当に $a_i |\eta\rangle = \eta_i |\eta\rangle$ になっているかを確認する。真空にかかっている \exp を Baker-Campbell-Hausdorff の公式で分解する：

$$\exp\left(-\sum_i \eta_i a_i^\dagger\right) = \exp\left(-\eta_i a_i^\dagger\right) \exp\left(-\sum_{j \neq i} \eta_j a_j^\dagger\right) \exp\left(-\left[\eta_i a_i^\dagger, \sum_{j \neq i} \eta_j a_j^\dagger\right]_-\right) \quad (9.86)$$

$$= \left(1 - \eta_i a_i^\dagger\right) \exp\left(-\sum_{j \neq i} \eta_j a_j^\dagger\right) \quad (9.87)$$

注意すべきは、第一式右辺の最後の \exp の中身は反交換関係ではなく交換関係であるということ¹⁶。さらに、偶数個の反交換する要素は他の要素と交換するので結局交換関係はゼロになる。さらに (9.74) を用いている。もちろん素直に Taylor 展開しても良い。これを利用して $|\eta\rangle$ がコヒーレント状態であることが確認できる：

$$a_i |\eta\rangle = a_i \exp\left(-\sum_i \eta_i a_i^\dagger\right) |0\rangle = a_i \left(1 - \eta_i a_i^\dagger\right) \exp\left(-\sum_{j \neq i} \eta_j a_j^\dagger\right) |0\rangle \quad (9.88)$$

$$= \left(a_i + \eta_i a_i a_i^\dagger\right) \exp\left(-\sum_{j \neq i} \eta_j a_j^\dagger\right) |0\rangle = \exp\left(-\sum_{j \neq i} \eta_j a_j^\dagger\right) \left(a_i + \eta_i a_i a_i^\dagger\right) |0\rangle \quad (9.89)$$

$$= \exp\left(-\sum_{j \neq i} \eta_j a_j^\dagger\right) \eta_i |0\rangle = \exp\left(-\sum_{j \neq i} \eta_j a_j^\dagger\right) \eta_i \left(1 - \eta_i a_i^\dagger\right) |0\rangle \quad (9.90)$$

$$= \eta_i \left(1 - \eta_i a_i^\dagger\right) \exp\left(-\sum_{j \neq i} \eta_j a_j^\dagger\right) |0\rangle = \eta_i |\eta\rangle \quad (9.91)$$

さて、コヒーレント状態であることが確認できたら次は、Boson のコヒーレント状態が満たす性質に対応するものを確認する。やることは三浦がやってくれたこととほぼ同じ流れを追うので省略。しかし、完全性がどのように構成されるかは重要な問題であり、そこには g-数の Gauss 積分を実行しなければならないので、それだけ確認しておく。

¹⁵別にゼロでなくても部分積分可能にはなるけど、表面項がノンゼロで喜ぶ人はあまり居ないと思う

¹⁶Baker-Campbell-Hausdorff の公式は演算子の種類を限定していない。演算子が交換関係/反交換関係を満たすこととは全く別の文脈で交換関係が出てくる。

9.6.6 g-数の Gauss 積分

Gauss 積分の公式導くために g-数積分における変数変換についてまとめる.

Jacobian

n 個の g-数 ξ_i を変数変換して新しい ξ'_i をつくる:

$$\xi'_i = \sum_{j=1}^n M_{ij} \xi_j + \zeta_i \quad (9.92)$$

M_{ij} は $n \times n$ の c-数行列, ζ_i は ξ とは別の g-数. ここで

$$\xi'_1 \cdots \xi'_n = \sum_{j_1=\cdots=j_n=1}^n \text{sgn}(j_1, \cdots, j_n) M_{1j_1} \cdots M_{nj_n} \xi_1 \cdots \xi_n + \mathcal{O}(\zeta) \quad (9.93)$$

$\text{sgn}(1, 2, \cdots, n) = 1$ であり, 偶置換なら $+1$, 奇置換なら -1 の符号関数である. これはまんま行列式の定義になっているので以下のようにまとめる:

$$\xi'_1 \cdots \xi'_n = [\det M_{ij}] \xi_1 \cdots \xi_n + \mathcal{O}(\zeta) \quad (9.94)$$

ということで, $\{\xi\}$ と $\{\xi'\}$ の積分は

$$1^n = \int d\xi'_n \cdots d\xi'_1 \xi'_1 \cdots \xi'_n = [\det M_{ij}] \int d\xi'_n \cdots d\xi'_1 \xi_1 \cdots \xi_n = \int d\xi_n \cdots d\xi_1 \xi_1 \cdots \xi_n \quad (9.95)$$

のように関連付けられる. 積分の順番に注意. これで Jacobian

$$[\det M_{ij}] \xi'_n \cdots \xi'_1 = \xi_n \cdots \xi_1 \quad (9.96)$$

が求まった.

Gauss 積分

g-数 Gauss 積分 (積分の順番に注意)

$$\int d\bar{\xi}_n \cdots d\bar{\xi}_1 d\xi_1 \cdots d\xi_n \exp \left[- \sum_{i,j=1}^n \bar{\xi}_i M_{ij} \xi_j \right] \quad (9.97)$$

は, 変数変換 $\sum_h M_{ij} \xi_j = \xi'_i$ を行い,

$$\int d\bar{\xi} d\xi e^{-\bar{\xi}\xi} = \int d\bar{\xi} d\xi (1 - \bar{\xi}\xi) = \int d\bar{\xi} d\xi (1 + \xi\bar{\xi}) = 1 \quad (9.98)$$

の公式を用いると

$$\int d\bar{\xi}_n \cdots d\bar{\xi}_1 d\xi'_1 \cdots d\xi'_n \exp \left[- \sum_i \bar{\xi}_i \xi'_i \right] [\det M_{ij}] \quad (9.99)$$

$$= [\det M_{ij}] \int d\bar{\xi}_n \cdots d\bar{\xi}_1 \exp \left[- \sum_i \bar{\xi}_i \xi'_i \right] d\xi'_1 \cdots d\xi'_n \quad (9.100)$$

$$= [\det M_{ij}] \prod_{j=1}^n \left(\int d\bar{\xi}_j e^{-\bar{\xi}_j \xi'_j} d\xi'_j \right) = [\det M_{ij}] \quad (9.101)$$

ということで π 因子が含まれないことがわかり, Altland-Simons(4.18) も成立していることがわかる. $\bar{\xi}$ は ξ の複素共役ではなく, 全く独立の g-数であることに注意. Altland-Simons(4.19) の積分は

$$\int d(\bar{\phi}, \phi) \rightarrow \int d\bar{\xi}_n \cdots d\bar{\xi}_1 d\xi_1 \cdots d\xi_n \quad (9.102)$$

のように対応している.

9.6.7 分配関数の経路積分

具体計算は三浦のノートを参照. ここでは Fermion 固有の話題に留める.

$$\mathcal{Z} = \int d(\bar{\psi}, \psi) e^{-\sum_i \bar{\psi}_i \psi_i} \sum_n \langle n | \psi \rangle \langle \psi | e^{-\beta(\hat{H} - \mu \hat{N})} | n \rangle \quad (9.103)$$

$|\psi\rangle$ は Fermion のコヒーレント状態.

$\langle n | \psi \rangle = \langle -\psi | n \rangle$ について

まず, Fock 空間 $|n\rangle$ に含まれる Fermion 演算子の数と Fermion コヒーレント状態に含まれる演算子の数が違うことに注意. コヒーレント状態には m 個の演算子が含まれているものとする¹⁷. コヒーレント状態の Taylor 展開には偶数個の反交換要素があるので

$$a_1 |\psi\rangle = \psi_1 |\psi\rangle = |\psi\rangle \psi_1 \quad (9.104)$$

を満たす. このことより

$$\langle n | \psi \rangle \propto \langle 0 | a_1 \cdots a_n | \psi \rangle = \langle 0 | \psi \rangle \psi_n \cdots \psi_1 = \langle 0 | \exp\left(-\sum_i \psi_i a_i^\dagger\right) | 0 \rangle \psi_n \cdots \psi_1 = \psi_n \cdots \psi_1 \quad (9.105)$$

分配関数の符号が変化し得るところだけ拾ってきて積分できる形にすると

$$\mathcal{Z} \propto \int d(\bar{\psi}, \psi) e^{-\sum_i \bar{\psi}_i \psi_i} \sum_n \langle n | \psi \rangle \langle \psi | n \rangle \quad (9.106)$$

$$= \int d(\bar{\psi}, \psi) e^{-\sum_i \bar{\psi}_i \psi_i} \sum_n \psi_n \cdots \psi_1 \bar{\psi}_1 \cdots \bar{\psi}_n \quad (9.107)$$

$$= \int d(\bar{\psi}, \psi) e^{-\sum_i \bar{\psi}_i \psi_i} \sum_n (-1)^{n^2} \bar{\psi}_1 \cdots \bar{\psi}_n \psi_n \cdots \psi_1 \quad (9.108)$$

$$= \int d(\bar{\psi}, \psi) e^{-\sum_i \bar{\psi}_i \psi_i} \sum_n (-\bar{\psi}_1) \cdots (-\bar{\psi}_n) \psi_n \cdots \psi_1 \quad (9.109)$$

$$= \int d(\bar{\psi}, \psi) e^{-\sum_i \bar{\psi}_i \psi_i} \sum_n \langle -\psi | n \rangle \langle n | \psi \rangle \quad (9.110)$$

$(-1)^{n^2} = (-1)^n$ を用いている.

微分の置き換え

g-数は大小比較という概念がないので $\lim_{\delta \rightarrow 0} \delta^{-1}(\bar{\psi}^{n+1} - \bar{\psi}^n)$ における $\bar{\psi}^{n+1} - \bar{\psi}^n$ が小さいという条件には意味がない. ここでは単なる形式的な置き換えとして $\partial_\tau \bar{\psi} = \bar{\psi}^{n+1} - \bar{\psi}^n$ を導入する. つまり, ∂_τ には c-数微分はあろうか, g-数微分の意味すら無い.

¹⁷ 実際には可算無限個.

9.7 Tips

忘れやすいことをメモしておきます。

9.7.1 Heisenberg 描像

Schrödinger 描像は時間発展の情報が状態にある:

$$i\hbar\partial_t |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle \quad (9.111)$$

$$\langle \hat{A} \rangle = {}_S\langle \psi(t) | \hat{A} | \psi(t) \rangle_S \quad (9.112)$$

Schrödinger 方程式の形式解

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\hat{H}t/\hbar} |\psi(0)\rangle \quad (9.113)$$

を用いると期待値は

$$\langle \hat{A} \rangle = {}_S\langle \psi(0) | e^{i\hat{H}t/\hbar} \hat{A} e^{-i\hat{H}t/\hbar} | \psi(0) \rangle_S \quad (9.114)$$

と書くことができる。Heisenberg 描像における演算子と状態は

$$\hat{A}_H(t) = e^{i\hat{H}t/\hbar} \hat{A} e^{-i\hat{H}t/\hbar} \quad (9.115)$$

$$|\psi\rangle_H = |\psi(0)\rangle_S \quad (9.116)$$

9.7.2 相互作用描像

ハミルトニアンを

$$H = H_0 + H_I \quad (9.117)$$

のように非摂動部 H_0 と摂動部 H_I に分割する。分割の方法は任意だが、非摂動部を解析的に解ける形にしておくのが普通¹⁸。Heisenberg 描像の時と同じように形式解を代入する:

$$|\psi(t)\rangle_S = e^{-i(\hat{H}_0 + \hat{H}_I)t/\hbar} |\psi(0)\rangle_S \quad (9.118)$$

ここで、相互作用描像の状態を

$$|\psi(t)\rangle_I \equiv e^{i\hat{H}_0t/\hbar} |\psi(t)\rangle_S = e^{-i\hat{H}_It/\hbar} |\psi(0)\rangle_S \quad (9.119)$$

$$= e^{-i\hat{H}_It/\hbar} |\psi\rangle_H \quad (9.120)$$

と定義する。つまり、相互作用描像の状態は摂動部 H_I (相互作用ハミルトニアン) による時間変化を担っている。一方で相互作用描像の演算子は

$$A_I(t) \equiv e^{i\hat{H}_0t/\hbar} \hat{A}_S e^{-i\hat{H}_0t/\hbar} \quad (9.121)$$

で定義され、非摂動部 H_0 による時間変化を担っている。

この描像においては $t = 0$ で真空は Heisenberg 描像と一致し、演算子の時間発展は Heisenberg 方程式

$$i\hbar\partial_t A_I(t) = [A_I(t), H_0] \quad (9.122)$$

¹⁸たとえば生成消滅演算子の2次で記述できれば Bogoliubov 変換を通して対角化が可能。IZMF においては真空を $|0\rangle_{\text{ex}} |\Psi_0\rangle$ のように励起部とゼロモード部の直積にする。ゼロモードの真空は非摂動部にゼロモードの高次を取り込んで場の分割条件を守るようにカウンター項を決定する。ゼロモードは生成消滅演算子の代数を持っていないので取り扱いとは本質的に異なることに注意。

で記述される。ここで重要なのが、演算子の時間発展は非摂動ハミルトニアンで記述されているということ。演算子の時間発展を追うのは難しくなさそう¹⁹。一方で状態の時間発展は

$$i\hbar\partial_t |\psi(t)\rangle_I = H_I |\psi(t)\rangle_I \quad (9.123)$$

のように、解析的に解けない相互作用ハミルトニアンで記述されているのでそんなに簡単ではない。よって、状態は摂動展開によって評価することになる。

9.7.3 各描像のハミルトニアン同士の関係

Full Hamiltonian

Schrödinger 描像と Heisenberg 描像が一致:

$$H_H(t) = e^{iH_S t} H_S e^{-iH_S t} = H_S \quad (9.124)$$

これは任意の演算子については成立しないが、 $t = 0$ のとき Schrödinger 描像と Heisenberg 描像は完全に一致する。

Unperturbed Hamiltonian

Schrödinger 描像と相互作用描像が一致:

$$H_u(t) = e^{iH_{S,u} t} H_{S,u} e^{-iH_{S,u} t} = H_{S,u} \quad (9.125)$$

また Heisenberg 描像と Schrödinger 描像は

$$H_{H,u}(t) = e^{iH_S t} H_{S,u} e^{-iH_S t} \quad (9.126)$$

より、 $t = 0$ のときは非摂動部も一致する。 $H_u(t)$ は時間に依存しないことがわかっているので

$$H_u(t) = H_u(0) = H_{S,u} \quad (9.127)$$

$$H_{H,u}(t) = H_u(0) = H_{S,u} = H_{H,u}(0) \quad \text{where } t = 0 \quad (9.128)$$

である。

9.7.4 デルタ関数の Fourier 変換表示

1 次元 Fourier 変換

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dk \tilde{f}(k) e^{ikx} \quad (9.129)$$

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dx f(x) e^{-ikx} \quad (9.130)$$

を相互に代入する:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dk \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dx' f(x') e^{-ikx'} \right) e^{ikx} \quad (9.131)$$

$$= \int dx' \left(\frac{1}{2\pi} \int dk e^{ik(x-x')} \right) f(x') \quad (9.132)$$

これより

$$\delta(x - x') = \frac{1}{2\pi} \int dk e^{ik(x-x')} \quad (9.133)$$

$$(9.134)$$

¹⁹もちろん非摂動ハミルトニアンが解析的に解ける形である場合に限り

ひいては

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int dk e^{ikx} = \frac{1}{2\pi} \int dk e^{-ikx} \quad (9.135)$$

であることがわかる。「1 の Fourier 変換は $2\pi\delta(x)$ だ」という表現もできる。

9.7.5 k が離散・連続の場合の $\langle a_k^\dagger a_{k'} \rangle$

有限体積の場合

まずは $[\psi(x), \psi^\dagger(x')] = \delta(x - x')$ を満たす一般的な演算子 $\psi(x)$ を離散変数 k_n で展開した場合を考える。体積 L の一次元系について:

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} e^{ik_n x} a_{k_n} \quad (9.136)$$

ただし $k_n = \frac{2\pi}{L}n$ とする。すると,

$$\int dx \psi(x) e^{-ik_n x} = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{n'} \int dx e^{-i(k_n - k_{n'})x} a_{k_{n'}} \quad (9.137)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{n'} L \delta_{nn'} a_{k_{n'}} = \sqrt{L} a_{k_n} \quad (9.138)$$

$$\therefore a_{k_n} = \frac{1}{\sqrt{L}} \int dx \psi(x) e^{-ik_n x} \quad (9.139)$$

このとき交換関係は

$$[a_{k_n}, a_{k_{n'}}^\dagger] = \frac{1}{L} \int dx dx' e^{-i(k_n x - k_{n'} x')} [\psi(x), \psi^\dagger(x')] = \frac{1}{L} \int dx e^{-i(k_n - k_{n'})x} = \delta_{nn'} \quad (9.140)$$

であり、確かに本文の記述の通り,

$$\langle a_{k_n}^\dagger a_{k_n} \rangle = \frac{1}{e^{\beta\omega_{k_n}} - 1} \equiv n_{k_n} \quad (9.141)$$

である。

熱力学極限

$L \rightarrow \infty$, つまり k の連続極限を取ることを考える。Fourier 変換から

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dk e^{ikx} a_k \quad (9.142)$$

となって欲しい。交換関係が $[a_k, a_{k'}^\dagger] = \delta(k - k')$ に変わる。これを守るために, $a_{k_n} \rightarrow ca_k$ となる c を求める。 $\sum_n \Delta k e^{ik_n x} \rightarrow \int dk e^{ikx}$ かつ $\Delta k = \frac{2\pi}{L}$ であることを用いて

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \frac{2\pi}{L} e^{ik_n x} a_{k_n} \frac{L}{2\pi} \rightarrow \frac{\sqrt{L}}{2\pi} \int dk e^{ikx} ca_n \quad (9.143)$$

となる。これより

$$c = \sqrt{\frac{2\pi}{L}} \quad (9.144)$$

以上より,

$$\langle a_k^\dagger a_k \rangle = \frac{L}{2\pi} n_k \quad (9.145)$$

であることがわかる。今回は体積無限の系を考えているので、

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx = L \quad (9.146)$$

であることから、

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int dk e^{ikx} \quad (9.147)$$

$$\Rightarrow \delta(0) = \frac{1}{2\pi} \int dk = \frac{L}{2\pi} \quad (9.148)$$

つまり式 (9.149) はデルタ関数を用いて

$$\langle a_k^\dagger a_k \rangle = \delta(0) n_k \quad (9.149)$$

と表現できる。

9.7.6 デルタ関数が体積になること

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{x} = V \quad (9.150)$$

であり、デルタ関数の Fourier 変換表示

$$\delta(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int dk e^{ikx} \quad \Rightarrow \quad \delta(0) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{x} = \frac{V}{(2\pi)^3} \quad (9.151)$$

9.7.7 ハミルトニアンの対角化と Bogoliubov-de Gennes 方程式

対角化とは

ハミルトニアンの対角化とはハミルトニアンを生成消滅演算子を用いて

$$H = \sum_{\ell} \omega_{\ell} a_{\ell} a_{\ell}^{\dagger} \quad (9.152)$$

と表現することである。 $\omega_{\ell} > 0$ であれば a_{ℓ} が消去する $|0\rangle$ が H の基底状態であることは量子力学における調和振動子の議論から明らか。 $\omega_{\ell} < 0$ である場合は a_{ℓ} でいくらかでもエネルギーを下げるできるので、 a_{ℓ} が張る Fock 空間には基底状態が存在しない²⁰。

正準交換関係を満たす場の演算子から生成消滅演算子を構成するのは簡単。正規直交完全系 w_{ℓ} で場の演算子 φ を展開する：

$$\varphi = \sum_{\ell} a_{\ell}(t) w_{\ell}(\mathbf{x}), \quad a_{\ell} = \int d\mathbf{x} w_{\ell}(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}) \quad (9.153)$$

ただし

$$\sum_{\ell} w_{\ell}(\mathbf{x}) w_{\ell}^*(\mathbf{x}') = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad \int d\mathbf{x} w_{\ell}(\mathbf{x}) w_{\ell'}^*(\mathbf{x}) = \delta_{\ell\ell'} \quad (9.154)$$

である。 $[\varphi(\mathbf{x}), \varphi^{\dagger}(\mathbf{x}')] = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ から

$$[a_{\ell}, a_{\ell'}^{\dagger}] = \delta_{\ell\ell'} \quad (9.155)$$

²⁰ こういうのを Landau 不安定性という。

であることがわかり, この a, a^\dagger は生成消滅演算子の代数を満たしている. つまり, 対角化のためには (9.152) となるような適切な w_ℓ を見つければ良い. w_ℓ が変わると a_ℓ の定義も変わるので, (9.153) で展開した時 a_ℓ が生成消滅演算子になるように構成しなければいけない.

ここであるハミルトニアン

$$H_0 = \int d\mathbf{x} \varphi^\dagger(\mathbf{x}) h_0(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}) \quad (9.156)$$

を対角化したい. h_0 の固有値方程式

$$h_0(\mathbf{x}) w_\ell(\mathbf{x}) = \omega_\ell w_\ell(\mathbf{x}) \quad (9.157)$$

から正規直交完全系をつくり, それでもって φ を展開する:

$$H_0 = \int d\mathbf{x} \sum_{\ell\ell'} a_\ell^\dagger(t) w_\ell^*(\mathbf{x}) h_0(\mathbf{x}) w_{\ell'}(\mathbf{x}) a_{\ell'}(t) \quad (9.158)$$

$$= \int d\mathbf{x} \sum_{\ell\ell'} a_\ell^\dagger(t) w_\ell^*(\mathbf{x}) \omega_{\ell'} w_{\ell'}(\mathbf{x}) a_{\ell'}(t) \quad (9.159)$$

$$= \sum_{\ell\ell'} \omega_{\ell'} a_\ell^\dagger(t) a_{\ell'}(t) \delta_{\ell\ell'} \quad (9.160)$$

$$= \sum_{\ell} \omega_{\ell} a_\ell^\dagger(t) a_{\ell}(t) \quad (9.161)$$

対角化完了. つまり, (9.156) のようなハミルトニアンは h_0 の固有値問題を解き, その固有完全系でもって場の演算子を展開することで対角化ができる. これがほぼ唯一の対角化の方法である.

Bogoliubov-de Gennes 方程式

冷却原子系のハミルトニアンの非摂動部を doublet で書くと

$$H_u = \int d\mathbf{x} \begin{pmatrix} \varphi^\dagger & -\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{M} \\ -\mathcal{M}^* & -\mathcal{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi^\dagger \end{pmatrix} \quad (9.162)$$

$$= \int d\mathbf{x} \bar{\Phi} T \Phi \quad (9.163)$$

となる²¹. 先ほどのアナロジーから, T についての固有値方程式を解き, その固有関数系で Φ を展開すれば非摂動部の対角化が可能である. この T についての固有値方程式が Bogoliubov-de Gennes 方程式である. T が一般にエルミートでないことに注意.

9.7.8 一様系の Bogoliubov-de Gennes 方程式

一様系では Bogoliubov 変換と Bogoliubov-de Gennes 方程式による対角化は等価であり, 解析的に計算が可能. 場の演算子を Fourier 変換:

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int d\mathbf{k} b_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \quad (9.164)$$

ここで場を

$$\psi = \xi + \varphi \quad (9.165)$$

のように分割している. これを用いると冷却原子系の非摂動ハミルトニアンは

$$H_2 = \int d\mathbf{k} \begin{pmatrix} b_{\mathbf{k}}^\dagger & -b_{-\mathbf{k}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{\mathbf{k}} & \mathcal{M} \\ -\mathcal{M}^* & -\mathcal{L}_{\mathbf{k}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{\mathbf{k}} \\ b_{-\mathbf{k}}^\dagger \end{pmatrix} \quad (9.166)$$

²¹ マイナスをつけたのは doublet の $\Phi, \bar{\Phi}$ が正準交換関係を満たすようにするため

ただし

$$\mathcal{L}_k = \varepsilon_k + gn_0, \mathcal{M} = gn_0 e^{2i\theta} \quad (9.167)$$

$$\varepsilon_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}, \xi(\mathbf{x}) = \sqrt{n_0} e^{i\theta}, \mu = gn_0 \quad (9.168)$$

つまり, k 表示された BdG 行列の固有値問題を解けばよいことになり, さらに $\mathcal{L}_k, \mathcal{M}$ は演算子を含まないので簡単である. これを解くと

$$\omega_k = \sqrt{\varepsilon_k(\varepsilon_k + 2gn_0)} \quad (9.169)$$

を得る.

9.7.9 相互作用描像における時間発展演算子と T 積

相互作用描像の時間発展演算子が満たす方程式

$$i\hbar\partial_t U(t, 0) = H_I(t)U(t, 0) \quad (9.170)$$

について. 両辺を t で積分:

$$U(t, 0) = I + \left(\frac{-i}{\hbar}\right) \int_0^t dt_1 H_I(t_1) U(t_1, 0) \quad (9.171)$$

$U(0, 0) = I$ としている. $U(t, 0)$ を繰り返し代入する:

$$U(t, 0) = I + \left(\frac{-i}{\hbar}\right) \int_0^t dt_1 H_I(t_1) \left(I + \left(\frac{-i}{\hbar}\right) \int_0^{t_1} dt_2 H_I(t_2) U(t_2, 0) \right) \quad (9.172)$$

$$= I + \left(\frac{-i}{\hbar}\right) \int_0^t dt_1 H_I(t_1) + \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^2 \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 H_I(t_1) H_I(t_2) U(t_2, 0) \quad (9.173)$$

$$= \dots$$

$$= I + \left(\frac{-i}{\hbar}\right) \int_0^t dt_1 H_I(t_1) + \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^2 \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 H_I(t_1) H_I(t_2) \\ + \dots + \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^n \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{n-1}} dt_n H_I(t_1) H_I(t_2) \dots H_I(t_n) + \dots \quad (9.174)$$

このままだと積分の上端に変数が入っていて処理が難しいので変形する.

ある $H(t_1)H(t_2)$ の二重積分について. ダミー変数 $t_1 \leftrightarrow t_2$ の入れ替えでは値は変わらない:

$$\int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 H(t_1) H(t_2) = \int_0^t dt_2 \int_0^{t_2} dt_1 H(t_2) H(t_1) \quad (9.175)$$

$$\therefore \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 H(t_1) H(t_2) + \int_0^t dt_2 \int_0^{t_2} dt_1 H(t_2) H(t_1) = 2 \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 H(t_1) H(t_2) \quad (9.176)$$

ここで唐突だが $H(t_1)H(t_2)$ の時間順序積

$$T[H(t_1)H(t_2)] = \theta(t_1 - t_2)H(t_1)H(t_2) + \theta(t_2 - t_1)H(t_2)H(t_1) \quad (9.177)$$

の積分を行う:

$$\begin{aligned} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 T[H(t_1)H(t_2)] &= \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \theta(t_1 - t_2) H(t_1) H(t_2) + \int_0^t dt_2 \int_0^{t_2} dt_1 \theta(t_2 - t_1) H(t_2) H(t_1) \\ &= \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 H(t_1) H(t_2) + \int_0^t dt_2 \int_0^{t_2} dt_1 H(t_2) H(t_1) \end{aligned} \quad (9.178)$$

(9.176) の結果を用いると

$$\int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 T[H(t_1)H(t_2)] = 2 \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 H(t_1) H(t_2) \quad (9.179)$$

これを拡張すると

$$\int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 \int_0^t dt_3 T[H(t_1)H(t_2)H(t_3)] = 3! \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_0^{t_2} dt_3 H(t_1)H(t_2)H(t_3) \quad (9.180)$$

$$\int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 \cdots \int_0^t dt_n T[H(t_1)H(t_2) \cdots H(t_n)] = n! \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_{n-1}} dt_n H(t_1)H(t_2) \cdots H(t_n) \quad (9.181)$$

となる。ここでは証明しないが帰納法でいけそう。これを用いて (9.176) は T 積を用いて

$$\begin{aligned} U(t, 0) &= I + \left(\frac{-i}{\hbar}\right) \int_0^t dt_1 H_I(t_1) + \frac{1}{2!} \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^2 \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 T[H_I(t_1)H_I(t_2)] \\ &\quad + \cdots + \frac{1}{n!} \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^n \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_{n-1}} dt_n T[H_I(t_1)H_I(t_2) \cdots H_I(t_n)] + \cdots \end{aligned} \quad (9.182)$$

$$= \sum_n \frac{1}{n!} \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^n \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_{n-1}} dt_n T[H_I(t_1)H_I(t_2) \cdots H_I(t_n)] \quad (9.183)$$

のように書き換えられ、めでたく積分区間からダミー変数を除去できた。さらに、 dt_1, dt_2, \dots, dt_n の積分順序は関係ないので T 積の中に入れ、かつ別々に積分を実行することができる：

$$U(t, 0) = \sum_n \frac{1}{n!} \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^n T \left[\int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_{n-1}} dt_n H_I(t_1)H_I(t_2) \cdots H_I(t_n) \right] \quad (9.184)$$

$$= \sum_n \frac{1}{n!} \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^n T \left[\int_0^t dt_1 H_I(t_1) \int_0^{t_1} dt_2 H_I(t_2) \cdots \int_0^{t_{n-1}} dt_n H_I(t_n) \right] \quad (9.185)$$

$$= \sum_n \frac{1}{n!} \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^n T \left[\left(\int_0^t ds H_I(s) \right)^n \right] \quad (9.186)$$

それだけでなく、時間に関係ない因子は全て T 積に入れることができる：

$$U(t, 0) = T \left[\sum_n \frac{1}{n!} \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^n \left(\int_0^t ds H_I(s) \right)^n \right] \quad (9.187)$$

$$= T \left[\sum_n \frac{1}{n!} \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^n \int_0^t ds H_I(s) \right]^n \quad (9.188)$$

$$= T \exp \left(\frac{-i}{\hbar} \int_0^t ds H_I(s) \right) \quad (9.189)$$

T 積なんてこわくない！

第10章 Single mode 模型におけるゼロモード演算子と真空の直交性

2015 年度卒論. 非常に単純な Single mode 系においてゼロモードの役割について調査. 単純すぎるがゆえにゼロモードの本質を見やすそうなので載せておく.

10.1 諸言

冷却原子気体系は極低温に冷却した原子気体を磁場などのポテンシャルにより捕捉した系である. Bose 粒子で冷却原子気体系を作成すると, ほぼすべての粒子がひとつの量子状態に落ち込み, 本来微視的スケールでしか観測できない量子の波動性が巨視的なスケールで現れる. これを Bose-Einstein 凝縮という. 冷却原子気体系での Bose-Einstein 凝縮は 1995 年に初めて実現された [1].

Bose-Einstein 凝縮によって生成した凝縮体 (BEC) の安定性を解析する方程式として Bogoliubov-de Gennes (BdG) 方程式 [2, 3] が知られている. 凝縮体が存在する場合には大域的位相変換対称性が自発的に破れており, その場合必ずエネルギーがゼロの素励起があることがわかっている (南部-Goldstone の定理) [4, 5]. それに対応して BdG 方程式にはゼロ固有値に対応する固有ベクトルが存在し, これをゼロモード (南部-Goldstone モード) と呼ぶ [6-8]. このゼロモードを取り入れるとハミルトニアンが対角化できなくなるので, その解決策としてゼロモードを無視する近似 (Bogoliubov 近似) が用いられる場合が多いが, これを採用すると正準交換関係を破るという問題が生じる. この問題を解決するために Bogoliubov 近似を超える新たな方法 (Interacting ZeroMode Formulation) が提案された [9].

また Bose-Einstein 凝縮の実現に伴い, 1997 年に 2 つの BEC 同士の干渉を観測する実験も行われた [10]. この実験における干渉縞の明瞭さなどを議論するためには位相演算子を導入する必要がある. 位相演算子がかつて Dirac が電磁場を量子化する際に導入したが [11], いくつかの矛盾が指摘されている. 主には, 粒子数演算子と位相演算子が正準交換関係を満たさないこと, 位相は可観測量であるにもかかわらず位相演算子がエルミート演算子ではないことなどが挙げられる.

本研究は新たな方法で位相演算子を定式化し, 上記の問題点を回避しつつ位相演算子として矛盾なく振る舞うかどうかを確認する.

10.2 冷却原子気体とゼロモード

10.2.1 冷却原子気体のハミルトニアン

冷却原子気体のハミルトニアンは以下のように与えられる.

$$H_H = \int d\mathbf{x} \left[\psi_H^\dagger (h_0 - \mu) \psi_H + \frac{g}{2} \psi_H^\dagger \psi_H^\dagger \psi_H \psi_H \right] \quad (10.1)$$

添字の H は Heisenberg 描像であることを示している. μ は化学ポテンシャル, g は相互作用定数, h_0 は

$$h_0 = -\frac{\nabla^2}{2m} + V_{\text{ex}} \quad (10.2)$$

であり, V_{ex} は外部ポテンシャルである．これ以降 $x = (\mathbf{x}, t)$ とする．場の演算子 ψ_{H} は同時刻交換関係

$$\left[\psi_{\text{H}}(\mathbf{x}, t), \psi_{\text{H}}^{\dagger}(\mathbf{x}', t) \right] = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (10.3)$$

$$[\psi_{\text{H}}(\mathbf{x}, t), \psi_{\text{H}}(\mathbf{x}', t)] = 0, \quad \left[\psi_{\text{H}}^{\dagger}(\mathbf{x}, t), \psi_{\text{H}}^{\dagger}(\mathbf{x}', t) \right] = 0 \quad (10.4)$$

を満たす．

このハミルトニアンは大域的位相変換

$$\psi_{\text{H}}(\mathbf{x}) \longrightarrow e^{in} \psi_{\text{H}}(\mathbf{x}) \quad (10.5)$$

に関して対称である．この変換を実現する生成子は

$$N_{\text{H}} = \int d\mathbf{x} \psi_{\text{H}}^{\dagger} \psi_{\text{H}} \quad (10.6)$$

であり, これは全粒子数である [12]． N_{H} は

$$[N_{\text{H}}, H_{\text{H}}] = 0 \quad (10.7)$$

を満たすので, 保存量であることがわかる．

しかし, BEC が存在する場合にはこの対称性が自発的に破れており, 真空がハミルトニアンの持っている対称性を引き継いでいない．つまり, BEC が存在する系の真空を $|0\rangle$ とすると

$$e^{i\theta N_{\text{H}}} |0\rangle \neq |0\rangle \quad (10.8)$$

である．このとき, ψ_{H} は真空期待値を持つ:

$$\langle 0 | \psi_{\text{H}}(\mathbf{x}) | 0 \rangle = \xi(\mathbf{x}) \quad (10.9)$$

ξ は秩序変数と呼ばれ, $|\xi|^2$ は凝縮体の密度と解釈できる．秩序変数は今回は時間に依存しないと仮定する．

場の演算子を以下のように分割する:

$$\psi_{\text{H}} = \xi + \varphi_{\text{H}} \quad (10.10)$$

ξ は凝縮体を記述する古典場, φ_{H} は非凝縮体を記述する場の演算子と解釈できる．これは同時刻交換関係

$$\left[\varphi_{\text{H}}(\mathbf{x}, t), \varphi_{\text{H}}^{\dagger}(\mathbf{x}', t) \right] = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (10.11)$$

を満たしている．

ハミルトニアンを φ_{H} の次数について整理すると

$$H_{\text{H},1} = \int d\mathbf{x} \left[\varphi_{\text{H}}^{\dagger} (h_0 - \mu + g|\xi|^2) \xi + \varphi_{\text{H}} (h_0 - \mu + g|\xi|^2) \xi^* \right] \quad (10.12)$$

$$H_{\text{H},2} = \int d\mathbf{x} \left[\varphi_{\text{H}}^{\dagger} \mathcal{L} \varphi_{\text{H}} + \frac{1}{2} \varphi_{\text{H}} \mathcal{M}^* \varphi_{\text{H}} + \frac{1}{2} \varphi_{\text{H}}^{\dagger} \mathcal{M} \varphi_{\text{H}}^{\dagger} \right] \quad (10.13)$$

$$H_{\text{H},3} = g \int d\mathbf{x} \left[\xi^* \varphi_{\text{H}}^{\dagger} \varphi_{\text{H}} \varphi_{\text{H}} + \xi \varphi_{\text{H}}^{\dagger} \varphi_{\text{H}}^{\dagger} \varphi_{\text{H}} \right] \quad (10.14)$$

$$H_{\text{H},4} = \frac{g}{2} \int d\mathbf{x} \varphi_{\text{H}}^{\dagger} \varphi_{\text{H}}^{\dagger} \varphi_{\text{H}} \varphi_{\text{H}} \quad (10.15)$$

であり

$$\mathcal{L} = h_0 - \mu + 2g|\xi|^2, \quad \mathcal{M} = g\xi^2 \quad (10.16)$$

である．

10.2.2 相互作用描像

系が十分低温であり相互作用 g が小さいとする．この場合 $H_{H,3}, H_{H,4}$ の効果は小さいとして，非摂動ハミルトニアンを $H_{H,u} = H_{H,1} + H_{H,2}$ のように選び，Heisenberg 描像から相互作用描像に移行する．まず

$$i \frac{d}{dt} U(t, t_0) = U(t, t_0) H_{H,p}, \quad U(t_0, t_0) = 1, \quad H_{H,p} = H_H - H_{H,u} \quad (10.17)$$

を満たすようなユニタリー演算子 $U(t, t_0)$ を考え，Heisenberg 描像の任意の演算子 $A_H(t)$ を用いて相互作用描像の演算子を

$$A(t) = U(t, t_0) A_H(t) U^{-1}(t, t_0) \quad (10.18)$$

と定義する． t_0 は Heisenberg 描像と相互作用描像が一致する時間である．Heisenberg 方程式は

$$i \frac{d}{dt} A(t) = [A(t), H_u(t)] \quad (10.19)$$

である．ここで $A = H_u$ と代入すると時間に依存しないことがわかるので， $H_u = H_{H,u}$ である．

$U(t, t_0)$ の時間発展は $H_{H,p} = H_{H,3} + H_{H,4}$ に依存し，かつその効果が小さいことから場の演算子の摂動ゼロ次は

$$\langle 0 | \varphi_H(x) | 0 \rangle = \langle 0 | U^{-1}(t, t_0) \varphi(x) U(t, t_0) | 0 \rangle \simeq \langle 0 | \varphi(x) | 0 \rangle \quad (10.20)$$

となっている．また相互作用描像の Heisenberg 方程式より

$$i \frac{\partial}{\partial t} \varphi(x) = [\varphi(x), H_1 + H_2] \quad (10.21)$$

であることがわかる．式 (11.17) より

$$i \frac{\partial}{\partial t} \langle 0 | \varphi(x) | 0 \rangle = \langle 0 | [\varphi(x), H_1 + H_2] | 0 \rangle \quad (10.22)$$

となるが，式 (11.5) より真空及び真空期待値は時間に依存しないことから，同時刻交換関係 (11.7) を考慮し， $H_1 = 0$ である必要があることがわかる．これより

$$(h_0 - \mu + g|\xi|^2) \xi = 0 \quad (10.23)$$

を得る．これを定常 Gross-Pitaevskii 方程式と呼ぶ．

10.2.3 非摂動ハミルトニアンの対角化

場の量子論においては H_u の基底状態を真空 $|0\rangle$ に選ぶ．そこで， H_u を対角化することにより基底状態を求める．

Bogoliubov-de Gennes 方程式

非摂動ハミルトニアン H_u を

$$H_u = \int d\mathbf{x} \left[\varphi^\dagger \mathcal{L} \varphi + \frac{1}{2} \varphi \mathcal{M}^* \varphi + \frac{1}{2} \varphi^\dagger \mathcal{M} \varphi^\dagger \right] \quad (10.24)$$

と選んでいる．このハミルトニアンを対角化するために必要な完全系を与える方程式を求めたい．そのために以下のような式変形を行う：

$$H_u = \frac{1}{2} \int d\mathbf{x} \begin{pmatrix} \varphi^\dagger & \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{M} \\ \mathcal{M}^* & \mathcal{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi^\dagger \end{pmatrix} \quad (10.25)$$

$$= \frac{1}{2} \int d\mathbf{x} \begin{pmatrix} \varphi^\dagger & -\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{M} \\ -\mathcal{M}^* & -\mathcal{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi^\dagger \end{pmatrix} \quad (10.26)$$

$$= \frac{1}{2} \int d\mathbf{x} \sum_{\alpha\beta} \bar{\Phi}^\alpha T^{\alpha\beta} \Phi^\beta \quad (10.27)$$

ここで

$$\Phi^\alpha = \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi^\dagger \end{pmatrix}^\alpha, \quad \bar{\Phi}^\alpha = \begin{pmatrix} \varphi^\dagger & -\varphi \end{pmatrix}^\alpha, \quad (\alpha = 1, 2) \quad (10.28)$$

$$T = \begin{pmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{M} \\ -\mathcal{M}^* & -\mathcal{L} \end{pmatrix} \quad (10.29)$$

とする．以後 \sum 記号を省略し

$$H_u = \frac{1}{2} \int dx \bar{\Phi}^\alpha T^{\alpha\beta} \Phi^\beta \quad (10.30)$$

とした上で，混乱のおそれがないかぎり $\alpha \beta$ を省略して

$$H_u = \frac{1}{2} \int dx \bar{\Phi} T \Phi \quad (10.31)$$

とする．非摂動ハミルトニアン H_u を対角化する固有関数 y_l を与えるために，固有値方程式

$$T y_l = \omega_l y_l \quad (10.32)$$

を考える．これを Bogoliubov-de Gennes(BdG) 方程式と呼び， T を BdG 行列と呼ぶ．以下固有値 ω が実である場合のみを扱うこととする．

不定計量内積

式 (10.32) から H_u を対角化する完全系を求めたいが， T はエルミートではないため，その固有関数は一般に直交関係を満たさない．よって得られた固有関数はそのままでは完全系にはなり得ない．この問題を解決するために以下のような T に関する対称性に着目する：

$$\sigma_3 T \sigma_3 = T^\dagger, \quad \sigma_1 T \sigma_1 = -T^* \quad (10.33)$$

σ_i は Pauli 行列：

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (10.34)$$

式 (10.33) を用いて新たな内積を定義する：

$$(y_1, y_2) = \int dx y_1^\dagger \sigma_3 y_2 \quad (10.35)$$

この内積を不定計量内積と呼び，ノルムを

$$\|y\|^2 = (y, y) \quad (10.36)$$

と定義する．式 (10.35) のもとでは

$$(y_1, T y_2) = (T y_1, y_2) \quad (10.37)$$

が成り立ち，これを T の擬エルミート性と呼ぶ．式 (10.37)，(10.32) より

$$\begin{aligned} (y_1, T y_2) &= (T y_1, y_2) \\ \iff \omega_2 (y_1, y_2) &= \omega_1 (y_1, y_2) \end{aligned} \quad (10.38)$$

が示せる．よって $\omega_1 \neq \omega_2$ であれば

$$(y_1, y_2) = 0 \quad (10.39)$$

であることがわかる．

ゼロモードと共役モード

T の擬エルミート性と不定計量内積を用いることにより完全系を作ることができるだろうか．BEC がある系ではゼロモードが存在し，それを y_0 と書くことにする．Gross-Pitaevskii 方程式 (10.23) より y_0 は以下を満たす：

$$T y_0 = 0, \quad y_0 = \begin{pmatrix} \xi \\ -\xi^* \end{pmatrix} \quad (10.40)$$

ゼロモードのノルムは

$$\| y_0 \|^2 = \int (\xi^* \quad -\xi) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ -\xi^* \end{pmatrix} dx = 0 \quad (10.41)$$

であることから，ゼロモードは自身を含むすべての固有関数と直交してしまい，結果として BdG 方程式の固有関数だけでは完全系を作ることができない．

そこで完全系を作るために，ゼロモードと直交しない関数 y_{-1} を導入する．これを共役モードと呼ぶ．共役モードは

$$T y_{-1} = I y_0, \quad (y_0, y_{-1}) = 1, \quad \| y_{-1} \|^2 = 0 \quad (10.42)$$

を満たすものであり， I は第 2 式を満たすように決定される規格化係数である．共役モードはゼロモード以外のすべての固有関数と直交する． y_{-1} は全粒子数の定義 (10.6) より

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{\partial N_0}{\partial N_0} \\ &= \int dx \frac{\partial}{\partial N_0} \xi^* \xi \\ &= \int dx \left(\frac{\partial \xi^*}{\partial N_0} \xi + \xi^* \frac{\partial \xi}{\partial N_0} \right) \\ &= \int dx (\xi^* \quad -\xi) \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial N_0} \\ -\frac{\partial \xi^*}{\partial N_0} \end{pmatrix} \\ &= \int dx (\xi^* \quad -\xi) \sigma_3 \begin{pmatrix} \eta \\ \eta^* \end{pmatrix} \\ &= \int dx y_0^\dagger \sigma_3 y_{-1} \\ &= (y_0, y_{-1}) \end{aligned} \quad (10.43)$$

となる．ここで $\eta = \frac{\partial \xi}{\partial N_0}$ ， $y_{-1} = \begin{pmatrix} \eta \\ \eta^* \end{pmatrix}$ としている．また Gross-Pitaevskii 方程式 (10.23) を N_0 で微分することにより

$$\begin{aligned} (h_0 - \mu + g|\xi|^2) \xi &= 0 \\ \left(-\frac{\partial \mu}{\partial N_0} + g \frac{\partial \xi}{\partial N_0} \xi^* + g \xi \frac{\partial \xi^*}{\partial N_0} \right) \xi + (h_0 - \mu + g|\xi|^2) \frac{\partial \xi}{\partial N_0} &= 0 \\ -\frac{\partial \mu}{\partial N_0} \xi + g \eta |\xi|^2 + g \eta^* \xi^2 + (h_0 - \mu + g|\xi|^2) \eta &= 0 \\ \mathcal{L} \eta + \mathcal{M} \eta^* &= \frac{\partial \mu}{\partial N_0} \xi \\ \begin{pmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{M} \\ -\mathcal{M}^* & -\mathcal{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta \\ \eta^* \end{pmatrix} &= \frac{\partial \mu}{\partial N_0} \begin{pmatrix} \xi \\ -\xi^* \end{pmatrix} \\ T y_{-1} &= \frac{\partial \mu}{\partial N_0} y_0 \\ \therefore y_{-1} &= \begin{pmatrix} \eta \\ \eta^* \end{pmatrix}, \quad \eta = \frac{\partial \xi}{\partial N_0}, \quad I = \frac{\partial \mu}{\partial N_0} \end{aligned} \quad (10.44)$$

となる．以上の議論から共役モードを得る．

10.2.4 ゼロモードのジレンマ

上記のゼロモードを取り込んだ理論には諸言で述べたような問題が起こる．この問題を解決するために新たな方法が提案されたが，その詳細については Interacting ZeroMode Formulation (IZMF) [9] を参照．今回の研究では，IZMF における位相の取り扱いについて議論する．

10.3 Single mode 模型

10.3.1 ハミルトニアンとゼロモード

今回扱う系のハミルトニアンとして空間自由度を持たず，場の演算子を展開するモードにゼロモードしか現れない Single mode 模型を採用する．ハミルトニアンは以下の通り：

$$H_H = -\mu a_H^\dagger(t) a_H(t) + \frac{U}{2} a_H^\dagger(t) a_H^\dagger(t) a_H(t) a_H(t) \quad (10.45)$$

μ は化学ポテンシャル， U は相互作用定数であり，今回は $U > 0$ の場合のみを考える． a -演算子は boson の生成消滅演算子であり，同時刻交換関係

$$[a_H(t), a_H^\dagger(t)] = 1 \quad (10.46)$$

を満たしている．このハミルトニアンは位相変換に対して対称である．この位相変換対称性が自発的に破れ，粒子数 N_0 ，位相 θ の BEC が存在する場合を考える．量子状態を $|\Psi_\theta\rangle$ と書くことにすると，

$$\langle \Psi_\theta | a_H(t) | \Psi_\theta \rangle = \xi e^{i\theta}, \quad \xi \equiv \sqrt{N_0} \quad (10.47)$$

となっている． a -演算子を

$$a_H(t) = \xi e^{i\theta} + b_{H,\theta}(t) \quad (10.48)$$

のように分割すると， b -演算子は素励起のモードと見なせ，ハミルトニアンは

$$H_H = H_{H,\theta,1} + H_{H,\theta,2} + H_{H,\theta,3} + H_{H,\theta,4} \quad (10.49)$$

となる．ただし，

$$H_{H,\theta,1} = \xi(-\mu + UN_0) \left(b_{H,\theta}^\dagger e^{i\theta} + b_{H,\theta} e^{-i\theta} \right) \quad (10.50)$$

$$H_{H,\theta,2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} b_{H,\theta}^\dagger & -b_{H,\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{M}_\theta \\ -\mathcal{M}_\theta^* & -\mathcal{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{H,\theta} \\ b_{H,\theta}^\dagger \end{pmatrix} \quad (10.51)$$

$$H_{H,\theta,3} = U\xi \left(b_{H,\theta}^\dagger b_{H,\theta}^\dagger b_{H,\theta} e^{i\theta} + b_{H,\theta}^\dagger b_{H,\theta} b_{H,\theta} e^{-i\theta} \right) \quad (10.52)$$

$$H_{H,\theta,4} = \frac{U}{2} b_{H,\theta}^\dagger b_{H,\theta}^\dagger b_{H,\theta} b_{H,\theta} \quad (10.53)$$

であり，ここで，

$$\mathcal{L} = -\mu + 2UN_0, \quad \mathcal{M}_\theta = UN_0 e^{2i\theta} \quad (10.54)$$

である．この系の定常 Gross-Pitaevskii 方程式は

$$\mu = UN_0 \quad (10.55)$$

である．また，この系の BdG 行列は

$$T_\theta = UN_0 \begin{pmatrix} 1 & e^{2i\theta} \\ -e^{-2i\theta} & 1 \end{pmatrix} \quad (10.56)$$

である．したがって，ゼロモードと共役モードは

$$T_\theta \mathbf{y}_{0,\theta} = 0, \quad T_\theta \mathbf{y}_{-1,\theta} = I \mathbf{y}_{0,\theta} \quad (10.57)$$

$$\therefore \quad \mathbf{y}_{0,\theta} = \begin{pmatrix} \xi e^{i\theta} \\ -\xi e^{-i\theta} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}_{-1,\theta} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\xi} e^{i\theta} \\ \frac{1}{2\xi} e^{-i\theta} \end{pmatrix} \quad (10.58)$$

のように定義され， $I = U$ である．今回のモデルでは励起モードは出現しない． b -演算子をゼロモードと共役モードで展開するが，完全性の式は

$$\mathbf{y}_{0,\theta} \mathbf{y}_{-1,\theta}^\dagger + \mathbf{y}_{-1,\theta} \mathbf{y}_{0,\theta}^\dagger = \sigma_3 \quad (10.59)$$

で与えられる．

10.3.2 W 行列の導入と場の展開

式 (10.59) をもう少し整理するために W 行列

$$W_0 = \sigma_1 \begin{pmatrix} \mathbf{y}_{0,\theta}^\dagger \\ \mathbf{y}_{-1,\theta}^\dagger \end{pmatrix} \sigma_3, \quad W_0^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_{0,\theta} & \mathbf{y}_{-1,\theta} \end{pmatrix} \quad (10.60)$$

を導入する． W 行列を用いると完全性の式は

$$W_0^{-1} W_0 = 1 \quad (10.61)$$

となる．これを用いて場の演算子 Φ を展開する：

$$\Phi = W_0^{-1} A_0, \quad \bar{\Phi} = \bar{A}_0 W_0 \quad (10.62)$$

$\Phi, \bar{\Phi}$ は定義 (10.28) より

$$\Phi = \begin{pmatrix} b_\theta \\ b_\theta^\dagger \end{pmatrix}, \quad \bar{\Phi} = \begin{pmatrix} b_\theta^\dagger & -b_\theta \end{pmatrix} \quad (10.63)$$

と書ける．また

$$\Phi = \sigma_1 \Phi^{t,\dagger}, \quad \bar{\Phi} = \Phi^\dagger \sigma_3 \quad (10.64)$$

が成立している．この性質に加え

$$W_0 = -\sigma_3 W_0^* \sigma_1, \quad W_0^{-1} = \sigma_3 W_0^\dagger \sigma_1 \quad (10.65)$$

が成立していることにより

$$A_0 = W_0 \Phi \quad (10.66)$$

$$= -\sigma_3 W_0^* \sigma_1 \sigma_1 \Phi^{t,\dagger} \quad (10.67)$$

$$= -\sigma_3 (W_0 \Phi)^{t,\dagger} \quad (10.68)$$

$$\therefore A_0 = -\sigma_3 A_0^{t,\dagger} \quad (10.69)$$

及び

$$\bar{A}_0 = \bar{\Phi} W_0^{-1} \quad (10.70)$$

$$= \Phi^\dagger \sigma_3 \sigma_3 W_0^\dagger \sigma_1 \quad (10.71)$$

$$= (W_0 \Phi)^\dagger \sigma_1 \quad (10.72)$$

$$\therefore \bar{A}_0 = A_0^\dagger \sigma_1 \quad (10.73)$$

であることがわかる． $A_0 = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$ とおくと式 (10.69) より

$$\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}^{t,\dagger} \quad (10.74)$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q^\dagger \\ p^\dagger \end{pmatrix} \quad (10.75)$$

$$\therefore q = -q^\dagger, \quad p = p^\dagger \quad (10.76)$$

であること，つまり q は反エルミート演算子， p はエルミート演算子であることがわかる．よって A_0, \bar{A}_0 を

$$A_0 = \begin{pmatrix} -iQ \\ P \end{pmatrix}, \quad \bar{A}_0 = \begin{pmatrix} P & iQ \end{pmatrix} \quad (10.77)$$

と表すことにする． Q, P はエルミート演算子である．以上より， b -演算子は式 (10.58)，(10.60)，(10.62) を用いて

$$b_\theta = -i\xi e^{i\theta} Q + \frac{1}{2\xi} e^{i\theta} P, \quad b_\theta^\dagger = i\xi e^{-i\theta} Q + \frac{1}{2\xi} e^{-i\theta} P \quad (10.78)$$

と展開できることがわかる．また

$$\bar{A}_0 A_0 = \bar{\Phi} W_0^{-1} W_0 \Phi \quad (10.79)$$

$$\begin{pmatrix} P & iQ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -iQ \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_\theta^\dagger & -b_\theta \end{pmatrix} W_0^{-1} W_0 \begin{pmatrix} b_\theta \\ b_\theta^\dagger \end{pmatrix} \quad (10.80)$$

$$i(QP - PQ) = b_\theta^\dagger b_\theta - b_\theta b_\theta^\dagger \quad (10.81)$$

$$\therefore [Q, P] = i \quad (10.82)$$

より， Q, P の間には正準交換関係が成立していることがわかる．今後 Q, P のことをゼロモード演算子と呼ぶ．

10.3.3 非摂動ハミルトニアンを選択

非摂動ハミルトニアン $H_{u,\theta}(t)$ を

$$H_{u,\theta} \equiv H_{H,\theta,2} + H_{H,\theta,3} + H_{H,\theta,4} - \delta\mu P \quad (10.83)$$

と選び，相互作用描像を定義する． $\delta\mu$ を含む項をカウンター項と呼び，その意味については後述する．

系の量子状態 $|\Psi_\nu\rangle_\theta$ は，Schrödinger-like 方程式

$$H_{u,\theta} |\Psi_\nu\rangle_\theta = E_\nu |\Psi_\nu\rangle_\theta \quad (10.84)$$

の基底固有状態として定義する．ここではこれをゼロモード方程式と呼ぶことにする．場の演算子が摂動ゼロ次で場の分割条件

$$_\theta \langle \Psi | a | \Psi \rangle_\theta = \xi e^{i\theta} \iff _\theta \langle \Psi | b_\theta | \Psi \rangle_\theta = 0 \quad (10.85)$$

を満たすためには

$$_\theta \langle \Psi | Q | \Psi \rangle_\theta = 0, \quad _\theta \langle \Psi | P | \Psi \rangle_\theta = 0 \quad (10.86)$$

を満たしている必要がある．さらにこの性質が保存するためには

$$_\theta \langle \Psi | [Q, H_{u,\theta}] | \Psi \rangle_\theta = 0, \quad _\theta \langle \Psi | [P, H_{u,\theta}] | \Psi \rangle_\theta = 0 \quad (10.87)$$

が必要である．これらを満たすように $\delta\mu$ を定めると

$$\delta\mu = i_\theta \langle \Psi | [Q, H_{3,\theta} + H_{4,\theta}] | \Psi \rangle_\theta \quad (10.88)$$

のようになる． $\delta\mu$ を含むカウンター項がないと，式 (10.86)，(10.87) を同時に満たすことができない．式 (10.88) より $\delta\mu$ を決定するには $|\Psi\rangle_\theta$ を定めなければならないが， $|\Psi\rangle_\theta$ を決定するために必要な $H_{u,\theta}$ 自体に $\delta\mu$ が含まれているため， $\delta\mu$ は自己無撞着的に決定する必要がある．(この方法については付録で述べる)

一般に式 (10.84) を解析的に解くことは不可能であるので，数値計算を行う．その場合は以下のように式変形をする．

$$\sum_{m'} {}_{b\theta} \langle m | H_{u,\theta} | m' \rangle {}_{b\theta} \psi_{m',\theta} = E \psi_{m,\theta}, \quad \psi_{m,\theta} \equiv {}_{b\theta} \langle m | \Psi \rangle_\theta \quad (10.89)$$

ここで $|m\rangle_{b\theta}$ は b -演算子の粒子数状態である．

10.4 ゼロモード演算子と物理量

ゼロモード演算子 Q, P の物理的な解釈を考える．

10.4.1 変分法による見積もり

前述の通りゼロモード方程式は解析的に解けない．数値計算をする前に変分法でゼロモード演算子の期待値を見積もる．そこで以下のような試行関数を考える：

$${}_\theta \langle q | \Psi \rangle_\theta = \left(\frac{1}{2\pi\alpha^2} \right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{q^2}{4\alpha^2}} \quad (10.90)$$

これは場の分割条件 (10.86) を満たしている．ゼロモード演算子の期待値はそれぞれ

$${}_\theta \langle \Psi | Q^2 | \Psi \rangle_\theta = \alpha^2 \quad (10.91)$$

$${}_\theta \langle \Psi | Q^4 | \Psi \rangle_\theta = 3\alpha^4 \quad (10.92)$$

$${}_\theta \langle \Psi | P^2 | \Psi \rangle_\theta = \frac{1}{4\alpha^2} \quad (10.93)$$

$${}_\theta \langle \Psi | P^4 | \Psi \rangle_\theta = \frac{3}{16\alpha^4} \quad (10.94)$$

$${}_\theta \langle \Psi | QP^2Q | \Psi \rangle_\theta = \frac{3}{4} \quad (10.95)$$

と計算できる．ここでは $Q|q\rangle_\theta = q|q\rangle_\theta$ を用いている．また $f(\alpha) = {}_\theta \langle \Psi | H_u | \Psi \rangle_\theta$ としたときに $f(\alpha)$ を最小にする α を与える式は

$$\frac{df}{d\alpha} = 6N_0^4\alpha^8 - 2N_0^3\alpha^6 - \frac{N_0}{8}(2N_0 - 1)\alpha^2 - \frac{3}{128} = 0 \quad (10.96)$$

である． $x = N_0\alpha^2$ と変数変換すると

$$6x^4 - 2x^3 - \frac{1}{8}(2N_0 - 1)x - \frac{1}{128} = 0 \quad (10.97)$$

となる．ここで α は N_0 に依存していることに注意．ここで $N_0 \rightarrow \infty$ という極限を考えたときに効いてくる項は x^4 と $-N_0x$ になるので，その極限のもとで α の値は

$$6x^4 - \frac{N_0}{4}x = 0, \quad \therefore x = \sqrt[3]{\frac{N_0}{24}} \quad (10.98)$$

$$\therefore \alpha = \frac{1}{\sqrt[6]{24}} N_0^{-\frac{1}{3}} \quad (10.99)$$

であることがわかる．

10.4.2 Q, P の物理的な解釈

$\alpha \propto N_0^{-\frac{1}{3}}$ であることから

$${}_{\theta}\langle \Psi | Q^2 | \Psi \rangle_{\theta} \propto N_0^{-\frac{2}{3}} \quad (10.100)$$

$${}_{\theta}\langle \Psi | P^2 | \Psi \rangle_{\theta} \propto N_0^{\frac{2}{3}} \quad (10.101)$$

であることがわかった。

ここで場の展開について考える：

$$a = \xi_{\theta}[N_0] - i\xi_{\theta}[N_0]Q + \frac{\partial \xi_{\theta}[N_0]}{\partial N_0}P \quad (10.102)$$

$\xi_{\theta} = \xi e^{i\theta}$ であり，今回は ξ_{θ} の N_0 依存性をあらわに書いている．この式を

$${}_{\theta}\langle \Psi | Q^2 | \Psi \rangle_{\theta} \ll 1 \quad (10.103)$$

$${}_{\theta}\langle \Psi | P^2 | \Psi \rangle_{\theta} \ll N_0 \quad (10.104)$$

つまり N_0 が十分大きいという条件のもとで変形すると

$$a \simeq \sqrt{N_0 + P} e^{i(\theta - Q)} \quad (10.105)$$

となる．この変形が許される限り， Q は凝縮体の位相演算子と解釈できる．

10.4.3 位相と凝縮粒子数の不確定性関係

量子効果を考慮した凝縮粒子数として

$$N_c = a^{\dagger}a \quad (10.106)$$

を定義し， Q との交換関係を考える：

$$[Q, N_c] = \frac{1}{2i\xi} \left[(e^{i\theta}b_{\theta}^{\dagger} - e^{-i\theta}b_{\theta}), (\xi e^{-i\theta} + b_{\theta}^{\dagger})(\xi e^{i\theta} + b_{\theta}) \right] \quad (10.107)$$

$$= -\frac{1}{2i\xi} \left(2\xi + e^{i\theta}b_{\theta}^{\dagger} + e^{-i\theta}b_{\theta} \right) \quad (10.108)$$

$$= -\frac{1}{2i\xi} \left(2\xi + \frac{1}{\xi}P \right) \quad (10.109)$$

$[Q, N_c] = iC$ とすると

$$C = \frac{1}{2\xi} \left(2\xi + \frac{1}{\xi}P \right) = 1 + \frac{1}{2N_0}P \quad (10.110)$$

このとき不等式

$${}_{\theta}\langle \Psi | (\Delta Q)^2 | \Psi \rangle_{\theta} \cdot {}_{\theta}\langle \Psi | (\Delta N_c)^2 | \Psi \rangle_{\theta} \geq \frac{|{}_{\theta}\langle \Psi | C | \Psi \rangle_{\theta}|^2}{4} \quad (10.111)$$

が成立している． ΔQ は標準偏差

$$\Delta Q \equiv \sqrt{{}_{\theta}\langle \Psi | Q^2 | \Psi \rangle_{\theta} - {}_{\theta}\langle \Psi | Q | \Psi \rangle_{\theta}^2} \quad (10.112)$$

$$= \sqrt{{}_{\theta}\langle \Psi | Q^2 | \Psi \rangle_{\theta}} \quad (10.113)$$

$$(\because {}_{\theta}\langle \Psi | Q | \Psi \rangle_{\theta} = 0) \quad (10.114)$$

で与えられる． ${}_{\theta}\langle \Psi | P | \Psi \rangle_{\theta} = 0$ ， ${}_{\theta}\langle \Psi | \Psi \rangle_{\theta} = 1$ より

$$\Delta Q \Delta N_c \geq \frac{1}{2} \quad (10.115)$$

これは位相と凝縮粒子数の不確定性関係である．位相に依らない規格化された状態 $|\Psi\rangle$ について

$$\begin{aligned}
& \int_{-\pi}^{\pi} dq \langle \Psi | Q^2 | \Psi \rangle \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} dq \langle \Psi | q \rangle q^2 \langle q | \Psi \rangle \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dq \, q^2 \\
&= \frac{\pi^2}{3}
\end{aligned} \tag{10.116}$$

であることから位相揺らぎの上限は $\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)$ なので，粒子数と位相は共役物理量ではない．しかし Q が位相演算子と見なせるのは N_0 が十分大きい場合のみであり，その場合は (10.103) より ΔQ は十分小さくなるので上の不等式は物理的意味を失わない．

10.5 Bose-Einstein 凝縮系における真空の構造と位相演算子

10.5.1 真空の直交性

以上の定式化を用いて，位相の異なる真空同士の直交性 ${}_{\theta} \langle \Psi | \Psi \rangle_{\theta'}$ を調べる． $N_0 \rightarrow \infty$ においては ${}_{\theta} \langle \Psi | \Psi \rangle_{\theta'} = \delta_{\theta\theta'}$ であることが期待されている．このことから今回は ${}_{\theta} \langle \Psi | \Psi \rangle_{\theta'}$ の N_0 , $\theta - \theta'$ 依存性を調べる．式 (10.84) に m, m' の完全性を挿入すると

$${}_{\theta} \langle \Psi | \Psi \rangle_{\theta'} = \sum_{mm'} \psi_{m,\theta}^* \langle m | m' \rangle_{b\theta'} \psi_{m',\theta'} \tag{10.117}$$

であり， $\psi_{m,\theta}^*$, $\psi_{m',\theta'}$ は固有値方程式 (10.89) を解けば求まるので，あとは ${}_{b\theta} \langle m | m' \rangle_{b\theta'}$ を計算できればよい．異なる粒子数演算子同士の内積を計算するので，以下のような式変形をする．まずは

$$a = \xi e^{i\theta} + b_{\theta}, \quad a^{\dagger} = \xi e^{-i\theta} + b_{\theta}^{\dagger} \tag{10.118}$$

を以下のように書き換える：

$$a = e^{\Xi_{\theta}} b_{\theta} e^{-\Xi_{\theta}}, \quad a^{\dagger} = e^{\Xi_{\theta}} b_{\theta}^{\dagger} e^{-\Xi_{\theta}} \tag{10.119}$$

上式を満たす演算子 Ξ_{θ} は

$$\Xi_{\theta} = \xi \left(b_{\theta} e^{-i\theta} - b_{\theta}^{\dagger} e^{i\theta} \right) = \xi \left(a e^{-i\theta} - a^{\dagger} e^{i\theta} \right) \tag{10.120}$$

である． a -演算子の真空を $|0\rangle_a$ と書くと

$$a|0\rangle_a = e^{\Xi_{\theta}} b_{\theta} e^{-\Xi_{\theta}} |0\rangle_a \tag{10.121}$$

より

$$e^{-\Xi_{\theta}} |0\rangle_a = |0\rangle_{b\theta} \tag{10.122}$$

と決まる．ここから帰納的に

$$e^{-\Xi_{\theta}} |m\rangle_a = |m\rangle_{b\theta} \tag{10.123}$$

であることがわかる．よって

$${}_{b\theta} \langle m | m' \rangle_{b\theta'} = {}_a \langle m | e^{\Xi_{\theta}} e^{-\Xi_{\theta'}} | m' \rangle_a \tag{10.124}$$

である．これで異なる位相を持つ b -演算子の粒子数状態の内積を a -演算子の粒子数状態の内積で記述できた．

さらにここから $e^{\Xi_\theta} e^{-\Xi_{\theta'}}$ を a -演算子で展開できるように変形する．準備として Ξ_θ と $\Xi_{\theta'}$ の交換関係の計算をする．

$$[\Xi_\theta, \Xi_{\theta'}] = \xi^2 [ae^{-i\theta} - a^\dagger e^{i\theta}, ae^{-i\theta'} - a^\dagger e^{i\theta'}] \quad (10.125)$$

$$= -\xi^2 e^{-i(\theta-\theta')} [a, a^\dagger] - \xi^2 e^{i(\theta-\theta')} [a^\dagger, a] \quad (10.126)$$

$$= \xi^2 \{e^{i(\theta-\theta')} - e^{-i(\theta-\theta')}\} \quad (10.127)$$

$$= 2iN_0 \sin(\theta - \theta') \quad (10.128)$$

これは演算子を含まないので

$$[\Xi_\theta, [\Xi_\theta, \Xi_{\theta'}]] = [\Xi_{\theta'}, [\Xi_\theta, \Xi_{\theta'}]] = 0 \quad (10.129)$$

式 (10.129) より Campbell-Hausdorff の公式を用いると

$$e^{\Xi_\theta} e^{-\Xi_{\theta'}} = e^{\Xi_\theta - \Xi_{\theta'}} e^{-[\Xi_\theta, \Xi_{\theta'}]/2} \quad (10.130)$$

$$= \exp \left[\xi \left(-(e^{i\theta} - e^{i\theta'}) a^\dagger + (e^{-i\theta} - e^{-i\theta'}) a \right) \right] \exp [-iN_0 \sin(\theta - \theta')] \quad (10.131)$$

ここで

$$z = \xi(e^{i\theta} - e^{i\theta'}) \quad (10.132)$$

$$r = -iN_0 \sin(\theta - \theta') \quad (10.133)$$

とした上で，もう一度 Campbell-Hausdorff の公式を用いると，式 (10.131) は

$$e^{\Xi_\theta} e^{-\Xi_{\theta'}} = e^{-za^\dagger + z^*a} e^r \quad (10.134)$$

$$= e^{-za^\dagger} e^{z^*a} e^{[za^\dagger, z^*a]/2} e^r \quad (10.135)$$

$$= e^{-za^\dagger} e^{z^*a} e^{-\frac{1}{2}|z|^2} e^r \quad (10.136)$$

となる．次に $e^{z^*a}(a^\dagger)^{m'} e^{-z^*a}$ を計算する．Baker-Hausdorff の補助定理を用いることにより，

$$\begin{aligned} e^{z^*a} a^\dagger e^{-z^*a} &= a^\dagger + [a^\dagger, -z^*a] \\ &= a^\dagger + z^* \end{aligned} \quad (10.137)$$

$$\begin{aligned} \therefore e^{z^*a} (a^\dagger)^{m'} e^{-z^*a} &= (e^{z^*a} a^\dagger e^{-z^*a})^{m'} \\ &= (a^\dagger + z^*)^{m'} \end{aligned} \quad (10.138)$$

$$\therefore e^{z^*a} (a^\dagger)^{m'} = (a^\dagger + z^*)^{m'} e^{z^*a} \quad (10.139)$$

となることがわかる．同様に

$$a^m e^{-za^\dagger} = e^{-za^\dagger} (a - z^*)^m \quad (10.140)$$

である．以上から，式 (10.136)，(10.139)，(10.140) を用いると式 (10.124) は

$$\begin{aligned} {}_a \langle m | e^{\Xi_\theta} e^{-\Xi_{\theta'}} | m' \rangle_a &= {}_a \langle m | e^{-za^\dagger} e^{z^*a} | m' \rangle_a e^{-\frac{1}{2}|z|^2} e^r \\ &= \frac{1}{\sqrt{m!m'!}} {}_a \langle 0 | a^m e^{-za^\dagger} e^{z^*a} (a^\dagger)^{m'} | 0 \rangle_a e^{-\frac{1}{2}|z|^2} e^r \\ &= \frac{1}{\sqrt{m!m'!}} {}_a \langle 0 | (a - z^*)^m (a^\dagger + z^*)^{m'} | 0 \rangle_a e^{-\frac{1}{2}|z|^2} e^r \\ &= \sum_{l=0}^m \sum_{l'=0}^{m'} \frac{1}{\sqrt{m!m'!}} {}_a \langle 0 | a^l (-z)^{m-l} {}_m C_l (a^\dagger)^{l'} (z^*)^{m'-l'} {}_{m'} C_{l'} | 0 \rangle_a e^{-\frac{1}{2}|z|^2} e^r \\ &= \sum_{l=0}^{\min(m, m')} \frac{1}{\sqrt{m!m'!}} {}_m C_l {}_{m'} C_l (-z)^{m-l} (z^*)^{m'-l} l! e^{-\frac{1}{2}|z|^2} e^r \\ &= \sqrt{m!m'!} (-z)^m (z^*)^{m'} \sum_{l=0}^{\min(m, m')} \frac{|z|^2}{\sqrt{(m-l)!(m'-l)!} l!} e^{-\frac{1}{2}|z|^2} e^r \end{aligned} \quad (10.141)$$

となり，具体的に計算できるようになった．

数値計算結果

前節の方法を用いて異なる位相を持つ真空同士の内積の自乗 $|\theta\langle\Psi|\Psi\rangle_{\theta'}|^2$ の $N_0, \theta - \theta'$ 依存性を数値計算で調べる． $\mu = 1.0$ に固定し，式 (10.55) を満たすように N_0 を変化させた場合の $|\theta\langle\Psi|\Psi\rangle_{\theta'}|^2$ の変化を図 10.1，その半値幅 (FWHM) を図 10.2 に示す．

また， $\delta\mu$ を自己無撞着的に決定する際には素励起の最大数 m_{\max} を決めて計算しなければならない．今回は $m_{\max} = 300$ で計算し，式 (10.89) における $\psi_{m,\theta}$ ，ハミルトニアン of 行列表示 ${}_{b\theta}\langle m|H_{u,\theta}|m'\rangle_{b\theta}$ を計算する際には $m = 30$ で計算した．この理由については付録にて述べる．

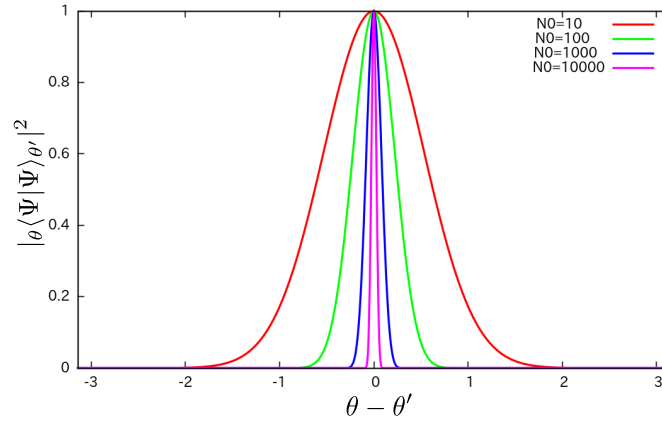


図 10.1: 相対位相と真空の直交性 ($m = 30$)

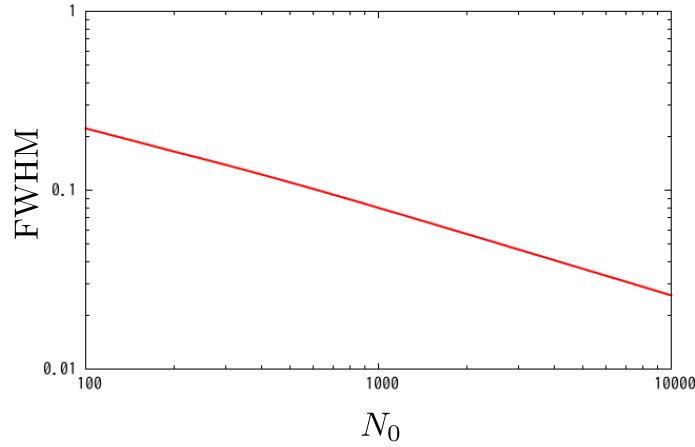


図 10.2: 真空の直交性の半値幅 (両対数表示)

$|\theta\langle\Psi|\Psi\rangle_{\theta'}|^2$ は $\theta = \theta'$ において最大値 1 を取る．また $|\theta - \theta'|$ に対して単調に減少し， N_0 が大きくなるとより早く減少する．同様に半値幅も N_0 が大きくなるに従って減少していく様子が見られ，図 10.1 のグラフは $\delta_{\theta\theta'}$ に近付いていることがわかる．半値幅の両対数表示から算出した傾きは $-0.470\dots$ だった．

10.5.2 位相演算子と位相ゆらぎ

第4章の議論から，今回の定式化では ${}_{\theta}\langle\Psi|Q^2|\Psi\rangle_{\theta} \ll 1$ の場合， Q は凝縮体の位相演算子とみなすことができる．凝縮体の位相にはゆらぎがあり，それは式 (10.113) で与えられる．この位相ゆらぎの N_0 依存性を調べるために式 (10.113) を数値計算ができるように変形する：

$$\Delta Q = \sqrt{{}_{\theta}\langle\Psi|Q^2|\Psi\rangle_{\theta}} \quad (10.142)$$

$$= \sqrt{{}_{\theta}\langle\Psi|\left[\frac{1}{2i\xi}\left(e^{2i\theta}b_{\theta}^{\dagger}-e^{-i\theta}b_{\theta}\right)\right]^2|\Psi\rangle_{\theta}} \quad (10.143)$$

$$= \sqrt{-\frac{1}{4N_0}{}_{\theta}\langle\Psi|(e^{2i\theta}b_{\theta}^{\dagger}b_{\theta}^{\dagger}-b_{\theta}^{\dagger}b_{\theta}-b_{\theta}b_{\theta}^{\dagger}+e^{-2i\theta}b_{\theta}b_{\theta})|\Psi\rangle_{\theta}} \quad (10.144)$$

$$= \sqrt{-\frac{1}{4N_0}\sum_{mm'}{}_{\theta}\langle\Psi|m\rangle\langle m|(e^{2i\theta}b_{\theta}^{\dagger}b_{\theta}^{\dagger}-b_{\theta}^{\dagger}b_{\theta}-b_{\theta}b_{\theta}^{\dagger}+e^{-2i\theta}b_{\theta}b_{\theta})|m'\rangle\langle m'|\Psi\rangle_{\theta}} \quad (10.145)$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4N_0}\sum_m\left[(2m+1)\psi_{m,\theta}^*\psi_{m,\theta}-e^{2i\theta}\sqrt{(m-1)m}\psi_{m,\theta}^*\psi_{m-2,\theta}-e^{-2i\theta}\sqrt{(m+2)(m+1)}\psi_{m,\theta}^*\psi_{m+2,\theta}\right]} \quad (10.146)$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4N_0}\sum_m\left[(2m+1)\psi_{m,\theta}^*\psi_{m,\theta}-e^{2i\theta}\sqrt{(m+2)(m+1)}\psi_{m+2,\theta}^*\psi_{m,\theta}-e^{-2i\theta}\sqrt{(m+2)(m+1)}\psi_{m,\theta}^*\psi_{m+2,\theta}\right]} \quad (10.147)$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4N_0}\sum_m\left[(2m+1)\psi_{m,\theta}^*\psi_{m,\theta}-2\text{Re}\left(e^{2i\theta}\sqrt{(m+2)(m+1)}\psi_{m+2,\theta}^*\psi_{m,\theta}\right)\right]} \quad (10.148)$$

数値計算結果

粒子数 N_0 と位相ゆらぎ ΔQ の関係を図 10.3 に示す．

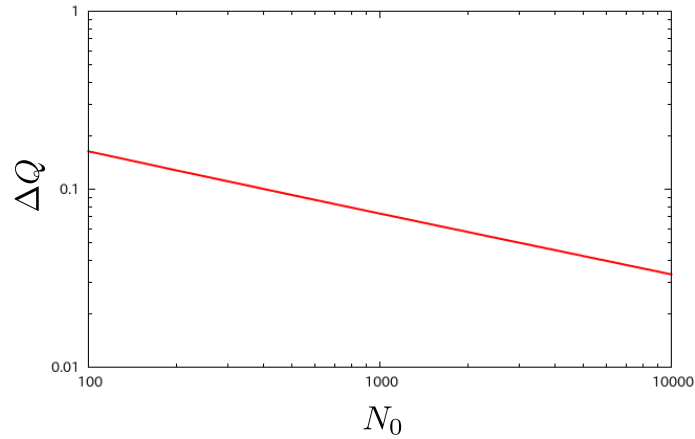


図 10.3: 粒子数と位相揺らぎ (両対数表示)

図 10.3 から算出した傾きは $-0.343\dots$ だった．これは式 (10.100) の見積りとほぼ一致していることがわかる．

10.6 結言

本研究では場の演算子にゼロモードのみが現れ、空間自由度を持たない Single mode 模型を扱った．このモデルにおいて特定の条件のもとでゼロモード演算子 Q が位相演算子と解釈できることを確認し、異なる位相を持つ真空同士の直交性・位相ゆらぎの計算を行った．凝縮体の位相ゆらぎが計算できること自体がひとつの成果である．

数値計算の結果、真空の直交性は凝縮粒子数を増加させると直交性が増し、 $N_0 \rightarrow \infty$ において $\delta_{\theta\theta'}$ という理想と一致するような傾向が見られた．また数値計算で求めた位相ゆらぎは変分法で計算した値と良く一致した．

Appendix.A：数値計算上の注意点

A.1 m_{\max} の値の設定

一般に、素励起の最大数である m_{\max} は無限大に取るのが理想である．よって m に関する諸々の計算は $\sum_{m=0}^{\infty}$ とすべきだが、数値計算上では $\sum_{m=0}^{m_{\max}}$ とし、自己無撞着的に決定される $\delta\mu$ が m に依存しなくなるような十分大きい m_{\max} を選ぶことにする．

N_0 が大きくなるほど $\delta\mu$ の収束性は悪くなるが、 $N_0 = 10000$ であれば $m = 300$ 程度で十分収束していることが図 10.4 からわかる．

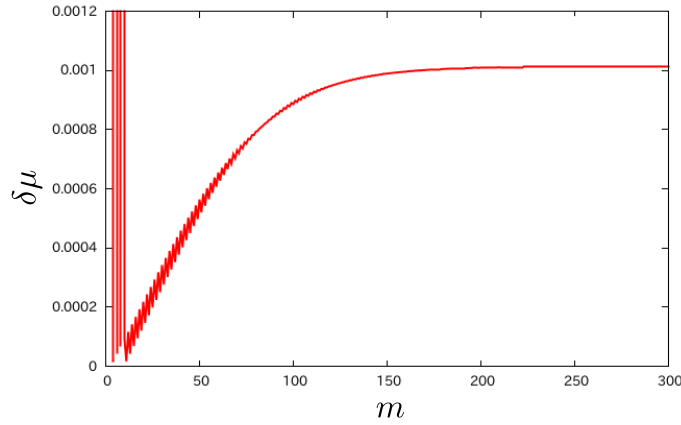


図 10.4: m に対する $\delta\mu$ の変化

A.2 階乗の処理

式 (10.141) は数値計算可能な形ではあるが、階乗が含まれているので double 型ではオーバーフローを起こしてしまう．この問題を回避するためにさらに変形を施す．

$$z \equiv -ie^{i\bar{\theta}}|z| \quad (\text{A.149})$$

$$Z_{ml} \equiv \frac{1}{(m-l)!} \sqrt{\frac{m!}{l!}} |z|^{m-l} e^{-\frac{1}{4}|z|^2} \quad (\text{A.150})$$

と置くと、式 (10.141) は

$${}_a \langle m | e^{\Xi_{\theta}} e^{-\Xi_{\theta'}} | m' \rangle_a = i^{m+m'} e^{i\bar{\theta}(m-m')} e^r \sum_{l=0}^{\min(m,m')} (-1)^l Z_{ml} Z_{m'l} \quad (\text{A.151})$$

と書ける． Z_{ml} は

$$\begin{aligned} Z_{ml} &= \frac{\sqrt{m} P_{m-l}}{(m-l)!} |z|^{m-l} \left(e^{-\frac{|z|^2}{4(m-l)}} \right)^{m-l} \\ &= \prod_{k=0}^{m-l-1} \left[\frac{\sqrt{m-k}}{m-l-k} |z| e^{-\frac{|z|^2}{4(m-l)}} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.152})$$

という形に変形することで double 型のオーバーフローを防ぎながら計算することができる．

A.3 真空期待値のグラフにおける異常

相対位相 $\theta - \theta'$ と真空期待値 $|\theta \langle \Psi | \Psi \rangle_{\theta'}|^2$ の計算をする際には $\delta\mu$ が収束する程度に m_{\max} を大きくしなければならぬが， m_{\max} がある程度大きくなると $\theta - \theta'$ が大きい範囲でグラフに図 10.5 のような異常が見られる．この結果は $|\theta \langle \Psi | \Psi \rangle_{\theta'}|^2 \leq \|\Psi_{\theta}\|^2 \|\Psi_{\theta'}\|^2 = 1$ を破っているのが明らかに正しくない結果である．

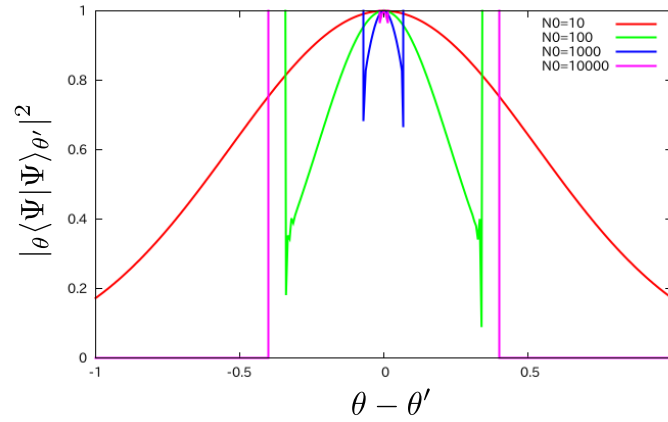


図 10.5: 相対位相と真空の直交性 ($m = 300$)

この異常の原因のひとつは Z_{ml} である．double 型のオーバーフローを避けるように計算をしたものの， $m = 200$ において 10^{40} 程度のオーダーを持つ．本来であればこの項の影響は他のパラメータとの積で打ち消されるべきだが，数値計算上の桁落ち等の問題でうまく打ち消し合っていないことが問題であると思われる．この問題を回避するために 5.2 節では $\delta\mu$ の決定以外では $m_{\max} = 30$ で計算するという手段を採用した． m_{\max} を小さくすることにより Z_{ml} の増加が抑制されている．

では今回の異常は本当に数値計算上の桁落ちによる問題なのだろうか．これを調べるために，式 (A.152) による $Z_{ml}Z_{m'l'}$ を double 型 (64bit) のまま計算したものと float 型 (32bit) にキャストしたものを比較する．異常が起きている部分のグラフを図 10.6 に示す．グラフから float 型の方が double 型よりも 10^{10} 以上も大きな値を持っていることがわかり，これは float 型にキャストしてから和を取ることにによる誤差の蓄積が原因だと考えられる．つまり，有効数字が誤差に影響を与えているということであり，今回の異常は数値計算上の問題と捉えても良さそうである．

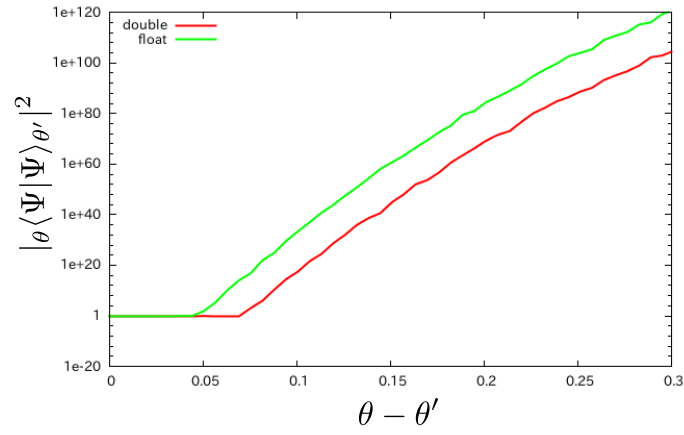


図 10.6: double 型と float 型における真空期待値の比較 (片対数表示)

謝辞

本研究を進めるにあたり、熱心にご指導を頂いた山中由也教授に感謝致します．中村祐介氏・高橋淳一氏には日々の確な助言を頂き，本研究に対する幅広いサポートをして頂きました．川口拓磨氏にはゼミ等を通じて数々の実りある示唆を頂きました．また，同期・同室の小山輝君・北原康貴君とは多くの議論を交わすことが出来ました．この場をお借りして深くお礼を申し上げます．

参考文献

- [1] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, and E. A. Cornell, *Science* **269**, 198 (1995).
- [2] N. N. Bogoliubov, *J. Phys. (Moscow)* **11**, 23 (1947).
- [3] P. G. de Gennes, *Superconductivity of Metals and Alloys* (Benjamin, New York, 1966).
- [4] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, *Phys. Rev.* **122**, 345 (1961).
- [5] J. Goldstone, A. Salam, and S. Weinberg, *Phys. Rev.* **127**, 965 (1962).
- [6] M. Lewenstein and L. You, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 3489 (1996).
- [7] H. Matsumoto and S. Sakamoto, *Prog. Theor. Phys.* **107**, 679 (2002).
- [8] M. Mine, M. Okumura, and Y. Yamanaka, *J. Math. Phys.* **46**, 042307 (2005).
- [9] Y. Nakamura, J. Takahashi, and Y. Yamanaka, *Phys. Rev. A* **89**, 013613 (2014).
- [10] M. R. Andrews, C. G. Townsend, H. J. Miesner, D. S. Durfee, D. M. Kurn, W. Ketterle, *Science* **275**, 589 (1997).
- [11] P. A. M. Dirac, *Proc. R. Soc. London, Ser. A* **109**, 642 (1925).
- [12] 猪木慶治, 川合光, 「基礎量子力学」, (講談社サイエンティフィク, 2007), pp. 170-175.

第11章 研究：3次元一様有限温度系のゼロモード

2015年度夏の学校. 有限温度ゼロモード系における自己無撞着計算がメイン. 有限温度系で重要な計算や考え方が頻出.

また, 夏の学校時点では凝縮粒子数の定義にゼロモード演算子の期待値を加えていなかったため, Depletion は相互作用定数 g が小さいところで持ち上がる結果を得た. 凝縮粒子数の定義を変えたところ, Depletion は相互作用定数 g に対してロバストになった. こっちのほうの方が自然だろうというのが今のところの結論.

11.1 問題設定

粒子間の相互作用を考慮に入れてゼロモード演算子の期待値を計算をする. この効果のことを量子補正と呼ぶ. 相互作用がある場合はゼロ温度でも全ての粒子が凝縮するわけではないことから, 今回は主に凝縮粒子数と非凝縮粒子数の割合 (depletion) が相互作用によってどのように変わるか, またゼロモードの寄与がある場合とない場合で結果がどのように変わるかを見る.

まずは, 量子補正を考慮した方程式の定式化から入る.

11.1.1 冷却原子気体のハミルトニアン

冷却原子気体のハミルトニアンは以下のように与えられる.

$$H_H = \int d\mathbf{x} \left[\psi_H^\dagger (h_0 - \mu) \psi_H + \frac{g}{2} \psi_H^\dagger \psi_H^\dagger \psi_H \psi_H \right] \quad (11.1)$$

添字の H は Heisenberg 描像であることを示している. μ は化学ポテンシャル, g は相互作用定数, h_0 は

$$h_0 = -\frac{\nabla^2}{2m} \quad (11.2)$$

であるような一様系を取り扱う. 場の演算子 ψ_H は同時刻交換関係

$$\left[\psi_H(\mathbf{x}, t), \psi_H^\dagger(\mathbf{x}', t) \right] = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (11.3)$$

$$\left[\psi_H(\mathbf{x}, t), \psi_H(\mathbf{x}', t) \right] = 0, \quad \left[\psi_H^\dagger(\mathbf{x}, t), \psi_H^\dagger(\mathbf{x}', t) \right] = 0 \quad (11.4)$$

を満たす. このとき, ψ_H は真空期待値を持つ:

$$\langle 0 | \psi_H(\mathbf{x}) | 0 \rangle = \xi(\mathbf{x}) \quad (11.5)$$

ξ は秩序変数と呼ばれ, $|\xi|^2$ は凝縮体の密度と解釈できる. 秩序変数は今回は時間に依存しないと仮定する. 場の演算子を以下のように分割する:

$$\psi_H = \xi + \varphi_H \quad (11.6)$$

ξ は凝縮体を記述する古典場, φ_H は非凝縮体を記述する場の演算子と解釈できる. これは同時刻交換関係

$$\left[\varphi_H(\mathbf{x}, t), \varphi_H^\dagger(\mathbf{x}', t) \right] = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (11.7)$$

を満たしている.

ハミルトニアンを φ_H の次数について整理すると

$$H_{H,1} = \int d\mathbf{x} \left[\varphi_H^\dagger (h_0 - \mu + g|\xi|^2) \xi + \varphi_H (h_0 - \mu + g|\xi|^2) \xi^* \right] \quad (11.8)$$

$$H_{H,2} = \int d\mathbf{x} \left[\varphi_H^\dagger \mathcal{L} \varphi_H + \frac{1}{2} \varphi_H \mathcal{M}^* \varphi_H + \frac{1}{2} \varphi_H^\dagger \mathcal{M} \varphi_H^\dagger \right] \quad (11.9)$$

$$H_{H,3} = g \int d\mathbf{x} \left[\xi^* \varphi_H^\dagger \varphi_H \varphi_H + \xi \varphi_H^\dagger \varphi_H^\dagger \varphi_H \right] \quad (11.10)$$

$$H_{H,4} = \frac{g}{2} \int d\mathbf{x} \varphi_H^\dagger \varphi_H^\dagger \varphi_H \varphi_H \quad (11.11)$$

であり

$$\mathcal{L} = h_0 - \mu + 2g|\xi|^2, \quad \mathcal{M} = g\xi^2 \quad (11.12)$$

である。

11.1.2 相互作用描像

系が十分低温であり相互作用 g が小さいとする。この場合 $H_{H,3}, H_{H,4}$ の効果は小さいとして、非摂動ハミルトニアンを $H_{H,u} = H_{H,1} + H_{H,2}$ のように選び、Heisenberg 描像から相互作用描像に移行する。まず

$$i \frac{d}{dt} U(t, t_0) = U(t, t_0) H_{H,p}, \quad U(t_0, t_0) = 1, \quad H_{H,p} = H_H - H_{H,u} \quad (11.13)$$

を満たすようなユニタリー演算子 $U(t, t_0)$ を考え、Heisenberg 描像の任意の演算子 $A_H(t)$ を用いて相互作用描像の演算子を

$$A(t) = U(t, t_0) A_H(t) U^{-1}(t, t_0) \quad (11.14)$$

と定義する。 t_0 は Heisenberg 描像と相互作用描像が一致する時間である。Heisenberg 方程式は

$$i \frac{d}{dt} A(t) = [A(t), H_u(t)] \quad (11.15)$$

である。ここで $A = H_u$ と代入すると時間に依存しないことがわかるので、 $H_u = H_{H,u}$ である。

$U(t, t_0)$ の時間発展は $H_{H,p} = H_{H,3} + H_{H,4}$ に依存し、かつその効果が小さいことから場の演算子の摂動ゼロ次は

$$\langle 0 | \varphi_H(x) | 0 \rangle = \langle 0 | U^{-1}(t, t_0) \varphi(x) U(t, t_0) | 0 \rangle \simeq \langle 0 | \varphi(x) | 0 \rangle \quad (11.16)$$

となっている。また相互作用描像の Heisenberg 方程式より

$$i \frac{\partial}{\partial t} \varphi(x) = [\varphi(x), H_u] \quad (11.17)$$

であることがわかる。これ以降 $x = (x, t)$ とする。つまり、場の分割条件を

$$\langle 0 | \varphi_H(x) | 0 \rangle \simeq \langle 0 | \varphi(x) | 0 \rangle = 0 \quad (11.18)$$

とした場合、この性質が保存するためには式 (11.17) より

$$\langle 0 | [\varphi(x), H_u] | 0 \rangle = 0 \quad (11.19)$$

が必要となる。ここから定常 Gross-Pitaevskii 方程式 (GP 方程式)

$$[h_0 - \mu + g|\xi|^2] \xi = 0 \quad (11.20)$$

が導かれる。

11.1.3 量子補正

量子補正を取り入れる場合は場の分割条件を $\langle 0 | [\varphi, H_u] | 0 \rangle = 0$ ではなく

$$\langle 0 | [\varphi, H] | 0 \rangle = 0 \quad (11.21)$$

とする. これはもともとの場の分割条件 $\langle 0 | \varphi_H | 0 \rangle = 0$ の摂動 1 次までを取り入れたことになっている¹. これを具体的に計算する:

$$\begin{aligned} \langle 0 | [\varphi, H_1] | 0 \rangle &= \langle 0 | \int d\mathbf{x} [\varphi, \{\varphi^\dagger \mathcal{L} \xi + \varphi \mathcal{L} \xi^*\}] | 0 \rangle \\ &= (h_0 - \mu + g|\xi|^2) \xi \end{aligned} \quad (11.22)$$

$$\begin{aligned} \langle 0 | [\varphi, H_2] | 0 \rangle &= \langle 0 | \int d\mathbf{x} \left[\varphi, \left\{ \varphi^\dagger \mathcal{L} \varphi + \frac{1}{2} \varphi \mathcal{M}^* \varphi + \frac{1}{2} \varphi^\dagger \mathcal{M} \varphi^\dagger \right\} \right] | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | \mathcal{L} \varphi + \mathcal{M} \varphi^\dagger | 0 \rangle = 0 \end{aligned} \quad (11.23)$$

$$\begin{aligned} \langle 0 | [\varphi, H_3] | 0 \rangle &= \langle 0 | g \int d\mathbf{x} [\varphi, \{\xi^* \varphi^\dagger \varphi \varphi + \xi \varphi^\dagger \varphi^\dagger \varphi\}] | 0 \rangle \\ &= g \langle 0 | \varphi \varphi | 0 \rangle \xi^* + 2g \langle 0 | \varphi^\dagger \varphi | 0 \rangle \xi \end{aligned} \quad (11.24)$$

$$\begin{aligned} \langle 0 | [\varphi, H_4] | 0 \rangle &= \langle 0 | \frac{g}{2} \int d\mathbf{x} [\varphi, \varphi^\dagger \varphi^\dagger \varphi \varphi] | 0 \rangle \\ &= g \langle 0 | \varphi^\dagger \varphi \varphi | 0 \rangle \end{aligned} \quad (11.25)$$

ここで φ の 3 次の期待値の寄与は小さいものとする, 式 (11.21) より

$$[h_0 - \mu + g|\xi|^2 + 2g \langle 0 | \varphi^\dagger \varphi | 0 \rangle] \xi + g \langle 0 | \varphi \varphi | 0 \rangle \xi^* = 0 \quad (11.26)$$

これが量子補正を考慮した GP 方程式である. ここでゼロモード部と励起部に分けて記述すると

$$\begin{aligned} \langle 0 | \varphi^\dagger \varphi | 0 \rangle &= {}_{\text{ex}} \langle 0 | \varphi_{\text{ex}}^\dagger \varphi_{\text{ex}} | 0 \rangle_{\text{ex}} + |\xi|^2 \langle \Psi | Q^2 | \Psi \rangle + |\eta|^2 \langle \Psi | P^2 | \Psi \rangle \\ &\quad - \text{Re} \xi^* \eta - \text{Im} \xi^* \eta (QP + PQ) \end{aligned} \quad (11.27)$$

$$\begin{aligned} \langle 0 | \varphi \varphi | 0 \rangle &= {}_{\text{ex}} \langle 0 | \varphi_{\text{ex}} \varphi_{\text{ex}} | 0 \rangle_{\text{ex}} - \xi^2 \langle \Psi | Q^2 | \Psi \rangle + \eta^2 \langle \Psi | P^2 | \Psi \rangle \\ &\quad - i \xi \eta \langle \Psi | QP + PQ | \Psi \rangle \end{aligned} \quad (11.28)$$

となる. ここで $\varphi = -iQ\xi + P\eta + \varphi_{\text{ex}}$ とし, かつ $|0\rangle = |0\rangle_{\text{ex}} \otimes |\Psi\rangle$ としている. Q, P は正準交換関係 $[Q, P] = i$ を満たすゼロモード演算子, 非摂動ハミルトニアン H_u の励起部 H_u^{ex} , ゼロモード部 H_u^{QP} の固有状態をそれぞれ $|0\rangle_{\text{ex}}, |\Psi\rangle$ である.

GP 方程式が補正を受けたので, Bogoliubov-de Gennes 方程式 (BdG 方程式) にも補正を加える. 具体的には

$$\mathcal{L} = h_0 - \mu + 2g(|\xi|^2 + \langle 0 | \varphi^\dagger \varphi | 0 \rangle) \quad (11.29)$$

$$\mathcal{M} = g(\xi^2 - \langle 0 | \varphi \varphi | 0 \rangle) \quad (11.30)$$

となっていれば $\mathbf{y}_0 = \begin{pmatrix} \xi & -\xi^* \end{pmatrix}$ がゼロモードであることを守れる. ここで非摂動ハミルトニアンを

$$H_u = H_1 + H_2 + [H_3 + H_4]_{QP} - \delta\mu P - \delta\nu Q + \delta H \quad (11.31)$$

と取り, カウンター項 δH を

$$\delta H = g \int d\mathbf{x} \left[2\varphi^\dagger \varphi \langle 0 | \varphi^\dagger \varphi | 0 \rangle - \frac{1}{2} \varphi \varphi \langle 0 | \varphi^\dagger \varphi^\dagger | 0 \rangle - \frac{1}{2} \varphi^\dagger \varphi^\dagger \langle 0 | \varphi \varphi | 0 \rangle \right] \quad (11.32)$$

と選ぶことで, H_u^{QP} は量子補正を考慮しない場合と同じ形を取ることができる. 式 (12.53)(11.30) より共役モード方程式 $\begin{pmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{M} \\ -\mathcal{M} & -\mathcal{L} \end{pmatrix} \mathbf{y}_{-1} = I \mathbf{y}_0$ は

$$[h_0 - \mu + 2g(|\xi|^2 + \langle 0 | \varphi^\dagger \varphi | 0 \rangle)] \eta + g(\xi^2 - \langle 0 | \varphi \varphi | 0 \rangle) \eta^* = I \xi \quad (11.33)$$

となる. 以上の定式化を用いて各物理量の計算を行っていく.

¹ 実は正確な表現ではない.

11.2 自己無撞着ループ

前節で導いた関係式に現れる物理量は自己無撞着に決定されるが、その関係式同士のつながりは複雑である。以下では 3 次元一様有限温度系に現れる自己無撞着ループについてまとめる。2 章のはなしを有限温度に拡張するために期待値のとり方を変えていることに注意。

0. 初期設定

$V_t = \langle \varphi^\dagger \varphi \rangle = 0, V_a = \langle \varphi \varphi \rangle = 0$ からスタート

↓

1. GP 方程式

GP 方程式より ξ, μ を求める

↓

2. 共役モード方程式

共役モード方程式より η, I を求める

↓

3. BdG 方程式

BdG 方程式 (Bogoliubov 変換) より u_l, v_l を求める

↓

4. ゼロモード方程式

ゼロモード方程式より固有関数 $\langle q | \Psi \rangle$ を求め、 $\langle P \rangle$ を求める

⇕

$\langle P \rangle = 0$ となるように自己無撞着に $\delta\mu$ を決定

↓

5. ゼロモード演算子

$\langle Q^2 \rangle, \langle P^2 \rangle$ を求める

↓

6. 熱平均・異常平均

V_t, V_a を求める。

↓

ループ/終了条件

「1. GP 方程式」に戻って計算を繰り返す。 V_t, V_a の値が変化しなくなったら終了。

11.2.1 GP 方程式

入力: V_t, V_a

ξ, η は実数とする．量子補正を含む GP 方程式は

$$[-\mu + g\xi^2 + g(2V_t + V_a)]\xi = 0 \quad (11.34)$$

である．今回は一様系を扱うため微分項 h_0 がなくなり，簡単な代数方程式になる．これを μ について解く：

$$\mu = g(\xi^2 + 2V_t + V_a) \quad (11.35)$$

ここで粒子数 N が保存するためには

$$\begin{aligned} N &= \int d\mathbf{x} \langle \psi^\dagger \psi \rangle \\ &= \int d\mathbf{x} \langle (\xi + \varphi^\dagger)(\xi + \varphi) \rangle \\ &= V(\xi^2 + V_t) \end{aligned} \quad (11.36)$$

を満たさなければならない．ここでは分割条件から $\langle \varphi \rangle, \langle \varphi^\dagger \rangle$ はゼロになっている．したがって，

GP 方程式

$$\xi = \sqrt{\frac{N}{V} - V_t} \quad (11.37)$$

$$\mu = g\left(\frac{N}{V} + V_t + V_a\right) \quad (11.38)$$

となることがわかる．

11.2.2 共役モード方程式

入力: V_a, V_t, ξ, μ

量子補正を含む共役モード方程式は

$$[-\mu + g(3\xi^2 + 2V_t - V_a)]\eta = I\xi \quad (11.39)$$

である．GP 方程式と同様の理由で代数方程式となっている．これを I について解く：

$$I = \frac{\eta}{\xi} [-\mu + g(3\xi^2 + 2V_t - V_a)] \quad (11.40)$$

ここでゼロモードと共役モードの規格化条件から

$$\begin{aligned} (y_0, y_{-1}) &= \int d\mathbf{x} \begin{pmatrix} \xi & -\xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta \\ \eta \end{pmatrix} \\ &= 2V\xi\eta = 1 \end{aligned} \quad (11.41)$$

を満たさなければならない．したがって

共役モード方程式

$$\eta = \frac{1}{2V\xi} \quad (11.42)$$

$$I = \frac{-\mu + g(3\xi + 2V_t - V_a)}{2V\xi^2} \quad (11.43)$$

となることがわかる．

11.2.3 BdG 方程式

入力: V_a, V_t, ξ, μ

一様系では Bogoliubov 変換から u_l, v_l を求めることができる.

$$\varphi = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mathbf{k} b_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}x} \quad (11.44)$$

と展開すると, ハミルトニアン の 2 次 H_2 は

$$H_2 = \frac{1}{2} \int d\mathbf{k} [2\mathcal{L}_k b_{\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{k}} + \mathcal{M}(b_{\mathbf{k}}^\dagger b_{-\mathbf{k}}^\dagger + b_{\mathbf{k}} b_{-\mathbf{k}})] \quad (11.45)$$

とかける. ただし

$$\mathcal{M} = g(\xi^2 - V_a) \quad (11.46)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_k &= \frac{\hbar^2}{2m} k^2 - \mu + 2g(\xi^2 + V_t) \\ &= \frac{\hbar^2}{2m} k^2 + \mathcal{M} \end{aligned} \quad (11.47)$$

である. ここで

$$H_2 = \int d\mathbf{k} \omega_k a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} \quad (11.48)$$

となるような

$$a_{\mathbf{k}} = u_k b_{\mathbf{k}} - v_k b_{-\mathbf{k}} \quad (11.49)$$

を満たす u_k, v_k を探す. a_k は生成消滅演算子の代数を満たさなければならないので

$$|u_k|^2 - |v_k|^2 = 1 \quad (11.50)$$

が必要であり, 式 (11.49) を b について解いて H_2 に代入することにより, 対角化の条件は

$$2\mathcal{L}_k u_k v_k - \mathcal{M}(u_k^2 + v_k^2) = 0 \quad (11.51)$$

であることがわかる. これらを連立させることにより

Bogoliubov 変換

$$\begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \begin{pmatrix} \sqrt{\mathcal{L}_k + \omega_k} \\ -\sqrt{\mathcal{L}_k - \omega_k} \end{pmatrix} \quad (11.52)$$

$$\omega_k = \sqrt{\mathcal{L}_k^2 - \mathcal{M}^2} \quad (11.53)$$

を得る.

11.2.4 ゼロモード方程式

入力: ξ, η, I

今回考えるゼロモード方程式は以下:

$$H_u^{QP} |\Psi_m\rangle = E_m |\Psi_m\rangle \quad (11.54)$$

ただし

$$H_u^{QP} = -(\delta\mu + 4C)P + \frac{I - 4D}{2}P^2 + 2BQPQ + 2DP^3 + \frac{1}{2}AQ^4 - 2BQ^2 + CQP^2Q + \frac{1}{2}EP^4 \quad (11.55)$$

である. これを q 空間で差分化して数值的に解く. q 空間での波束の幅はおよそ $N_0^{-1/3}$ のオーダーであることを基に系のサイズを決める.

$$\Psi_q = \sqrt{\Delta q} \langle q | \Psi \rangle \quad (11.56)$$

として差分化すると, ハミルトニアン H_u^{QP} は以下のようになる

$$H_u^{QP} = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \beta_0 & \gamma_0 & & & \\ \beta_0^* & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & & \\ \gamma_0^* & \beta_1^* & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \\ & \gamma_1^* & \beta_2^* & \alpha_3 & \ddots & \ddots \\ & & \gamma_2^* & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \quad (11.57)$$

$$\alpha_q = \frac{3E}{\Delta q^4} + \frac{I - 4D}{\Delta q^2} + (2C - 2\Delta q^2 B)(q - \frac{N_q}{2})^2 + \frac{\Delta q^4}{2} Aq^4 \quad (11.58)$$

$$\beta_q = -\frac{2E}{\Delta q^4} - \frac{2iD}{\Delta q^3} - \frac{I - 4D}{2\Delta q^2} + \frac{i(\delta\mu + 4C)}{2\Delta q} - (C + i\Delta q B)(q - \frac{N_q}{2})(q - \frac{N_q}{2} + 1) \quad (11.59)$$

$$\gamma_q = \frac{E}{2\Delta q^4} + \frac{iD}{\Delta q^3} \quad (11.60)$$

有限温度系での期待値の取り方に注意すると

$$\begin{aligned} \langle P \rangle &= \frac{\text{Tr} \rho P}{\text{Tr} \rho} \\ &= \frac{\sum_m \langle \Psi_m | P | \Psi_m \rangle e^{-\beta E_m}}{\sum_m e^{-\beta E_m}} \\ &= \frac{\sum_m \sum_q \text{Im} \Psi_q^{*,m} \Psi_{q+1}^m e^{-\beta E_m}}{\Delta q \sum_m e^{-\beta E_m}} \end{aligned} \quad (11.61)$$

ただし密度演算子 ρ は

$$\rho = e^{-\beta H_u^{QP}} \quad (11.62)$$

である. 場の分割条件から $\langle P \rangle = 0$ を満たさなければならないので, それに合わせて自己無撞着的に $\delta\mu$ を決定することになる. 数値計算上では二分法を用いる.

11.2.5 $\langle Q^2 \rangle, \langle P^2 \rangle$ の計算

前節で決定された $\delta\mu$ を基に求めたゼロモード固有関数 Ψ_q^m を用いて $\langle P \rangle$ と同様の計算で $\langle Q^2 \rangle, \langle P^2 \rangle$ を求める.

——— ゼロモード演算子の有限温度期待値 ———

$$\langle Q^2 \rangle = \frac{\Delta q^2 \sum_m \sum_q (q - \frac{N_q}{2}) |\Psi_q^m|^2 e^{-\beta E_m}}{\sum_m e^{-\beta E_m}} \quad (11.63)$$

$$\langle P^2 \rangle = \frac{2 \sum_m \sum_q (|\Psi_q^m|^2 - \text{Re} \Psi_q^{*,m} \Psi_{q+1}^m) e^{-\beta E_m}}{\Delta q^2 \sum_m e^{-\beta E_m}} \quad (11.64)$$

11.2.6 熱平均 V_t ・ 異常平均 V_a

入力: $\xi, \eta, u_l, v_l, \langle Q^2 \rangle, \langle P^2 \rangle$

熱平均 ・ 異常平均は以下の通り:

$$V_t = \langle \varphi^\dagger \varphi \rangle = {}_{\text{ex}} \langle \varphi_{\text{ex}}^\dagger \varphi_{\text{ex}} \rangle_{\text{ex}} + \xi^2 \langle Q^2 \rangle + \eta^2 \langle P^2 \rangle - \xi \eta \quad (11.65)$$

$$V_a = \langle \varphi \varphi \rangle = {}_{\text{ex}} \langle \varphi_{\text{ex}} \varphi_{\text{ex}} \rangle_{\text{ex}} - \xi^2 \langle Q^2 \rangle + \eta^2 \langle P^2 \rangle + i \xi \eta \langle QP + PQ \rangle \quad (11.66)$$

φ_{ex} を以下のように展開する:

$$\varphi_{\text{ex}} = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{k} [a_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}} + a_{-\mathbf{k}}^\dagger v_{\mathbf{k}}^*] e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \quad (11.67)$$

ここで $a_{\mathbf{k}}$ が消去する真空を $|0\rangle_k$, 粒子数状態を

$$|n\rangle = |n_1\rangle_1 \otimes |n_2\rangle_2 \otimes |n_3\rangle_3 \otimes \dots = \bigotimes_k |n_k\rangle_k \quad (11.68)$$

とする.

以上から ${}_{\text{ex}} \langle \varphi_{\text{ex}}^\dagger \varphi_{\text{ex}} \rangle_{\text{ex}}$, ${}_{\text{ex}} \langle \varphi_{\text{ex}} \varphi_{\text{ex}} \rangle_{\text{ex}}$ の計算をしていくために励起モードの期待値計算についてまとめる.

$${}_{\text{ex}} \langle A \rangle_{\text{ex}} = \frac{\text{Tr} \rho A}{\text{Tr} \rho}, \quad \rho = e^{-\beta H_u^{\text{ex}}} \quad (11.69)$$

であり

$$\begin{aligned} \text{Tr} \rho &= \sum_{n_1} \sum_{n_2} \dots \langle n | e^{-\beta \sum_k \omega_k a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}}} | n \rangle = \sum_{n_1} \sum_{n_2} \dots \langle n | e^{-\beta \sum_k \omega_k n_k} | n \rangle = \sum_{n_1} \sum_{n_2} \dots \prod_k e^{-\beta \omega_k n_k} \\ &= \prod_k \sum_{n_1} \sum_{n_2} \dots e^{-\beta \omega_k n_k} = \prod_k \sum_{n_k} e^{-\beta \omega_k n_k} = \prod_k \frac{1}{1 - e^{-\beta \omega_k}} \end{aligned} \quad (11.70)$$

$$\begin{aligned} \text{Tr} \rho a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} &= \sum_{n_1} \sum_{n_2} \dots \langle n | e^{-\beta \sum_k \omega_k a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}}} a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} | n \rangle = \sum_{n_1} \sum_{n_2} \dots \left(\prod_{l \neq k} e^{-\beta \omega_l n_l} \right) n_k e^{-\beta \omega_k n_k} \\ &= \prod_{l \neq k} \left(\sum_{n_1} \sum_{n_2} \dots \sum_{n_{l-1}} \sum_{n_{l+1}} \dots e^{-\beta \omega_l n_l} \right) \sum_k n_k e^{-\beta \omega_k n_k} = \left(\prod_{k \neq l} \sum_{n_k} e^{-\beta \omega_l n_l} \right) \sum_k n_k e^{-\beta \omega_k n_k} \\ &= \left(\prod_{l \neq k} \frac{1}{1 - e^{-\beta \omega_l}} \right) \frac{e^{-\beta \omega_k}}{(1 - e^{-\beta \omega_k})^2} \end{aligned} \quad (11.71)$$

から,

$$\begin{aligned} {}_{\text{ex}} \langle a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} \rangle_{\text{ex}} &= \frac{\text{Tr} \rho a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}}}{\text{Tr} \rho} \\ &= \frac{\left(\prod_{l \neq k} \frac{1}{1 - e^{-\beta \omega_l}} \right) \frac{e^{-\beta \omega_k}}{(1 - e^{-\beta \omega_k})^2}}{\prod_k \frac{1}{1 - e^{-\beta \omega_k}}} \\ &= \frac{1}{e^{\beta \omega_k} - 1} \end{aligned} \quad (11.72)$$

$${}_{\text{ex}} \langle a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{-\mathbf{k}}^\dagger \rangle_{\text{ex}} = {}_{\text{ex}} \langle a_{\mathbf{k}} a_{-\mathbf{k}} \rangle_{\text{ex}} = 0 \quad (11.73)$$

となる. これは Bose-Einstein 分布関数である. ただし, これは k が離散の場合である. k が連続の場合は以下のように拡張する²:

$${}_{\text{ex}} \langle a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}'} \rangle_{\text{ex}} = \frac{1}{e^{\beta \omega_k} - 1} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad (11.74)$$

²付録参照

これより

$$\begin{aligned}
{}_{\text{ex}} \langle \varphi_{\text{ex}}^\dagger \varphi_{\text{ex}} \rangle_{\text{ex}} &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} dk' dk \, {}_{\text{ex}} \langle (a_{\mathbf{k}'} u_{\mathbf{k}'} + a_{-\mathbf{k}'}^\dagger v_{\mathbf{k}'}^*)^\dagger (a_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}} + a_{-\mathbf{k}}^\dagger v_{\mathbf{k}}^*) \rangle_{\text{ex}} e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')x} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} dk' dk \left[{}_{\text{ex}} \langle a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} \rangle_{\text{ex}} u_{\mathbf{k}}^* u_{\mathbf{k}} + {}_{\text{ex}} \langle a_{-\mathbf{k}} a_{-\mathbf{k}}^\dagger \rangle_{\text{ex}} v_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}}^* \right] \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')x} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} dk \left[\frac{1}{e^{\beta\omega_{\mathbf{k}}} - 1} (|u_{\mathbf{k}}|^2 + |v_{\mathbf{k}}|^2) + |v_{\mathbf{k}}|^2 \right]
\end{aligned} \tag{11.75}$$

となり, 同様の計算により

$${}_{\text{ex}} \langle \varphi_{\text{ex}} \varphi_{\text{ex}} \rangle_{\text{ex}} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} dk \left[\left(\frac{2}{e^{\beta\omega_{\mathbf{k}}} - 1} + 1 \right) \text{Re} u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}}^* \right] \tag{11.76}$$

であることもわかる. ここに $u_{\mathbf{k}}, v_{\mathbf{k}}$ の値を代入して (k_x, k_y, k_z) から (k, θ, ϕ) の変数変換を施すと

熱平均・異常平均

$${}_{\text{ex}} \langle \varphi_{\text{ex}}^\dagger \varphi_{\text{ex}} \rangle_{\text{ex}} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk \frac{k^2}{\omega_{\mathbf{k}}} \left[\frac{2\mathcal{L}_{\mathbf{k}}}{e^{\beta\omega_{\mathbf{k}}} - 1} + \mathcal{L}_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}} \right] \tag{11.77}$$

$${}_{\text{ex}} \langle \varphi_{\text{ex}} \varphi_{\text{ex}} \rangle_{\text{ex}} = -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk \frac{k^2 \mathcal{M}}{\omega_{\mathbf{k}}} \left[\frac{2}{e^{\beta\omega_{\mathbf{k}}} - 1} + 1 \right] \tag{11.78}$$

であることがわかる. これらを Simpson 積分することで V_t, V_a を計算する.

積分範囲の設定

数値計算上では無限大の積分は不可能なので, 適当な値で積分を打ち切る必要がある. ${}_{\text{ex}} \langle \varphi_{\text{ex}}^\dagger \varphi_{\text{ex}} \rangle_{\text{ex}}$ の被積分関数は遠方で収束するので問題ない一方, ${}_{\text{ex}} \langle \varphi_{\text{ex}} \varphi_{\text{ex}} \rangle_{\text{ex}}$ では被積分関数第2項の影響より紫外発散が生じる. これを除去するために Bose-Einstein 分布が収束する領域では粒子密度が希薄であることを考慮して第一項が収束する程度までを積分範囲とする.

なお, 量子補正を考慮したゼロ温度系の計算をする場合は励起モードが存在しないため, どのような正当性をもって積分範囲を限定するかが自明ではない. 現状では逆温度 β が 10^6 程度の極低温の場合の計算とフィットするように積分範囲を決めている.

11.2.7 比熱・圧力

ゼロモードを含めた全エネルギーを E とすると, 比熱 C_V , 圧力 P はそれぞれ以下の通り:

$$\begin{aligned}
C_V = \frac{\partial \mathcal{E}_{\text{total}}}{\partial T} &= \frac{\partial}{\partial T} \left[\int d\mathbf{k} {}_{\text{ex}} \langle a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} \rangle_{\text{ex}} + \langle H_u^{QP} \rangle \right] \\
&= \frac{\partial}{\partial T} \left[4\pi \int dk \frac{k^2 \omega_{\mathbf{k}}}{e^{\beta\omega_{\mathbf{k}}} - 1} + \frac{\sum_m E_m e^{-\beta E_m}}{\sum_m e^{-\beta E_m}} \right]
\end{aligned} \tag{11.79}$$

$$P = -\frac{\partial \mathcal{E}_{\text{total}}}{\partial V} = -\frac{\partial}{\partial V} \left[4\pi \int dk \frac{k^2 \omega_{\mathbf{k}}}{e^{\beta\omega_{\mathbf{k}}} - 1} + \frac{\sum_m E_m e^{-\beta E_m}}{\sum_m e^{-\beta E_m}} \right] \tag{11.80}$$

11.3 変分法による見積もり

ゼロモード演算子の期待値 $\langle Q^4 \rangle, \langle Q^2 \rangle, \langle P^2 \rangle$ の値を変分計算で見積もる.

11.3.1 ゼロモードハミルトニアン

非摂動ハミルトニアンのゼロモード部は実効的な項のみを残すことにする:

$$H_u^{QP} = \frac{IP^2}{2} + \frac{1}{2}AQ^4 \quad (11.81)$$

11.3.2 変分関数

有限温度系では基底状態だけではなく励起状態も必要なので, 変分関数を

$$\langle q | \psi_n \rangle = \sqrt{\frac{2^n n!}{\sqrt{2\pi}(2n)! \gamma^{2n+1}}} q^n e^{-q^2/4\gamma^2} \quad (11.82)$$

とする.

11.3.3 ゼロ温度期待値・エネルギー固有値の計算

上の変分関数を用いて各ゼロモード演算子のゼロ温度期待値を計算する:

$$\begin{aligned} \langle \psi_n | Q^4 | \psi_n \rangle &= \frac{2^n n!}{\sqrt{2\pi}(2n)! \gamma^{2n+1}} \int_{-\infty}^{\infty} dq q^4 q^{2n} e^{-q^2/2\gamma^2} \\ &= (2n+1)(2n+3)\gamma^4 \end{aligned} \quad (11.83)$$

$$\begin{aligned} \langle \psi_n | Q^2 | \psi_n \rangle &= \frac{2^n n!}{\sqrt{2\pi}(2n)! \gamma^{2n+1}} \int_{-\infty}^{\infty} dq q^2 q^{2n} e^{-q^2/2\gamma^2} \\ &= (2n+1)\gamma^2 \end{aligned} \quad (11.84)$$

$$\begin{aligned} \langle \psi_n | P^2 | \psi_n \rangle &= \frac{2^n n!}{\sqrt{2\pi}(2n)! \gamma^{2n+1}} \int_{-\infty}^{\infty} dq q^n e^{-q^2/4\gamma^2} \left(-\frac{d^2}{dq^2} \right) q^n e^{-q^2/4\gamma^2} \\ &= \frac{4n-1}{4(2n-1)} \frac{1}{\gamma^2} \end{aligned} \quad (11.85)$$

以上からハミルトニアンの期待値は

$$\begin{aligned} \langle H_u^{QP} \rangle &= f_n(\gamma) = \frac{I \langle P^2 \rangle}{2} + \frac{1}{2} A \langle Q^4 \rangle \\ &= I \frac{4n-1}{8(2n-1)} \frac{1}{\gamma^2} + \frac{A}{2} (2n+1)(2n+3)\gamma^4 \end{aligned} \quad (11.86)$$

である. この $f_n(\gamma)$ が停留する γ を求める:

$$f'_n(\gamma_0) = -I \frac{4n-1}{4(2n-1)} \frac{1}{\gamma_0^3} + 2A(2n+1)(2n+3)\gamma_0^3 = 0 \quad (11.87)$$

$$\therefore \gamma_0 = \sqrt[6]{\frac{4n-1}{8(4n^2-1)(2n+3)} \frac{I}{A}} \quad (11.88)$$

よってエネルギー固有値 E_n は

$$f_n(\gamma_0) = E_n = \frac{3}{8} \left[\frac{(4n-1)^2(2n+1)(2n+3)}{(2n-1)^2} A I^2 \right]^{\frac{1}{3}} \quad (11.89)$$

となる.

11.3.4 各パラメータの計算

ξ, μ, η, I を凝縮粒子数 N_0 でパラメトライズする. 今回は N_0 が十分大きい場合を想定し, $V_t = V_a = 0$ とする.
 N_0 の定義より

$$N_0 = \int d\mathbf{x} \xi^2 \quad \therefore \xi = \sqrt{\frac{N_0}{V}} \quad (11.90)$$

GP 方程式より

$$[-\mu + g\xi^2]\xi = 0 \quad \therefore \mu = \frac{gN_0}{V} \quad (11.91)$$

η の定義より

$$\eta = \frac{\partial \xi}{\partial N_0} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{N_0 V}} \quad (11.92)$$

共役モード方程式より

$$\eta[-\mu + 3g\xi^2] = I\xi \quad \therefore I = \frac{g}{V} \quad (11.93)$$

A の定義より

$$A = \int d\mathbf{x} \xi^4 = \frac{gN_0}{V} \quad (11.94)$$

以上のパラメータを用いてゼロモード演算子のゼロ温度期待値・エネルギー固有値を N_0 のことばで書き換える:

$$\langle \psi_n | Q^2 | \psi_n \rangle = \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{(4n-1)(2n+1)^3}{(4n^2-1)(2n+3)}} N_0^{-\frac{2}{3}} \quad (11.95)$$

$$\langle \psi_n | P^2 | \psi_n \rangle = \frac{4n-1}{4(2n-1)} \sqrt[3]{\frac{8(4n^2-1)(2n+3)}{4n-1}} N_0^{\frac{2}{3}} \quad (11.96)$$

$$E_n = \frac{3g}{8V} \sqrt[3]{\frac{(4n-1)^2(2n+1)(2n+3)}{(2n-1)^2}} N_0^{\frac{2}{3}} \quad (11.97)$$

11.3.5 有限温度期待値

以上の結果を用いると, ゼロモード演算子の有限温度期待値は以下の通り:

変分法による近似計算

$$\begin{aligned} \langle Q^2 \rangle &= \frac{\sum_n \langle \psi_n | Q^2 | \psi_n \rangle e^{-\beta E_n}}{\sum_n e^{-\beta E_n}} \\ &= \frac{\sum_n \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{(4n-1)(2n+1)^3}{(4n^2-1)(2n+3)}} N_0^{-\frac{2}{3}} \exp\left\{\left(-\frac{3g\beta}{8V} \sqrt[3]{\frac{(4n-1)^2(2n+1)(2n+3)}{(2n-1)^2}} N_0^{\frac{2}{3}}\right)\right\}}{\sum_n \exp\left\{\left(-\frac{3g\beta}{8V} \sqrt[3]{\frac{(4n-1)^2(2n+1)(2n+3)}{(2n-1)^2}} N_0^{\frac{2}{3}}\right)\right\}} \end{aligned} \quad (11.98)$$

$$\begin{aligned} \langle P^2 \rangle &= \frac{\sum_n \frac{4n-1}{4(2n-1)} \sqrt[3]{\frac{8(4n^2-1)(2n+3)}{4n-1}} N_0^{\frac{2}{3}} \exp\left\{\left(-\frac{3g\beta}{8V} \sqrt[3]{\frac{(4n-1)^2(2n+1)(2n+3)}{(2n-1)^2}} N_0^{\frac{2}{3}}\right)\right\}}{\sum_n \exp\left\{\left(-\frac{3g\beta}{8V} \sqrt[3]{\frac{(4n-1)^2(2n+1)(2n+3)}{(2n-1)^2}} N_0^{\frac{2}{3}}\right)\right\}} \end{aligned} \quad (11.99)$$

値が変化しなくなるまで和を取るように数値計算をする.

11.4 数値計算結果

相互作用定数に対する $\langle Q^2 \rangle, \langle P^2 \rangle$ の数値計算結果を以下に示す

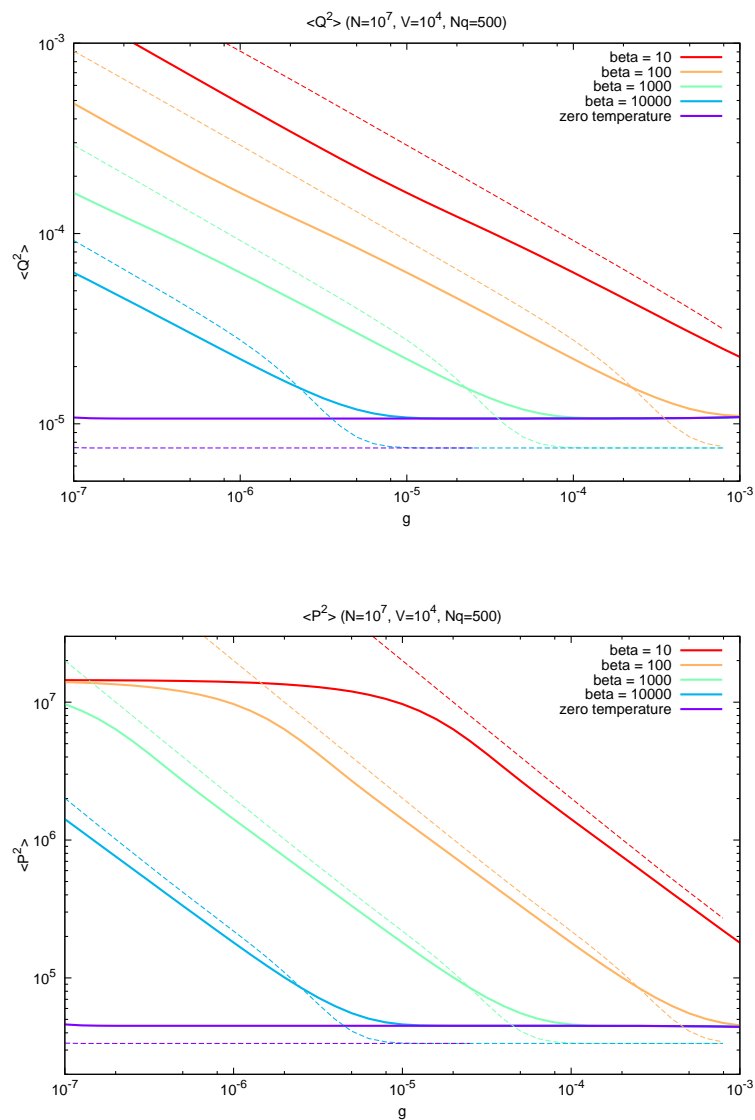


図 11.4, 11.4 : 破線は各温度に対する変分法による計算結果のプロット。 $\langle Q^2 \rangle, \langle P^2 \rangle$ 共に幂についてはよく一致している。

高温領域で位相ゆらぎ $\Delta Q = \sqrt{\langle Q^2 \rangle}$, 凝縮粒子数ゆらぎ $\Delta P = \sqrt{\langle P^2 \rangle}$ が増加する振る舞いは直感と一致している。

第12章 研究：ゼロモードの緩和

凝縮相と非凝縮相の couple を考え、非平衡的な取り扱いを実現したい。核生成のお話と関係がある。位相の緩和とか見れるんじゃないかと期待。

12.1 公式

QuantumMaster e.q.

$$i \frac{d}{dt} \rho_a^{nm}(t) = \sum_{n'm'} \left[\sum_{\mu\nu} (E_\mu - E_\nu) \Psi_n^{*\mu} \Psi_m^{*\nu} \Psi_{n'}^\mu \Psi_{m'}^\nu \rho_a^{n'm'}(t) + i \langle (nm | \hat{\mathcal{K}}(t) | n'm') \rangle \rho_a^{n'm'}(t) \right] \quad (12.1)$$

A をゼロモード演算子を含む項とする：

$$\langle (nm | A | n'm') \rangle = A^{nn'} \delta_{mm'} \quad (12.2)$$

$$\langle (nm | A^\dagger | n'm') \rangle = A^{*,n'n} \delta_{mm'} \quad (12.3)$$

$$\langle (nm | \tilde{A} | n'm') \rangle = A^{*,mm'} \delta_{nn'} \quad (12.4)$$

$$\langle (nm | \tilde{A}^\dagger | n'm') \rangle = A^{m'm} \delta_{nn'} \quad (12.5)$$

$$(12.6)$$

プライム (') がつく位置に注意。これより

$$\langle (nm | \hat{A} | n'm') \rangle = A^{nn'} \delta_{mm'} - A^{m'm} \delta_{nn'} \quad (12.7)$$

$$\langle (nm | \hat{A}^\dagger | n'm') \rangle = A^{*,n'n} \delta_{mm'} - A^{*,mm'} \delta_{nn'} \quad (12.8)$$

12.2 具体計算：time-convolutionless 型

もともと $\hat{\mathcal{K}}(t, s)$, $|\rho_a(t)\rangle$ は相互作用描像のもとで定義されていたのを Schrödinger 描像に移して計算。s の時間成分が exponential の形で残ることになる。

$$\begin{aligned} & \langle (nm | \hat{A}_i e^{-i\hat{H}_a(t-s)} \hat{A}_j^\dagger e^{i\hat{H}_a(t-s)} | n'm') \rangle \\ &= \sum_{\mu\nu} \sum_{\mu'\nu'} \langle (nm | \hat{A}_i | \mu\nu) \rangle e^{-i(E_\mu - E_\nu)(t-s)} \langle \langle \mu\nu | \hat{A}_j^\dagger | \mu'\nu' \rangle \rangle e^{i(E_{\mu'} - E_{\nu'})(t-s)} \langle \langle \mu'\nu' | | nm \rangle \rangle \end{aligned} \quad (12.9)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{n''m''} \sum_{\mu\nu} \sum_{\mu'\nu'} \left[A_i^{nn''} \delta_{mm''} - A_i^{m''m} \delta_{nn''} \right] A_j^{*,\mu'\mu} \delta_{\nu\nu'} \Psi_{n''}^\mu \Psi_{m''}^\nu \Psi_{n'}^{*,\mu'} \Psi_{m'}^{*,\nu'} e^{-i(E_\mu - E_\nu)(t-s)} e^{i(E_{\mu'} - E_{\nu'})(t-s)} \\ &= \sum_{n''m''} \sum_{\mu\nu} \sum_{\mu'\nu'} A_i^{nn''} \delta_{mm''} A_j^{*,\mu'\mu} \delta_{\nu\nu'} \Psi_{n''}^\mu \Psi_{m''}^\nu \Psi_{n'}^{*,\mu'} \Psi_{m'}^{*,\nu'} e^{-i(E_\mu - E_\nu)(t-s)} e^{i(E_{\mu'} - E_{\nu'})(t-s)} \\ &\quad - \sum_{n''m''} \sum_{\mu\nu} \sum_{\mu'\nu'} A_i^{m''m} \delta_{nn''} A_j^{*,\mu'\mu} \delta_{\nu\nu'} \Psi_{n''}^\mu \Psi_{m''}^\nu \Psi_{n'}^{*,\mu'} \Psi_{m'}^{*,\nu'} e^{-i(E_\mu - E_\nu)(t-s)} e^{i(E_{\mu'} - E_{\nu'})(t-s)} \end{aligned} \quad (12.10)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{n''} \sum_{\mu\nu} \sum_{\mu'} A_i^{nn''} A_j^{*,\mu'\mu} \Psi_{n''}^\mu \Psi_{m''}^\nu \Psi_{n'}^{*,\mu'} \Psi_{m'}^{*,\nu} e^{-i(E_\mu - E_{\mu'})(t-s)} \\ &\quad - \sum_{m''} \sum_{\mu\nu} \sum_{\mu'} A_i^{m''m} A_j^{*,\mu'\mu} \Psi_{n''}^\mu \Psi_{m''}^\nu \Psi_{n'}^{*,\mu'} \Psi_{m'}^{*,\nu} e^{-i(E_\mu - E_{\mu'})(t-s)} \end{aligned} \quad (12.11)$$

ここで $A_j^{*,\mu'\mu} = \sum_{nm} A_n^{*,mn} \Psi_n^{*,\mu} \Psi_m^{\mu'}$, $\sum_{\alpha} \Psi_{\beta}^{*,\alpha} \Psi_{\beta'}^{\alpha} = \delta_{\beta\beta'}$ であることを用いる:

$$(12.11) = \sum_{n''} \sum_{\mu} \sum_{\mu'} A_i^{nn''} A_j^{*,\mu'\mu} \Psi_{n''}^{\mu} \Psi_{n'}^{*,\mu'} \delta_{mm'} e^{-i(E_{\mu}-E_{\mu'})(t-s)} \\ - \sum_{m''} \sum_{\mu} \sum_{\mu'} A_i^{m''m} A_j^{*,\mu'\mu} \Psi_n^{\mu} \Psi_{n'}^{*,\mu'} \delta_{m'm''} e^{-i(E_{\mu}-E_{\mu'})(t-s)} \quad (12.12)$$

$$= \sum_{n''} \sum_{\mu} \sum_{\mu'} A_i^{nn''} A_j^{*,\mu'\mu} \Psi_{n''}^{\mu} \Psi_{n'}^{*,\mu'} \delta_{mm'} e^{-i(E_{\mu}-E_{\mu'})(t-s)} \\ - \sum_{\mu} \sum_{\mu'} A_i^{m'm} A_j^{*,\mu'\mu} \Psi_n^{\mu} \Psi_{n'}^{*,\mu'} e^{-i(E_{\mu}-E_{\mu'})(t-s)} \quad (12.13)$$

$$= \sum_{n'''m'''} \sum_{n''} \sum_{\mu} \sum_{\mu'} A_i^{nn''} A_j^{*,m''n'''} \Psi_{n'''}^{*,\mu} \Psi_{m'''}^{\mu'} \Psi_{n''}^{\mu} \Psi_{n'}^{*,\mu'} \delta_{mm'} e^{-i(E_{\mu}-E_{\mu'})(t-s)} \\ - \sum_{n'''m'''} \sum_{\mu} \sum_{\mu'} A_i^{m'm} A_j^{*,m''n'''} \Psi_{n'''}^{*,\mu} \Psi_{m'''}^{\mu'} \Psi_n^{\mu} \Psi_{n'}^{*,\mu'} e^{-i(E_{\mu}-E_{\mu'})(t-s)} \quad (12.14)$$

$$= \sum_{n'''m'''} \sum_{\mu} \sum_{\mu'} \left[\sum_{n''} A_i^{nn''} A_j^{*,m''n'''} \Psi_{n'''}^{\mu} \delta_{mm'} - A_i^{m'm} A_j^{*,m''n'''} \Psi_n^{\mu} \right] \Psi_{n'''}^{*,\mu} \Psi_{m'''}^{\mu'} \Psi_{n'}^{*,\mu'} e^{-i(E_{\mu}-E_{\mu'})(t-s)} \quad (12.15)$$

同様に $\hat{\mathcal{K}}$ に必要な項を計算していく.

$$((nm|\hat{A}_i^{\dagger} e^{-i\hat{H}_a(t-s)} \tilde{A}_j^{\dagger} e^{i\hat{H}_a(t-s)} |n'm')) \\ = \sum_{n''m''} \sum_{\mu\nu} \sum_{\mu'\nu'} \left[A_i^{*,n''n} \delta_{mm''} - A_i^{*,mm''} \delta_{nn''} \right] A_j^{\nu'\nu} \delta_{\mu\mu'} \Psi_{n''}^{\mu} \Psi_{m''}^{\nu} \Psi_{n'}^{*,\mu'} \Psi_{m'}^{*,\nu'} e^{-i(E_{\mu}-E_{\nu})(t-s)} e^{i(E_{\mu'}-E_{\nu'})(t-s)} \\ = \sum_{n''m''} \sum_{\mu\nu} \sum_{\mu'\nu'} A_i^{*,n''n} \delta_{mm''} A_j^{\nu'\nu} \delta_{\mu\mu'} \Psi_{n''}^{\mu} \Psi_{m''}^{\nu} \Psi_{n'}^{*,\mu'} \Psi_{m'}^{*,\nu'} e^{-i(E_{\mu}-E_{\nu})(t-s)} e^{i(E_{\mu'}-E_{\nu'})(t-s)} \\ - \sum_{n''m''} \sum_{\mu\nu} \sum_{\mu'\nu'} A_i^{*,mm''} \delta_{nn''} A_j^{\nu'\nu} \delta_{\mu\mu'} \Psi_{n''}^{\mu} \Psi_{m''}^{\nu} \Psi_{n'}^{*,\mu'} \Psi_{m'}^{*,\nu'} e^{-i(E_{\mu}-E_{\nu})(t-s)} e^{i(E_{\mu'}-E_{\nu'})(t-s)} \quad (12.16)$$

$$= \sum_{n''} \sum_{\mu\nu} \sum_{\nu'} A_i^{*,n''n} A_j^{\nu'\nu} \Psi_{n''}^{\mu} \Psi_m^{\nu} \Psi_{n'}^{*,\mu'} \Psi_{m'}^{*,\nu'} e^{i(E_{\nu}-E_{\nu'})(t-s)} \\ - \sum_{m''} \sum_{\mu\nu} \sum_{\nu'} A_i^{*,mm''} A_j^{\nu'\nu} \Psi_n^{\mu} \Psi_{m''}^{\nu} \Psi_{n'}^{*,\mu'} \Psi_{m'}^{*,\nu'} e^{i(E_{\nu}-E_{\nu'})(t-s)} \quad (12.17)$$

$$= \sum_{\nu} \sum_{\nu'} A_i^{*,n'n} A_j^{\nu'\nu} \Psi_m^{\nu} \Psi_{m'}^{*,\nu'} e^{i(E_{\nu}-E_{\nu'})(t-s)} \\ - \sum_{m''} \sum_{\nu} \sum_{\nu'} A_i^{*,mm''} A_j^{\nu'\nu} \Psi_{m''}^{\nu} \Psi_{m'}^{*,\nu'} \delta_{nn'} e^{i(E_{\nu}-E_{\nu'})(t-s)} \quad (12.18)$$

$$= \sum_{n'''m'''} \sum_{\nu} \sum_{\nu'} A_i^{*,n'n} A_j^{n''m'''} \Psi_{n'''}^{*,\nu'} \Psi_{m'''}^{\nu} \Psi_m^{\nu} \Psi_{m'}^{*,\nu'} e^{i(E_{\nu}-E_{\nu'})(t-s)} \\ - \sum_{n'''m'''} \sum_{m''} \sum_{\nu} \sum_{\nu'} A_i^{*,mm''} A_j^{n''m'''} \Psi_{n'''}^{*,\nu'} \Psi_{m'''}^{\nu} \Psi_{m''}^{\nu} \Psi_{m'}^{*,\nu'} \delta_{nn'} e^{i(E_{\nu}-E_{\nu'})(t-s)} \quad (12.19)$$

$$= \sum_{n'''m'''} \sum_{\nu} \sum_{\nu'} \left[A_i^{*,n'n} A_j^{n''m'''} \Psi_m^{\nu} - \sum_{m''} A_i^{*,mm''} A_j^{n''m'''} \Psi_{m''}^{\nu} \delta_{nn'} \right] \Psi_{n'''}^{*,\nu'} \Psi_{m'''}^{\nu} \Psi_{m'}^{*,\nu'} e^{i(E_{\nu}-E_{\nu'})(t-s)} \quad (12.20)$$

$$\begin{aligned}
& ((nm|\hat{A}_i e^{-i\hat{H}_a(t-s)} \tilde{A}_j e^{i\hat{H}_a(t-s)}|n'm')) \\
&= \sum_{n''m''} \sum_{\mu\nu} \sum_{\mu'\nu'} \left[A_i^{nn''} \delta_{mm''} - A_i^{m''m} \delta_{nn''} \right] A_j^{*,\nu'\nu} \delta_{\mu\mu'} \Psi_{n''}^\mu \Psi_{m''}^\nu \Psi_{n'}^{*,\mu'} \Psi_{m'}^{*,\nu'} e^{-i(E_\mu - E_\nu)(t-s)} e^{i(E_{\mu'} - E_{\nu'})(t-s)} \\
&= \sum_{n''} \sum_{\mu\nu} \sum_{\nu'} A_i^{nn''} A_j^{*,\nu'\nu} \Psi_{n''}^\mu \Psi_m^\nu \Psi_{n'}^{*,\mu} \Psi_{m'}^{*,\nu'} e^{i(E_\nu - E_{\nu'})(t-s)} \\
&\quad - \sum_{m''} \sum_{\mu\nu} \sum_{\nu'} A_i^{m''m} A_j^{*,\nu'\nu} \Psi_n^\mu \Psi_{m''}^\nu \Psi_{n'}^{*,\mu} \Psi_{m'}^{*,\nu'} e^{i(E_\nu - E_{\nu'})(t-s)} \tag{12.21}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n''} \sum_{\nu} \sum_{\nu'} A_i^{nn''} A_j^{*,\nu'\nu} \Psi_m^\nu \Psi_{m'}^{*,\nu'} \delta_{n'n''} e^{i(E_\nu - E_{\nu'})(t-s)} \\
&\quad - \sum_{m''} \sum_{\nu} \sum_{\nu'} A_i^{m''m} A_j^{*,\nu'\nu} \Psi_{m''}^\nu \Psi_{m'}^{*,\nu'} \delta_{nn''} e^{i(E_\nu - E_{\nu'})(t-s)} \tag{12.22}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n'''m'''} \sum_{\nu} \sum_{\nu'} A_i^{nn'} A_j^{*,m'''n'''} \Psi_{n'''}^{*,\nu'} \Psi_{m'''}^\nu \Psi_m^\nu \Psi_{m'}^{*,\nu'} e^{i(E_\nu - E_{\nu'})(t-s)} \\
&\quad - \sum_{n'''m'''} \sum_{m''} \sum_{\nu} \sum_{\nu'} A_i^{m''m} A_j^{*,m'''n'''} \Psi_{n'''}^{*,\nu'} \Psi_{m'''}^\nu \Psi_{m''}^\nu \Psi_{m'}^{*,\nu'} \delta_{nn''} e^{i(E_\nu - E_{\nu'})(t-s)} \tag{12.23}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n'''m'''} \sum_{\nu} \sum_{\nu'} \left[A_i^{nn'} A_j^{*,m'''n'''} \Psi_m^\nu - \sum_{m''} A_i^{m''m} A_j^{*,m'''n'''} \Psi_{m''}^\nu \delta_{nn''} \right] \Psi_{n'''}^{*,\nu'} \Psi_{m'''}^\nu \Psi_{m'}^{*,\nu'} e^{i(E_\nu - E_{\nu'})(t-s)} \tag{12.24}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& ((nm|\hat{A}_i^\dagger e^{-i\hat{H}_a(t-s)} A_j e^{i\hat{H}_a(t-s)}|n'm')) \\
&= \sum_{n''m''} \sum_{\mu\nu} \sum_{\mu'\nu'} \left[A_i^{*,n''n} \delta_{mm''} - A_i^{*,mm''} \delta_{nn''} \right] A_j^{\mu\mu'} \delta_{\nu\nu'} \Psi_{n''}^\mu \Psi_{m''}^\nu \Psi_{n'}^{*,\mu'} \Psi_{m'}^{*,\nu'} e^{-i(E_\mu - E_\nu)(t-s)} e^{i(E_{\mu'} - E_{\nu'})(t-s)} \\
&= \sum_{n''} \sum_{\mu\nu} \sum_{\mu'} A_i^{*,n''n} A_j^{\mu\mu'} \Psi_{n''}^\mu \Psi_m^\nu \Psi_{n'}^{*,\mu'} \Psi_{m'}^{*,\nu} e^{-i(E_\mu - E_{\mu'})(t-s)} \\
&\quad - \sum_{m''} \sum_{\mu\nu} \sum_{\mu'} A_i^{*,mm''} A_j^{\mu\mu'} \Psi_n^\mu \Psi_{m''}^\nu \Psi_{n'}^{*,\mu'} \Psi_{m'}^{*,\nu} e^{-i(E_\mu - E_{\mu'})(t-s)} \tag{12.25}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n''} \sum_{\mu} \sum_{\mu'} A_i^{*,n''n} A_j^{\mu\mu'} \Psi_{n''}^\mu \Psi_{n'}^{*,\mu'} \delta_{mm'} e^{-i(E_\mu - E_{\mu'})(t-s)} \\
&\quad - \sum_{m''} \sum_{\mu} \sum_{\mu'} A_i^{*,mm''} A_j^{\mu\mu'} \Psi_n^\mu \Psi_{n'}^{*,\mu'} \delta_{m'm''} e^{-i(E_\mu - E_{\mu'})(t-s)} \tag{12.26}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n'''m'''} \sum_{n''} \sum_{\mu} \sum_{\mu'} A_i^{*,n''n} A_j^{n'''m'''} \Psi_{n'''}^{*,\mu} \Psi_{m'''}^{\mu'} \Psi_{n''}^\mu \Psi_{n'}^{*,\mu'} \delta_{mm'} e^{-i(E_\mu - E_{\mu'})(t-s)} \\
&\quad - \sum_{n'''m'''} \sum_{\mu} \sum_{\mu'} A_i^{*,mm'} A_j^{n'''m'''} \Psi_{n'''}^{*,\mu} \Psi_{m'''}^{\mu'} \Psi_n^\mu \Psi_{n'}^{*,\mu'} e^{-i(E_\mu - E_{\mu'})(t-s)} \tag{12.27}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n'''m'''} \sum_{\mu} \sum_{\mu'} \left[\sum_{n''} A_i^{*,n''n} A_j^{n'''m'''} \Psi_{n''}^\mu \delta_{mm'} - A_i^{*,mm'} A_j^{n'''m'''} \Psi_n^\mu \right] \Psi_{n'''}^{*,\mu} \Psi_{m'''}^{\mu'} \Psi_{n'}^{*,\mu'} e^{-i(E_\mu - E_{\mu'})(t-s)} \tag{12.28}
\end{aligned}$$

まとめると,

$$\begin{aligned}
& ((nm|\hat{A}_i e^{-i\hat{H}_a(t-s)} A_j^\dagger e^{i\hat{H}_a(t-s)}|n'm')) \\
&= \sum_{n''m'''} \sum_{\mu} \sum_{\mu'} \left[\sum_{n''} A_i^{nn''} A_j^{*,m''n'''} \Psi_{n''}^{\mu} \delta_{mm'} - A_i^{m'm} A_j^{*,m''n'''} \Psi_n^{\mu} \right] \Psi_{n'''}^{*,\mu} \Psi_{m'''}^{\mu'} \Psi_{n'}^{*,\mu'} e^{-i(E_{\mu}-E_{\mu'})(t-s)} \\
& \quad (12.29)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& ((nm|\hat{A}_i^\dagger e^{-i\hat{H}_a(t-s)} \tilde{A}_j^\dagger e^{i\hat{H}_a(t-s)}|n'm')) \\
&= \sum_{n''m'''} \sum_{\nu} \sum_{\nu'} \left[A_i^{*,n'n} A_j^{n''m'''} \Psi_m^{\nu} - \sum_{m''} A_i^{*,mm''} A_j^{n''m'''} \Psi_{m''}^{\nu} \delta_{nn'} \right] \Psi_{n'''}^{*,\nu'} \Psi_{m'''}^{\nu} \Psi_{m'}^{*,\nu'} e^{i(E_{\nu}-E_{\nu'})(t-s)} \\
& \quad (12.30)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& ((nm|\hat{A}_i e^{-i\hat{H}_a(t-s)} \tilde{A}_j e^{i\hat{H}_a(t-s)}|n'm')) \\
&= \sum_{n''m'''} \sum_{\nu} \sum_{\nu'} \left[A_i^{nn'} A_j^{*,m''n'''} \Psi_m^{\nu} - \sum_{m''} A_i^{m''m} A_j^{*,m''n'''} \Psi_{m''}^{\nu} \delta_{nn'} \right] \Psi_{n'''}^{*,\nu'} \Psi_{m'''}^{\nu} \Psi_{m'}^{*,\nu'} e^{i(E_{\nu}-E_{\nu'})(t-s)} \\
& \quad (12.31)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& ((nm|\hat{A}_i^\dagger e^{-i\hat{H}_a(t-s)} A_j e^{i\hat{H}_a(t-s)}|n'm')) \\
&= \sum_{n''m'''} \sum_{\mu} \sum_{\mu'} \left[\sum_{n''} A_i^{*,n'n} A_j^{n''m'''} \Psi_{n''}^{\mu} \delta_{mm'} - A_i^{*,mm'} A_j^{n''m'''} \Psi_n^{\mu} \right] \Psi_{n'''}^{*,\mu} \Psi_{m'''}^{\mu'} \Psi_{n'}^{*,\mu'} e^{-i(E_{\mu}-E_{\mu'})(t-s)} \\
& \quad (12.32)
\end{aligned}$$

添字が合ってるかとっても心配.

12.3 具体計算：摂動項 $\mathcal{K}(t)$

我々が計算したいのは

$$\mathcal{K}(t) = \mathcal{K}_1(t) + \mathcal{K}_2(t) \quad (12.33)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_1(t) &= -\frac{2Vg^2}{(2\pi)^6} \int_{t_0}^t ds \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3 \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) \\
&\quad \times \left[n_{k_1} n_{k_2} (1 + n_{k_3}) \left\{ e^{i(\omega_{k_1} + \omega_{k_2} - \omega_{k_3})(t-s)} \hat{A}_1(t) A_1^\dagger(s) - e^{-i(\omega_{k_1} + \omega_{k_2} - \omega_{k_3})(t-s)} \hat{A}_1^\dagger(t) \tilde{A}_1^\dagger(s) \right\} \right. \\
&\quad \left. - (1 + n_{k_1})(1 + n_{k_2}) n_{k_3} \left\{ e^{i(\omega_{k_1} + \omega_{k_2} - \omega_{k_3})(t-s)} \hat{A}_1(t) \tilde{A}_1(s) - e^{-i(\omega_{k_1} + \omega_{k_2} - \omega_{k_3})(t-s)} \hat{A}_1^\dagger(t) A_1(s) \right\} \right] \\
& \quad (12.34)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_2(t) &= -\frac{Vg^2}{2(2\pi)^6} \int_{t_0}^t ds \int d\mathbf{k} \left[n_k^2 \left\{ e^{2i\omega_k(t-s)} \hat{A}_2(t) A_2^\dagger(s) - e^{-2i\omega_k(t-s)} \hat{A}_2^\dagger(t) \tilde{A}_2^\dagger(s) \right\} \right. \\
&\quad \left. - (1 + n_k)^2 \left\{ e^{2i\omega_k(t-s)} \hat{A}_2(t) \tilde{A}_2(s) - e^{-2i\omega_k(t-s)} \hat{A}_2^\dagger(t) A_2(s) \right\} \right] \\
& \quad (12.35)
\end{aligned}$$

だが、演算子は全て相互作用描像である. これを Schrödinger 描像に移して計算するので, $A(s) \rightarrow e^{-i\hat{H}_a(t-s)} A e^{i\hat{H}_a(t-s)}$ として期待値を取る. Schrödinger 描像に移した期待値の公式は既に上で導出した.

さらに Quantum Master e.q. をマルコフ近似すると $|\rho_a(s)\rangle\rangle \rightarrow |\rho_a(t)\rangle\rangle$ かつ $t_0 \rightarrow -\infty$ とすればよい. s 積分は

$$\int_{-\infty}^t ds e^{iW(t-s)} \simeq \pi \delta(W) \quad (12.36)$$

のように計算できる (主値を捨てている) ことから, $((nm|\mathcal{K}_2(t)|n'm'))$ は

$$((nm|\mathcal{K}_2(t)|n'm')) = -\frac{Vg^2}{2(2\pi)^6} \int d\mathbf{k} \quad (12.37)$$

$$\begin{aligned} & \times \sum_{n''m'''} \left[n_k^2 \left\{ \sum_{n''} A_2^{nn''} A_2^{*,m''n'''} \delta_{mm'} M_{n''n'''} M'_{n'm'''} - A_2^{m'm} A_2^{*,m''n'''} M_{n''n} M'_{n'm'''} \right\} \delta(2\omega_k - E_\mu + E_{\mu'}) \right. \\ & + n_k^2 \left\{ A_2^{*,n'n} A_2^{n''m'''} N_{mm'''} N'_{n''m'} - \sum_{m''} A_2^{*,mm''} A_2^{n''m'''} \delta_{nn'} N_{m''m'''} N'_{n''m'} \right\} \delta(-2\omega_k + E_\nu - E_{\nu'}) \\ & - (1+n_k)^2 \left\{ A_2^{nn'} A_2^{*,m''n'''} N_{mm'''} N'_{n''m'} - \sum_{m''} A_2^{m''m} A_2^{*,m''n'''} \delta_{nn'} N_{m''m'''} N'_{n''m'} \right\} \delta(2\omega_k + E_\nu - E_{\nu'}) \\ & \left. - (1+n_k)^2 \left\{ \sum_{n''} A_2^{*,n''n} A_2^{n''m'''} \delta_{mm'} M_{n''n'''} M'_{n'm'''} - A_2^{*,mm'} A_2^{n''m'''} M_{n''n} M'_{n'm'''} \right\} \delta(-2\omega_k - E_\mu + E_{\mu'}) \right] \end{aligned} \quad (12.38)$$

ここで

$$M_{\alpha\beta} \equiv \sum_{\mu} \Psi_{\alpha}^{*,\mu} \Psi_{\beta}^{\mu} \quad M'_{\alpha\beta} \equiv \sum_{\mu'} \Psi_{\alpha}^{*,\mu'} \Psi_{\beta}^{\mu'} \quad (12.39)$$

$$N_{\alpha\beta} \equiv \sum_{\nu} \Psi_{\alpha}^{\nu} \Psi_{\beta}^{\nu} \quad N'_{\alpha\beta} \equiv \sum_{\nu'} \Psi_{\alpha}^{*,\nu'} \Psi_{\beta}^{*,\nu'} \quad (12.40)$$

としている. さらに k 積分を実行する. ここで

$$\int d\mathbf{k} n_k^2 \delta(2\omega_k - E) = \int_0^\infty dk \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi k \sin \theta n_k^2 \delta(k^2 - E) \quad (12.41)$$

$$= \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \sqrt{E} \theta(E) \sin \theta n_k^2 \quad (12.42)$$

$$= 4\pi \sqrt{E} \theta(E) n_E^2 \quad (12.43)$$

であることから

$$R_2(E) \equiv \frac{Vg^2}{8\pi} \theta(E) n_E^2 \sqrt{E} \quad R'_2(E) \equiv \frac{Vg^2}{8\pi} \theta(E) (1+n_E)^2 \sqrt{E} \quad (12.44)$$

とする. スターの位置に注意. ここで $\theta(E)$ は階段関数. これを用いると

$$\begin{aligned} & ((nm|\mathcal{K}_2(t)|n'm')) = \\ & \sum_{n''m'''} \left[- \left\{ \sum_{n''} A_2^{nn''} A_2^{*,m''n'''} \delta_{mm'} M_{n''n'''} M'_{n'm'''} - A_2^{m'm} A_2^{*,m''n'''} M_{n''n} M'_{n'm'''} \right\} R_2(E_\mu - E_{\mu'}) \right. \\ & - \left\{ A_2^{*,n'n} A_2^{n''m'''} N_{mm'''} N'_{n''m'} - \sum_{m''} A_2^{*,mm''} A_2^{n''m'''} \delta_{nn'} N_{m''m'''} N'_{n''m'} \right\} R_2(E_\nu - E_{\nu'}) \\ & + \left\{ A_2^{nn'} A_2^{*,m''n'''} N_{mm'''} N'_{n''m'} - \sum_{m''} A_2^{m''m} A_2^{*,m''n'''} \delta_{nn'} N_{m''m'''} N'_{n''m'} \right\} R'_2(-E_\nu + E_{\nu'}) \\ & \left. + \left\{ \sum_{n''} A_2^{*,n''n} A_2^{n''m'''} \delta_{mm'} M_{n''n'''} M'_{n'm'''} - A_2^{*,mm'} A_2^{n''m'''} M_{n''n} M'_{n'm'''} \right\} R'_2(-E_\mu + E_{\mu'}) \right] \end{aligned} \quad (12.45)$$

符号が合ってるかどうかとても心配.

さらに $((nm|\mathcal{K}_1(t)|n'm'))$ を計算する前に 積分公式を導出しておく:

$$I(E) = \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3 \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) \delta(\omega_{k_1} + \omega_{k_2} - \omega_{k_3} + E) a(\omega_{k_1}) b(\omega_{k_2}) c(\omega_{k_3}) \quad (12.46)$$

$$= 8\pi^2 \int_0^\infty d\omega_1 \int_{\frac{E_2}{4\omega_1}}^\infty d\omega_2 a(\omega_1) b(\omega_2) c(\omega_1 + \omega_2 + E) \quad (12.47)$$

となる. これ以上は a, b, c の具体形が必要. これを用いると (12.45) の添字を $2 \rightarrow 1$ にしたものと同様. ただし:

$$R_1(E) = \frac{Vg^2}{4\pi^3} \int_0^\infty d\omega_1 \int_{\frac{E^2}{4\omega_1}}^\infty d\omega_2 n_{\omega_1} n_{\omega_2} (1 + n_{\omega_1 + \omega_2 + E}) \quad (12.48)$$

$$R'_1(E) = \frac{Vg^2}{4\pi^3} \int_0^\infty d\omega_1 \int_{\frac{E^2}{4\omega_1}}^\infty d\omega_2 (1 + n_{\omega_1})(1 + n_{\omega_2}) n_{\omega_1 + \omega_2 + E} \quad (12.49)$$

とする. つまり解くべき方程式は

$$i \frac{d}{dt} \rho_a^{nm}(t) = \sum_{n'm'} \left[\sum_{\mu\nu} (E_\mu - E_\nu) \Psi_n^{*,\mu} \Psi_m^{*,\nu} \Psi_n^\mu \Psi_m^\nu + i \langle (nm | \hat{\mathcal{K}}(t) | n'm') \rangle \right] \rho_a^{n'm'}(t) \quad (12.50)$$

$$\equiv \sum_{n'm'} L^{nm, n'm'} \rho_a^{n'm'}(t) \quad (12.51)$$

である. ただし

$$\begin{aligned} L^{nm, n'm'} &= \sum_{\mu\nu} (E_\mu - E_\nu) \Psi_n^{*,\mu} \Psi_m^{*,\nu} \Psi_n^\mu \Psi_m^\nu \\ &+ \sum_{i=1,2} \sum_{n''m'''} \left[- \left\{ \sum_{n''} A_i^{nn''} A_i^{*,m''m'''} \delta_{mm'} M_{n''m'''} M'_{n'm'''} - A_i^{m'm} A_i^{*,m''m'''} M_{n''m'''} M'_{n'm'''} \right\} R_i(E_\mu - E_{\mu'}) \right. \\ &- \left\{ A_i^{*,n'n} A_i^{n''m''m'''} N_{mm'''} N'_{n'm'''} - \sum_{m''} A_i^{*,mm''} A_i^{n''m''m'''} \delta_{nn'} N_{m''m'''} N'_{n'm'''} \right\} R_i(E_\nu - E_{\nu'}) \\ &+ \left\{ A_i^{nn'} A_i^{*,m''m''m'''} N_{mm'''} N'_{n'm'''} - \sum_{m''} A_i^{m''m} A_i^{*,m''m''m'''} \delta_{nn'} N_{m''m'''} N'_{n'm'''} \right\} R'_i(-E_\nu + E_{\nu'}) \\ &\left. + \left\{ \sum_{n''} A_i^{*,n'n} A_i^{n''m''m'''} \delta_{mm'} M_{n''m'''} M'_{n'm'''} - A_i^{*,mm'} A_i^{n''m''m'''} M_{n''m'''} M'_{n'm'''} \right\} R'_i(-E_\mu + E_{\mu'}) \right] \end{aligned} \quad (12.53)$$

12.4 数値計算へ向けて

期待値の計算のために Quantum Master e.q.(12.51) を解いて密度行列 ρ_a を得るのがひとまずの目的. これが得られればいろんな物理量の計算ができる. (12.51) のエッセンスは $L^{nm, n'm'}$ にある. $L^{nm, n'm'}$ を数値計算においてどのように表現するかをまとめる.

12.4.1 $E_\mu \cdot E_\nu$

$|\mu\rangle, |\nu\rangle$ は H_a のエネルギー固有状態として定義されている:

$$H_a |\mu\rangle = E_\mu |\mu\rangle, \quad \tilde{H}_a |\nu\rangle = E_\nu |\nu\rangle \quad (12.54)$$

$|\nu\rangle$ はチルダハミルトニアン固有状態というだけで, 実質ノンチルダとモノに変わりはない. ということで, これを $\varphi_{\text{ex}}, \varphi_{\text{ex}}^\dagger$ の粒子数状態で行列表示する:

$$\sum_m (n | H_a | m) (m | \mu) = E_\mu (n | \mu) \quad (12.55)$$

$$\iff \sum_m (n | H_a | m) \Psi_m^\mu = E_\mu \Psi_n^\mu \quad (12.56)$$

これを Lapack で解けば Ψ, E のセットが得られる.

12.4.2 A_i^{nm}

$i = 1, 2$ のみなので具体的に計算してみる:

$$A_1^{nm} = (n|A_1|m) = (n|\varphi_0|m) = \sqrt{m}(n|m-1) = \sqrt{m}\delta_{n,m-1} \quad (12.57)$$

$$A_2^{nm} = (n|A_2|m) = (n|\varphi_0^2|m) = \sqrt{m(m-1)}(n|m-2) = \sqrt{m(m-1)}\delta_{n,m-2} \quad (12.58)$$

$$A_2^{*,nm} = (A_2^{nm})^* = A_2^{nm} \quad (12.59)$$

とても簡単になる.

12.4.3 $N_{nm} \cdot N'_{nm}$

$$N_{nm} = \sum_{\nu} \Psi_n^{\nu} \Psi_m^{\nu} \quad (12.60)$$

なので Ψ のセットがあれば自明.

12.4.4 R_i

R_1, R_2 共に n_k が必要. n_k の定義は

$$n_k \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') = \langle b_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}'}^{\dagger} \rangle \quad (12.61)$$

であり, H_R は φ_{ex} の 2 次なので対角化可能. 系の時間発展に対して変化が少ない過程をしているので熱平衡状態にあると考えて良い:

$$n_k = \frac{1}{e^{\beta\omega'_k} - 1} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad (12.62)$$

一様系では

$$\omega'_k = \sqrt{\frac{\hbar^2 k^2}{2m} \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + 2gn_0 \right)} \quad (12.63)$$

であることを利用して

$$n_E = \frac{1}{e^{\beta\omega'_E} - 1} \quad \omega'_E = \sqrt{\frac{\hbar^2 E}{2m} \left(\frac{\hbar^2 E}{2m} + 2gn_0 \right)} \quad (12.64)$$

$$n_{\omega_1+\omega_2+E} = \frac{1}{e^{\beta\omega'} - 1} \quad \omega' = \sqrt{\frac{\hbar^2 \left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2} + E \right)}{2m} \left(\frac{\hbar^2 \left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2} + E \right)}{2m} + 2gn_0 \right)} \quad (12.65)$$

とすることができる. また $\xi^2 = n_0$ より n_0 は TDGP 方程式により決定される. つまり, ξ の時間発展は密度行列の時間発展とは別の枠組みで与えられていることになる. TDGP に量子補正を加えるべきかどうかはわからない. 量子補正を入れると自己無撞着の計算がとてもめんどくさくなる. 今のところ, ゼロモードは Depletion に影響を与えない (比熱は影響を受ける) という結論なので, 補正無しの TDGP でもよい気がする.

ちなみに今回は ξ は時間発展しないものとしているのであしからず.

12.5 $L^{nm,n'm'}$ の整理

以上の結論から $L^{nm,n'm'}$ を整理する. (12.53) の第二項の和を $i = 1, 2$ それぞれについて計算する.

$i = 1$ について:

$$\begin{aligned}
& \sum_{n''m'''} \left[- \left\{ \sum_{n''} A_1^{nn''} A_1^{*,m''m'''} \delta_{mm'} M_{n''n'''} M'_{n'm'''} - A_1^{m'm} A_1^{*,m''m'''} M_{n''n'''} M'_{n'm'''} \right\} R_1(E_\mu - E_{\mu'}) \right. \\
& - \left\{ A_1^{*,n'n} A_1^{n''m''m'''} N_{mm'''} N'_{n''m'''} - \sum_{m''} A_1^{*,mm''} A_1^{n''m''m'''} \delta_{nn'} N_{m''m'''} N'_{n''m'''} \right\} R_1(E_\nu - E_{\nu'}) \\
& + \left\{ A_1^{nn'} A_1^{*,m''m''m'''} N_{mm'''} N'_{n''m'''} - \sum_{m''} A_1^{m''m} A_1^{*,m''m''m'''} \delta_{nn'} N_{m''m'''} N'_{n''m'''} \right\} R'_1(-E_\nu + E_{\nu'}) \\
& \left. + \left\{ \sum_{n''} A_1^{*,n'n} A_1^{n''m''m'''} \delta_{mm'} M_{n''n'''} M'_{n'm'''} - A_1^{*,mm'} A_1^{n''m''m'''} M_{n''n'''} M'_{n'm'''} \right\} R'_1(-E_\mu + E_{\mu'}) \right] \\
& \hspace{25em} (12.66) \\
= & \sum_{n''m'''} \left[- \left\{ \sum_{n''} \sqrt{n''} \delta_{n,n''-1} \sqrt{n''m'''} \delta_{m''m'''} \delta_{mm'} M_{n''n'''} M'_{n'm'''} - \sqrt{m} \delta_{m',m-1} \sqrt{n''m'''} \delta_{m''m'''} \delta_{nn'} M_{n''n'''} M'_{n'm'''} \right\} \right. \\
& \hspace{25em} \times R_1(E_\mu - E_{\mu'}) \\
& - \left\{ \sqrt{n} \delta_{n',n-1} \sqrt{m''m'''} \delta_{n''m'''} \delta_{mm'''} N_{mm'''} N'_{n''m'''} - \sum_{m''} \sqrt{m''} \delta_{m,m''-1} \sqrt{m''m'''} \delta_{n''m'''} \delta_{nn'} N_{m''m'''} N'_{n''m'''} \right\} \\
& \hspace{25em} \times R_1(E_\nu - E_{\nu'}) \\
& + \left\{ \sqrt{n'} \delta_{n,n'-1} \sqrt{n''m'''} \delta_{m''m'''} \delta_{mm'''} N_{mm'''} N'_{n''m'''} - \sum_{m''} \sqrt{m} \delta_{m',m-1} \sqrt{n''m'''} \delta_{m''m'''} \delta_{nn'} N_{m''m'''} N'_{n''m'''} \right\} \\
& \hspace{25em} \times R'_1(-E_\nu + E_{\nu'}) \\
& + \left\{ \sum_{n''} \sqrt{n} \delta_{n',n-1} \sqrt{m''m'''} \delta_{n''m'''} \delta_{mm'''} M_{n''n'''} M'_{n'm'''} - \sqrt{m'} \delta_{m,m'-1} \sqrt{m''m'''} \delta_{n''m'''} \delta_{nn'} M_{n''n'''} M'_{n'm'''} \right\} \\
& \hspace{25em} \times R'_1(-E_\mu + E_{\mu'}) \left. \right] \\
& \hspace{25em} (12.67) \\
= & \sum_{\ell} \left[- \sum_{\mu\mu'} \left\{ \sqrt{n+1} \sqrt{\ell} \delta_{mm'} M_{\ell,n+1} M'_{n',\ell-1} - \sqrt{m} \delta_{m',m-1} \sqrt{\ell} M_{\ell n} M'_{n',\ell-1} \right\} R_1(E_\mu - E_{\mu'}) \right. \\
& - \sum_{\nu\nu'} \left\{ \sqrt{n} \delta_{n',n-1} \sqrt{\ell+1} N_{m,\ell+1} N'_{\ell m'} - \sqrt{m+1} \sqrt{\ell+1} \delta_{nn'} N_{m+1,\ell+1} N'_{\ell m'} \right\} R_1(E_\nu - E_{\nu'}) \\
& + \sum_{\nu\nu'} \left\{ \sqrt{n'} \delta_{n,n'-1} \sqrt{\ell} N_{m,\ell-1} N'_{\ell m'} - \sqrt{m} \sqrt{\ell} \delta_{nn'} N_{m-1,\ell-1} N'_{\ell m'} \right\} R'_1(-E_\nu + E_{\nu'}) \\
& \left. + \sum_{\mu\mu'} \left\{ \sqrt{n} \sqrt{\ell+1} \delta_{mm'} M_{\ell,n-1} M'_{n',\ell+1} - \sqrt{m'} \delta_{m,m'-1} \sqrt{\ell+1} M_{\ell n} M'_{n',\ell+1} \right\} R'_1(-E_\mu + E_{\mu'}) \right] \\
& \hspace{25em} (12.68)
\end{aligned}$$

$L^{nm,n'm'}$ 内の $n''m'', n''m''m'''$ 和は ℓ のみにまとまった. またここでは $MN, M'N'$ に含まれていた $\mu\nu, \mu'\nu'$ の和を露わに書き直した.

i = 2 について:

$$\begin{aligned}
& \sum_{n''m'''} \left[- \left\{ \sum_{n''} A_2^{nn''} A_2^{*,m''m'''} \delta_{mm'} M_{n''m'''} M'_{n''m'''} - A_2^{m'm} A_2^{*,m''m'''} M_{n''m'''} M'_{n''m'''} \right\} R_2(E_\mu - E_{\mu'}) \right. \\
& - \left\{ A_2^{*,n'n} A_2^{n''m''m'''} N_{mm'''} N'_{n''m''m'} - \sum_{m''} A_2^{*,mm''} A_2^{n''m''m'''} \delta_{nn'} N_{m''m'''} N'_{n''m''m'} \right\} R_2(E_\nu - E_{\nu'}) \\
& + \left\{ A_2^{nn'} A_2^{*,m''m''m'''} N_{mm'''} N'_{n''m''m'} - \sum_{m''} A_2^{m''m} A_2^{*,m''m''m'''} \delta_{nn'} N_{m''m'''} N'_{n''m''m'} \right\} R'_2(-E_\nu + E_{\nu'}) \\
& \left. + \left\{ \sum_{n''} A_2^{*,n''n} A_2^{n''m''m'''} \delta_{mm'} M_{n''m''m'''} M'_{n''m''m'''} - A_2^{*,mm'} A_2^{n''m''m'''} M_{n''m''m'''} M'_{n''m''m'''} \right\} R'_2(-E_\mu + E_{\mu'}) \right] \\
& \hspace{25em} (12.69)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{\ell} \left[- \sum_{\mu\mu'} \left\{ \sqrt{(n+2)(n+1)} \sqrt{\ell(\ell-1)} \delta_{mm'} M_{\ell,n+2} M'_{n',\ell-2} - \sqrt{m(m-1)} \delta_{m',m-2} \sqrt{\ell(\ell-1)} M_{\ell,n} M'_{n',\ell-2} \right\} \right. \\
& \hspace{15em} \times R_2(E_\mu - E_{\mu'}) \\
& - \sum_{\nu\nu'} \left\{ \sqrt{n(n-1)} \delta_{n',n-2} \sqrt{(\ell+2)(\ell+1)} N_{m,\ell+2} N'_{\ell m'} - \sqrt{(m+2)(m+1)} \sqrt{m''(m'''-1)} \delta_{nn'} N_{m+2,\ell+2} N'_{\ell m'} \right\} \\
& \hspace{15em} \times R_2(E_\nu - E_{\nu'}) \\
& + \sum_{\nu\nu'} \left\{ \sqrt{n'(n'-1)} \delta_{n,n'-2} \sqrt{\ell(\ell-1)} N_{m,\ell-2} N'_{\ell m'} - \sqrt{m(m-1)} \sqrt{\ell(\ell-1)} \delta_{nn'} N_{m-2,\ell-2} N'_{\ell m'} \right\} \\
& \hspace{15em} \times R'_2(-E_\nu + E_{\nu'}) \\
& + \sum_{\mu\mu'} \left\{ \sqrt{n(n-1)} \sqrt{(\ell+2)(\ell+1)} \delta_{mm'} M_{\ell,n-2} M'_{n',\ell+2} - \sqrt{m'(m'-1)} \delta_{m,m'-2} \sqrt{(\ell+2)(\ell+1)} M_{\ell n} M'_{n',\ell+2} \right\} \\
& \hspace{15em} \times R'_2(-E_\mu + E_{\mu'}) \left. \right] \\
& \hspace{25em} (12.70)
\end{aligned}$$

R_i はシンブソン積分でいける.

第13章 研究：BdG間及びZeromode-BdG間の相互作用を取り入れた有限温度系の計算

熱力学ポテンシャルの摂動論については「高田康民：多体問題（朝倉書店，1999）」を参考にしています。

13.1 やりたいこと

Y.Nakamura, T.Kawaguchi, Y.Torii, and Y.Yamanaka, arXiv:1604.05900v1(2016) の4章「Thermodynamical quantity and Partition Function」の式(43)では分配関数を

$$Z = Z_{u,z} Z_{u,ex} \quad (13.1)$$

として評価をしているが、これを

$$Z = Z_{u,z} Z_{u,ex} Z_{int} \quad (13.2)$$

として評価したい。 Z_{int} にはゼロモード φ_z と BdG φ_{ex} のカップリング項や φ_{ex} の高次が含まれている。 $Z_{u,z}$ と $Z_{u,ex}$ は既に解ける形になっているので、非摂動部の熱力学ポテンシャルを

$$\Omega_0 = -\frac{1}{\beta} \ln Z_{u,z} Z_{u,ex} \quad (13.3)$$

として Z_{int} の効果を摂動的に取り入れたい。

13.1.1 Zeromode-BdG coupling

Hartree-Fock-Bogoliubov approximation による GP 方程式

$$[h_0 - \mu + g(\xi^2 + 2\langle\varphi^\dagger\varphi\rangle + \langle\varphi\varphi\rangle)]\xi = 0 \quad (13.4)$$

における量子補正 $\langle\varphi^\dagger\varphi\rangle, \langle\varphi\varphi\rangle$ によって既に Zeromode-BdG カップリングは導入されているのではないか？：

$$\begin{aligned} \langle\varphi^\dagger\varphi\rangle &= \langle(\varphi_z + \varphi_{ex})^\dagger(\varphi_z + \varphi_{ex})\rangle = \langle(\varphi_z^\dagger\varphi_z + \varphi_{ex}^\dagger\varphi_z + \varphi_z^\dagger\varphi_{ex} + \varphi_{ex}^\dagger\varphi_{ex})\rangle \\ &= \langle\varphi_z^\dagger\varphi_z\rangle + \langle\varphi_{ex}^\dagger\varphi_{ex}\rangle \end{aligned} \quad (13.5)$$

カップリング項は φ の一次なので消えてしまい、Zeromode-BdG カップリングは導入できていない。

13.2 量子補正のくりこみによる理解

量子補正 $\langle\varphi^\dagger\varphi\rangle, \langle\varphi\varphi\rangle$ を天下りにではなく、場の分割条件によるくりこみから理解する。分割条件を何次まで取り込むかによって量子補正の計算精度が決まることになる。

13.2.1 非摂動ハミルトニアン

相互作用描像において、全ハミルトニアンを φ の次数毎に

$$H = H_1 + H_2 + H_3 + H_4 \quad (13.6)$$

と分割する。その具体形は

$$H_1 = \int d\mathbf{x} \left[\varphi^\dagger (h_0 - \mu + g|\xi|^2) \xi + \varphi (h_0 - \mu + g|\xi|^2) \xi^* \right] \quad (13.7)$$

$$H_2 = \frac{1}{2} \int d\mathbf{x} \begin{pmatrix} \varphi^\dagger & -\varphi \end{pmatrix} T_0 \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi^\dagger \end{pmatrix} \quad (13.8)$$

$$H_3 = g \int d\mathbf{x} \left[\varphi^\dagger \varphi^\dagger \varphi \xi + \varphi^\dagger \varphi \varphi \xi^* \right] \quad (13.9)$$

$$H_4 = \frac{g}{2} \int d\mathbf{x} \varphi^\dagger \varphi^\dagger \varphi \varphi \quad (13.10)$$

である。ただし

$$T_0 = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_0 & \mathcal{M}_0 \\ -\mathcal{M}_0^* & -\mathcal{L}_0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{L}_0 = h_0 - \mu + 2g|\xi|^2, \quad \mathcal{M}_0 = g\xi^2 \quad (13.11)$$

とした。

非摂動ハミルトニアン H_u と摂動ハミルトニアン H_p は

$$H_u = H_1 + H_2 + [H_3]_{QP} + [H_4]_{QP} + \delta H_1 + \delta H_2 + \delta H_1^z + \delta H_2^z \quad (13.12)$$

$$H_p = H_3 + H_4 - [H_3]_{QP} - [H_4]_{QP} - \delta H_1 - \delta H_2 - \delta H_1^z - \delta H_2^z \quad (13.13)$$

とする。カウンター項は

$$\delta H_1(t) = \int d\mathbf{x} \left[\varphi^\dagger(x) \delta C(x) - \varphi(x) \delta C^*(x) \right], \quad (13.14)$$

$$\delta H_2(t) = \frac{1}{2} \int d\mathbf{x} \begin{pmatrix} \varphi^\dagger & -\varphi \end{pmatrix} \delta T(x) \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi^\dagger \end{pmatrix}, \quad \delta T(x) = \begin{pmatrix} \delta \mathcal{L}(x) & \delta \mathcal{M}(x) \\ -\delta \mathcal{M}^*(x) & -\delta \mathcal{L}(x) \end{pmatrix}, \quad (13.15)$$

$$\delta H_1^z(t) = \int d\mathbf{x} \left[\varphi_z^\dagger(x) \delta C_z(x) - \varphi_z(x) \delta C_z^*(x) \right], \quad (13.16)$$

$$\delta H_2^z(t) = \frac{1}{2} \int d\mathbf{x} \begin{pmatrix} \varphi_z^\dagger & -\varphi_z \end{pmatrix} \delta T_z(x) \begin{pmatrix} \varphi_z \\ \varphi_z^\dagger \end{pmatrix}, \quad \delta T_z(x) = \begin{pmatrix} \delta \mathcal{L}_z(x) & \delta \mathcal{M}_z(x) \\ -\delta \mathcal{M}_z^*(x) & -\delta \mathcal{L}_z(x) \end{pmatrix} \quad (13.17)$$

という構造を持つものとし、右辺の $\delta C, \delta \mathcal{L}, \delta \mathcal{M}, \delta C_z, \delta \mathcal{L}_z, \delta \mathcal{M}_z$ の具体形を決めていく。

13.2.2 カウンター項の決定

Heisenberg 描像における場の分割条件 $\langle 0 | \varphi_H(x) | 0 \rangle = 0$ を摂動の 1 次までで展開すると

$$\langle 0 | T \left[\varphi(x) \left(1 - i \int ds H_p(s) \right) \right] | 0 \rangle = 0 \quad (13.18)$$

となる。これが任意の x について成立するためには、摂動の次数ごとに考えて

$$\langle 0 | \varphi(x) | 0 \rangle = 0 \quad (13.19)$$

$$\int ds \langle 0 | T [\varphi(x) H_p(s)] | 0 \rangle = 0 \quad (13.20)$$

が必要である。

13.2.3 (13.19) の要請

任意の時刻で 13.19 が成立するためには、その時間微分もゼロでなくてはならない。演算子の 1 次の真空期待値がゼロであることから

$$0 = \langle 0 | [\varphi(x), H_u] | 0 \rangle \quad (13.21)$$

$$= \langle 0 | [\varphi(x), H_1(t) + \delta H_1(t)] | 0 \rangle \quad (13.22)$$

$$+ \langle 0 | [\varphi_z(x), [H_3(t) + H_4(t) + \delta H_1^z(t)]_{QP}] | 0 \rangle \quad (13.23)$$

となる。任意の x で恒等的に成立するために 2 つの項がそれぞれゼロであることが必要である。よって

$$0 = [h_0 - \mu + g|\xi|^2] \xi + \delta C \quad (13.24)$$

$$\delta C_z = -g \langle 0 | 2\varphi_z^\dagger \varphi_z \xi + \varphi_z \varphi_z \xi^* + \varphi_z^\dagger \varphi_z \varphi_z | 0 \rangle = 0 \quad (13.25)$$

となる。

13.2.4 分割条件摂動一次

φ_{ex} に関しては Wick の定理が成立するが、 φ_z には成立していないことに注意する。以下 $y = (y, s)$ として以下の各項を計算する。

$$0 = \int ds \langle 0 | T \left[\varphi(x) \{ H_3(s) + H_4(s) - [H_3(s)]_{QP} - [H_4(s)]_{QP} \right. \\ \left. - \delta H_1(s) - \delta H_2(s) - \delta H_1^z(s) - \delta H_2^z(s) \} \right] | 0 \rangle \quad (13.26)$$

(1)

$$= g \int dy \langle 0 | T \left[\varphi(x) \{ \varphi^\dagger(y) \varphi^\dagger(y) \varphi(y) \xi(y) + \varphi^\dagger(y) \varphi(y) \varphi(y) \xi^*(y) \} \right] | 0 \rangle \quad (13.27)$$

$$= g \int dy \langle 0 | T \left[\varphi(x) \varphi^\dagger(y) \right] | 0 \rangle \langle 0 | 2\varphi^\dagger(y) \varphi(y) \xi(y) + \varphi^\dagger(y) \varphi(y) \xi^*(y) | 0 \rangle \\ + g \int dy \langle 0 | T \left[\varphi(x) \varphi(y) \right] | 0 \rangle \langle 0 | 2\varphi^\dagger(y) \varphi(y) \xi^*(y) + \varphi^\dagger(y) \varphi^\dagger(y) \xi(y) | 0 \rangle \\ - g \int dy \langle 0 | T \left[\varphi_z(x) \varphi_z^\dagger(y) \right] | 0 \rangle \langle 0 | 2\varphi_z^\dagger(y) \varphi_z(y) \xi(y) + \varphi_z(y) \varphi_z(y) \xi^*(y) | 0 \rangle \\ - g \int dy \langle 0 | T \left[\varphi_z(x) \varphi_z(y) \right] | 0 \rangle \langle 0 | 2\varphi_z^\dagger(y) \varphi_z(y) \xi^*(y) + \varphi_z^\dagger(y) \varphi_z^\dagger(y) \xi(y) | 0 \rangle \\ + g \int dy \langle 0 | T \left[\varphi_z(x) \{ \varphi_z^\dagger(y) \varphi_z^\dagger(y) \varphi_z(y) \xi(y) + \varphi_z^\dagger(y) \varphi_z(y) \varphi_z(y) \xi^*(y) \} \right] | 0 \rangle \quad (13.28)$$

$$= \int dy \langle 0 | T \left[\varphi(x) \varphi^\dagger(y) \right] | 0 \rangle \langle 0 | T \left[\varphi(y), H_3(s) \right] | 0 \rangle \\ - \int dy \langle 0 | T \left[\varphi(x) \varphi(y) \right] | 0 \rangle \langle 0 | T \left[\varphi^\dagger(y), H_3(s) \right] | 0 \rangle \\ - \int dy \langle 0 | T \left[\varphi_z(x) \varphi_z^\dagger(y) \right] | 0 \rangle \langle 0 | T \left[\varphi_z(y), [H_3(s)]_{QP} \right] | 0 \rangle \\ + \int dy \langle 0 | T \left[\varphi_z(x) \varphi_z(y) \right] | 0 \rangle \langle 0 | T \left[\varphi_z^\dagger(y), [H_3(s)]_{QP} \right] | 0 \rangle \\ + \int dy \langle 0 | T \left[\varphi_z(x) [H_3(s)]_{QP} \right] | 0 \rangle \quad (13.29)$$

上記の計算の手順は以下の通り：

- $\varphi = \varphi_{\text{ex}} + \varphi_z$ が Wick の定理を満たすと仮定して φ について展開。

- 実際は φ_z は Wick 展開不能なので φ_z を含む項を取り除かなければならないが, φ の次数から φ_{ex} と φ_z の クロスタームがゼロになることから取り除くのは φ_z のみで構成された項である.
- その後, 正しい φ_z の項を追加. こちらは当然 Green 関数を構成できない.
- 交換関係で式を整理.

(2)

$$= \frac{g}{2} \int dy \langle 0 | T [\varphi(x) \varphi^\dagger(y) \varphi^\dagger(y) \varphi(y) \varphi(y)] | 0 \rangle \quad (13.30)$$

$$= \frac{g}{2} \int dy \langle 0 | T [\varphi_{\text{ex}}(x) \{ 2\varphi_{\text{ex}}^\dagger(y) \varphi_z^\dagger(y) \varphi_z(y) \varphi_z(y) + 2\varphi_{\text{ex}}(y) \varphi_z^\dagger(y) \varphi_z^\dagger(y) \varphi_z(y) \}] | 0 \rangle$$

$$+ \frac{g}{2} \int dy \langle 0 | T [\varphi_z(x) \{ 4\varphi_z^\dagger(y) \varphi_z(y) \varphi_{\text{ex}}^\dagger(y) \varphi_{\text{ex}}(y) + \varphi_z(y) \varphi_z(y) \varphi_{\text{ex}}^\dagger(y) \varphi_{\text{ex}}^\dagger(y) + \varphi_z^\dagger(y) \varphi_z^\dagger(y) \varphi_{\text{ex}}(y) \varphi_{\text{ex}}(y) \}] | 0 \rangle$$

$$+ \frac{g}{2} \int dy \langle 0 | T [\varphi_z(x) \varphi_z^\dagger(y) \varphi_z^\dagger(y) \varphi_z(y) \varphi_z(y)] | 0 \rangle \quad (13.31)$$

$$= \int dy \langle 0 | T [\varphi_{\text{ex}}(x) \varphi_{\text{ex}}^\dagger(y)] | 0 \rangle [\varphi_z(y), [H_4(s)]_{QP}]$$

$$- \int dy \langle 0 | T [\varphi_{\text{ex}}(x) \varphi_{\text{ex}}(y)] | 0 \rangle [\varphi_z^\dagger(y), [H_4(s)]_{QP}]$$

$$+ 2g \int dy \langle 0 | T [\varphi_z(x) \varphi_z^\dagger(y) \varphi_z(y)] | 0 \rangle \langle 0 | \varphi_{\text{ex}}^\dagger(y) \varphi_{\text{ex}}(y) | 0 \rangle$$

$$+ \frac{g}{2} \int dy \langle 0 | T [\varphi_z(x) \varphi_z(y) \varphi_z(y)] | 0 \rangle \langle 0 | \varphi_{\text{ex}}^\dagger(y) \varphi_{\text{ex}}^\dagger(y) | 0 \rangle$$

$$+ \frac{g}{2} \int dy \langle 0 | T [\varphi_z(x) \varphi_z^\dagger(y) \varphi_z^\dagger(y)] | 0 \rangle \langle 0 | \varphi_{\text{ex}}(y) \varphi_{\text{ex}}(y) | 0 \rangle$$

$$+ \int dy \langle 0 | T [\varphi_z(x) [H_4(s)]_{QP}] | 0 \rangle \quad (13.32)$$

$$= \int dy \langle 0 | T [\varphi(x) \varphi^\dagger(y)] | 0 \rangle [\varphi(y), H_4(s)]$$

$$- \int dy \langle 0 | T [\varphi(x) \varphi(y)] | 0 \rangle [\varphi^\dagger(y), H_4(s)]$$

$$- \int dy \langle 0 | T [\varphi_z(x) \varphi_z^\dagger(y)] | 0 \rangle [\varphi_z(y), [H_4(s)]_{QP}]$$

$$+ \int dy \langle 0 | T [\varphi_z(x) \varphi_z(y)] | 0 \rangle [\varphi_z^\dagger(y), [H_4(s)]_{QP}]$$

$$+ 2g \int dy \langle 0 | T [\varphi_z(x) \varphi_z^\dagger(y) \varphi_z(y)] | 0 \rangle \langle 0 | \varphi_{\text{ex}}^\dagger(y) \varphi_{\text{ex}}(y) | 0 \rangle$$

$$+ \frac{g}{2} \int dy \langle 0 | T [\varphi_z(x) \varphi_z(y) \varphi_z(y)] | 0 \rangle \langle 0 | \varphi_{\text{ex}}^\dagger(y) \varphi_{\text{ex}}^\dagger(y) | 0 \rangle$$

$$+ \frac{g}{2} \int dy \langle 0 | T [\varphi_z(x) \varphi_z^\dagger(y) \varphi_z^\dagger(y)] | 0 \rangle \langle 0 | \varphi_{\text{ex}}(y) \varphi_{\text{ex}}(y) | 0 \rangle$$

$$+ \int dy \langle 0 | T [\varphi_z(x) [H_4(s)]_{QP}] | 0 \rangle \quad (13.33)$$

(5)

$$- \int dy \langle 0 | T [\varphi(x) \{ \delta C(y) \varphi^\dagger(y) + \delta C^*(y) \varphi(y) \}] | 0 \rangle \quad (13.34)$$

$$= - \int dy \left(\delta C(y) \langle 0 | T [\varphi(x) \varphi^\dagger(y)] | 0 \rangle + \delta C^*(y) \langle 0 | T [\varphi(x) \varphi(y)] | 0 \rangle \right) \quad (13.35)$$

(6)

$$-\frac{1}{2} \int dy \langle 0 | T [\varphi(x) \{ 2\delta\mathcal{L}(y) \varphi^\dagger(y) \varphi(y) + \delta\mathcal{M}(y) \varphi^\dagger(y) \varphi^\dagger(y) + \delta\mathcal{M}^*(y) \varphi(y) \varphi(y) \}] | 0 \rangle \quad (13.36)$$

$$\begin{aligned} &= - \int dy \delta\mathcal{L}(y) \langle 0 | T [\varphi_z(x) \varphi_z^\dagger(y) \varphi_z(y)] | 0 \rangle \\ &= -\frac{1}{2} \int dy \delta\mathcal{M}(y) \langle 0 | T [\varphi_z(x) \varphi_z^\dagger(y) \varphi_z^\dagger(y)] | 0 \rangle \\ &= -\frac{1}{2} \int dy \delta\mathcal{M}^*(y) \langle 0 | T [\varphi_z(x) \varphi_z(y) \varphi_z(y)] | 0 \rangle \end{aligned} \quad (13.37)$$

(7)

$$- \int dy \langle 0 | T [\varphi_z(x) \{ \delta C_z(y) \varphi_z^\dagger(y) + \delta C_z^*(y) \varphi_z(y) \}] | 0 \rangle \quad (13.38)$$

$$= - \int dy \left(\delta C_z(y) \langle 0 | T [\varphi_z(x) \varphi_z^\dagger(y)] | 0 \rangle + \delta C_z^*(y) \langle 0 | T [\varphi_z(x) \varphi_z(y)] | 0 \rangle \right) \quad (13.39)$$

(8)

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2} \int dy \langle 0 | T [\varphi(x) \{ 2\delta\mathcal{L}_z(y) \varphi_z^\dagger(y) \varphi_z(y) + \delta\mathcal{M}_z(y) \varphi_z^\dagger(y) \varphi_z^\dagger(y) + \delta\mathcal{M}_z^*(y) \varphi_z(y) \varphi_z(y) \}] | 0 \rangle \\ &= - \int dy \delta\mathcal{L}_z(y) \langle 0 | T [\varphi_z(x) \varphi_z^\dagger(y) \varphi_z(y)] | 0 \rangle \end{aligned} \quad (13.40)$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{2} \int dy \delta\mathcal{M}_z(y) \langle 0 | T [\varphi_z(x) \varphi_z^\dagger(y) \varphi_z^\dagger(y)] | 0 \rangle \\ &= -\frac{1}{2} \int dy \delta\mathcal{M}_z^*(y) \langle 0 | T [\varphi_z(x) \varphi_z(y) \varphi_z(y)] | 0 \rangle \end{aligned} \quad (13.41)$$

結局 (13.26) は

$$\begin{aligned} 0 &= \int dy \langle 0 | T [\varphi(x) \varphi^\dagger(y)] | 0 \rangle \langle 0 | [\varphi(y), H_3(s) + H_4(s)] + \delta C(y) | 0 \rangle \\ &\quad - \int dy \langle 0 | T [\varphi(x) \varphi(y)] | 0 \rangle \langle 0 | [\varphi^\dagger(y), H_3(s) + H_4(s)] - \delta C^*(y) | 0 \rangle \\ &\quad - \int dy \langle 0 | T [\varphi_z(x) \varphi_z^\dagger(y)] | 0 \rangle \langle 0 | [\varphi_z(y), [H_3(s) + H_4(s)]_{QP}] - \delta C_z(y) | 0 \rangle \\ &\quad + \int dy \langle 0 | T [\varphi_z(x) \varphi_z(y)] | 0 \rangle \langle 0 | [\varphi_z^\dagger(y), [H_3(s) + H_4(s)]_{QP}] + \delta C_z^*(y) | 0 \rangle \\ &\quad + \int dy \langle 0 | T [\varphi_z(x) \varphi_z^\dagger(y) \varphi_z(y)] | 0 \rangle \langle 0 | 2g\varphi_{\text{ex}}^\dagger(y) \varphi_{\text{ex}}(y) - \delta\mathcal{L}(y) - \delta\mathcal{L}_z(y) | 0 \rangle \\ &\quad + \frac{1}{2} \int dy \langle 0 | T [\varphi_z(x) \varphi_z^\dagger(y) \varphi_z^\dagger(y)] | 0 \rangle \langle 0 | g\varphi_{\text{ex}}(y) \varphi_{\text{ex}}(y) - \delta\mathcal{M}(y) - \delta\mathcal{M}_z(y) | 0 \rangle \\ &\quad + \frac{1}{2} \int dy \langle 0 | T [\varphi_z(x) \varphi_z(y) \varphi_z(y)] | 0 \rangle \langle 0 | g\varphi_{\text{ex}}^\dagger(y) \varphi_{\text{ex}}^\dagger(y) - \delta\mathcal{M}^*(y) - \delta\mathcal{M}_z^*(y) | 0 \rangle \end{aligned} \quad (13.42)$$

となる。この式が恒等的に正しくなるために

$$\delta C = [\varphi, H_3 + H_4] = g \langle 0 | 2\varphi^\dagger \varphi \xi + \varphi \varphi \xi^* + \varphi^\dagger \varphi \varphi | 0 \rangle \quad (13.43)$$

$$\delta\mathcal{L}_z = 2g \langle 0 | \varphi_{\text{ex}}^\dagger \varphi_{\text{ex}} | 0 \rangle - \delta\mathcal{L}, \quad \delta\mathcal{M}_z = g \langle 0 | \varphi_{\text{ex}} \varphi_{\text{ex}} | 0 \rangle - \delta\mathcal{M} \quad (13.44)$$

を得る。なお δC_z は (13.25) で決定したものと同じであり、矛盾はない。

13.2.5 $\delta\mathcal{L}, \delta\mathcal{M}$ の決定

以上の結果から、定常 GP 方程式は

$$[h_0 - \mu + g(|\xi|^2 + 2 \langle 0 | \varphi^\dagger \varphi | 0 \rangle)] \xi + g \langle 0 | \varphi \varphi | 0 \rangle \xi^* + g \langle 0 | \varphi^\dagger \varphi \varphi | 0 \rangle = 0 \quad (13.45)$$

となる。しかしながら、 $\langle 0|\varphi^\dagger\varphi\varphi|0\rangle$ を GP 方程式に含め、かつ BdG 方程式がゼロモード解 $y_0 = (\xi - \xi^*)^t$ を持つようにすると、 $\delta\mathcal{L}$ が非エルミートになり BdG 完全系の構成が難しくなる。よって、今回は平衡系では φ の奇数次は小さいだろうとして $\langle 0|\varphi^\dagger\varphi\varphi|0\rangle$ を無視することにする。したがって、GP 方程式は

$$[h_0 - \mu + g(|\xi|^2 + 2\langle 0|\varphi^\dagger\varphi|0\rangle)]\xi + g\langle 0|\varphi\varphi|0\rangle\xi^* = 0 \quad (13.46)$$

である。 $\delta\mathcal{L}, \delta\mathcal{M}$ は BdG がゼロモード解を持つように

$$\delta\mathcal{L} = 2g\langle 0|\varphi^\dagger\varphi|0\rangle, \quad \delta\mathcal{M} = -g\langle 0|\varphi\varphi|0\rangle \quad (13.47)$$

とすることにする。これですべてのカウンター項が決定された。

13.2.6 分割条件の高次

今までの議論は分割条件を摂動一次で課した場合である。2 次以上の計算はとても手に負えないが、仮に摂動の高次を取り入れるとどうなるか？

分割条件をオールオーダーで課したとき、量子補正は $\langle 0|\varphi_H^\dagger\varphi_H|0\rangle$ になると考えられる。これは Heisenberg 描像において分割条件を考えると

$$i\partial_t\varphi_H = [\varphi_H, H_{H,1} + H_{H,2} + H_{H,3} + H_{H,4}] = 0 \quad (13.48)$$

$$i\partial_t\langle 0|\varphi_H|0\rangle = \langle 0|[\varphi_H, H_{H,1} + H_{H,3}]|0\rangle = 0 \quad (13.49)$$

$$\therefore 0 = [h_0 - \mu + g(|\xi|^2 + 2\langle 0|\varphi_H^\dagger\varphi_H|0\rangle)]\xi + g\langle 0|\varphi_H\varphi_H|0\rangle\xi^* \quad (13.50)$$

となっているからである。しかしゼロモードが Wick の定理を満たさない以上、これを前述のような分割条件によるくりこみで理解するのは難しいと思う。ゼロモードについては 1 次で、励起モードについては何かしらの方法でオールオーダーの計算をする、というのが現実的だろうか。

13.3 量子統計力学と摂動計算

熱力学ポテンシャルを用いた摂動計算のための勉強。

13.3.1 熱力学ポテンシャル

熱力学ポテンシャル (グランドポテンシャル, thermodynamic potential) は

$$\Omega = F - \mu N = E - TS - \mu N \quad (13.51)$$

$$d\Omega = SdT - Nd\mu - pdV \quad (13.52)$$

のように定義され、大分配関数を用いて

$$\Omega = -k_B T \ln Z \quad (13.53)$$

$$Z = \exp(-\beta\Omega) = \text{Tr} e^{-\beta H} \quad (13.54)$$

のようにも書ける。この熱力学関数のおかげで

$$S = -\left(\frac{\partial\Omega}{\partial T}\right)_{\mu,V}, \quad N = -\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\mu}\right)_{T,V}, \quad p = -\left(\frac{\partial\Omega}{\partial V}\right)_{T,\mu}, \quad C_v = -T\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial T^2}\right)_{\mu,V} = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{\mu,V} \quad (13.55)$$

などの物理量を計算できる。大分配関数 Z を求めよう！という大筋は変わらない。

13.3.2 方法論の外観

熱平衡状態を知るためには熱力学ポテンシャルを計算することがまず第一である。例えば H が

$$H = \sum_n \omega_n a_n^\dagger a_n \quad (13.56)$$

みたいな Free であるなら

$$\Omega = -k_B T \ln(\text{Tr } e^{-\beta H}) = -k_B T \ln\left(\prod_n \frac{1}{1 - e^{-\beta \omega_n}}\right) = k_B T \sum_n \ln(1 - e^{-\beta \omega_n}) \quad (13.57)$$

みたいに計算はすぐにできるが、相互作用が入ってきた場合の計算は容易ではない。いろいろな方法論が存在するが、ここでは場の理論を用いた摂動論を扱う。

13.3.3 相互作用描像と S 行列

Heisenberg 描像のハミルトニアンを

$$H_H = H_{H,u,z} + H_{H,u,ex} + H_{H,int} \quad (13.58)$$

と分割したとき、 $H_{u,z}$ と $H_{u,ex}$ については固有値方程式

$$H_{u,ex} |n\rangle_{ex} = \omega_n |n\rangle_{ex} \quad (13.59)$$

$$H_{u,z} |\Psi_\nu\rangle_z = E_\nu |\Psi_\nu\rangle_z \quad (13.60)$$

が既に解けているものとする¹。ここで、Schrödinger 描像と Heisenberg 描像・相互作用描像を結ぶユニタリー変換を考える：

$$A_H(t) = e^{iH_S t} A_S e^{-iH_S t} \quad \text{Heisenberg picture} \quad (13.61)$$

$$A(t) = e^{iH_u t} A_S e^{-iH_u t} \quad \text{Interaction picture} \quad (13.62)$$

$H_u = H_{u,z} + H_{u,ex}$ としている。

s これを用いて Heisenberg 描像と相互作用描像を結ぶユニタリー変換 $U(t)$ を定義する：

$$A_H(t) = U^{-1}(t) A(t) U(t) \quad (13.63)$$

$$e^{iH_S t} A_S e^{-iH_S t} = U^{-1}(t) e^{iH_u t} A_S e^{-iH_u t} U(t) \quad (13.64)$$

$$\therefore U(t) = e^{iH_u t} e^{-iH_S t} \quad (13.65)$$

このユニタリー演算子の時間発展方程式は

$$\begin{aligned} \partial_t U(t) &= e^{iH_u t} (iH_u) e^{-iH_S t} - e^{iH_u t} (-iH_S) e^{-iH_S t} \\ &= i e^{iH_u t} (H_u - H_S) e^{-iH_S t} = -i e^{iH_u t} H_{S,ex} e^{-iH_u t} U(t) \end{aligned} \quad (13.66)$$

$$\therefore i \partial_t U(t) = H_{ex}(t) U(t) \quad (13.67)$$

$$\therefore i \partial_t U^{-1}(t) = -U^{-1}(t) H_{ex}(t) \quad (13.68)$$

ここでは $H_u = H_{S,u}$ を用いている。この $U(t)$ を用いて新しい演算子 $S(t, t')$ を定義する：

$$S(t, t') = U(t) U^{-1}(t') \quad (13.69)$$

この S 行列の時間発展方程式は (13.67) より直ちに

$$i \partial_t S(t, t') = H_{ex}(t) S(t, t') \quad (13.70)$$

を得る。これを形式的に解くと T 積を用いて

$$S(t, t') = T \exp \left[-i \int_{t'}^t ds H_{ex}(s) \right] \quad (13.71)$$

と表現できる。

¹ 非摂動部は時間発展しないように選んでいるので、Heisenberg 描像 H_H と相互作用描像 H は一致する

13.3.4 熱力学ポテンシャルの摂動展開

前節の議論を $it \rightarrow \beta$ とする:

$$U(\beta) = e^{\beta H_u} e^{-\beta H_S} \quad \partial_\beta U(\beta) = -H_{ex}(\beta)U(\beta) \quad (13.72)$$

$$S(\beta, \beta') = U(\beta)U^{-1}(\beta') \quad \partial_\beta S(\beta, \beta') = -H_{ex}(\beta)S(\beta, \beta') \quad (13.73)$$

$$S(\beta, \beta') = T \exp \left[- \int_{\beta'}^{\beta} ds H_{ex}(s) \right] \quad (13.74)$$

この S 行列を用いて大分配関数 Z を書き換える:

$$Z = e^{-\beta \Omega} = \text{Tr} e^{-\beta H} = \text{Tr} [e^{-\beta H_u} U(\beta)] = \text{Tr} [e^{-\beta H_u} S(\beta, 0)] \quad (13.75)$$

ここで、任意の演算子対して非摂動系における熱平均を定義する。ここでいう任意の演算子は「ゼロモード演算子と励起モード演算子を含む演算子」を指すので、任意の演算子は $\varphi_z \varphi_{ex}$ とする:

$$\begin{aligned} \langle \varphi_z \varphi_{ex} \rangle_0 &= \frac{\text{Tr} [e^{-\beta H_u} \varphi_z \varphi_{ex}]}{\text{Tr} [e^{-\beta H_u}]} = e^{\beta \Omega_0} \sum_{mn} {}_z \langle \Psi_m | \otimes {}_{ex} \langle n | e^{-\beta H_u} \varphi_z \varphi_{ex} | \Psi_m \rangle_z \otimes | n \rangle_{ex} \\ &= e^{\beta \Omega_0} \sum_{mn} {}_z \langle \Psi_m | e^{-\beta H_z} \varphi_z | \Psi_m \rangle_z \otimes {}_{ex} \langle n | e^{-\beta H_{ex}} \varphi_{ex} | n \rangle_{ex} \\ &= e^{\beta \Omega_0} \text{Tr}_z [e^{-\beta H_z} \varphi_z] \text{Tr}_{ex} [e^{-\beta H_{ex}} \varphi_{ex}] = \langle \varphi_z \rangle_z \langle \varphi_{ex} \rangle_{ex} \end{aligned} \quad (13.76)$$

$\Omega_0 = -\beta^{-1} \ln Z_0$ であり、 $\text{Tr}_z, \text{Tr}_{ex}$ はそれぞれ、ゼロモード部・励起部をトレースアウトする操作を表している。この定義より、大分配関数 (13.75) は

$$Z = \text{Tr} [e^{-\beta H_u} S(\beta, 0)] = e^{-\beta \Omega_0} \left\langle T \exp \left[- \int_0^\beta ds H_{int}(s) \right] \right\rangle_0 \quad (13.77)$$

$$\therefore \Omega = \Omega_0 - \frac{1}{\beta} \ln \left\langle T \exp \left[- \int_0^\beta ds H_{int}(s) \right] \right\rangle_0 \quad (13.78)$$

この $\langle \bullet \rangle_0$ が $\langle \bullet \rangle_z \langle \bullet \rangle_{ex}$ に分解できるかどうか後々議論する。

13.3.5 描像について

描像について少々雑に議論していたのではないだろうか？ゼロモード部と励起部の時間依存性についてもう少し詳細に見ていくことにする。 $H_{S,ex,z} = \varphi_{S,z} \varphi_{S,ex}$ として相互作用描像 $H_{ex,z}(t)$ を

$$H_{ex,z}(t) = e^{iH_u t} H_{S,ex,z} e^{-iH_u t} = e^{iH_{u,z} t} e^{iH_{u,ex} t} \varphi_{S,z} \varphi_{S,ex} e^{-iH_{u,z} t} e^{-iH_{u,ex} t} \quad (13.79)$$

φ_{ex} と $H_{u,ex}$ は $H_{u,z}$ と交換し、同様に φ_z と $H_{u,z}$ は $H_{u,ex}$ と交換することから

$$H_{ex,z}(t) = e^{iH_{u,z} t} \varphi_{S,z} e^{-iH_{u,z} t} e^{iH_{u,ex} t} \varphi_{S,ex} e^{-iH_{u,ex} t} = \varphi_z(t) \varphi_{ex}(t) \quad (13.80)$$

となる。(13.62) は正しそう。故に Heisenberg 描像と相互作用描像を結ぶユニタリー変換 $U(t)$ や S 行列 $S(t, t')$, それら時間発展は修正を受けない。

13.4 3次元有限温度 IZMF 系への応用

13.4.1 ハミルトニアン

3次元調和トラップ系で考える。秩序変数 ξ と共役モード η が実であるような流れのない凝縮体を仮定する。また ξ, η が時間依存しないことを要請する。以下、各記号は元論文の表式に従う。

相互作用描像におけるハミルトニアンを

$$H = H_1 + H_2 + H_3 + H_4 \quad (13.81)$$

と分割． φ の次数ごとに

$$H_1 = \int d\mathbf{x} [\varphi^\dagger(h_0 - \mu + g|\xi|^2)\xi + \varphi(h_0 - \mu + g|\xi|^2)\xi^*] \quad (13.82)$$

$$H_2 = \frac{1}{2} \int d\mathbf{x} \begin{pmatrix} \varphi^\dagger & -\varphi \end{pmatrix} T_0 \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi^\dagger \end{pmatrix} \quad (13.83)$$

$$H_3 = g \int d\mathbf{x} [\varphi^\dagger \varphi^\dagger \varphi \xi + \varphi^\dagger \varphi \varphi \xi^*] \quad (13.84)$$

$$H_4 = \frac{g}{2} \int d\mathbf{x} \varphi^\dagger \varphi^\dagger \varphi \varphi \quad (13.85)$$

としている．場の演算子を $\varphi = \varphi_z + \varphi_{ex}$ のように分割．それぞれ以下のようになる：

$$\varphi_z = -i\xi Q + \eta P \quad (13.86)$$

$$\varphi_{ex} = \sum_j [u_j a_j + v_j^* a_j^\dagger] \quad (13.87)$$

BdG 方程式の正ノルムの固有関数を $y_j = (u_j, v_j)^t$ としている．非摂動ハミルトニアン of ゼロモード部・励起部は

$$H_{u,z} = -(\delta\mu + 4C)P + \frac{I - 4D}{2}P^2 + 2BQPQ + 2DP^3 + \frac{1}{2}AQ^4 - 2BQ^2 + CQP^2Q + \frac{1}{2}EP^4 \quad (13.88)$$

$$H_{u,ex} = \int d\mathbf{x} \left[\varphi_{ex}^\dagger \mathcal{L} \varphi_{ex} + \frac{1}{2} \varphi_{ex} \mathcal{M}^* \varphi_{ex} + \frac{1}{2} \varphi_{ex}^\dagger \mathcal{M} \varphi_{ex}^\dagger \right] \quad (13.89)$$

とする．摂動項は

$$\begin{aligned} H_{\text{int}} = & \int d\mathbf{x} \left[\varphi_z^\dagger \mathcal{L} \varphi_{ex} + \varphi_{ex}^\dagger \mathcal{L} \varphi_z + \varphi_z \mathcal{M}^* \varphi_{ex} + \varphi_z^\dagger \mathcal{M} \varphi_{ex}^\dagger \right. \\ & + g\xi^* (2\varphi_z^\dagger \varphi_z \varphi_{ex} + \varphi_z^\dagger \varphi_{ex} \varphi_{ex} + 2\varphi_{ex}^\dagger \varphi_z \varphi_{ex} + \varphi_{ex}^\dagger \varphi_z \varphi_z) \\ & + g\xi (2\varphi_z^\dagger \varphi_{ex}^\dagger \varphi_z + \varphi_z^\dagger \varphi_z^\dagger \varphi_{ex} + 2\varphi_z^\dagger \varphi_{ex}^\dagger \varphi_{ex} + \varphi_{ex}^\dagger \varphi_{ex}^\dagger \varphi_z) \\ & + g(\varphi_z^\dagger \varphi_z^\dagger \varphi_z \varphi_{ex} + \varphi_z^\dagger \varphi_{ex}^\dagger \varphi_z \varphi_z + \varphi_{ex}^\dagger \varphi_{ex}^\dagger \varphi_{ex} \varphi_z + \varphi_{ex}^\dagger \varphi_z^\dagger \varphi_{ex} \varphi_{ex}) \\ & \left. + \frac{g}{2} (\varphi_z^\dagger \varphi_z^\dagger \varphi_{ex} \varphi_{ex} + 4\varphi_z^\dagger \varphi_z \varphi_{ex}^\dagger \varphi_{ex} + \varphi_z \varphi_z \varphi_{ex}^\dagger \varphi_{ex}^\dagger + \varphi_{ex}^\dagger \varphi_{ex}^\dagger \varphi_{ex} \varphi_{ex}) \right] \quad (13.90) \end{aligned}$$

のように，そこそこ煩雑です．ただし，摂動展開の線形部分だけを見るのであれば φ_{ex}, φ_z の奇数次は落ちてくれるのでもう少し簡単になるでしょう．もちろん 2 次まで見るとなるとかなりキツくなると思われます．

13.4.2 熱力学ポテンシャルの具体形

(13.78) の 1 次について具体形を書き下す．

$$\begin{aligned} T \exp \left[- \int_0^\beta ds H_{\text{int}}(s) \right] &= I - \int_0^\beta ds H_{\text{int}}(s) + \frac{1}{2!} \int_0^\beta ds \int_0^\beta ds' T[H_{\text{int}}(s) H_{\text{int}}(s')] + \dots \\ \therefore \left\langle T \exp \left[- \int_0^\beta ds H_{\text{int}}(s) \right] \right\rangle_0 &\simeq \left\langle I - \int_0^\beta ds H_{\text{int}}(s) \right\rangle_0 = 1 - \int_0^\beta ds \langle H_{\text{int}}(s) \rangle_0 \quad (13.91) \end{aligned}$$

ここで (13.91) の積分内の期待値はゼロモード項と励起項に分離でき，期待値が残るのは φ_z, φ_{ex} の 2 次及び φ_{ex} の 4 次のみである．書き下すと

$$\begin{aligned} \langle H_{\text{int}} \rangle_0 &= \int d\mathbf{x} \left[\langle \varphi_z^\dagger(s) \varphi_z^\dagger(s) \rangle_z \langle \varphi_{ex}(s) \varphi_{ex}(s) \rangle_{ex} + 4 \langle \varphi_z^\dagger(s) \varphi_z(s) \rangle_z \langle \varphi_{ex}^\dagger(s) \varphi_{ex}(s) \rangle_{ex} \right. \\ &\quad \left. + \langle \varphi_z(s) \varphi_z(s) \rangle_z \langle \varphi_{ex}^\dagger(s) \varphi_{ex}^\dagger(s) \rangle_{ex} + \langle \varphi_{ex}^\dagger(s) \varphi_{ex}^\dagger(s) \varphi_{ex}(s) \varphi_{ex}(s) \rangle_{ex} \right] \quad (13.92) \end{aligned}$$

(13.86)(13.87) の展開を用いると、効いてくるのは

$$\langle Q^2(s) \rangle_z \quad \langle P^2(s) \rangle_z \quad \langle a_{\mathbf{k}}^\dagger(s) a_{\mathbf{k}'}(s) \rangle_{ex} \quad \langle a_{\mathbf{k}_1}^\dagger(s) a_{\mathbf{k}_2}^\dagger(s) a_{\mathbf{k}_3}(s) a_{\mathbf{k}_4}(s) \rangle_{ex} \quad (13.93)$$

のような項たち。具体形は

$$\langle Q^2(s) \rangle_z = \frac{\sum_m \int dq q^2 |\Psi_m(q)|^2 e^{-\beta E_m}}{\sum_m e^{-\beta E_m}} \quad (13.94)$$

$$\langle P^2(s) \rangle_z = \frac{-\sum_m \frac{d^2}{dq^2} |\Psi_m(q)|^2 e^{-\beta E_m}}{\sum_m e^{-\beta E_m}} \quad (13.95)$$

$$\langle a_{\mathbf{k}}^\dagger(s) a_{\mathbf{k}'}(s) \rangle_{ex} = \frac{1}{e^{\beta \omega_{\mathbf{k}}} - 1} \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \equiv n_{\mathbf{k}} \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \quad (13.96)$$

$$\begin{aligned} \langle a_{\mathbf{k}_1}^\dagger(s) a_{\mathbf{k}_2}^\dagger(s) a_{\mathbf{k}_3}(s) a_{\mathbf{k}_4}(s) \rangle_{ex} &= \left(\overline{a_{\mathbf{k}_1}^\dagger a_{\mathbf{k}_2}^\dagger a_{\mathbf{k}_3} a_{\mathbf{k}_4}} + \overline{a_{\mathbf{k}_1}^\dagger a_{\mathbf{k}_2}^\dagger a_{\mathbf{k}_3} a_{\mathbf{k}_4}} \right) \\ &= n_{\mathbf{k}_1} n_{\mathbf{k}_2} (\delta_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_3} \delta_{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_4} + \delta_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_4} \delta_{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3}) = 2 n_{\mathbf{k}_1} n_{\mathbf{k}_2} \end{aligned} \quad (13.97)$$

である。ゼロモード期待値は q -表示を採用している²。 Ψ_m は非摂動ゼロモードハミルトニアン $H_{u,z}$ の固有状態。

13.4.3 $a(s)$ の時間依存性

相互作用描像なので演算子の時間依存性についての議論が必要。非摂動ハミルトニアンが

$$H_{u,ex} = \int d\mathbf{k} \omega_{\mathbf{k}} a^\dagger(t) a(t) \quad (13.98)$$

のように対角化されていれば、時間成分は

$$i\partial_t a(t) = [a(t), H_u] = \omega_{\mathbf{k}} a(t) \quad (13.99)$$

$$\therefore a(t) = a(0) e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t} \quad (13.100)$$

のようにくくり出せる。よって、 $a^\dagger(t) a(t), a^\dagger(t) a^\dagger(t) a(t) a(t)$ の時間依存性は消える。

13.4.4 $Q(s), P(s)$ の時間依存性

あるゼロモード演算子 $A(t)$ の期待値の時間発展は

$$i\partial_t \langle \Psi | A(t) | \Psi \rangle = \langle \Psi | A(t) H_u - H_u A(t) | \Psi \rangle = \langle \Psi | A(t) E_n - E_n A(t) | \Psi \rangle = 0 \quad (13.101)$$

のようにゼロになることがわかる。ゼロモードの真空はもちろん時間発展しない。励起部は時間発展するものの、それは位相の回転にあたる。ブラとケットで逆向きに回るため期待値には効いてこない。ということで、ゼロモード期待値も時間依存性を持たない。

13.4.5 Q を奇数個含むエルミートな期待値がゼロになること

ξ, η が実の場合で、かつ今回選んだゼロモードハミルトニアンは Q の奇数次が存在しないので、 p 表示したゼロモードハミルトニアンは実対称行列になっている。よって、 p 表示のゼロモード方程式

$$H_{u,z}(p) \langle p | \Psi \rangle = E_0 \langle p | \Psi \rangle \quad (13.102)$$

² q 表示というのは実空間の q ではなく、いわゆるゼロモード空間の q 表示。もちろん空間のサイズは実空間に依存せず、数値計算の際には適切なサイズを用意しなければならない。

において, $\langle p|\Psi\rangle$ を実の固有ベクトルとして選ぶことができる. $\langle p|\Psi\rangle$ が実であるならば

$$\begin{aligned}\langle \Psi|Q^3|\Psi\rangle &= \int dp \langle \Psi|Q^3|p\rangle \langle p|\Psi\rangle = \int dp \Psi(p) \left(i\frac{d}{dp}\right)^3 \Psi(p) = - \int dp \left(i\frac{d}{dp}\right)^3 \Psi(p) \Psi(p) \\ \therefore \int dp \Psi(p) \left(i\frac{d}{dp}\right)^3 \Psi(p) + \int dp \left(i\frac{d}{dp}\right)^3 \Psi(p) \Psi(p) &= 2 \langle \Psi|Q^3|\Psi\rangle = 0\end{aligned}\quad (13.103)$$

のように, Q の奇数次の期待値はゼロになる. 一行目では部分積分を用いている. 同様に, $QP + PQ$ などの Q の奇数次を含むエルミートな期待値もゼロになるが, QP はエルミートでないのでその限りではない.

13.4.6 (13.92) のさらなる具体形

時間依存性を考慮しなくて良いことがわかったのでさらに議論をすすめて数値計算が可能な形まで落としこむことにする. まず, (13.92) のゼロモード部について. 先ほど同様, Q のエルミートな奇数次項を落とすと

$$\begin{aligned}\langle \varphi_z^\dagger \varphi_z^\dagger \rangle_z &= \langle (-i\xi Q + \eta P)^\dagger (-i\xi Q + \eta P)^\dagger \rangle_z = -\xi^2 \langle Q^2 \rangle_z + \eta^2 \langle P^2 \rangle_z \\ \langle \varphi_z^\dagger \varphi_z \rangle_z &= \xi^2 \langle Q^2 \rangle_z + \eta^2 \langle P^2 \rangle_z - i\xi\eta \\ \langle \varphi_z \varphi_z \rangle_z &= -\xi^2 \langle Q^2 \rangle_z + \eta^2 \langle P^2 \rangle_z\end{aligned}\quad (13.104)$$

一方で励起部は

$$\langle \varphi_{ex} \varphi_{ex} \rangle_{ex} = \sum_j [2n_j + 1] u_j v_j^* \quad (13.105)$$

$$\langle \varphi_{ex}^\dagger \varphi_{ex} \rangle_{ex} = \sum_j [n_j(|u_j|^2 + |v_j|^2) + |v_j|^2] \quad (13.106)$$

相互作用項は

$$\langle \varphi_{ex}^\dagger \varphi_{ex}^\dagger \varphi_{ex} \varphi_{ex} \rangle_{ex} = \sum_{\mathbf{k}1, \mathbf{k}2, \mathbf{k}3, \mathbf{k}4} \left(u_{\mathbf{k}1} a_{\mathbf{k}1} + v_{\mathbf{k}1}^* a_{\mathbf{k}1}^\dagger \right)^\dagger \left(u_{\mathbf{k}2} a_{\mathbf{k}2} + v_{\mathbf{k}2}^* a_{\mathbf{k}2}^\dagger \right)^\dagger \left(u_{\mathbf{k}3} a_{\mathbf{k}3} + v_{\mathbf{k}3}^* a_{\mathbf{k}3}^\dagger \right) \left(u_{\mathbf{k}4} a_{\mathbf{k}4} + v_{\mathbf{k}4}^* a_{\mathbf{k}4}^\dagger \right) \quad (13.107)$$

である. 生成演算子と消滅演算子が対になっていない期待値は消えてしまうので, 残るものだけを書き下す:

$$\begin{aligned}\langle \varphi_{ex}^\dagger \varphi_{ex}^\dagger \varphi_{ex} \varphi_{ex} \rangle_{ex} &= \sum_{\mathbf{k}1, \mathbf{k}2, \mathbf{k}3, \mathbf{k}4} \left[u_{\mathbf{k}1}^* u_{\mathbf{k}2}^* u_{\mathbf{k}3} u_{\mathbf{k}4} \langle a_{\mathbf{k}1}^\dagger a_{\mathbf{k}2}^\dagger a_{\mathbf{k}3} a_{\mathbf{k}4} \rangle_{ex} + u_{\mathbf{k}1}^* v_{\mathbf{k}2} u_{\mathbf{k}3} v_{\mathbf{k}4}^* \langle a_{\mathbf{k}1}^\dagger a_{\mathbf{k}2} a_{\mathbf{k}3} a_{\mathbf{k}4}^\dagger \rangle_{ex} \right. \\ &\quad + u_{\mathbf{k}1}^* v_{\mathbf{k}2} v_{\mathbf{k}3}^* u_{\mathbf{k}4} \langle a_{\mathbf{k}1}^\dagger a_{\mathbf{k}2} a_{\mathbf{k}3}^\dagger a_{\mathbf{k}4} \rangle_{ex} + v_{\mathbf{k}1} u_{\mathbf{k}2}^* u_{\mathbf{k}3} v_{\mathbf{k}4}^* \langle a_{\mathbf{k}1} a_{\mathbf{k}2}^\dagger a_{\mathbf{k}3} a_{\mathbf{k}4}^\dagger \rangle_{ex} \\ &\quad \left. + v_{\mathbf{k}1} u_{\mathbf{k}2}^* v_{\mathbf{k}3}^* u_{\mathbf{k}4} \langle a_{\mathbf{k}1} a_{\mathbf{k}2}^\dagger a_{\mathbf{k}3}^\dagger a_{\mathbf{k}4} \rangle_{ex} + v_{\mathbf{k}1} v_{\mathbf{k}2} v_{\mathbf{k}3}^* v_{\mathbf{k}4}^* \langle a_{\mathbf{k}1} a_{\mathbf{k}2} a_{\mathbf{k}3}^\dagger a_{\mathbf{k}4}^\dagger \rangle_{ex} \right]\end{aligned}\quad (13.108)$$

Wick の定理で展開:

$$\begin{aligned}\langle a_{\mathbf{k}_1}^\dagger a_{\mathbf{k}_2}^\dagger a_{\mathbf{k}_3} a_{\mathbf{k}_4} \rangle_{ex} &= \left(\overline{a_{\mathbf{k}_1}^\dagger a_{\mathbf{k}_2}^\dagger} a_{\mathbf{k}_3} a_{\mathbf{k}_4} + \overline{a_{\mathbf{k}_1}^\dagger a_{\mathbf{k}_2}^\dagger} a_{\mathbf{k}_3} a_{\mathbf{k}_4} \right) \\ &= n_{\mathbf{k}_1} n_{\mathbf{k}_2} (\delta_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_3} \delta_{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_4} + \delta_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_4} \delta_{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3})\end{aligned}\quad (13.109)$$

$$\begin{aligned}\langle a_{\mathbf{k}_1}^\dagger a_{\mathbf{k}_2} a_{\mathbf{k}_3} a_{\mathbf{k}_4}^\dagger \rangle_{ex} &= \left(\overline{a_{\mathbf{k}_1}^\dagger} a_{\mathbf{k}_2} \overline{a_{\mathbf{k}_3} a_{\mathbf{k}_4}^\dagger} + \overline{a_{\mathbf{k}_1}^\dagger} a_{\mathbf{k}_2} \overline{a_{\mathbf{k}_3} a_{\mathbf{k}_4}^\dagger} \right) \\ &= n_{\mathbf{k}_1} (1 + n_{\mathbf{k}_3}) \delta_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} \delta_{\mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4} + n_{\mathbf{k}_1} (1 + n_{\mathbf{k}_2}) \delta_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_3} \delta_{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_4}\end{aligned}\quad (13.110)$$

$$\begin{aligned}\langle a_{\mathbf{k}_1}^\dagger a_{\mathbf{k}_2} a_{\mathbf{k}_3}^\dagger a_{\mathbf{k}_4} \rangle_{ex} &= \left(\overline{a_{\mathbf{k}_1}^\dagger} a_{\mathbf{k}_2} \overline{a_{\mathbf{k}_3}^\dagger} a_{\mathbf{k}_4} + \overline{a_{\mathbf{k}_1}^\dagger} a_{\mathbf{k}_2} \overline{a_{\mathbf{k}_3}^\dagger} a_{\mathbf{k}_4} \right) \\ &= n_{\mathbf{k}_1} n_{\mathbf{k}_3} \delta_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} \delta_{\mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4} + n_{\mathbf{k}_1} (1 + n_{\mathbf{k}_2}) \delta_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_4} \delta_{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3}\end{aligned}\quad (13.111)$$

$$\begin{aligned}\langle a_{\mathbf{k}_1} a_{\mathbf{k}_2}^\dagger a_{\mathbf{k}_3} a_{\mathbf{k}_4}^\dagger \rangle_{ex} &= \left(\overline{a_{\mathbf{k}_1} a_{\mathbf{k}_2}^\dagger} \overline{a_{\mathbf{k}_3} a_{\mathbf{k}_4}^\dagger} + \overline{a_{\mathbf{k}_1} a_{\mathbf{k}_2}^\dagger} \overline{a_{\mathbf{k}_3} a_{\mathbf{k}_4}^\dagger} \right) \\ &= (1 + n_{\mathbf{k}_1})(1 + n_{\mathbf{k}_3}) \delta_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} \delta_{\mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4} + (1 + n_{\mathbf{k}_1}) n_{\mathbf{k}_2} \delta_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_4} \delta_{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3}\end{aligned}\quad (13.112)$$

$$\begin{aligned}\langle a_{\mathbf{k}_1} a_{\mathbf{k}_2}^\dagger a_{\mathbf{k}_3}^\dagger a_{\mathbf{k}_4} \rangle_{ex} &= \left(\overline{a_{\mathbf{k}_1} a_{\mathbf{k}_2}^\dagger} \overline{a_{\mathbf{k}_3}^\dagger} a_{\mathbf{k}_4} + \overline{a_{\mathbf{k}_1} a_{\mathbf{k}_2}^\dagger} \overline{a_{\mathbf{k}_3}^\dagger} a_{\mathbf{k}_4} \right) \\ &= (1 + n_{\mathbf{k}_1}) n_{\mathbf{k}_3} \delta_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} \delta_{\mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4} + (1 + n_{\mathbf{k}_1}) n_{\mathbf{k}_2} \delta_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_3} \delta_{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_4}\end{aligned}\quad (13.113)$$

$$\begin{aligned}\langle a_{\mathbf{k}_1} a_{\mathbf{k}_2} a_{\mathbf{k}_3}^\dagger a_{\mathbf{k}_4}^\dagger \rangle_{ex} &= \left(\overline{a_{\mathbf{k}_1} a_{\mathbf{k}_2}} \overline{a_{\mathbf{k}_3}^\dagger} a_{\mathbf{k}_4}^\dagger + \overline{a_{\mathbf{k}_1} a_{\mathbf{k}_2}} \overline{a_{\mathbf{k}_3}^\dagger} a_{\mathbf{k}_4}^\dagger \right) \\ &= (1 + n_{\mathbf{k}_1})(1 + n_{\mathbf{k}_2}) (\delta_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_3} \delta_{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_4} + \delta_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_4} \delta_{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3})\end{aligned}\quad (13.114)$$

これらを (B.147) に代入すると

$$\begin{aligned}\langle \varphi_{ex}^\dagger \varphi_{ex}^\dagger \varphi_{ex} \varphi_{ex} \rangle_{ex} &= \sum_{j_1, j_2} \left[(2|u_{j_1}|^2 |u_{j_2}|^2 + u_{j_1}^* v_{j_1} v_{j_2}^* u_{j_2}) n_{j_1} n_{j_2} \right. \\ &\quad + (2 \operatorname{Re} [u_{j_1}^* v_{j_1} u_{j_2} v_{j_2}^*] + 4|u_{j_1}|^2 |v_{j_2}|^2) n_{j_1} (1 + n_{j_2}) \\ &\quad \left. + (2|v_{j_1}|^2 |v_{j_2}|^2 + v_{j_1} u_{j_1}^* u_{j_2} v_{j_2}^*) (1 + n_{j_1}) (1 + n_{j_2}) \right]\end{aligned}\quad (13.115)$$

となる。

以上で具体的にゼロモード・励起モードの期待値が計算できたので, (13.92) に (13.104), (13.105), (13.115) を代入する。まとめると, (13.92) は

$$\begin{aligned}\langle H_{\text{int}} \rangle_0 &= \int d\mathbf{x} \left[\sum_j \left\{ 2(-\xi^2 \langle Q^2 \rangle_z + \eta^2 \langle P^2 \rangle_z) (2n_j + 1) u_j v_j^* \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 4(\xi^2 \langle Q^2 \rangle_z + \eta^2 \langle P^2 \rangle_z - \xi \eta) [n_j (|u_j|^2 + |v_j|^2) + |v_j|^2] \right\} \right.\end{aligned}\quad (13.116)$$

$$\left. + \sum_{j_1, j_2} \left\{ (2|u_{j_1}|^2 |u_{j_2}|^2 + u_{j_1}^* v_{j_1} v_{j_2}^* u_{j_2}) n_{j_1} n_{j_2} \right. \right.\quad (13.117)$$

$$\left. + (2 \operatorname{Re} [u_{j_1}^* v_{j_1} u_{j_2} v_{j_2}^*] + 4|u_{j_1}|^2 |v_{j_2}|^2) n_{j_1} (1 + n_{j_2}) \right. \\ \left. + (2|v_{j_1}|^2 |v_{j_2}|^2 + v_{j_1} u_{j_1}^* u_{j_2} v_{j_2}^*) (1 + n_{j_1}) (1 + n_{j_2}) \right\} \Big] \quad (13.118)$$

13.4.7 ふたたび熱力学ポテンシャルの具体形

期待値が s 時間依存しないことを用いると Zeromode-BdG カップリングの摂動一次まで取り入れた熱力学ポテンシャルは以下の通り:

$$\Omega = \Omega_0 - \frac{1}{\beta} \ln \left\langle T \exp \left[- \int_0^\beta ds H_{\text{int}}(s) \right] \right\rangle_0 \quad (13.119)$$

$$\simeq \Omega_0 - \frac{1}{\beta} \ln \left(1 - \int_0^\beta ds \langle H_{\text{int}}(s) \rangle_0 \right) \quad (13.120)$$

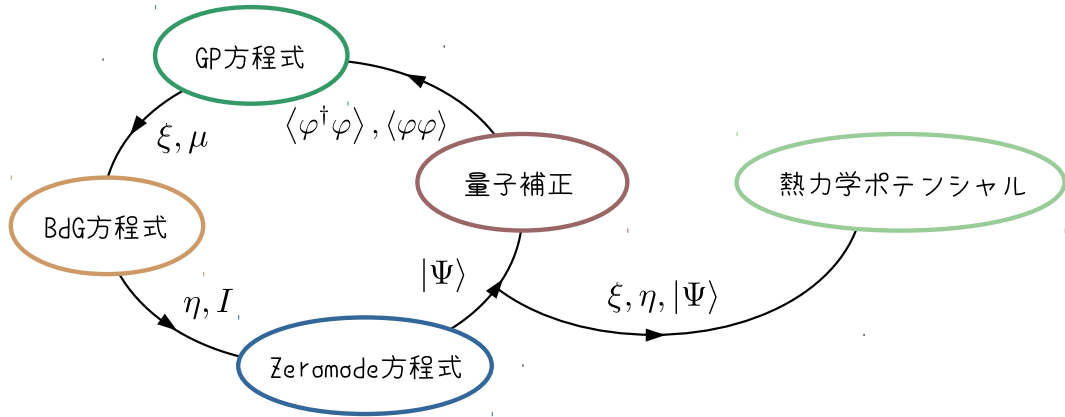
$$= \Omega_0 - \frac{1}{\beta} \ln(1 - \beta \langle H_{\text{int}} \rangle_0) \quad (13.121)$$

これで熱力学ポテンシャルの計算の準備が整った. また, 分配関数の表式では

$$Z \simeq Z_{u,z} Z_{u,ex} (1 - \beta \langle H_{\text{int}} \rangle_0) \quad (13.122)$$

である.

13.4.8 数値計算



左の自己無撞着方程式が収束すると $\xi, \eta, |\Psi\rangle$ が決まり, それによって分配関数 Z や, 熱力学ポテンシャル Ω を (摂動的に) 求めることが可能になる. Ω の摂動展開によって得られた熱力学関数は Zeromode-BdG 間の相互作用を一部取り入れたものになっている.

13.4.9 量子補正の摂動一次

有限温度系における量子補正の要は (ざっくり言って) 分割条件であり, 本来は相互作用描像で定義された真空 $|0\rangle$ について

$$\langle 0 | \varphi_H | 0 \rangle = 0 \quad (13.123)$$

を全ての時刻で満たさなければならない (真空は時間依存しない):

$$i\partial_t \varphi_H = [\varphi_H, H_{H,1} + H_{H,2} + H_{H,3} + H_{H,4}] = 0 \quad (13.124)$$

$$i\partial_t \langle 0 | \varphi_H | 0 \rangle = \langle 0 | [\varphi_H, H_{H,1} + H_{H,3}] | 0 \rangle = 0 \quad (13.125)$$

$$\therefore 0 = \left[h_0 - \mu + g(|\xi|^2 + 2 \langle 0 | \varphi_H^\dagger \varphi_H | 0 \rangle) \right] \xi + g \langle 0 | \varphi_H \varphi_H | 0 \rangle \xi^* \quad (13.126)$$

上のとおり, 本来 GP 方程式に含まれる量子補正は Heisenberg 描像の期待値なので議論に一貫性を持たせるためにはこちらにも摂動一次を取るべきだと考えられる.

$$\langle 0 | \varphi_H^\dagger(x) \varphi_H(x) | 0 \rangle = \sum_n \left(\frac{-i}{\hbar} \right)^n \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} ds_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} ds_n \langle 0 | H_{\text{int}}(s_1) \cdots H_{\text{int}}(s_n) \varphi^\dagger(x) \varphi(x) | 0 \rangle \quad (13.127)$$

$$\simeq \langle 0 | \varphi^\dagger(x) \varphi(x) | 0 \rangle - i \int_{-\infty}^{\infty} ds \langle 0 | T [H_{\text{int}}(s) \varphi^\dagger(x) \varphi(x)] | 0 \rangle \quad (13.128)$$

右辺第二項の被積分関数は

$$\begin{aligned} \langle 0 | T [H_{\text{int}}(s) \varphi^\dagger(x) \varphi(x)] | 0 \rangle &= \langle 0 | \int d\mathbf{y} T \left[\{ \varphi_z^\dagger \mathcal{L} \varphi_{ex} + \varphi_{ex}^\dagger \mathcal{L} \varphi_z + \varphi_z \mathcal{M}^* \varphi_{ex} + \varphi_z^\dagger \mathcal{M} \varphi_{ex}^\dagger \right. \\ &\quad + g \xi^* (2 \varphi_z^\dagger \varphi_z \varphi_{ex} + \varphi_z^\dagger \varphi_{ex} \varphi_{ex} + 2 \varphi_{ex}^\dagger \varphi_z \varphi_{ex} + \varphi_{ex}^\dagger \varphi_z \varphi_z) \\ &\quad + g \xi (2 \varphi_z^\dagger \varphi_{ex}^\dagger \varphi_z + \varphi_z^\dagger \varphi_z^\dagger \varphi_{ex} + 2 \varphi_z^\dagger \varphi_{ex}^\dagger \varphi_{ex} + \varphi_{ex}^\dagger \varphi_{ex}^\dagger \varphi_z) \\ &\quad + g (\varphi_z^\dagger \varphi_z^\dagger \varphi_z \varphi_{ex} + \varphi_z^\dagger \varphi_{ex}^\dagger \varphi_z \varphi_z + \varphi_{ex}^\dagger \varphi_{ex}^\dagger \varphi_{ex} \varphi_z + \varphi_{ex}^\dagger \varphi_z^\dagger \varphi_{ex} \varphi_{ex}) \\ &\quad \left. + \frac{g}{2} (\varphi_z^\dagger \varphi_z^\dagger \varphi_{ex} \varphi_{ex} + 4 \varphi_z^\dagger \varphi_z \varphi_{ex}^\dagger \varphi_{ex} + \varphi_z \varphi_z \varphi_{ex}^\dagger \varphi_{ex} + \varphi_{ex}^\dagger \varphi_{ex}^\dagger \varphi_{ex} \varphi_{ex}) \right\} \\ &\quad \times \left[\underline{\varphi_z^\dagger(x) \varphi_z(x)}_1 + \underline{\varphi_z^\dagger(x) \varphi_{ex}(x)}_2 + \underline{\varphi_{ex}^\dagger(x) \varphi_z(x)}_3 + \underline{\varphi_{ex}^\dagger(x) \varphi_{ex}(x)}_4 \right] | 0 \rangle \end{aligned} \quad (13.129)$$

である. $y = (\mathbf{y}, s)$ であり, \mathbf{y} 積分の引数 (y) は省略している. たとえば, $\underline{\varphi_z^\dagger(x) \varphi_z(x)}_1$ を含む項で生き残る期待値は

$$\begin{aligned} &g \int d\mathbf{y} \langle 0 | \left[\varphi_z^\dagger(y) \varphi_z^\dagger(y) \varphi_{ex}(y) \varphi_{ex}(y) + 4 \varphi_z^\dagger(y) \varphi_z(y) \varphi_{ex}^\dagger(y) \varphi_{ex}(y) \right. \\ &\quad \left. + \varphi_z(y) \varphi_z(y) \varphi_{ex}^\dagger(y) \varphi_{ex}^\dagger(y) + \varphi_{ex}^\dagger(y) \varphi_{ex}^\dagger(y) \varphi_{ex}(y) \varphi_{ex}(y) \right] \varphi_z^\dagger(x) \varphi_z(x) | 0 \rangle \end{aligned}$$

となる. これをいちいち演算子のまま処理するのは大変な上, ゼロモードを Green 関数的に取り扱うことは困難. なので, とりあえずゼロモードについては真面目に摂動計算をするのではなく, 摂動ハミルトニアン選択の段階で期待値を取って c-数的に取り扱う方向に進む. これなら相互作用ハミルトニアン内のゼロモードは BdG モードの係数としてのみ効いてくることになり, 摂動計算は一般的な自発的対称性の破れた Boson 場のものとほぼ同一になる. なので, ここから先はゼロモードのない非一様系の摂動計算について考えていくことにする.

Appendix.B 一様系の Formulation

B.1 場の展開

$$\varphi_{\text{ex}} = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int d\mathbf{k} \left[u_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} + v_{\mathbf{k}}^* a_{-\mathbf{k}}^\dagger \right] e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \quad (\text{B.130})$$

B.2 各演算子の期待値

$$\langle Q^2(s) \rangle_z = \frac{\sum_m q^2 \Psi_m(q) e^{-\beta E_m}}{\sum_m e^{-\beta E_m}} \quad (\text{B.131})$$

$$\langle P^2(s) \rangle_z = \frac{-\sum_m \frac{d^2}{dq^2} \Psi_m(q) e^{-\beta E_m}}{\sum_m e^{-\beta E_m}} \quad (\text{B.132})$$

$$\langle a_{\mathbf{k}}^\dagger(s) a_{\mathbf{k}'}(s) \rangle_{ex} = \frac{1}{e^{\beta \omega_{\mathbf{k}}} - 1} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \equiv n_{\mathbf{k}} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad (\text{B.133})$$

$$\begin{aligned} \langle a_{\mathbf{k}_1}^\dagger(s) a_{\mathbf{k}_2}^\dagger(s) a_{\mathbf{k}_3}(s) a_{\mathbf{k}_4}(s) \rangle_{ex} &= \left(\overline{a_{\mathbf{k}_1}^\dagger a_{\mathbf{k}_2}^\dagger a_{\mathbf{k}_3} a_{\mathbf{k}_4}} + \overline{a_{\mathbf{k}_1}^\dagger a_{\mathbf{k}_2}^\dagger a_{\mathbf{k}_3} a_{\mathbf{k}_4}} \right) \\ &= n_{\mathbf{k}_1} n_{\mathbf{k}_2} \{ \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3) \delta(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_4) + \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_4) \delta(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) \} \end{aligned} \quad (\text{B.134})$$

13.4.10 B.3 量子補正項

$$\langle \varphi_{ex} \varphi_{ex} \rangle_{ex} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k}_1 \int d\mathbf{k}_2 \left\langle (u_{\mathbf{k}_1} a_{\mathbf{k}_1} + v_{\mathbf{k}_1}^* a_{-\mathbf{k}_1}^\dagger) (u_{\mathbf{k}_2} a_{\mathbf{k}_2} + v_{\mathbf{k}_2}^* a_{-\mathbf{k}_2}^\dagger) \right\rangle_{ex} e^{i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{x}} \quad (\text{B.135})$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k}_1 \int d\mathbf{k}_2 \left\langle (u_{\mathbf{k}_1} a_{\mathbf{k}_1} + v_{\mathbf{k}_1}^* a_{-\mathbf{k}_1}^\dagger) (u_{\mathbf{k}_2} a_{\mathbf{k}_2} + v_{\mathbf{k}_2}^* a_{-\mathbf{k}_2}^\dagger) \right\rangle_{ex} e^{i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{x}} \quad (\text{B.136})$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k}_1 \int d\mathbf{k}_2 \left(u_{\mathbf{k}_1} v_{\mathbf{k}_2}^* \langle a_{\mathbf{k}_1} a_{-\mathbf{k}_2}^\dagger \rangle_{ex} \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) + v_{\mathbf{k}_1}^* u_{\mathbf{k}_2} \langle a_{-\mathbf{k}_1}^\dagger a_{\mathbf{k}_2} \rangle_{ex} \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \right) e^{i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{x}} \quad (\text{B.137})$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k}_1 \int d\mathbf{k}_2 \left(u_{\mathbf{k}_1} v_{-\mathbf{k}_1}^* \langle a_{\mathbf{k}_1} a_{\mathbf{k}_1}^\dagger \rangle_{ex} \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) + v_{\mathbf{k}_1}^* u_{-\mathbf{k}_1} \langle a_{-\mathbf{k}_1}^\dagger a_{-\mathbf{k}_1} \rangle_{ex} \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \right) \quad (\text{B.138})$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k}_1 \left(u_{\mathbf{k}_1} v_{-\mathbf{k}_1}^* \langle a_{\mathbf{k}_1} a_{\mathbf{k}_1}^\dagger \rangle_{ex} + v_{\mathbf{k}_1}^* u_{-\mathbf{k}_1} \langle a_{-\mathbf{k}_1}^\dagger a_{-\mathbf{k}_1} \rangle_{ex} \right) \quad (\text{B.139})$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k}_1 (1 + 2n_{\mathbf{k}}) u_{\mathbf{k}_1} v_{\mathbf{k}_1} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{+0}^{\infty} dk \, k^2 \int_0^\pi d\theta \, \sin \theta \int_0^{2\pi} d\phi (1 + 2n_k) u_k v_k \quad (\text{B.140})$$

$$= -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{+0}^{\infty} dk \frac{k^2 \mathcal{M}}{\omega_k} (2n_k + 1) \quad (\text{B.141})$$

となる. k 積分について $k = 0$ は含まれていないことに注意. この計算では

1. $u_{\pm \mathbf{k}} = u_{\mathbf{k}}, v_{\pm \mathbf{k}} = v_{\mathbf{k}}, n_{\pm \mathbf{k}} = n_{\mathbf{k}}$ であること
2. ξ, η が実であることで $v_{\mathbf{k}}^* = v_{\mathbf{k}}, u_{\mathbf{k}}^* = u_{\mathbf{k}}$
3. $\langle a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^\dagger \rangle_{ex} = \langle a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} + [a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}}^\dagger] \rangle_{ex} = 1 + n_{\mathbf{k}}$ であること
4. $\int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{k} \langle a_{-\mathbf{k}}^\dagger a_{-\mathbf{k}} \rangle_{ex} = \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{k} \langle a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} \rangle_{ex} = \int_{-\infty}^{\infty} dk n_k$ であること

などを用いている。各パラメータは以下の通り：

$$\begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \begin{pmatrix} \sqrt{\mathcal{L}_k + \omega_k} \\ -\sqrt{\mathcal{L}_k - \omega_k} \end{pmatrix} \quad (\text{B.142})$$

$$\mathcal{M} = g(\xi^2 - \langle \varphi \varphi \rangle) \quad \mathcal{L}_k = \frac{\hbar^2}{2m} k^2 + \mathcal{M} \quad \omega_k = \sqrt{\varepsilon_k(\varepsilon_k + 2gn_0)} = \sqrt{\mathcal{L}_k^2 - \mathcal{M}^2} \quad (\text{B.143})$$

同様にして、

$$\langle \varphi_{ex}^\dagger \varphi_{ex} \rangle_{ex} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk \frac{k^2}{\omega_k} [(2n_k + 1)\mathcal{L}_k - \omega_k] \quad (\text{B.144})$$

$$\langle \varphi_{ex}^\dagger \varphi_{ex} \rangle_{ex} = -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk \frac{k^2 \mathcal{M}}{\omega_k} (2n_k + 1) \quad (\text{B.145})$$

相互作用項は

$$\begin{aligned} \langle \varphi_{ex}^\dagger \varphi_{ex}^\dagger \varphi_{ex} \varphi_{ex} \rangle_{ex} &= \frac{1}{(2\pi)^6} \int d\mathbf{k}_1 \int d\mathbf{k}_2 \int d\mathbf{k}_3 \int d\mathbf{k}_4 e^{i(-\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) \cdot \mathbf{x}} \\ &\times \left\langle (u_{\mathbf{k}_1} a_{\mathbf{k}_1}^\dagger + v_{\mathbf{k}_1} a_{-\mathbf{k}_1}) (u_{\mathbf{k}_2} a_{\mathbf{k}_2}^\dagger + v_{\mathbf{k}_2} a_{-\mathbf{k}_2}) (u_{\mathbf{k}_3} a_{\mathbf{k}_3} + v_{\mathbf{k}_3} a_{-\mathbf{k}_3}^\dagger) (u_{\mathbf{k}_4} a_{\mathbf{k}_4} + v_{\mathbf{k}_4} a_{-\mathbf{k}_4}^\dagger) \right\rangle_{ex} \end{aligned} \quad (\text{B.146})$$

である。生成演算子と消滅演算子が対になっていない期待値は消えてしまうので、残るものだけを書き下す：

$$\begin{aligned} \langle \varphi_{ex}^\dagger \varphi_{ex}^\dagger \varphi_{ex} \varphi_{ex} \rangle_{ex} &= \frac{1}{(2\pi)^6} \int d\mathbf{k}_1 \int d\mathbf{k}_2 \int d\mathbf{k}_3 \int d\mathbf{k}_4 e^{i(-\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) \cdot \mathbf{x}} \\ &\times \left[u_{\mathbf{k}_1} u_{\mathbf{k}_2} u_{\mathbf{k}_3} u_{\mathbf{k}_4} \left\langle a_{\mathbf{k}_1}^\dagger a_{\mathbf{k}_2}^\dagger a_{\mathbf{k}_3} a_{\mathbf{k}_4} \right\rangle_{ex} + u_{\mathbf{k}_1} v_{\mathbf{k}_2} u_{\mathbf{k}_3} v_{\mathbf{k}_4} \left\langle a_{\mathbf{k}_1}^\dagger a_{-\mathbf{k}_2} a_{\mathbf{k}_3} a_{-\mathbf{k}_4}^\dagger \right\rangle_{ex} \right. \\ &+ u_{\mathbf{k}_1} v_{\mathbf{k}_2} v_{\mathbf{k}_3} u_{\mathbf{k}_4} \left\langle a_{\mathbf{k}_1}^\dagger a_{-\mathbf{k}_2} a_{-\mathbf{k}_3}^\dagger a_{\mathbf{k}_4} \right\rangle_{ex} + v_{\mathbf{k}_1} u_{\mathbf{k}_2} u_{\mathbf{k}_3} v_{\mathbf{k}_4} \left\langle a_{-\mathbf{k}_1} a_{\mathbf{k}_2}^\dagger a_{\mathbf{k}_3} a_{-\mathbf{k}_4}^\dagger \right\rangle_{ex} \\ &\left. + v_{\mathbf{k}_1} u_{\mathbf{k}_2} v_{\mathbf{k}_3} u_{\mathbf{k}_4} \left\langle a_{-\mathbf{k}_1} a_{\mathbf{k}_2}^\dagger a_{-\mathbf{k}_3}^\dagger a_{\mathbf{k}_4} \right\rangle_{ex} + v_{\mathbf{k}_1} v_{\mathbf{k}_2} v_{\mathbf{k}_3} v_{\mathbf{k}_4} \left\langle a_{-\mathbf{k}_1} a_{-\mathbf{k}_2} a_{-\mathbf{k}_3}^\dagger a_{-\mathbf{k}_4}^\dagger \right\rangle_{ex} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.147})$$

Wick の定理で展開：

$$\begin{aligned} \left\langle a_{\mathbf{k}_1}^\dagger a_{\mathbf{k}_2}^\dagger a_{\mathbf{k}_3} a_{\mathbf{k}_4} \right\rangle_{ex} &= \left(\overline{a_{\mathbf{k}_1}^\dagger a_{\mathbf{k}_2}^\dagger} \overline{a_{\mathbf{k}_3} a_{\mathbf{k}_4}} + \overline{a_{\mathbf{k}_1}^\dagger a_{\mathbf{k}_2}^\dagger} \overline{a_{\mathbf{k}_3} a_{\mathbf{k}_4}} \right) \\ &= n_{\mathbf{k}_1} n_{\mathbf{k}_2} \{ \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3) \delta(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_4) + \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_4) \delta(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) \} \end{aligned} \quad (\text{B.148})$$

$$\begin{aligned} \left\langle a_{\mathbf{k}_1}^\dagger a_{-\mathbf{k}_2} a_{\mathbf{k}_3} a_{-\mathbf{k}_4}^\dagger \right\rangle_{ex} &= \left(\overline{a_{\mathbf{k}_1}^\dagger a_{-\mathbf{k}_2}} \overline{a_{\mathbf{k}_3} a_{-\mathbf{k}_4}^\dagger} + \overline{a_{\mathbf{k}_1}^\dagger a_{-\mathbf{k}_2}} \overline{a_{\mathbf{k}_3} a_{-\mathbf{k}_4}^\dagger} \right) \\ &= n_{\mathbf{k}_1} (1 + n_{\mathbf{k}_3}) \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \delta(\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) + n_{\mathbf{k}_1} (1 + n_{\mathbf{k}_2}) \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3) \delta(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_4) \end{aligned} \quad (\text{B.149})$$

$$\begin{aligned} \left\langle a_{\mathbf{k}_1}^\dagger a_{-\mathbf{k}_2} a_{-\mathbf{k}_3}^\dagger a_{\mathbf{k}_4} \right\rangle_{ex} &= \left(\overline{a_{\mathbf{k}_1}^\dagger a_{-\mathbf{k}_2}} \overline{a_{-\mathbf{k}_3}^\dagger a_{\mathbf{k}_4}} + \overline{a_{\mathbf{k}_1}^\dagger a_{-\mathbf{k}_2}} \overline{a_{-\mathbf{k}_3}^\dagger a_{\mathbf{k}_4}} \right) \\ &= n_{\mathbf{k}_1} n_{\mathbf{k}_3} \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \delta(\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) + n_{\mathbf{k}_1} (1 + n_{\mathbf{k}_2}) \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_4) \delta(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) \end{aligned} \quad (\text{B.150})$$

$$\begin{aligned} \left\langle a_{-\mathbf{k}_1} a_{\mathbf{k}_2}^\dagger a_{\mathbf{k}_3} a_{-\mathbf{k}_4}^\dagger \right\rangle_{ex} &= \left(\overline{a_{-\mathbf{k}_1} a_{\mathbf{k}_2}^\dagger} \overline{a_{\mathbf{k}_3} a_{-\mathbf{k}_4}^\dagger} + \overline{a_{-\mathbf{k}_1} a_{\mathbf{k}_2}^\dagger} \overline{a_{\mathbf{k}_3} a_{-\mathbf{k}_4}^\dagger} \right) \\ &= (1 + n_{\mathbf{k}_1}) (1 + n_{\mathbf{k}_3}) \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \delta(\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) + (1 + n_{\mathbf{k}_1}) n_{\mathbf{k}_2} \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_4) \delta(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) \end{aligned} \quad (\text{B.151})$$

$$\begin{aligned} \left\langle a_{-\mathbf{k}_1} a_{\mathbf{k}_2}^\dagger a_{-\mathbf{k}_3}^\dagger a_{\mathbf{k}_4} \right\rangle_{ex} &= \left(\overline{a_{-\mathbf{k}_1} a_{\mathbf{k}_2}^\dagger} \overline{a_{-\mathbf{k}_3}^\dagger a_{\mathbf{k}_4}} + \overline{a_{-\mathbf{k}_1} a_{\mathbf{k}_2}^\dagger} \overline{a_{-\mathbf{k}_3}^\dagger a_{\mathbf{k}_4}} \right) \\ &= (1 + n_{\mathbf{k}_1}) n_{\mathbf{k}_3} \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \delta(\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) + (1 + n_{\mathbf{k}_1}) n_{\mathbf{k}_2} \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3) \delta(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_4) \end{aligned} \quad (\text{B.152})$$

$$\begin{aligned} \left\langle a_{-\mathbf{k}_1} a_{-\mathbf{k}_2} a_{-\mathbf{k}_3}^\dagger a_{-\mathbf{k}_4}^\dagger \right\rangle_{ex} &= \left(\overline{a_{-\mathbf{k}_1} a_{-\mathbf{k}_2}} \overline{a_{-\mathbf{k}_3}^\dagger a_{-\mathbf{k}_4}^\dagger} + \overline{a_{-\mathbf{k}_1} a_{-\mathbf{k}_2}} \overline{a_{-\mathbf{k}_3}^\dagger a_{-\mathbf{k}_4}^\dagger} \right) \\ &= (1 + n_{\mathbf{k}_1}) (1 + n_{\mathbf{k}_2}) \{ \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3) \delta(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_4) + \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_4) \delta(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) \} \end{aligned} \quad (\text{B.153})$$

これらを (B.147) に代入すると

$$\langle \varphi_{ex}^\dagger \varphi_{ex}^\dagger \varphi_{ex} \varphi_{ex} \rangle_{ex} = \frac{1}{(2\pi)^6} [2(I_u'^2 + I_v'^2 + I_u' I_v'^+ + I_{uv} I_{uv}^+) + I_{uv}^2 + I_u' I_v'^+ + I_{uv}^2 + I_u'^+ I_v'] \quad (\text{B.154})$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^6} [2(I_u'^2 + I_v'^2 + I_u' I_v'^+) + (I_{uv} + I_{uv}^+)^2 + I_u' I_v'^+ + I_u'^+ I_v'] \quad (\text{B.155})$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^6} [2(I_u'^2 + I_v'^2) + (I_{uv} + I_{uv}^+)^2 + 4I_u' I_v'^+] \quad (\text{B.156})$$

となる。ただし

$$\begin{aligned} I_u' &= \int d\mathbf{k} n_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}^2 & I_v' &= \int d\mathbf{k} n_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}}^2 & I_{uv} &= \int d\mathbf{k} n_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}} \\ I_{uv}^+ &= \int d\mathbf{k} (1 + n_{\mathbf{k}}) u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}} & I_v'^+ &= \int d\mathbf{k} (1 + n_{\mathbf{k}}) v_{\mathbf{k}}^2 & I_u'^+ &= \int d\mathbf{k} (1 + n_{\mathbf{k}}) u_{\mathbf{k}}^2 \end{aligned} \quad (\text{B.157})$$

であり, かつ $I_u' I_v'^+ = I_u'^+ I_v'$ であることを用いている。

以上で具体的にゼロモード・励起モードの期待値が計算できたので, (13.92) に (13.104), (13.105), (13.115) を代入する。 I はすべて x 依存性を持たないので空間積分は系の体積 V が出てくるだけ。まとめると, (13.92) は

$$\begin{aligned} \langle H_{\text{int}} \rangle_0 &= \int d\mathbf{x} \left[-\frac{2}{(2\pi)^2} (-\xi^2 \langle Q^2 \rangle_z + \eta^2 \langle P^2 \rangle_z) \int_0^\infty dk \frac{k^2 \mathcal{M}}{\omega_k} (2n_k + 1) \right. \\ &+ \frac{4}{(2\pi)^2} (\xi^2 \langle Q^2 \rangle_z + \eta^2 \langle P^2 \rangle_z) \int_0^\infty dk \frac{k^2}{\omega_k} \{ (2n_k + 1) \mathcal{L}_k - \omega_k \} \\ &+ \left. \frac{1}{(2\pi)^6} \left\{ 2(I_u'^2 + I_v'^2) + (I_{uv} + I_{uv}^+)^2 + 4I_u' I_v'^+ \right\} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.158})$$

$$+ \frac{1}{(2\pi)^6} \left\{ 2(I_u'^2 + I_v'^2) + (I_{uv} + I_{uv}^+)^2 + 4I_u' I_v'^+ \right\} \quad (\text{B.159})$$

第14章 研究：ゼロモードがない非一様接触型 Boson 系について

- t の並進対称性から Fourier 変換可能 (k の Fourier 変換は不可). Sokhotski-Plemelj の公式をちゃんと処理できる.
- まずは BdG モードについての 1 次の摂動をちゃんと計算する!
- それができたら, proper-diagram の計算ができるのでは? ただし有限サイズ系なので離散になっている. 一様系のラダー近似は離散系にどれだけ適応可能か?
- ゼロモードについては平均場みたいにしてハミルトニアンに繰り込む形にする. そうすれば Feynman diagram が使える. ゼロモードの (厳密な) Wick は諦める.

まずはゼロモードがない場合の摂動一次をしっかりと計算することを目指す.

14.1 1 次の Green 関数の計算

摂動ハミルトニアンを

$$H_{\text{int}} = g \int dx \left(\xi \varphi_{\text{ex}}^\dagger(x) \varphi_{\text{ex}}^\dagger(x) \varphi_{\text{ex}}(x) + \xi^*(x) \varphi_{\text{ex}}^\dagger(x) \varphi_{\text{ex}}(x) \varphi_{\text{ex}}(x) + \frac{1}{2} \varphi_{\text{ex}}^\dagger(x) \varphi_{\text{ex}}^\dagger(x) \varphi_{\text{ex}}(x) \varphi_{\text{ex}}(x) \right) \quad (14.1)$$

のようにとったとき, 量子補正の摂動一次は

$$-i \int_{-\infty}^{\infty} ds \langle T[H_{\text{int}}(s) \varphi_{\text{ex}}^\dagger(x) \varphi_{\text{ex}}(x)] \rangle \quad (14.2)$$

$$= \frac{-ig}{2} \int_{-\infty}^{\infty} ds \int d\mathbf{y} \langle T[\varphi_{\text{ex}}^\dagger(y) \varphi_{\text{ex}}^\dagger(y) \varphi_{\text{ex}}(y) \varphi_{\text{ex}}(y) \varphi^\dagger(x) \varphi(x)] \rangle \quad (14.3)$$

である. ハミルトニアンの奇数次項は摂動一次でも奇数次になるので落ちる. 以降は $\varphi_{\text{ex}} \rightarrow \varphi$ と書くことにする. これを Wick の定理で分解する¹:

$$\frac{-ig}{2} \int_{-\infty}^{\infty} ds \int d\mathbf{y} \langle T[\varphi^\dagger(y) \varphi^\dagger(y) \varphi(y) \varphi(y) \varphi^\dagger(x) \varphi(x)] \rangle \quad (14.4)$$

$$\begin{aligned} = \frac{-ig}{2} \int_{-\infty}^{\infty} ds \int d\mathbf{y} \left[2 \langle T[\varphi^\dagger(y) \varphi^\dagger(x)] \rangle \langle T[\varphi^\dagger(y) \varphi(x)] \rangle \langle \varphi(y) \varphi(y) \rangle \right. \\ \left. + 4 \langle T[\varphi^\dagger(y) \varphi^\dagger(x)] \rangle \langle T[\varphi(y) \varphi(x)] \rangle \langle \varphi^\dagger(y) \varphi(y) \rangle \right. \\ \left. + 2 \langle T[\varphi(y) \varphi^\dagger(x)] \rangle \langle T[\varphi(y) \varphi(x)] \rangle \langle \varphi^\dagger(y) \varphi^\dagger(y) \rangle \right. \\ \left. + 4 \langle T[\varphi(y) \varphi^\dagger(x)] \rangle \langle T[\varphi^\dagger(y) \varphi(x)] \rangle \langle \varphi^\dagger(y) \varphi(y) \rangle \right] \quad (14.5) \end{aligned}$$

ここには同時刻 Green 関数が含まれるが, 相互作用ハミルトニアンの 4 次には常に φ^\dagger が φ の左側にあることを根拠に定義される.

¹ $\langle \varphi^\dagger(x) \varphi(x) \rangle$ の組み合わせもありそうだが, disconnected なダイアグラムになるので除外している.

14.1.1 Green 関数の 1 行目の具体計算

いくつかの Green 関数に分解できたので、そのうちの一つを具体的に計算する。まず上式の第一項を計算することを目標にする

$$\langle T[\varphi^\dagger(y)\varphi(x)] \rangle = \langle \theta(t-s)\varphi(x)\varphi^\dagger(y) + \theta(s-t)\varphi^\dagger(y)\varphi(x) \rangle \quad (14.6)$$

$$\begin{aligned} &= \left\langle \theta(t-s) \sum_{j_1, j_2} \left(u_{j_1}(\mathbf{x})a_{j_1}(t) + v_{j_1}^*(\mathbf{x})a_{j_1}^\dagger(t) \right) \left(u_{j_2}^*(\mathbf{y})a_{j_2}^\dagger(s) + v_{j_2}(\mathbf{y})a_{j_2}(s) \right) \right\rangle \\ &\quad + \left\langle \theta(s-t) \sum_{j_1, j_2} \left(u_{j_1}^*(\mathbf{y})a_{j_1}^\dagger(s) + v_{j_1}(\mathbf{y})a_{j_1}(s) \right) \left(u_{j_2}(\mathbf{x})a_{j_2}(t) + v_{j_2}^*(\mathbf{x})a_{j_2}^\dagger(t) \right) \right\rangle \\ &= \theta(t-s) \sum_{j_1} \left(u_{j_1}(\mathbf{x})u_{j_1}^*(\mathbf{y}) \langle a_{j_1}(t)a_{j_1}^\dagger(s) \rangle + v_{j_1}^*(\mathbf{x})v_{j_1}(\mathbf{y}) \langle a_{j_1}^\dagger(t)a_{j_1}(s) \rangle \right) \\ &\quad + \theta(s-t) \sum_{j_1} \left(u_{j_1}^*(\mathbf{y})u_{j_1}(\mathbf{x}) \langle a_{j_1}^\dagger(s)a_{j_1}(t) \rangle + v_{j_1}(\mathbf{y})v_{j_1}^*(\mathbf{x}) \langle a_{j_1}(s)a_{j_1}^\dagger(t) \rangle \right) \quad (14.7) \end{aligned}$$

ここでは、いずれ $\langle a_{j_1}^\dagger a_{j_2} \rangle, \langle a_{j_1} a_{j_2}^\dagger \rangle$ からクロネッカーデルタ δ_{j_1, j_2} が出てくることを見越して和をひとつ減らしている。同様に

$$\langle T[\varphi^\dagger(y)\varphi^\dagger(x)] \rangle = \langle \theta(t-s)\varphi^\dagger(x)\varphi^\dagger(y) + \theta(s-t)\varphi^\dagger(y)\varphi^\dagger(x) \rangle \quad (14.8)$$

$$\begin{aligned} &= \left\langle \theta(t-s) \sum_{j_1, j_2} \left(u_{j_1}^*(\mathbf{x})a_{j_1}^\dagger(t) + v_{j_1}(\mathbf{x})a_{j_1}(t) \right) \left(u_{j_2}^*(\mathbf{y})a_{j_2}^\dagger(s) + v_{j_2}(\mathbf{y})a_{j_2}(s) \right) \right\rangle \\ &\quad + \left\langle \theta(s-t) \sum_{j_1, j_2} \left(u_{j_1}^*(\mathbf{y})a_{j_1}^\dagger(s) + v_{j_1}(\mathbf{y})a_{j_1}(s) \right) \left(u_{j_2}^*(\mathbf{x})a_{j_2}^\dagger(t) + v_{j_2}(\mathbf{x})a_{j_2}(t) \right) \right\rangle \\ &= \theta(t-s) \sum_{j_1} \left(u_{j_1}^*(\mathbf{x})v_{j_1}(\mathbf{y}) \langle a_{j_1}^\dagger(t)a_{j_1}(s) \rangle + v_{j_1}(\mathbf{x})u_{j_1}^*(\mathbf{y}) \langle a_{j_1}(t)a_{j_1}^\dagger(s) \rangle \right) \\ &\quad + \theta(s-t) \sum_{j_1} \left(u_{j_1}^*(\mathbf{y})v_{j_1}(\mathbf{x}) \langle a_{j_1}^\dagger(s)a_{j_1}(t) \rangle + v_{j_1}(\mathbf{y})u_{j_1}^*(\mathbf{x}) \langle a_{j_1}(s)a_{j_1}^\dagger(t) \rangle \right) \quad (14.9) \end{aligned}$$

次は T 積がない項:

$$\langle \varphi(y)\varphi(y) \rangle = \left\langle \sum_{j_1, j_2} \left(u_{j_1}(\mathbf{x})a_{j_1}(t) + v_{j_1}^*(\mathbf{x})a_{j_1}^\dagger(t) \right) \left(u_{j_2}(\mathbf{y})a_{j_2}(s) + v_{j_2}^*(\mathbf{y})a_{j_2}^\dagger(s) \right) \right\rangle \quad (14.10)$$

$$= \sum_{j_1} \left(u_{j_1}(\mathbf{x})v_{j_1}^*(\mathbf{y}) \langle a_{j_1}(t)a_{j_1}^\dagger(s) \rangle + v_{j_1}^*(\mathbf{x})u_{j_1}(\mathbf{y}) \langle a_{j_1}^\dagger(t)a_{j_1}(s) \rangle \right) \quad (14.11)$$

ここまでできたら上 3 つの積をまとめる θ 関数のクロスタームは消えることを利用すると以下ようになる:

$$\{ \langle T[\varphi^\dagger(y)\varphi^\dagger(x)] \rangle \langle T[\varphi^\dagger(y)\varphi(x)] \rangle \langle \varphi(y)\varphi(y) \rangle \}_{\mu\nu\lambda}^{\mu'\nu'\lambda'} \quad (14.12)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{j_1, j_2, j_3} \theta(t-s) \times \\ &\quad \left\{ u_1(\mathbf{x})u_1^*(\mathbf{y}) \langle a_1 a_1^\dagger \rangle e^{-i\omega_1(t-s)} \right\}^\mu \left\{ v_2(\mathbf{x})u_2^*(\mathbf{y}) \langle a_2 a_2^\dagger \rangle e^{-i\omega_2(t-s)} \right\}^\nu \left\{ u_3(\mathbf{x})v_3^*(\mathbf{y}) \langle a_3 a_3^\dagger \rangle e^{-i\omega_3(t-s)} \right\}^\lambda \\ &\quad \left\{ v_1^*(\mathbf{x})v_1(\mathbf{y}) \langle a_1^\dagger a_1 \rangle e^{i\omega_1(t-s)} \right\} \left\{ u_2^*(\mathbf{x})v_2(\mathbf{y}) \langle a_2^\dagger a_2 \rangle e^{i\omega_2(t-s)} \right\} \left\{ v_3^*(\mathbf{x})u_3(\mathbf{y}) \langle a_3^\dagger a_3 \rangle e^{i\omega_3(t-s)} \right\} \\ &+ \sum_{j_1, j_2, j_3} \theta(s-t) \times \\ &\quad \left\{ u_1^*(\mathbf{y})u_1(\mathbf{x}) \langle a_1^\dagger a_1 \rangle e^{-i\omega_1(t-s)} \right\}^{\mu'} \left\{ u_2^*(\mathbf{y})v_2(\mathbf{x}) \langle a_2^\dagger a_2 \rangle e^{-i\omega_2(t-s)} \right\}^{\nu'} \left\{ u_3(\mathbf{x})v_3^*(\mathbf{y}) \langle a_3 a_3^\dagger \rangle e^{-i\omega_3(t-s)} \right\}^{\lambda'} \\ &\quad \left\{ v_1(\mathbf{y})v_1^*(\mathbf{x}) \langle a_1 a_1^\dagger \rangle e^{i\omega_1(t-s)} \right\} \left\{ v_2(\mathbf{y})u_2^*(\mathbf{x}) \langle a_2 a_2^\dagger \rangle e^{i\omega_2(t-s)} \right\} \left\{ v_3^*(\mathbf{x})u_3(\mathbf{y}) \langle a_3^\dagger a_3 \rangle e^{i\omega_3(t-s)} \right\} \quad (14.13) \end{aligned}$$

ここで $j_i \rightarrow i$ と省略し、かつ項が多すぎるのでテンソル形式を用いている。 μ, ν, λ はそれぞれ $(-, +)$ の 2 種類。テンソルの添字は上が $-$ に対応しており、時間成分は $-i\omega\tau$ 、下は $+$ に対応しており、時間成分は $i\omega\tau$ である。これを時間 $t - s = \tau$ について Fourier 変換する：

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\tau e^{i\omega\tau} \{ \langle T[\varphi^\dagger(y)\varphi^\dagger(x)] \rangle \langle T[\varphi^\dagger(y)\varphi(x)] \rangle \langle \varphi(y)\varphi(y) \rangle \}_{\mu'\nu'\lambda'}^{\mu\nu\lambda} \quad (14.14)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\tau e^{i\omega\tau} \sum_{j_1, j_2, j_3} \theta(\tau) \times$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1(\mathbf{x})u_1^*(\mathbf{y}) \langle a_1^\dagger a_1 \rangle e^{-i\omega_1\tau} \\ v_1^*(\mathbf{x})v_1(\mathbf{y}) \langle a_1^\dagger a_1 \rangle e^{i\omega_1\tau} \end{array} \right\}^\mu \left\{ \begin{array}{l} v_2(\mathbf{x})u_2^*(\mathbf{y}) \langle a_2^\dagger a_2 \rangle e^{-i\omega_2\tau} \\ u_2^*(\mathbf{x})v_2(\mathbf{y}) \langle a_2^\dagger a_2 \rangle e^{i\omega_2\tau} \end{array} \right\}^\nu \left\{ \begin{array}{l} u_3(\mathbf{x})v_3^*(\mathbf{y}) \langle a_3^\dagger a_3 \rangle e^{-i\omega_3\tau} \\ v_3^*(\mathbf{x})u_3(\mathbf{y}) \langle a_3^\dagger a_3 \rangle e^{i\omega_3\tau} \end{array} \right\}^\lambda$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\tau e^{i\omega\tau} \sum_{j_1, j_2, j_3} \theta(-\tau) \times$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1^*(\mathbf{y})u_1(\mathbf{x}) \langle a_1^\dagger a_1 \rangle e^{-i\omega_1\tau} \\ v_1(\mathbf{y})v_1^*(\mathbf{x}) \langle a_1^\dagger a_1 \rangle e^{i\omega_1\tau} \end{array} \right\}^{\mu'} \left\{ \begin{array}{l} u_2^*(\mathbf{y})v_2(\mathbf{x}) \langle a_2^\dagger a_2 \rangle e^{-i\omega_2\tau} \\ v_2(\mathbf{y})u_2^*(\mathbf{x}) \langle a_2^\dagger a_2 \rangle e^{i\omega_2\tau} \end{array} \right\}^{\nu'} \left\{ \begin{array}{l} u_3(\mathbf{x})v_3^*(\mathbf{y}) \langle a_3^\dagger a_3 \rangle e^{-i\omega_3\tau} \\ v_3^*(\mathbf{x})u_3(\mathbf{y}) \langle a_3^\dagger a_3 \rangle e^{i\omega_3\tau} \end{array} \right\}^{\lambda'} \quad (14.15)$$

Sokhotski-Plemelj の公式²

$$\int_{-\infty}^{\infty} ds \theta(t-s) e^{-i\varepsilon(s-t)} = \int_{-\infty}^t ds e^{-i\varepsilon(s-t)} = \mathcal{P} \frac{i}{\varepsilon} + \pi\delta(\varepsilon) \quad (14.16)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} ds \theta(s-t) e^{-i\varepsilon(s-t)} = \int_t^{\infty} ds e^{-i\varepsilon(s-t)} = -\mathcal{P} \frac{i}{\varepsilon} + \pi\delta(\varepsilon) \quad (14.17)$$

を用いて τ -積分を処理：

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\tau e^{i\omega\tau} \{ \langle T[\varphi^\dagger(y)\varphi^\dagger(x)] \rangle \langle T[\varphi^\dagger(y)\varphi(x)] \rangle \langle \varphi(y)\varphi(y) \rangle \}_{\mu'\nu'\lambda'}^{\mu\nu\lambda} \quad (14.18)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j_1, j_2, j_3}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1(\mathbf{x})u_1^*(\mathbf{y}) \langle a_1^\dagger a_1 \rangle \\ v_1^*(\mathbf{x})v_1(\mathbf{y}) \langle a_1^\dagger a_1 \rangle \end{array} \right\}^\mu \left\{ \begin{array}{l} v_2(\mathbf{x})u_2^*(\mathbf{y}) \langle a_2^\dagger a_2 \rangle \\ u_2^*(\mathbf{x})v_2(\mathbf{y}) \langle a_2^\dagger a_2 \rangle \end{array} \right\}^\nu \left\{ \begin{array}{l} u_3(\mathbf{x})v_3^*(\mathbf{y}) \langle a_3^\dagger a_3 \rangle \\ v_3^*(\mathbf{x})u_3(\mathbf{y}) \langle a_3^\dagger a_3 \rangle \end{array} \right\}^\lambda \left(-\mathcal{P} \frac{i}{\omega - \omega^{\mu\nu\lambda}} + \pi\delta(\omega - \omega^{\mu\nu\lambda}) \right)$$

$$+ \left\{ \begin{array}{l} u_1^*(\mathbf{y})u_1(\mathbf{x}) \langle a_1^\dagger a_1 \rangle \\ v_1(\mathbf{y})v_1^*(\mathbf{x}) \langle a_1^\dagger a_1 \rangle \end{array} \right\}^{\mu'} \left\{ \begin{array}{l} u_2^*(\mathbf{y})v_2(\mathbf{x}) \langle a_2^\dagger a_2 \rangle \\ v_2(\mathbf{y})u_2^*(\mathbf{x}) \langle a_2^\dagger a_2 \rangle \end{array} \right\}^{\nu'} \left\{ \begin{array}{l} u_3(\mathbf{x})v_3^*(\mathbf{y}) \langle a_3^\dagger a_3 \rangle \\ v_3^*(\mathbf{x})u_3(\mathbf{y}) \langle a_3^\dagger a_3 \rangle \end{array} \right\}^{\lambda'} \left(\mathcal{P} \frac{i}{\omega - \omega^{\mu'\nu'\lambda'}} + \pi\delta(\omega - \omega^{\mu'\nu'\lambda'}) \right) \quad (14.19)$$

ここで μ, ν, λ の符号はそのまま ω_i の符号に対応しており、例えば

$$\omega^{-+-} = -\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 \quad (14.20)$$

である。時間の Fourier 変換である ω を主値積分とデルタ関数という形でくり出せたので、これを逆 Fourier 変換しつつ、 s -積分を実行する：

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int ds \int d\omega e^{-i\omega\tau} \left(-\mathcal{P} \frac{i}{\omega - \omega^{\mu\nu\lambda}} + \pi\delta(\omega - \omega^{\mu\nu\lambda}) \right) \quad (14.21)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int ds \left(-i\mathcal{P} \int \frac{d\omega e^{-i\omega\tau}}{\omega - \omega^{\mu\nu\lambda}} + \frac{\pi}{2} e^{-i\omega^{\mu\nu\lambda}\tau} \right) \quad (14.22)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(-2\pi i \mathcal{P} \int \frac{d\omega \delta(\omega) e^{-i\omega t}}{\omega - \omega^{\mu\nu\lambda}} + \frac{\pi}{2} \delta(\omega^{\mu\nu\lambda}) e^{-i\omega^{\mu\nu\lambda} t} \right) \quad (14.23)$$

$$\simeq \sqrt{2\pi} \frac{i}{\omega^{\mu\nu\lambda}} \quad (14.24)$$

² θ 関数の積分表示を使ってすぐに証明可能。

最後の行では $\omega^{\mu\nu\lambda}$ がぴったりゼロになることはあまり無いだろうという仮定をしている³。これで (14.5) の一行目は

$$\begin{aligned}
& \frac{-ig}{2} \int_{-\infty}^{\infty} ds \int d\mathbf{y} \langle T[\varphi^\dagger(y)\varphi^\dagger(y)\varphi(y)\varphi(y)\varphi^\dagger(x)\varphi(x)] \rangle_{1 \text{ 行目}} \\
&= \frac{-ig}{2} \int_{-\infty}^{\infty} ds \int d\mathbf{y} [2 \langle T[\varphi^\dagger(y)\varphi^\dagger(x)] \rangle \langle T[\varphi^\dagger(y)\varphi(x)] \rangle \langle \varphi(y)\varphi(y) \rangle] \\
&\simeq g \int d\mathbf{y} \sum_{j_1, j_2, j_3} \frac{1}{\omega^{\mu\nu\lambda}} \left\{ \begin{matrix} u_1(\mathbf{x})u_1^*(\mathbf{y}) \langle a_1 a_1^\dagger \rangle \\ v_1^*(\mathbf{x})v_1(\mathbf{y}) \langle a_1^\dagger a_1 \rangle \end{matrix} \right\}^\mu \left\{ \begin{matrix} v_2(\mathbf{x})u_2^*(\mathbf{y}) \langle a_2 a_2^\dagger \rangle \\ u_2^*(\mathbf{x})v_2(\mathbf{y}) \langle a_2^\dagger a_2 \rangle \end{matrix} \right\}^\nu \left\{ \begin{matrix} u_3(\mathbf{x})v_3^*(\mathbf{y}) \langle a_3 a_3^\dagger \rangle \\ v_3^*(\mathbf{x})u_3(\mathbf{y}) \langle a_3^\dagger a_3 \rangle \end{matrix} \right\}^\lambda \\
&\quad - \frac{1}{\omega^{\mu'\nu'\lambda'}} \left\{ \begin{matrix} u_1^*(\mathbf{y})u_1(\mathbf{x}) \langle a_1^\dagger a_1 \rangle \\ v_1(\mathbf{y})v_1^*(\mathbf{x}) \langle a_1 a_1^\dagger \rangle \end{matrix} \right\}^{\mu'} \left\{ \begin{matrix} u_2^*(\mathbf{y})v_2(\mathbf{x}) \langle a_2^\dagger a_2 \rangle \\ v_2(\mathbf{y})u_2^*(\mathbf{x}) \langle a_2 a_2^\dagger \rangle \end{matrix} \right\}^{\nu'} \left\{ \begin{matrix} u_3(\mathbf{x})v_3^*(\mathbf{y}) \langle a_3 a_3^\dagger \rangle \\ v_3^*(\mathbf{x})u_3(\mathbf{y}) \langle a_3^\dagger a_3 \rangle \end{matrix} \right\}^{\lambda'} \quad (14.25)
\end{aligned}$$

面倒ではあるが、書き下すことができた。時間成分は無くなったが、添字 μ, ν, λ についてはテンソルの上部が $-$ 、下部が $+$ に対応している⁴。もちろん $\langle a^\dagger a \rangle, \langle aa^\dagger \rangle$ は Bose-Einstein 分布関数で表せる。

テンソル積の引き算になっているのでうまく消える項があるかもしれないし、実際に計算するときは ξ が実であることを仮定して u, v も実になるので、もっと綺麗になるかもしれない⁵。

後に All-order の計算をすることになるが、その定式化が完了してかつ実効的に計算が可能であれば今回のように摂動一次に限って計算する必要はなくなるが、今回の Green 関数の時間成分の処理に関するテクニックは今後(恐らく)重要になってくるので、その時のための練習だと思えば良い。

14.1.2 Green 関数の 2 行目以降

手順は同じなので省略。

14.2 All-order の計算に向けて: その 1

非一様系で Ladder diagram の無限次を取り込んで計算することを目指す。まず一様系ではどのようにして無限次まで取り入れることを可能にしているのか、非一様系ではどのような困難があるのかを確認することがまず目標とするところ。

14.2.1 1 次の self-energy の具体形

自発的対称性が破れている Boson 系を扱っているので、 $\langle T[\varphi\varphi] \rangle, \langle T[\varphi^\dagger\varphi^\dagger] \rangle$ のような anomalous-Green 関数 (異常 Green 関数) が値を持つことになる。それに応じて Green 関数は 2×2 のテンソルに拡張される。

Dyson 方程式:

$$G^{\mu\nu}(x_1, x_2) = G_0^{\mu\nu}(x_1, x_2) + \int d^4y_1 d^4y_2 G_0^{\mu\mu'}(x_1, y_1) \Sigma^{\mu'\nu'}(y_1, y_2) G^{\nu'\nu}(y_2, x_2) \quad (14.26)$$

について、1 次の項を拾ってくる:

$$G_1^{\mu\nu}(x_1, x_2) = \int d^4y_1 d^4y_2 G_0^{\mu\mu'}(x_1, y_1) \Sigma_1^{\mu'\nu'}(y_1, y_2) G_0^{\nu'\nu}(y_2, x_2) \quad (14.27)$$

³残すべきかもしれないが、少なくともこのデルタ関数を処理するような積分は現れないし、引数の $\omega^{\mu\nu\lambda}$ は離散的。仮にトラップポテンシャル $V(x)$ が無ければ励起は等間隔になる。例えば $\omega_{j_1=1} - \omega_{j_2=0} - \omega_{j_3=0} = 2\hbar\omega - \hbar\omega - \hbar\omega = 0$ のようにきれいにゼロになってしまう。他にも無数の組み合わせが存在する。今回は相互作用込みの BdG なので厳密に等間隔にはならない。

⁴もちろん、区別さえつければ添字はなんだっていい。

⁵流石にゼロになることは無いと信じたいが... まだ計算してないのでそれもわからない。

Green 関数及び self-energy は

$$G^{\mu\nu}(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} G^{11}(x_1, x_2) & G^{12}(x_1, x_2) \\ G^{21}(x_1, x_2) & G^{22}(x_1, x_2) \end{bmatrix}^{\mu\nu} = \left[\begin{array}{c} \left\langle T \left[\varphi_H(x_1) \varphi_H^\dagger(x_2) \right] \right\rangle \\ \left\langle T \left[\varphi_H^\dagger(x_1) \varphi_H(x_2) \right] \right\rangle \end{array} \right]^{\mu\nu} \quad (14.28)$$

$$\Sigma^{\mu\nu}(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \Sigma^{11}(x_1, x_2) & \Sigma^{12}(x_1, x_2) \\ \Sigma^{21}(x_1, x_2) & \Sigma^{22}(x_1, x_2) \end{bmatrix}^{\mu\nu} \quad (14.29)$$

これに対して具体的な Green 関数の摂動一次は

$$\begin{aligned} G_1^{22}(x, x) &= \int d^4 y_1 d^4 y_2 G_0^{2\mu'}(x, y_1) \Sigma_1^{\mu'\nu'}(y_1, y_2) G_0^{\nu'2}(y_2, x) \\ &= \frac{-ig}{2} \int d^4 y_1 \left[2 \langle T[\varphi^\dagger(x) \varphi^\dagger(y_1)] \rangle \langle \varphi(y_1) \varphi(y_1) \rangle \langle T[\varphi^\dagger(y_1) \varphi(x)] \rangle \right. \\ &\quad + 4 \langle T[\varphi^\dagger(x) \varphi^\dagger(y_1)] \rangle \langle \varphi^\dagger(y_1) \varphi(y_1) \rangle \langle T[\varphi(y_1) \varphi(x)] \rangle \\ &\quad + 2 \langle T[\varphi^\dagger(x) \varphi(y_1)] \rangle \langle \varphi^\dagger(y_1) \varphi^\dagger(y_1) \rangle \langle T[\varphi(y_1) \varphi(x)] \rangle \\ &\quad \left. + 4 \langle T[\varphi^\dagger(x) \varphi(y_1)] \rangle \langle \varphi^\dagger(y_1) \varphi(y_1) \rangle \langle T[\varphi^\dagger(y_1) \varphi(x)] \rangle \right] \end{aligned} \quad (14.30)$$

$$\quad (14.31)$$

なので, 1 次の Dyson 方程式と比較することで self-energy を求めることができる:

$$\Sigma_1^{\mu'\nu'}(y_1, y_2) = -ig\delta(y_1 - y_2) \begin{bmatrix} 2 \langle \varphi^\dagger(y_1) \varphi(y_1) \rangle & \langle \varphi^\dagger(y_1) \varphi^\dagger(y_1) \rangle \\ \langle \varphi(y_1) \varphi(y_1) \rangle & 2 \langle \varphi^\dagger(y_1) \varphi(y_1) \rangle \end{bmatrix}^{\mu'\nu'} \quad (14.32)$$

14.2.2 梯子近似された Bethe-Salpeter 方程式へ

前節で 1 次の self-energy を求めたが, これは Green 関数の 1 次の展開を self-energy で言い換えただけである. 以下, self-energy についてもう少し詳しく考えてみる. repulsive core(1 点で無限大になるようなポテンシャル)を持つような系では図 14.1 のような梯子型のダイアグラムが強く寄与する⁶. 太線は Full-Green 関数ではなく, G_0

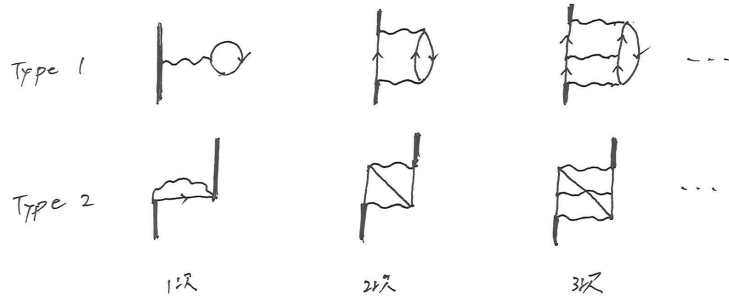


図 14.1: 梯子近似されたダイアグラム

を表しているので注意. このような梯子型のダイアグラムに限るとき, self-energy は図 14.2 のようにまとめることができる. 図 14.1 のラダーと見比べてみると, y_i, y'_i が相互作用していることがわかるが, 今は接触型相互作用を考えているので $y'_i = y_i$ としてよい. このとき, self-energy について Type1 と Type2 は全く同じものになる. さらに Type1 と Type2 について Γ が共通であることが重要 (図 14.3). さて, 以上のダイアグラムを参考に G, Σ, Γ についての方程式を書き下していく. 今回は簡単のため異常伝搬を含まない 1 成分の Green 関数について考えることにする. Dyson 方程式は

$$G(x_1, x_2) = G_0(x_1, x_2) + \int d^4 y_1 d^4 y_2 G_0(x_1, y_1) \Sigma^*(y_1, y_2) G(y_2, x_2) \quad (14.33)$$

⁶らしい. ちゃんとした理由はまだよく理解できてない.

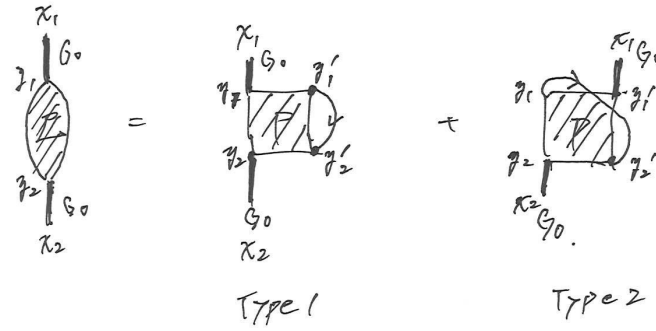


図 14.2: 梯子近似された self-energy

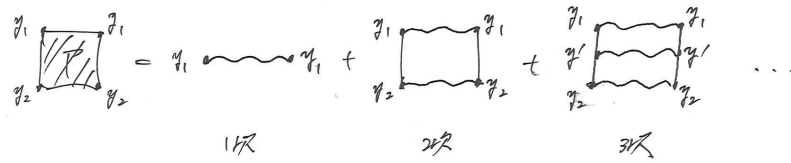


図 14.3: Γ が含むダイアグラム

であり proper self-energy は先ほどのダイアグラムから

$$\Sigma^*(y_1, y_2) = 2\Gamma(y_1, y_2)G_0(y_2, y_1) \quad (14.34)$$

のように書くことができる. さらに Γ は

$$\begin{aligned} \Gamma(y_1, y_2) = & \frac{-ig}{2}\delta(y_1 - y_2) + \left(\frac{-ig}{2}\right)^2 G_0^2(y_1, y_2) \\ & + \left(\frac{-ig}{2}\right)^3 \int dy' G_0^2(y_1, y') G_0^2(y', y_2) \\ & + \left(\frac{-ig}{2}\right)^4 \int dy' dy'' G_0^2(y_1, y') G(y', y'') G_0^2(y'', y_2) + \dots \end{aligned} \quad (14.35)$$

のような無限級数になるが, これは以下のような積分方程式に書きなおすことができる:

$$\Gamma(y_1, y_2) = \frac{-ig}{2}\delta(y_1 - y_2) + \frac{-ig}{2} \int dy' G_0^2(y_1, y') \Gamma(y', y_2) \quad (14.36)$$

これが梯子近似された Bethe-Salpeter 方程式と呼ばれるもの. この積分方程式はラダーダイアグラムを無限次取り入れたものになっている. この方程式群は (ラダー近似された) Full-Green 関数と Γ について二重の積分方程式になっている⁷. 非一様系なので Fourier 変換ができず, 解析解を求めることは多分できない. ただ, 場の展開をまだ一切用いていないのでもう少し先に進める可能性はあるが, いずれどこかで近似をするなり数値計算に投げるなりは必要になるだろう⁸.

14.2.3 異常伝搬を含む Bethe-Salpeter 方程式

(以下, Wick の定理に起因する Green 関数の係数に関する議論が非常に曖昧になります. とりあえずは定式化を優先することにしますが, 係数について後々慎重に議論する必要があります.)

⁷さすがにこれは計算が大変そうなので, (14.33) は一次までにするのが現実的か?

⁸積分方程式の数値計算のノウハウは TFD 屋さん (桑原さん・北原) あたりが持っていそう.

さて、(14.36) を 2×2 に拡張する。素直に以下のような拡張を考えてみることにする：

$$G^{\mu\nu}(x_1, x_2) = G_0^{\mu\nu}(x_1, x_2) + \int d^4 y_1 d^4 y_2 G_0^{\mu\mu'}(x_1, y_1) \Sigma^{\mu'\nu'}(y_1, y_2) G^{\nu'\nu}(y_2, x_2) \quad (14.37)$$

$$\Sigma^{*,\mu'\nu'}(y_1, y_2) = 2\Gamma^{\mu'\lambda}(y_1, y_2) G_0^{\lambda\nu'}(y_2, y_1) \quad (14.38)$$

$$\Gamma^{\mu'\lambda}(y_1, y_2) = \frac{-ig}{2} \delta^{\mu'\lambda}(y_1 - y_2) + \frac{-ig}{2} \int dy' G_0^{\mu'\lambda',2}(y_1, y') \Gamma^{\lambda',\lambda}(y', y_2) \quad (14.39)$$

これが (14.32) を再現しているかどうかを調べる：

$$G_1^{22}(x, x) = \int d^4 y_1 d^4 y_2 G_0^{2\mu'}(x, y_1) \Sigma_1^{*,\mu'\nu'}(y_1, y_2) G_0^{\nu'2}(y_2, x) \quad (14.40)$$

$$= 2 \int d^4 y_1 d^4 y_2 G_0^{2\mu'}(x, y_1) \Gamma^{\mu'\lambda}(y_1, y_2) G_0^{\lambda\nu'}(y_2, y_1) G_0^{\nu'2}(y_2, x) \quad (14.41)$$

$$= -ig \int d^4 y_1 d^4 y_2 G_0^{2\mu'}(x, y_1) \delta^{\mu'\lambda}(y_1 - y_2) G_0^{\lambda\nu'}(y_2, y_1) G_0^{\nu'2}(y_2, x) \quad (14.42)$$

具体的に書き下すと

$$G_1^{22}(x, x) = -ig \int d^4 y_1 d^4 y_2 \left[G_0^{21}(x, y_1) \delta(y_1 - y_2) G_0^{11}(y_2, y_1) G_0^{12}(y_2, x) \right. \quad (14.43)$$

$$+ G_0^{22}(x, y_1) \delta(y_1 - y_2) G_0^{21}(y_2, y_1) G_0^{12}(y_2, x) \quad (14.44)$$

$$+ G_0^{21}(x, y_1) \delta(y_1 - y_2) G_0^{12}(y_2, y_1) G_0^{22}(y_2, x) \quad (14.45)$$

$$+ G_0^{22}(x, y_1) \delta(y_1 - y_2) G_0^{22}(y_2, y_1) G_0^{22}(y_2, x) \left. \right] \quad (14.46)$$

同時刻 Green 関数は左側にダガーを持ってくる約束なので $G^{22}(y_2, y_1) = G^{11}(y_2, y_1)$ とすることができる。しかしこれでは (14.32) と係数が一致していない。場当たりのにはクロネッカーデルタを

$$G_1^{\mu\nu}(x, x) = -ig(1 + \delta_{\mu'\nu'}) \int d^4 y_1 d^4 y_2 G_0^{\mu\mu'}(x, y_1) \delta(y_1 - y_2) G_0^{\mu'\nu'}(y_2, y_1) G_0^{\nu'\nu}(y_2, x) \quad (14.47)$$

のように追加すれば一致するが、2 次以上を考えても本当にこれでいいのかが⁹・これを元の方方程式のどこに追加すればよいかなどはよく考えなければならない¹⁰。

... 考え中...

14.2.4 摂動ハミルトニアン 3 次の取り扱い

摂動ハミルトニアンには 3 次の項もあった。これは摂動 1 次には現れてこないが、2 次以降はその限りではなく、かつ 3 次の項は秩序変数を含むためその寄与も大きいのではないかと考えられる¹¹。摂動ハミルトニアンを

$$\begin{aligned} H_{\text{int}} &= g \int dx \left(\xi \varphi_{\text{ex}}^\dagger(x) \varphi_{\text{ex}}^\dagger(x) \varphi_{\text{ex}}(x) + \xi^*(x) \varphi_{\text{ex}}^\dagger(x) \varphi_{\text{ex}}(x) \varphi_{\text{ex}}(x) + \frac{1}{2} \varphi_{\text{ex}}^\dagger(x) \varphi_{\text{ex}}^\dagger(x) \varphi_{\text{ex}}(x) \varphi_{\text{ex}}(x) \right) \\ &= \mathcal{H}_3 + \mathcal{H}_3^\dagger + \mathcal{H}_4 \end{aligned} \quad (14.48)$$

⁹ そもそも今はラダーダイアグラムしか拾ってこない近似をしているので、2 次以上ではそもそも一致することはないので深く考えすぎなくてもよいかも。が、1 次については当然一致しなければならない。

¹⁰ そもそも計算が合ってるのかも不安ではある。2 次以上もやってみるのがいいんだろうが、とてもめんどくさい。self-energy の対角成分と非対角成分ではそもそも係数の付け方の規則が違うとかの可能性もある？

¹¹ 粒子が十分に凝縮している領域を考えると ξ が効いてくるから、という単純な理由。もちろん、c-数である ξ と演算子の φ の大小比較はできないので確実に効いてくるという根拠は無いが...

と置いたとき Green 関数の摂動 2 次の展開は以下の通り:

$$\begin{aligned} G_2^{22}(x, x) &= (-i)^2 \int ds_1 ds_2 \langle T[H_{\text{int}}(s_1)H_{\text{int}}(s_2)\varphi^\dagger(x)\varphi(x)] \rangle \\ &= (-i)^2 \int ds_1 ds_2 \langle T[\mathcal{H}_4(s_1)\mathcal{H}_4(s_2)\varphi^\dagger(x)\varphi(x)] \rangle \end{aligned} \quad (14.49)$$

$$+ \langle T[\mathcal{H}_3(s_1)\mathcal{H}_3(s_2)\varphi^\dagger(x)\varphi(x)] \rangle \quad (14.50)$$

$$+ \langle T[\mathcal{H}_3(s_1)\mathcal{H}_3^\dagger(s_2)\varphi^\dagger(x)\varphi(x)] \rangle \quad (14.51)$$

$$+ \langle T[\mathcal{H}_3^\dagger(s_1)\mathcal{H}_3(s_2)\varphi^\dagger(x)\varphi(x)] \rangle \quad (14.52)$$

$$+ \langle T[\mathcal{H}_3^\dagger(s_1)\mathcal{H}_3^\dagger(s_2)\varphi^\dagger(x)\varphi(x)] \rangle \quad (14.53)$$

\mathcal{H}_4 の項は既に前節の梯子近似された Bethe-Salpeter 方程式に組み込まれている. \mathcal{H}_3 が 2 つ連結された項 4 つの項は図 (14.4) のようなダイアグラムになる.

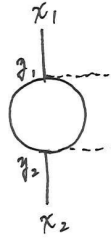
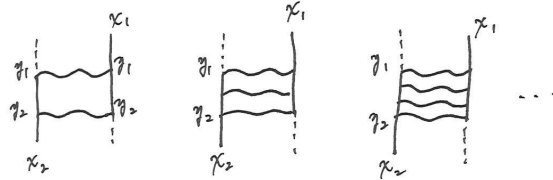


図 14.4: \mathcal{H}_3 が 2 つ連結されたダイアグラム

破線は凝縮線で, 秩序変数 ξ に対応している. さて, 上のような \mathcal{H}_3 を含むダイアグラムをどのように集めてくるかが重要になるが, 今回も前節に倣ってラダーダイアグラムを引っ張ってくることにする. 3 次を含むラダーダイアグラムは例えば以下の通り:

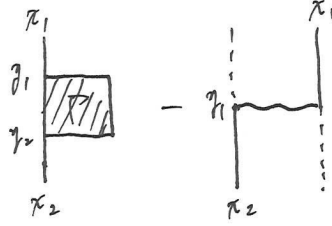


これは 2 つの \mathcal{H}_3 の間に \mathcal{H}_4 が挿入されているようなダイアグラムを拾っていることに对应する¹². これは前節同様 Γ を用いて表すことができそうである:

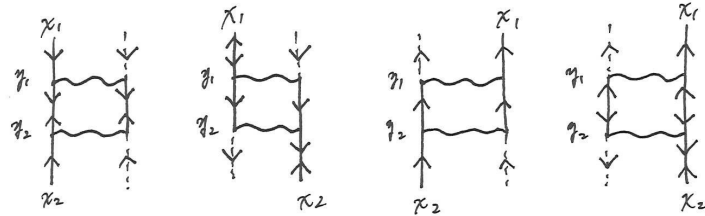
$$\begin{aligned} & \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} + \text{Diagram 4} \\ &= 4 \times \text{Diagram 5} \end{aligned}$$

¹² \mathcal{H}_3 は端に 2 つあるだけで, 結局ラダーの元になっているのは \mathcal{H}_4 である. これで \mathcal{H}_3 の寄与を十分に取り入れることができているかは不明. \mathcal{H}_3 のみで構成されるような proper なダイアグラムが効いてくるなら, それを Full-order で取り入れるのが理想だが, そのような定式化はまだできていない. 出来るかどうか勉強してみなければわからない.

しかしながら, $\Gamma(y_1, y_2)$ は $\delta(y_1 - y_2)$ を含んでおり, これに対応する展開 $\xi(y_1)\xi^*(y_1)\delta(y_1 - y_2)G_0(x_1, y_1)G_0(y_2, x_2)$ が摂動 2 次に見えないことは明らか. ということで, この見えない項を Γ から引いてこれを self-energy とする:



ここまでくれば, あとは ξ が複素共役になるか否かについての規則を考える. Green 関数の 2 次の展開について (14.50)-(14.53) についてのダイアグラムは以下の通り:



凝縮線の向きは $\Gamma(y_1, y_2)$ に接続された Green 関数の y_1, y_2 成分の向きと同じであり, つまり μ', ν' に依存しているということである. ξ の向きに応じて展開係数が変化することはないことがわかる. このことから, 3 次のダイアグラムを加味した self-energy は

$$\Sigma^{*,\mu'\nu'}(y_1, y_2) = 2\Gamma^{\mu'\lambda}(y_1, y_2)G_0^{\lambda\nu'}(y_2, y_1) + 4\Xi^{\mu'\nu'}\left[\Gamma^{\mu'\nu'}(y_1, y_2) + \frac{ig}{2}\delta^{\mu'\nu'}(y_1 - y_2)\right] \quad (14.54)$$

$$\Xi^{\mu'\nu'} = \begin{bmatrix} \xi^*(y_1)\xi(y_2) & \xi^*(y_1)\xi^*(y_2) \\ \xi(y_1)\xi(y_2) & \xi(y_1)\xi^*(y_2) \end{bmatrix}^{\mu'\nu'} \quad (14.55)$$

いずれ具体計算の際に ξ が実であることを仮定するので, その仮定の下ではもう少しシンプルになる:

$$\Sigma^{*,\mu'\nu'}(y_1, y_2) = 2\Gamma^{\mu'\lambda}(y_1, y_2)G_0^{\lambda\nu'}(y_2, y_1) + 4\xi(y_1)\xi(y_2)\left[\Gamma^{\mu'\nu'}(y_1, y_2) + \frac{ig}{2}\delta^{\mu'\nu'}(y_1 - y_2)\right] \quad (14.56)$$

14.2.5 実効的な計算が可能な形へ... は難しい

山中先生との議論の結果, ナイブに Green 関数を計算するのはムリなのでは? ということに. 方向転換.

14.2.6 ゼロモードハミルトニアン of 平均場的な取り扱い (暫定版)

ゼロモードを摂動的に取り入れることが困難であるので, 摂動的に扱うべき (13.90) についてはゼロモード期待値を取って c-数にしてしまうことにする:

$$\begin{aligned} \langle H_{\text{int}} \rangle_z &= \int d\mathbf{x} \left[g\xi^*(2\langle \varphi_z^\dagger \varphi_z \rangle_z \varphi_{ex} + \langle \varphi_z \varphi_z \rangle_z \varphi_{ex}^\dagger) \right. \\ &\quad + g\xi(2\langle \varphi_z^\dagger \varphi_z \rangle_z \varphi_{ex}^\dagger + \langle \varphi_z^\dagger \varphi_z^\dagger \rangle_z \varphi_{ex}) \\ &\quad + g(\langle \varphi_z^\dagger \varphi_z^\dagger \varphi_z \rangle_z \varphi_{ex} + \langle \varphi_z^\dagger \varphi_z \varphi_z \rangle_z \varphi_{ex}^\dagger) \\ &\quad \left. + \frac{g}{2}(\langle \varphi_z^\dagger \varphi_z^\dagger \rangle_z \varphi_{ex} \varphi_{ex} + 4\langle \varphi_z^\dagger \varphi_z \rangle_z \varphi_{ex}^\dagger \varphi_{ex} + \langle \varphi_z \varphi_z \rangle_z \varphi_{ex}^\dagger \varphi_{ex}^\dagger) \right] \end{aligned} \quad (14.57)$$

ゼロモードの一次は期待値を取ると消えることを利用している。これはもう励起モードの1次・2次になっているので非摂動ハミルトニアンに取り入れるのが妥当だと考えられる。その前に、ゼロモード期待値についてまとめておく（ここでも ξ が実であることを仮定）:

$$\begin{aligned}
\langle \varphi_z^\dagger \varphi_z^\dagger \rangle_z &= V_a^0 = \langle (-i\xi Q + \eta P)^\dagger (-i\xi Q + \eta P)^\dagger \rangle_z = -\xi^2 \langle Q^2 \rangle_z + \eta^2 \langle P^2 \rangle_z \\
\langle \varphi_z^\dagger \varphi_z \rangle_z &= V_t^0 = \xi^2 \langle Q^2 \rangle_z + \eta^2 \langle P^2 \rangle_z - i\xi\eta \\
\langle \varphi_z \varphi_z \rangle_z &= V_a^0 = -\xi^2 \langle Q^2 \rangle_z + \eta^2 \langle P^2 \rangle_z \\
\langle \varphi_z^\dagger \varphi_z \varphi_z \rangle_z &= \langle \varphi_z^\dagger \varphi_z \varphi_z \rangle_z = R_3 = \xi^2 \eta \langle Q P Q \rangle_z + \eta^3 \langle P^3 \rangle_z
\end{aligned} \tag{14.58}$$

さて、(14.57) を非摂動ハミルトニアンに組み込むと以下ようになる:

$$H_{u,1} = \int d\mathbf{x} \left[\varphi_{\text{ex}} \{ h_0 - \mu + g(|\xi|^2 + 2V_t^0 + V_a^0) \} \xi + \text{h.c.} \right] \tag{14.59}$$

$$H_{u,2} = \int d\mathbf{x} \left[\varphi_{\text{ex}}^\dagger \mathcal{L} \varphi_{\text{ex}} + \frac{1}{2} \varphi_{\text{ex}} \mathcal{M}'^* \varphi_{\text{ex}} + \frac{1}{2} \varphi_{\text{ex}}^\dagger \mathcal{M}' \varphi_{\text{ex}}^\dagger \right] \tag{14.60}$$

$$\mathcal{L}' = h_0 - \mu + 2g(|\xi|^2 + V_t^0), \quad \mathcal{M}' = g(|\xi|^2 + V_a^0) \tag{14.61}$$

これは有限温度ゼロモードの論文 [arXiv:1604.05900] の式 (8)-(10) にゼロモード期待値という意味でほぼ対応している。本来の量子補正は $\mathcal{M} = g(|\xi|^2 - V_a)$ なので符号が異なる。こうなっていないとゼロモード解が壊れてしまうので、繰り込みで守るようにしなければならない¹³。

まだしっかり formulate したわけではないが、相互作用ハミルトニアンのゼロモード平均場を非摂動部に取り込むということは、量子補正 $\langle \varphi_H^\dagger \varphi_H \rangle, \langle \varphi_H \varphi_H \rangle$ についてゼロモード期待値は最低次のみを取ってくることに恐らく対応している。したがって現状の方針においては、量子補正は励起を all-order で、ゼロモードは最低次のみを取るのみで (おそらく) 十分である¹⁴ ことがわかった。

14.3 方向転換

あの積分方程式を真面目に計算するのはキツイので、 Γ を量子力学の散乱問題における散乱振幅 f に置き換える方法で進める。非一様でエネルギーの表式を求め、一様近似で Lee-Yang のアレと一致するようになれば十分。大橋研の T-matrix 近似についても調査したい。

14.4 散乱の量子力学から Bethe-Salpeter 方程式の置換えへ

14.4.1 Schrödinger 方程式

Schrödinger 方程式

$$\nabla^2 u_k + (k^2 - U(\mathbf{r})) u_k = 0 \quad k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \tag{14.62}$$

でポテンシャルが $|rU(\mathbf{r})| \rightarrow 0$ ($r \rightarrow \infty$) を満たすものとする。さて、境界条件をどうするかを考えなければならないが、散乱固有関数は十分遠方では入射平面波 u_k^0 と散乱の効果である外向き球面波 u_k^{sc} の重ね合わせでなければならない。 u_k^{sc} も (14.62) を満たすので

$$u_k^{sc} = \phi_k(r) f(\theta, \varphi) \tag{14.63}$$

という特解を持つはず。十分遠方ではラプラシアン ∇^2 の r^{-2} の項が無視できるので ϕ_k について

$$\frac{d^2}{dr^2} (r\phi_k) + k^2 (r\phi_k) = 0 \quad \therefore \phi_k = \frac{1}{r} \exp(\pm ikr) \tag{14.64}$$

¹³元の理論とすこし違う形の繰り込みになってしまうかもしれないが、恐らくうまく行くと思う。

¹⁴その励起の all-order が大変なのですが...

ということで、境界条件として以下を採用する¹⁵：

$$u_k^+ \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \left(e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \frac{1}{r} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} f(\theta, \varphi) \right) \quad (r \rightarrow \infty) \quad (14.65)$$

Schrödinger 方程式を上境界条件の下で解くと $f(\theta, \varphi)$ が求まる。Green 関数を用いて u_k^+ に関する積分方程式をつくると

$$u_k^+ \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \left(e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - (2\pi)^{\frac{3}{2}} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{4\pi r} \int d\mathbf{r}' e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}'} U(\mathbf{r}') u_k^+(\mathbf{r}') \right) \quad (r \rightarrow \infty) \quad (14.66)$$

となり、先ほどの境界条件と比較することで u_k^+ と $f(\theta, \varphi)$ の関係を得る。

14.4.2 問題意識

考えなければいけないことは主に3つ：

1. $\frac{m}{\hbar^2} \Gamma = \tilde{f} + \int \frac{dk}{(2\pi)^3} \tilde{f} \left(\frac{1}{\epsilon - k^2 + i\eta} + \frac{1}{\epsilon - p^2 + i\eta} \right) \tilde{f}^* \quad (22.3)$ のように書けること。
2. 長波長のとき $\Gamma \rightarrow 4\pi a \hbar^2 / m$ になること。
3. $E/V = \frac{2\pi n^2 a \hbar^2}{m} \left[1 + \frac{128}{15} \left(\frac{na^3}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \right]$ になること。

14.4.3 Γ_0 が散乱振幅 \tilde{f} で書けること (Fermi System)

(以下は Fetter-Walecka のまとめ。式番号も Fetter のものに合わせている。雰囲気を感じ取ってもらえれば十分だと思っているので添字や引数の致命的な省略が多々あります)

散乱振幅

$$\tilde{f}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) \equiv -4\pi f(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{q} v(\mathbf{q}) \psi_k(\mathbf{k}' - \mathbf{q}) \quad (11.12)$$

を用いて Schrödinger 方程式が*

$$\psi_k(\mathbf{p}) = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{k}) + \frac{\tilde{f}(\mathbf{p}, \mathbf{k})}{k^2 - p^2 + i\eta} \quad (11.13)$$

のように書けることのアナロジーから

$$\Gamma \equiv \frac{1}{(2\pi)^4} \int d\mathbf{q} U_0 Q \quad (11.31)$$

を定義¹⁶。さらにここで

$$\chi \equiv \frac{1}{2\pi} \int dp_0 Q \quad (11.33)$$

を定義すると χ に対する積分方程式を得る：

$$\chi = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') + \frac{N}{E - p^2 + i\eta} \int d\mathbf{q} U_0 \chi \quad (11.39)$$

これは散乱振幅の式

$$\psi_k = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{k}) - \frac{1}{p^2 - k^2 - i\eta} \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} v(\mathbf{q}) \psi_k(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \quad (11.11)$$

とほぼ同じ形をしている (前々節の (14.66) の Fourier 変換に対応)。 (11.31) と (11.33) から

$$\Gamma = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{q} U_0(q) \chi(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \quad (11.40)$$

¹⁵ u_k^- という条件も考えられるが、物理的状況に対応していないので今回は用いない。ただし、計算の道具としては有用らしい。

¹⁶ Γ が \tilde{f} , Q が ψ_k に対応

を得る. Q を χ に置き換えただけに見えるが, χ が散乱振幅と関連付けられたことに意味がある. さてここで $N = 1$ に対応する解を χ_0 とすると

$$(\epsilon - p^2 + i\eta)\chi_0 - \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{q} v(\mathbf{q}) \chi_0 = (2\pi)^3 (\epsilon - p^2 + i\eta) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \quad (11.42)$$

同様に Schrödinger 方程式 (11.11) も

$$(k^2 - p^2 + i\eta)\psi_k(\mathbf{p}) - \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{q} v(\mathbf{q}) \psi_k(\mathbf{p} - \mathbf{q}) = 0 \quad (11.43)$$

のように書ける ($\delta(k^2 - p^2 + i\eta)\delta(\mathbf{p} - \mathbf{k})$ が恒等的に消える). ψ_k に対する (運動量表示の) 完全性

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} \psi_k(\mathbf{p}) \psi_k(\mathbf{p}')^* = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \quad (11.16)$$

を用いると

$$\chi_0 = (\epsilon - p^2 + i\eta) \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{\psi_k(\mathbf{p}) \psi_k(\mathbf{p}')^*}{(\epsilon - k^2 + i\eta)} \quad (11.44)$$

を得る ((11.42 - 44) と (11.16) を用いると証明可). (11.13) の ψ_k が \tilde{f} で書けること, (11.40) の Γ が χ で書けることを用いると

$$\frac{m}{\hbar^2} \Gamma_0 = \tilde{f} + \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \tilde{f} \left(\frac{1}{\epsilon - k^2 + i\eta} + \frac{1}{\epsilon - p'^2 + i\eta} \right) \tilde{f}^* \quad (11.45)$$

のように, Γ の最低次は自由散乱振幅 \tilde{f} を用いて記述できる. Full- Γ は積分方程式になる.

14.4.4 Γ が散乱振幅 \tilde{f} で書けること (Bose System)

Boson 系では Fermion 系における正孔由来の逆伝搬がないことから, (11.39) の N に相当する項¹⁷が存在しない. ことから, Fermion 系の χ_0 が Boson 系では Full- χ に対応する. それに応じて, Full- Γ も自由散乱振幅 \tilde{f} で表現できる:

$$\frac{m}{\hbar^2} \Gamma = \tilde{f} + \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \tilde{f} \left(\frac{1}{\epsilon + 2m\mu/\hbar^2 - k^2 + i\eta} + \frac{1}{\epsilon - p'^2 + i\eta} \right) \tilde{f}^* \quad (22.3)$$

14.4.5 逆伝搬が存在しないこと

物理的には Fermi 系には粒子線 (電子) に対応する逆伝搬 (正孔) があり, Bose 系にはないという解釈だが, 数式の上ではどう理解したらよいのか. Fetter-Walecka によると, 場を

$$\varphi = \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} a_{\mathbf{k}} / \sqrt{V} \quad (18.7)$$

のように展開したとき, 消滅演算子は真空を消去することから 2 点 Green 関数

$$iG_0(x, y) = \langle 0 | T [\varphi(x) \varphi^\dagger(y)] | 0 \rangle \quad (20.11)$$

は $t_y > t_x$ のときに消える, という説明がある. しかし, 我々は場を

$$\varphi = \sum_{\ell} \left[u_{\ell} a_{\ell} + v_{\ell}^* a_{\ell}^{\dagger} \right] \quad (14.67)$$

のように展開しているので $t_y > t_x$ でも値を持つことができることになる. これをどう解釈したらよいのか?

¹⁷ これは逆伝搬 Green 関数の積分に対応している.

第15章 研究：ZeroModeハミルトニアンの大膽な近似について

ゼロモードが Wick の定理を満たさないことの辛さに直面してからというもの、常に考えていた単純なアイデアについて、「 $H_{u,z}$ が Wick を満たさない構造なら満たすように近似してしまえ」

過激な内容なので、以後の議論すべてが破綻している可能性を孕んでいます。そもそもこんな近似やる意味あるのか？などあると思います。「ZeroMode で Wick の定理を使えたら夢があるよね！」くらいの軽い気持ちで読んでください。

15.1 あらまし

ZeroMode ハミルトニアンは正準交換関係 $[Q, P] = i$ を満たす演算子 Q, P を用いて構成されるが、その具体系は ξ が実であることを仮定してなお、なかなか複雑である：

$$\begin{aligned} H_{u,z} = & -(\delta\mu + 4C)P + \frac{I - 4D}{2}P^2 + 2BQPQ + 2DP^3 \\ & + \frac{1}{2}AQ^4 - 2BQ^2 + CQP^2Q + \frac{1}{2}EP^4 \end{aligned} \quad (15.1)$$

解析的にハミルトニアンを対角化することはできず、もちろん Wick の定理も成立せず、ゼロモード固有関数の時間発展を議論するのも簡単ではない¹。

Q, P のクロスターム等々が系に及ぼす影響がどのようなものであるかはちょっとずつ明らかになってきている。実はそんなに効いてこないらしい。ゼロモード入門では ξ, η のオーダーを根拠に、leading な項を P^2, Q^4 と仮定してガウシアンを試行関数とした変分近似を行っている。それを応用した有限温度における解析でも数値解とそこそこの精度で一致している²。さらに BEC の引力系ですらゼロモード由来の不安定性はごく小さな領域でしか現れないようである³。

このことから、ZeroMode ハミルトニアンを

$$H_{u,z} \simeq \frac{I}{2}P^2 + \frac{1}{2}AQ^4 \quad (15.2)$$

と仮定して解析することは議論の簡単化という意味で有効であるが、今回はこれを更に推し進めて

$$H_{u,z}^v = \frac{I}{2}P^2 + \frac{Av}{2}Q^2 \quad (15.3)$$

というハミルトニアンに近似することを考える。これは調和振動子型なので、生成消滅演算子でハミルトニアンを記述することができ、かつ消滅演算子はゼロモードの真空を消去することができる⁴。これはガウシアンの解析解を持つ。 $Q^4 \rightarrow Q^2$ という近似を噛ませていることになるが、そのまま置き換えるのは流石に横暴なので、(15.2) のハミルトニアンにおける試行関数 (ガウシアン) が (15.8) の固有状態になるように v を決定するようにする。この $H_{u,z}^v$ を便宜的に Variational ZeroMode Hamiltonian (VZH) と呼ぶことにする。

¹ $a^\dagger a$ の形に対角化できないので時間成分を $e^{i\omega t}$ のようにくり出すことができず、例えば摂動計算における時間積分の処理を解析的に行うことができない。

² 「2015 夏の学校：鳥居」

³ 「2016 夏の学校：足立・中村」

⁴ ゼロモード基底状態は P, Q で構成された生成消滅演算子の粒子数状態になるということ。調和振動子の議論と全く同じ。

15.2 利点と致命的な点

利点はハミルトニアンが調和振動子型になったこと。コレに尽きる。

- ZeroMode ハミルトニアンを解析的に簡単に処理できるようになること。
- ハミルトニアンを生成消滅演算子で記述できるので Wick の定理を用いることができる。
- 時間依存性を簡単に処理できるようになる (と思う)。

ただし、この近似によって従来のゼロモードの議論が破綻する可能性もある。それはこれから考えていきたいが、

- あくまで近似なので、このハミルトニアンでいくら精密な議論をしても「正しくないものを厳密に解こうとしている」に過ぎない。
- 従って、Wick の定理が成立して ZeroMode ハミルトニアンについて all-order の計算が可能になったとしても、「正しくないものを無限に足しあげている」に過ぎない。
- ゼロモード由来の不安定性は出現し得ない。
- 正準交換関係は (カウンター項を導入しない限り) 保たれない。
- 位相の回転という意味を壊さないか
- 厳密な ZeroMode ハミルトニアンを用いた上で、都合の悪いところに都度近似を噛ませればいいだけではないか

などの問題はあるでしょう。山中研としては厳密なハミルトニアンから出発して議論を進め、変分近似・摂動展開・数値計算などで攻めるのが定石であり、ハミルトニアンを弄るなんてのはご法度なんではしょうが、ざっくりとした概算には便利なのではないかと思っています。「正しくない」ことを意識して使う分にはいいんじゃないかと。

15.3 Variational ZeroMode Hamiltonian の構成

15.3.1 v の決定

まず、(15.2) の変分関数を

$$\langle q|\Psi_0\rangle = \left(\frac{1}{2\pi\alpha^2}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{q^2}{4\alpha^2}} \quad (15.4)$$

と置くと、変分パラメータは $\alpha = \left(\frac{I}{24A}\right)^{\frac{1}{6}}$ に決定される。この変分関数が (15.8) の固有状態になるように v を決める。

ここで一般的な調和振動子

$$H_{ho} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 \quad (15.5)$$

の基底固有関数は

$$\langle q|0\rangle = \left(\frac{m\omega}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{2}m\omega q^2} \quad (15.6)$$

であることから、(15.8) の固有状態は

$$\langle q|\Psi_0\rangle = \left(\frac{\sqrt{AvI}}{\pi I}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{2I}\sqrt{AvI}q^2} \quad (15.7)$$

であり, 先ほどの α の値を用いて $v = (9IA^2)^{\frac{1}{3}}$ を得る. よって VZH は

$$\begin{aligned} H_{u,z}^v &= \frac{I}{2}P^2 + \frac{(9IA^2)^{\frac{1}{3}}}{2}Q^2 \\ &= \frac{I}{2}P^2 + \frac{K}{2}Q^2 \end{aligned} \quad (15.8)$$

となる. ここで $K = (9IA^2)^{\frac{1}{3}}$ である.

15.3.2 生成消滅演算子の構成

調和振動子のアナロジーから生成消滅演算子を

$$b_z^v = \left(\frac{K}{4I}\right)^{\frac{1}{4}} \left(Q + i\sqrt{\frac{I}{K}}P\right) \quad (15.9)$$

$$b_z^{v,\dagger} = \left(\frac{K}{4I}\right)^{\frac{1}{4}} \left(Q - i\sqrt{\frac{I}{K}}P\right) \quad (15.10)$$

と定義すると, VZH は

$$H_{u,z}^v = \sqrt{KI} \left(b_z^{v,\dagger} b_z^v + \frac{1}{2}\right) \quad (15.11)$$

である.

15.3.3 卒論のネタたり得るか?

この近似の正当性を確かめるという課題はあるものの, こんな誰でも思いつくような近似計算のみで卒論というのは寂しい. もし卒論で扱うことがあれば, これは計算上のオマケ的な立ち位置が妥当だろうか. そもそも VZH を導入する明確なメリットはなにか? 時間発展という視点からネタをふたつほど挙げてみる.

15.4 その1: ZeroMode を含む摂動計算

以下各変数については「2016 夏の学校: 鳥居」に従っています. BEC がある系で凝縮相-非凝縮相間の相互作用を取り入れるとき, 定常 Gross-Pitaevskii 方程式には量子補正が組み込まれる:

$$\left[h_0 - \mu + g(|\xi|^2 + 2\langle 0|\varphi_H^\dagger\varphi_H|0\rangle)\right]\xi + g\langle 0|\varphi_H\varphi_H|0\rangle\xi^* = 0 \quad (15.12)$$

量子補正 $\langle 0|\varphi_H^\dagger\varphi_H|0\rangle, \langle 0|\varphi_H\varphi_H|0\rangle$ は Heisenberg 描像の期待値なので, 具体計算のためには摂動展開で相互作用描像に移す必要がある⁵:

$$\langle 0|\varphi_H^\dagger(x)\varphi_H(x)|0\rangle = \sum_n \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^n \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} ds_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} ds_n \langle 0|H_{\text{int}}(s_1) \cdots H_{\text{int}}(s_n) \varphi^\dagger(x)\varphi(x)|0\rangle \quad (15.13)$$

$$\simeq \langle 0|\varphi^\dagger(x)\varphi(x)|0\rangle - \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} ds \langle 0|T[H_{\text{int}}(s)\varphi^\dagger(x)\varphi(x)]|0\rangle \quad (15.14)$$

⁵真空は相互作用描像の下で構成されている.

摂動二次以降は人のやる作業ではないので無視. 一次の内部は

$$\begin{aligned}
\langle 0|T[H_{\text{int}}(s)\varphi^\dagger(x)\varphi(x)]|0\rangle &= \langle 0|\int d\mathbf{y} T\left[\{\varphi_z^\dagger\mathcal{L}\varphi_{ex} + \varphi_{ex}^\dagger\mathcal{L}\varphi_z + \varphi_z\mathcal{M}^*\varphi_{ex} + \varphi_z^\dagger\mathcal{M}\varphi_{ex}^\dagger\right. \\
&\quad + g\xi^*(2\varphi_z^\dagger\varphi_z\varphi_{ex} + \varphi_z^\dagger\varphi_{ex}\varphi_{ex} + 2\varphi_{ex}^\dagger\varphi_z\varphi_{ex} + \varphi_{ex}^\dagger\varphi_z\varphi_z) \\
&\quad + g\xi(2\varphi_z^\dagger\varphi_{ex}^\dagger\varphi_z + \varphi_z^\dagger\varphi_z^\dagger\varphi_{ex} + 2\varphi_z^\dagger\varphi_{ex}^\dagger\varphi_{ex} + \varphi_{ex}^\dagger\varphi_{ex}^\dagger\varphi_z) \\
&\quad + g(\varphi_z^\dagger\varphi_z^\dagger\varphi_z\varphi_{ex} + \varphi_z^\dagger\varphi_{ex}^\dagger\varphi_z\varphi_z + \varphi_{ex}^\dagger\varphi_{ex}^\dagger\varphi_{ex}\varphi_z + \varphi_{ex}^\dagger\varphi_z^\dagger\varphi_{ex}\varphi_{ex}) \\
&\quad \left. + \frac{g}{2}(\varphi_z^\dagger\varphi_z^\dagger\varphi_{ex}\varphi_{ex} + 4\varphi_z^\dagger\varphi_z\varphi_{ex}^\dagger\varphi_{ex} + \varphi_z\varphi_z\varphi_{ex}^\dagger\varphi_{ex} + \varphi_{ex}^\dagger\varphi_{ex}^\dagger\varphi_{ex}\varphi_{ex})\right\} \\
&\quad \times \left[\varphi_z^\dagger(x)\varphi_z(x)_1 + \varphi_z^\dagger(x)\varphi_{ex}(x)_2 + \varphi_{ex}^\dagger(x)\varphi_z(x)_3 + \varphi_{ex}^\dagger(x)\varphi_{ex}(x)_4\right]|0\rangle
\end{aligned} \tag{15.15}$$

引数が省略してある場の演算子 φ は $y = (y, s)$ 依存性を持っている.

この計算の厄介なところは, 従来のゼロモード演算子は生成消滅演算子の代数を満たさないために Wick の定理を用いることができないこと. Wick の定理が成立する φ_{ex} のみ適応し, それ以外は地道に頑張らないといけない. また, ZeroMode の時間発展演算子は $H_{u,z}$ なので当然時間依存性を $e^{i\omega s}$ のようにくり出せない. つまり s 積分は数値計算に頼る他ない⁶. ゼロモード入門でも時間発展の数値計算に関する記述はあるが, とっても面倒臭そう. 対して VZH の場合, ゼロモードの場の演算子 φ_z は

$$\varphi_z = -i\xi Q + \eta P = \frac{1}{2}\left(\frac{4I}{K}\right)^{\frac{1}{4}} [(-i\xi + \eta)b_z^v - (i\xi + \eta)b_z^{v,\dagger}] \tag{15.16}$$

のように生成消滅演算子で記述できる. これによって ZeroMode 部も簡単に解析できる可能性が出てきた?

15.5 その2 : dipole-dipole interacting BEC における Gross-Pitaevskii 方程式の安定解

元ネタは今井さん. Kui-Tian Xi, Hiroki Saito, Phys. Rev. A **93** 011604(2016). によると, 磁場で分極した BEC は dipole-dipole interaction を持ち, そのような系では従来の GP 方程式は安定な解を持たない... らしい. 3 体衝突項を組み込むことで実験とよく一致する... らしい:

$$(i - \gamma)\hbar \frac{\partial \xi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V(\mathbf{r}) + G|\xi(\mathbf{r}, t)|^2 + G_3|\xi(\mathbf{r}, t)|^4 + \int d\mathbf{r}' U(\mathbf{r} - \mathbf{r}') |\xi(\mathbf{r}', t)|^2 \right] \xi(\mathbf{r}, t) \tag{15.17}$$

キモは秩序変数の高次項にあるらしく, 3 体衝突の項を足すことで安定解を得る仕組みになっている... らしい. 別のシナリオとして, 前節の量子補正によって ξ の高次項を持つてくることが考えられる. H_{int} は φ の 3 次の係数に ξ を含んでおり, かつゼロモードも $\varphi_z = -i\xi Q + \eta P$ なので ξ を含んでいる. 例えば $\langle Q^2 \rangle$ などがある程度の値を持つとき, この量子補正によって安定解を得るようなことはあるのだろうか?

まだしっかり論文を読んでないのでちゃんと議論できる状況ではないです. ただ VZH だとある程度解析的に攻められる気がします. とはいえ, B4 にはキツイかな...

15.5.1 再び, 卒論のネタたり得るか?

このネタそのまんまはキツイと思います. これに関連させてもっと簡単な系に落とし込んで... みたいなのが現実的かと思います.

VZH の議論が怪しいので, 厳密な ZeroMode ハミルトニアンで進めていくほうがいいのかもかもしれません.

⁶VZH を導入しなくても「時間成分を $e^{i\omega s}$ の形でくり出せる」という近似のもと議論を進めれば十分かもしれない.

第16章 Fetter-Walecka : Quantum Theory of Many-Particle Systems(Dover, 1971)

ちゃんと式まで書いて説明しているところもあれば, 原文の式番号だけ書いて済ませているところもあります. 原文の補助に過ぎないものだと思います.

16.1 Second Quantization

だいたい知っていると思うので, Fetter の流儀を知るために簡単におさらいするに留める.

16.1.1 Fields

生成消滅演算子の線型結合について:

$$\hat{\psi}(\mathbf{x}) \equiv \sum_k \psi_k(\mathbf{x}) c_k \quad (16.1)$$

$$\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x}) \equiv \sum_k \psi_k^\dagger(\mathbf{x}) c_k^\dagger \quad (16.2)$$

展開係数は一粒子波動関数で完全系による展開だと思えば良い¹. ここで ψ はスピンについての doublet であり, k はなんかしらの quantum number²:

$$\psi_k(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \psi_{k1}(\mathbf{x}) \\ \psi_{k2}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \equiv \psi_{k\alpha}(\mathbf{x}) \quad (\alpha = 1, 2) \quad (16.3)$$

α はスピンのインデックス. $\hat{\psi}, \hat{\psi}^\dagger$ は場の演算子と呼ばれる. 場の演算子は生成消滅演算子を含んでいるので Fock 空間の演算子である. 場の演算子は正準交換関係を満たす:

$$\left[\hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x}), \hat{\psi}_\beta^\dagger(\mathbf{x}') \right]_{\mp} = \delta_{\alpha\beta} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (16.4)$$

$$\left[\hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x}), \hat{\psi}_\beta(\mathbf{x}') \right]_{\mp} = \left[\hat{\psi}_\alpha^\dagger(\mathbf{x}), \hat{\psi}_\beta^\dagger(\mathbf{x}') \right]_{\mp} = 0 \quad (16.5)$$

− がボソン, + がフェルミオンである. 上の式はこれは生成消滅演算子の正準交換関係から得られ, 下の式は波動関数の完全性から得られる.

ハミルトニアンは場の演算子を用いて以下のように書き直せる:

$$\hat{H} = \int d\mathbf{x} \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x}) T(\mathbf{x}) \hat{\psi}(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \int \int d\mathbf{x} d\mathbf{x}' \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x}) \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x}') V(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \hat{\psi}(\mathbf{x}') \hat{\psi}(\mathbf{x}) \quad (16.6)$$

$T((\mathbf{x}))$ は kinetic energy term. これがなぜハミルトニアンと呼んでよいかは山中先生の資料を参照のこと³.

¹原書は “complete set of single-particle quantum numbers” とある. ψ がハミルトニアンの固有関数ならエネルギー固有関数による完全系であるし, 運動量演算子の固有関数なら運動量固有関数の完全系で展開ということになる. “quantum numbers” はここで言えばエネルギーか運動量が, みたいな話.

²繰り返しになるが, 例えば主量子数・方位量子数・磁気量子数で $k = (n, l, m)$ みたいなのはよくあるよね.

³(16.1)(16.2) をハミルトニアンの定義に代入すると多体量子力学のハミルトニアンが再現できる.

ここで一般的な一体演算子⁴を考える:

$$J = \sum_{i=0}^N J(\mathbf{x}_i) \quad (16.7)$$

なんかしらの演算子 $J(\mathbf{x}_i)$ の線型結合として定義された第一量子化⁵された演算子. これを第二量子化の表示に移すと以下ようになる⁶:

$$\hat{J} = \sum_{rs} \langle r | J | s \rangle c_r^\dagger c_s \quad (16.8)$$

$$= \int d\mathbf{x} \sum_{rs} \hat{\psi}_r^\dagger(\mathbf{x}) J(\mathbf{x}) \hat{\psi}_s(\mathbf{x}) c_r^\dagger c_s \quad (16.9)$$

$$= \int d\mathbf{x} \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x}) J(\mathbf{x}) \hat{\psi}(\mathbf{x}) \quad (16.10)$$

以降 Fetter の本では第二量子化の際はこの (16.8) を使う. その是非はともかくとして.

16.2 Green's Functions

このセクションでは Green 関数⁷のコンセプトについて紹介する. Green 関数は多体問題の取り扱いの上で重要な働きをする. 以下描像を明確にするために原書にはない添字 S, H をつける.

16.2.1 Definition

Green 関数の定義は以下の通り:

$$iG_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = \frac{{}_H \langle \Psi_0 | T [\hat{\psi}_{H\alpha}(\mathbf{x}t) \hat{\psi}_{H\beta}^\dagger(\mathbf{x}'t')] | \Psi_0 \rangle_H}{{}_H \langle \Psi_0 | \Psi_0 \rangle_H} \quad (16.11)$$

$|\Psi_0\rangle_H$ は相互作用系の Heisenberg Full Hamiltonian の基底固有状態:

$$H_H |\Psi_0\rangle_H = E |\Psi_0\rangle_H \quad (16.12)$$

$\hat{\psi}_{H\alpha}(\mathbf{x}t)$ は Heisenberg 描像の時間依存演算子:

$$\hat{\psi}_{H\alpha}(\mathbf{x}t) = e^{i\hat{H}_H t/\hbar} \hat{\psi}_{S\alpha}(\mathbf{x}) e^{-i\hat{H}_H t/\hbar} \quad (16.13)$$

$\alpha\beta$ は場の演算子の内部自由度であり, 今回はスピン 1/2 のフェルミオンを考える. T 積の部分を書き下すと

$$T [\hat{\psi}_{H\alpha}(\mathbf{x}t) \hat{\psi}_{H\beta}^\dagger(\mathbf{x}'t')] = \begin{cases} \hat{\psi}_{H\alpha}(\mathbf{x}t) \hat{\psi}_{H\beta}^\dagger(\mathbf{x}'t') & (t > t') \\ \pm \hat{\psi}_{H\beta}^\dagger(\mathbf{x}'t') \hat{\psi}_{H\alpha}(\mathbf{x}t) & (t < t') \end{cases} \quad (16.14)$$

ここで符号が + ならボソン, - ならフェルミオン. つまるところ, T 積は時間順序通りに演算子を並べ替えて, 演算子を入れ替えた回数を P とするとき, 先頭に $(-1)^P$ を付けければ良い⁸. というわけで, (16.11) を explicit に書き直すと

$$iG_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = \begin{cases} \frac{{}_H \langle \Psi_0 | \hat{\psi}_{H\alpha}(\mathbf{x}t) \hat{\psi}_{H\beta}^\dagger(\mathbf{x}'t') | \Psi_0 \rangle_H}{{}_H \langle \Psi_0 | \Psi_0 \rangle_H} & (t > t') \\ \pm \frac{{}_H \langle \Psi_0 | \hat{\psi}_{H\beta}^\dagger(\mathbf{x}'t') \hat{\psi}_{H\alpha}(\mathbf{x}t) | \Psi_0 \rangle_H}{{}_H \langle \Psi_0 | \Psi_0 \rangle_H} & (t < t') \end{cases} \quad (16.15)$$

⁴Green 関数・相関関数のような 2 体関数でないという意味

⁵第二量子化ではないというニュアンス. 第一量子化という言葉が的確かどうかは知らない.

⁶(16.8) は少々雑な議論っぽい. 運動量演算子を第二量子化したときのアナロジーが根拠か? いずれにしろ, 変換の generator として定義するほうが筋が通っているように思える. 第二量子化は場の理論よりも不完全である.

⁷propagator とかも呼ばれる

⁸もちろんフェルミオンの場合. ボソンの場合は $(-1)^P$ 因子はいらない

Green 関数というのは $(x, t), (x', t')$ にある場の演算子の期待値である⁹. $|\Psi_0\rangle_H$ が Heisenberg Full Hamiltonian であることから演算子を Schrödinger 描像に書き換えると

$$iG_{\alpha\beta}(x, t; x', t') = \begin{cases} e^{iE(t-t')/\hbar} \frac{{}_H\langle\Psi_0|\hat{\psi}_{S\alpha}(x)e^{-i\hat{H}_H(t-t')}\hat{\psi}_{S\beta}^\dagger(x')|\Psi_0\rangle_H}{{}_H\langle\Psi_0|\Psi_0\rangle_H} & (t > t') \\ \pm e^{-iE(t-t')/\hbar} \frac{{}_H\langle\Psi_0|\hat{\psi}_{S\beta}^\dagger(x')e^{i\hat{H}_H(t-t')}\hat{\psi}_{S\alpha}(x)|\Psi_0\rangle_H}{{}_H\langle\Psi_0|\Psi_0\rangle_H} & (t < t') \end{cases} \quad (16.16)$$

16.2.2 Relation to Observables

Green 関数を勉強する理由はいくらかあって、そのひとつは Feynman diagram である. Feynman rule で摂動計算をするときに場の演算子の積よりも Green 関数で表現するほうがシンプルになる. また、(16.11) は基底固有関数で期待値を取っているため基底状態の情報がいくらか失われているのだが、依然として興味深いオブザーバブルの特徴を保有している:

- 基底状態における様々な一粒子演算子の期待値
- 基底エネルギー
- スペクトラム

3 つ目は Lehmann 表示で扱う¹⁰. 以下では上 2 つについて説明する.

まず一粒子演算子を考える:

$$\hat{J}_S = \int d\mathbf{x} \hat{\mathcal{J}}_S(\mathbf{x}) \quad (16.17)$$

$$\hat{\mathcal{J}}_S(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha\beta} \hat{\psi}_{\beta S}^\dagger(\mathbf{x}) J_{\beta\alpha}(\mathbf{x}) \hat{\psi}_{\alpha S}(\mathbf{x}) \quad (16.18)$$

\hat{J} は第二量子化された演算子. $J_{\beta\alpha}$ は密度に関する第一量子化演算子であり $\hat{\mathcal{J}}$ はそれを第二量子化したもの. $\langle\hat{\mathcal{J}}(x)\rangle$ について:

$$\langle\hat{\mathcal{J}}(x)\rangle = \frac{{}_H\langle\Psi_0|\hat{\mathcal{J}}(x)|\Psi_0\rangle_H}{{}_H\langle\Psi_0|\Psi_0\rangle_H} \quad (16.19)$$

$$= \lim_{x' \rightarrow x} \sum_{\alpha\beta} J_{\beta\alpha} \frac{{}_H\langle\Psi_0|\hat{\psi}_{\beta S}^\dagger(x')\hat{\psi}_{\alpha S}(x)|\Psi_0\rangle_H}{{}_H\langle\Psi_0|\Psi_0\rangle_H} \quad (16.20)$$

$$= \lim_{t' \rightarrow t^+} \lim_{x' \rightarrow x} \sum_{\alpha\beta} J_{\beta\alpha} \frac{{}_H\langle\Psi_0|\hat{\psi}_{\beta S}^\dagger(x')e^{-i\hat{H}_H(t-t')/\hbar}\hat{\psi}_{\alpha S}(x)|\Psi_0\rangle_H}{{}_H\langle\Psi_0|\Psi_0\rangle_H} \quad (16.21)$$

$$= \pm i \lim_{t' \rightarrow t^+} \lim_{x' \rightarrow x} \sum_{\alpha\beta} J_{\beta\alpha} G_{\alpha\beta}(x, t; x', t') \quad (16.22)$$

$$= \pm i \lim_{t' \rightarrow t^+} \lim_{x' \rightarrow x} \text{Tr} [J(x)G(x, t; x', t')] \quad (16.23)$$

2 行目で x' を登場させたり, 3 行目に $\hat{1} = \lim_{t' \rightarrow t^+} e^{-iH_H(t-t')/\hbar}$ を持ってきたりしたのは全て Green 関数に帰着させるためのテクニック. G, J は

$$G(x) = \begin{pmatrix} G_{\uparrow\uparrow} & G_{\uparrow\downarrow} \\ G_{\downarrow\uparrow} & G_{\downarrow\downarrow} \end{pmatrix} \quad J(x) = \begin{pmatrix} J_{\uparrow\uparrow} & J_{\uparrow\downarrow} \\ J_{\downarrow\uparrow} & J_{\downarrow\downarrow} \end{pmatrix} \quad (16.24)$$

みたいな二階テンソル. これの積のトレースを取ると (16.22) みたいになる. これが $J_{\alpha\beta}$ ではなく $J_{\beta\alpha}$ という表式にした理由.

⁹だから 2 点関数とか 2 点相関関数とかも呼ばれる

¹⁰山中先生によれば、もともとは梅沢・亀淵・Lehmann 表示と呼ばれていたらしい. 最近は普通にスペクトラム表示とか言う.

例えば運動エネルギーの第一量子化は

$$P = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 \quad (16.25)$$

であり, これを第二量子化する:

$$\hat{P} = \int d\mathbf{x} \hat{\mathcal{P}}(\mathbf{x}) \quad (16.26)$$

$$\hat{\mathcal{P}}(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha\beta} \hat{\psi}_\beta^\dagger(\mathbf{x}) P_{\beta\alpha} \hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x}) \quad (16.27)$$

$$\langle P \rangle = \pm i \int d\mathbf{x}' \lim_{\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}} \left[-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} \text{Tr} G(\mathbf{x}t, \mathbf{x}'t^+) \right] \quad (16.28)$$

... 工事中...

16.2.3 Example : Free Fermion

16.2.4 Lehmann Representation

この章ではフェルミオンについてのみ議論する. 状態が規格化されているものとする Green 関数の定義は

$$iG_{\alpha\beta}(\mathbf{x}t; \mathbf{x}'t') = {}_H \langle \Psi_0 | T \left[\psi_{H\alpha}(\mathbf{x}t) \psi_{H\beta}^\dagger(\mathbf{x}'t') \right] | \Psi_0 \rangle_H \quad (16.29)$$

Heisenberg 描像の演算子と状態はかなり複雑だが, 面白くかつ一般的な結果を導くことができる. まず $\{|\Psi\rangle\}$ 完全系を挿入:

$$\begin{aligned} iG_{\alpha\beta}(\mathbf{x}t; \mathbf{x}'t') = \sum_n \Big\{ & \theta(t-t') \langle \Psi_0 | \hat{\psi}_{\alpha H}(\mathbf{x}t) | \Psi_n \rangle \langle \Psi_n | \hat{\psi}_{\beta H}^\dagger(\mathbf{x}'t') | \Psi_0 \rangle \\ & - \theta(t'-t) \langle \Psi_0 | \hat{\psi}_{\beta H}^\dagger(\mathbf{x}'t') | \Psi_n \rangle \langle \Psi_n | \hat{\psi}_{\alpha H}(\mathbf{x}t) | \Psi_0 \rangle \Big\} \end{aligned} \quad (16.30)$$

さらに Schrödinger 描像と Heisenberg 描像の変換

$$\hat{O}_H(t) = e^{iH_H t/\hbar} \hat{O}_S e^{-iH_H t/\hbar} \quad (16.31)$$

を用いて場の演算子を変換するとエネルギー固有値がくくり出せる:

$$\begin{aligned} iG_{\alpha\beta}(\mathbf{x}t; \mathbf{x}'t') = \sum_n \Big\{ & \theta(t-t') e^{-i(E_n - E)(t-t')/\hbar} \langle \Psi_0 | \hat{\psi}_{\alpha S}(\mathbf{x}) | \Psi_n \rangle \langle \Psi_n | \hat{\psi}_{\beta S}^\dagger(\mathbf{x}') | \Psi_0 \rangle \\ & - \theta(t'-t) e^{i(E_n - E)(t-t')/\hbar} \langle \Psi_0 | \hat{\psi}_{\beta S}^\dagger(\mathbf{x}') | \Psi_n \rangle \langle \Psi_n | \hat{\psi}_{\alpha S}(\mathbf{x}) | \Psi_0 \rangle \Big\} \end{aligned} \quad (16.32)$$

ここで, $\langle \Psi_n | \hat{\psi} | \Psi_0 \rangle$ について少し考えてみる. もし $|\Psi_0\rangle$ が N 個の粒子を含んでいる状態ならば, $\hat{\psi} |\Psi_0\rangle$ は $N-1$ 個の粒子を含む状態になるので, $\langle \Psi_n | \hat{\psi} | \Psi_0 \rangle$ が値を持つためには $\langle \Psi_n |$ が $N-1$ 個の粒子を含む状態でなければならない. 同様の議論から $\langle \Psi_n | \hat{\psi}^\dagger | \Psi_0 \rangle$ が値を持つためには $|\Psi_n\rangle$ は $N+1$ 個の粒子を含む状態でなければならない. よって, $|\Psi_n\rangle$ は $N \pm 1$ 個の粒子を持つ状態である¹¹. さらに言う, これは $|\Psi_n\rangle$ が粒子数固有状態でなければならないので, BEC 系のような粒子数が揺らぐ系では議論が破綻することに注意. これが, 今回 Fermion 系のみを考える理由である.

ここまでの話は \hat{H}_H が時間非依存であるということ (と $|\Psi\rangle$ が粒子数固有状態であること) を除けば一般的な議論である. このまま議論をすすめることもできるが, ここでは簡単のため運動量演算子が \hat{H}_H と交換する場合を考

¹¹ この議論だと, 第一励起状態 $|\Psi_1\rangle$, 第二励起状態 $|\Psi_2\rangle$, 第三励起状態 $|\Psi_3\rangle$... は全て $N \pm 1$ 個の粒子を持つことになる. 基底だけ N 個で残りの励起状態は全て $N \pm 1$ というのは少し不自然に感じる. いくらか理由を考える余地はあるが, まだ納得できる答えを持っていません. 少なくともそういう状況でなければ Green 関数は値を持つことができない.

える¹². まずは運動量演算子を並進変換の generator として導入する:

$$\hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x}) \equiv e^{-i\hat{\mathbf{P}}\mathbf{x}}\hat{\psi}_\alpha(0)e^{i\hat{\mathbf{P}}\mathbf{x}} \quad (16.33)$$

$$\Rightarrow -i\hbar\nabla\hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x}) = [\hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x}), \hat{\mathbf{P}}] \quad (16.34)$$

$$\Rightarrow \hat{\mathbf{P}} = \sum_\alpha \int d\mathbf{x} \hat{\psi}_\alpha^\dagger(\mathbf{x})(-i\hbar\nabla)\hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}\lambda} \hbar\mathbf{k}c_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger c_{\mathbf{k}\lambda} \quad (16.35)$$

1 行目を微分すると 2 行目になり, 2 行目を満たすような $\hat{\mathbf{P}}$ を探すと 3 行目になる. 3 行目の 2 つ目のイコールは一粒子波動関数を

$$\psi_{\mathbf{k}\lambda}(\mathbf{x}) = \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}}{\sqrt{V}}\eta_\lambda \quad (16.36)$$

$$\eta_\uparrow = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \eta_\downarrow = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (16.37)$$

のように平面波展開¹³して, これを式 (16.1) とかで第二量子化すれば得られる. V は体積. さて, この (16.33) を先ほどの Green 関数の式に代入する:

$$\begin{aligned} iG_{\alpha\beta}(\mathbf{x}t; \mathbf{x}'t') &= \sum_n \left\{ \theta(t-t')e^{-i(E_n-E)(t-t')/\hbar}e^{i\mathbf{P}_n\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')/\hbar} \langle \Psi_0 | \hat{\psi}_{\alpha S}(0) | \Psi_n \rangle \langle \Psi_n | \hat{\psi}_{\beta S}^\dagger(0) | \Psi_0 \rangle \right. \\ &\quad \left. - \theta(t'-t)e^{i(E_n-E)(t-t')/\hbar}e^{-i\mathbf{P}_n\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')/\hbar} \langle \Psi_0 | \hat{\psi}_{\beta S}^\dagger(0) | \Psi_n \rangle \langle \Psi_n | \hat{\psi}_{\alpha S}(0) | \Psi_0 \rangle \right\} \quad (16.38) \end{aligned}$$

ここで基底状態では $\hat{\mathbf{P}}|\Psi_0\rangle = 0$ となっていることを用いている. ここで, G は $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$ や $t - t'$ にしか依存していないので $\mathbf{x} - \mathbf{x}' = \mathbf{y}$, $t - t' = s$ として Fourier 変換する:

$$G_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega) = \int d\mathbf{y} \int ds e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{y}} e^{i\omega s} G_{\alpha\beta}(\mathbf{x}t; \mathbf{x}'t') \quad (16.39)$$

$$\begin{aligned} &= -i \int d\mathbf{y} ds e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{y}} e^{i\omega s} \\ &\times \sum_n \left[\underbrace{\theta(s)e^{-i(E_n-E)s/\hbar}e^{i\mathbf{P}_n\mathbf{y}/\hbar} \langle \Psi_0 | \hat{\psi}_{\alpha S}(0) | \Psi_n \rangle \langle \Psi_n | \hat{\psi}_{\beta S}^\dagger(0) | \Psi_0 \rangle}_1 \right. \\ &\quad \left. - \theta(-s)e^{i(E_n-E)s/\hbar}e^{-i\mathbf{P}_n\mathbf{y}/\hbar} \langle \Psi_0 | \hat{\psi}_{\beta S}^\dagger(0) | \Psi_n \rangle \langle \Psi_n | \hat{\psi}_{\alpha S}(0) | \Psi_0 \rangle \right]_2 \quad (16.40) \end{aligned}$$

ここで下線部 1 の項について計算する. θ 関数の積分表示

$$\theta(s) = - \int \frac{d\omega'}{2\pi i} \frac{e^{-i\omega's}}{\omega' + i\eta} \quad (16.41)$$

を用いて変形していく:

$$-1 = \frac{1}{2\pi} \sum_n \int d\mathbf{y} ds d\omega' e^{i(\mathbf{P}_n\hbar^{-1} - \mathbf{k})\cdot\mathbf{y}} e^{i(\omega - (E_n-E)\hbar^{-1} - \omega')s} \frac{\langle \Psi_0 | \hat{\psi}_{\alpha S}(0) | \Psi_n \rangle \langle \Psi_n | \hat{\psi}_{\beta S}^\dagger(0) | \Psi_0 \rangle}{\omega' + i\eta} \quad (16.42)$$

$$= \sum_n (2\pi)^3 \delta(\mathbf{P}_n\hbar^{-1} - \mathbf{k}) \frac{\langle \Psi_0 | \hat{\psi}_{\alpha S}(0) | \Psi_n \rangle \langle \Psi_n | \hat{\psi}_{\beta S}^\dagger(0) | \Psi_0 \rangle}{\omega - (E_n - E)\hbar^{-1} + i\eta} \quad (16.43)$$

$$= V \sum_n \delta_{\mathbf{P}_n\hbar^{-1}, \mathbf{k}} \frac{\langle \Psi_0 | \hat{\psi}_{\alpha S}(0) | \Psi_n \rangle \langle \Psi_n | \hat{\psi}_{\beta S}^\dagger(0) | \Psi_0 \rangle}{\omega - (E_n - E)\hbar^{-1} + i\eta} \quad (16.44)$$

¹²運動量演算子 $\hat{\mathbf{P}}$ が Heisenberg Full Hamiltonian \hat{H}_H と交換するとき, \hat{H}_H の固有状態 $|\Psi_n\rangle$ は $\hat{\mathbf{P}}$ と同時固有状態を取るといふことである.

¹³Fourier 変換のこと. 一様系だと並進対称性があり, 運動量が保存されるはず. だからハミルトニアンと運動量演算子は交換した. 先の通りハミルトニアンの固有状態は運動量固有状態にもなるので, Fourier 変換してあげると運動量 (c-数) が出てくる. 平面波展開はいつでもできるが, 状態がいつも運動量固有状態になっている訳はないことに注意.

最後の行でデルタ関数と体積の関係 (9.151) を用いた。同様の計算をすると、グリーン関数は

$$G_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega) = V \sum_n \delta_{P_n \hbar^{-1}, \mathbf{k}} \frac{\langle \Psi_0 | \hat{\psi}_{\alpha S}(0) | \Psi_n \rangle \langle \Psi_n | \hat{\psi}_{\beta S}^\dagger(0) | \Psi_0 \rangle}{\omega - (E_n - E) \hbar^{-1} + i\eta} \quad (16.45)$$

$$+ V \sum_n \delta_{P_n \hbar^{-1}, -\mathbf{k}} \frac{\langle \Psi_0 | \hat{\psi}_{\beta S}^\dagger(0) | \Psi_n \rangle \langle \Psi_n | \hat{\psi}_{\alpha S}(0) | \Psi_0 \rangle}{\omega + (E_n - E) \hbar^{-1} - i\eta} \quad (16.46)$$

となることがわかる。クロネッカーデルタが効いてくるのは $|\Psi_n\rangle$ に対してなので

$$G_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega) = V \sum_n \left[\frac{\langle \Psi_0 | \hat{\psi}_{\alpha S}(0) | n\mathbf{k} \rangle \langle n\mathbf{k} | \hat{\psi}_{\beta S}^\dagger(0) | \Psi_0 \rangle}{\omega - (E_n - E) \hbar^{-1} + i\eta} + \frac{\langle \Psi_0 | \hat{\psi}_{\beta S}^\dagger(0) | n, -\mathbf{k} \rangle \langle n, -\mathbf{k} | \hat{\psi}_{\alpha S}(0) | \Psi_0 \rangle}{\omega + (E_n - E) \hbar^{-1} - i\eta} \right] \quad (16.47)$$

と書くことにする¹⁴。というわけで、これで Green 関数の周波数 (ω) 依存性を示すことができた。この分母についてもうちょっと詳細に見てみよう。上式の第一項の分母は以下のように変形できる:

$$\omega - \hbar^{-1}[E_n(N+1) - E(N)] = \omega - \hbar^{-1}[E_n(N+1) - E(N+1)] - \hbar^{-1}[E(N+1) - E(N)] \quad (16.48)$$

ここで $E(N+1) - E(N)$ は基底状態に粒子が 1 つ追加された時のエネルギー差である。粒子数変化に伴うエネルギー変化率をケミカルポテンシャルと呼ぶ。 $E_n(N+1) - E(N+1)$ は $N+1$ 粒子系の励起エネルギーである。そんなわけで、書き直す:

$$G_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega) = \hbar V \sum_n \left[\frac{\langle \Psi_0 | \hat{\psi}_{\alpha S}(0) | n\mathbf{k} \rangle \langle n\mathbf{k} | \hat{\psi}_{\beta S}^\dagger(0) | \Psi_0 \rangle}{\hbar\omega - \mu - \epsilon_{n\mathbf{k}}(N+1) + i\eta} + \frac{\langle \Psi_0 | \hat{\psi}_{\beta S}^\dagger(0) | n, -\mathbf{k} \rangle \langle n, -\mathbf{k} | \hat{\psi}_{\alpha S}(0) | \Psi_0 \rangle}{\hbar\omega - \mu + \epsilon_{n, -\mathbf{k}}(N-1) - i\eta} \right] \quad (16.49)$$

η に \hbar^{-1} がついていないが、 η の定義の中に押し込めている。 μ も N 依存性を持っているが

$$\mu(N+1) = \mu \left(N \left(1 + \frac{1}{N} \right) \right) = \mu(N) + O(N^{-1}) \quad (16.50)$$

になるので、 N が十分大きいものとして無視することにする。

これでスピン $\frac{1}{2}$ の場合の G の行列構造についてシンプルにまとめることができた。この Green 関数は 2×2 行列なので単位行列と Pauli 行列で構成される完全系で展開することができる¹⁵。今回の問題は一様系なので指向性は無いため、 G は空間回転に対してスカラー¹⁶ でなければならない。 G には σ と \mathbf{k} が含まれるはずであり、 \mathbf{k} は σ とペアになっていなければならないので

$$G(\mathbf{k}, \omega) = a\mathbf{I} + b\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k} \quad (16.51)$$

という形になる。ここでハミルトニアンは空間鏡映対称性を持っており、この性質は Green 関数にも引き継がれているが、 $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k}$ は擬スカラーなので鏡映対称性を持っていない。よって b の項は消えなければならない。これで Green 関数がとてもシンプルに書けることがわかる。(16.1)(16.36) から場の演算子を平面波展開した表式

$$\hat{\psi}(0) = \sum_k \frac{1}{\sqrt{V}} c_k \quad (16.52)$$

や

$$\epsilon_{\mathbf{k}}(N+1) = \epsilon_{\mathbf{k}}^0 - \epsilon_F^0 = \frac{\hbar^2(k^2 - k_F^2)}{2m} \quad (16.53)$$

$$\mu = \epsilon_F^0 \quad (16.54)$$

¹⁴ある P_n に対応する \mathbf{k} はひとつで、クロネッカーデルタなんか和を取って消えてしまうのでは?と思うかもしれない。しかし \mathbf{k} はいくつもの準粒子のエネルギーの総和なので、 \mathbf{k} の選び方に対して同じエネルギーを持つものはいくつか存在する(縮退している?)。対して P_n は \hat{H}_H の固有状態なので、 $|\Psi_n\rangle$ の縮退がなければ \hat{P}_n の縮退もない。そういうことで $|\Psi_n\rangle$ を n と \mathbf{k} でパラメトライズしている。これは一様系であるために運動量が保存し、その quantum number である \mathbf{k} を明示したに過ぎないらしい。そもそも n は様々な quantum number を持っているが、今回は \mathbf{k} が保存するのでそれを外に出して n の定義を変えた、ということらしい。

¹⁵単に、単位行列とパウリ行列の線型結合で書けるということ。

¹⁶ここでいうスカラーは”スカラー演算子”の意味。 $\nabla = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$ はベクトル演算子、 $\nabla \cdot \mathbf{k}$ はスカラー演算子。Pauli 行列完全系も $\boldsymbol{\sigma} = (\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z)$ みたいなベクトル演算子だと考えれば $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k}$ もスカラー演算子である。

を用いると Free Fermion の Green 関数を再現できる:

$$G(\mathbf{k}, \omega) = \delta_{\alpha\beta} \left[\frac{\theta(k - k_F)}{\omega - \omega_k + i\eta} + \frac{\theta(k_F - k)}{\omega - \omega_k - i\eta} \right] \quad (16.55)$$

さて、ここで (16.49) は $\hbar\omega$ についての極を持つ関数である。 $\epsilon_{n\mathbf{k}}$ が正定値なので $\text{Re } \hbar\omega < \mu$ ならば (16.49) の第一項は極を持たない。一方で $\text{Re } \hbar\omega > \mu$ ならば (16.49) の第二項は極を持たない。これは原書の Fig.7.1¹⁷ のとおり。バツェンが Green 関数が極を持つ点を表している。実軸よりちょっと上にあるか下にあるかは $i\eta$ の符号が決めている。さて、Fig.7.1 を見てわかる通り、 $\hbar\omega$ の複素空間上では上部も下部も正則ではない。しかし、今後の計算の上ではどちらか一方は正則であってほしい。ということで、遅延 Green 関数・先進 Green 関数を定義する:

$$iG_{\alpha\beta}^R(\mathbf{x}t; \mathbf{x}'t') = \langle \Psi_0 | \left\{ \hat{\psi}_{H\alpha}^\dagger(\mathbf{x}t), \hat{\psi}_{H\beta}(\mathbf{x}'t') \right\} | \Psi_0 \rangle \theta(t - t') \quad (16.56)$$

$$iG_{\alpha\beta}^A(\mathbf{x}t; \mathbf{x}'t') = \langle \Psi_0 | \left\{ \hat{\psi}_{H\beta}(\mathbf{x}'t'), \hat{\psi}_{H\alpha}^\dagger(\mathbf{x}t) \right\} | \Psi_0 \rangle \theta(t' - t) \quad (16.57)$$

これらは今までの Green 関数¹⁸ と同じように解析を進めることができ、一様系で Rehmann 表示をしてみると

$$G_{\alpha\beta}^{R,A}(\mathbf{k}, \omega) = \hbar V \sum_n \left[\frac{\langle \Psi_0 | \hat{\psi}_{\alpha S}(0) | n\mathbf{k} \rangle \langle n\mathbf{k} | \hat{\psi}_{\beta S}^\dagger(0) | \Psi_0 \rangle}{\hbar\omega - \mu - \epsilon_{n\mathbf{k}}(N+1) \pm i\eta} + \frac{\langle \Psi_0 | \hat{\psi}_{\beta S}^\dagger(0) | n, -\mathbf{k} \rangle \langle n, -\mathbf{k} | \hat{\psi}_{\alpha S}(0) | \Psi_0 \rangle}{\hbar\omega - \mu + \epsilon_{n, -\mathbf{k}}(N-1) \pm i\eta} \right] \quad (16.58)$$

となっている。遅延 Green 関数の極は下部にまとまり、 $\text{Im } \omega > 0$ の領域では解析的である。先進はその逆。もし ω が実なら

$$[G_{\alpha\beta}^R(\mathbf{k}, \omega)]^* = G_{\alpha\beta}^A(\mathbf{k}, \omega) \quad (16.59)$$

の関係にある。遅延と先進の違いは収束因子 $i\eta$ の符号のみである。もし ω が実で $\hbar^{-1}\mu$ より大きければ、無限小の $i\eta$ は何の役割も成さなくなる。以上より

$$G_{\alpha\beta}^R(\mathbf{k}, \omega) = G_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega) \quad \text{Re } \hbar\omega > \mu \quad (16.60)$$

$$G_{\alpha\beta}^A(\mathbf{k}, \omega) = G_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega) \quad \text{Re } \hbar\omega < \mu \quad (16.61)$$

16.2.5 Physical Interpretation of the Green's Function

一粒子 Green 関数の物理的な解釈を理解するために相互作用描像の状態 $|\Psi_I(t')\rangle$ と、 $(\mathbf{x}'t')$ に粒子を加える操作 $\hat{\psi}_{i\beta}(\mathbf{x}'t') |\Psi_I(t')\rangle$ について考える。 $|\Psi_I(t')\rangle$ はハミルトニアン \hat{H}_I の固有状態ではないが、時間発展演算子 $\hat{U}(t, t')$ は有効である。さて、 $t > t'$ において $\hat{U}(t, t') \hat{\psi}_{i\beta}^\dagger(\mathbf{x}'t') |\Psi_I(t')\rangle$ と $\hat{\psi}_{i\alpha}^\dagger(\mathbf{x}t) |\Psi_I(t)\rangle$ の overlap について考えてみる¹⁹:

$$\langle \Psi_I(t) | \hat{\psi}_{i\alpha}(\mathbf{x}t) \hat{U}(t, t') \hat{\psi}_{i\beta}^\dagger(\mathbf{x}'t') | \Psi_I(t') \rangle = \langle \Psi_0 | \hat{\psi}_{H\alpha}(\mathbf{x}t) \hat{\psi}_{H\beta}^\dagger(\mathbf{x}'t') | \Psi_0 \rangle \quad (16.62)$$

この計算過程で Gell-Mann-Low の定理を用いた。 $|\Psi_0\rangle$ は Full Hamiltonian の固有状態。これはまさに $t > t'$ における Green 関数の定義になっており、粒子の追加を含む状態の伝搬を特徴づけている。

この時間に関する伝搬が $G(\mathbf{k}, \omega)$ とどのように関係しているかを考える。

... 工事中 ...

16.3 Wick's Theorem

16.3.1 概略

前章で Green 関数の定義と性質を見た。そういうわけで、摂動論で Green 関数を評価せねばならない。なぜならそれが相互作用描像で最も簡単な方法だから。しかしながら、Green 関数は相互作用描像の基底状態による

¹⁷ $\hbar\omega$ が複素数であることに注意。つまり、縦軸が $\hbar\omega$ の虚部、横軸が実部。

¹⁸ 因果 Green 関数という。

¹⁹ $(\mathbf{x}t)$ に粒子を追加した状態と $(\mathbf{x}'t')$ に粒子を追加して時間を t に合わせてあげた状態の overlap を見ている？

Heisenberg 演算子の期待値で定義されている。これは摂動論では不便なので、Heisenberg 演算子 $\hat{O}_H(t)$ とそれに対応する $\hat{O}_I(t)$ の関係について以下では考えることにする。ここで証明したいのは

Heisenberg 演算子と相互作用演算子

$$\frac{\langle \Psi_0 | \hat{O}_H(t) | \Psi_0 \rangle}{\langle \Psi_0 | \Psi_0 \rangle} = \frac{1}{\langle \Phi_0 | \hat{S} | \Phi_0 \rangle} \langle \Phi_0 | \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{-i}{\hbar} \right)^{\nu} \frac{1}{\nu!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \cdots dt_{\nu} \times e^{-\epsilon(|t_1|+\cdots+|t_{\nu}|)} T \left[\hat{H}_I(t_1) \cdots \hat{H}_I(t_{\nu}) \hat{O}_I(t) \right] | \Phi_0 \rangle \quad (16.63)$$

where $\hat{S} = U_{\epsilon}(\infty, -\infty)$

この証明は Gell-Mann Low の定理を用いる。 $|\Phi_0\rangle$ は Free Hamiltonian の基底状態。同様にして

Heisenberg 演算子の時間順序積と相互作用演算子

$$\frac{\langle \Psi_0 | T \left[\hat{O}_H(t) \hat{O}_H(t') \right] | \Psi_0 \rangle}{\langle \Psi_0 | \Psi_0 \rangle} = \frac{1}{\langle \Phi_0 | \hat{S} | \Phi_0 \rangle} \langle \Phi_0 | \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{-i}{\hbar} \right)^{\nu} \frac{1}{\nu!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \cdots dt_{\nu} \times e^{-\epsilon(|t_1|+\cdots+|t_{\nu}|)} T \left[\hat{H}_I(t_1) \cdots \hat{H}_I(t_{\nu}) \hat{O}_I(t) \hat{O}_I(t') \right] | \Phi_0 \rangle \quad (16.64)$$

を証明する。ここでは $\epsilon \rightarrow 0$ の極限が許される²⁰。これにより、Green 関数を

$$i\tilde{G}_{\alpha\beta}(x, y) = \sum_{\nu} \left(\frac{-i}{\hbar} \right)^{\nu} \frac{1}{\nu!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \cdots dt_{\nu} \frac{\langle \Phi_0 | T \left[\hat{H}_I(t_1) \cdots \hat{H}_I(t_{\nu}) \hat{\psi}_{\alpha}(x) \hat{\psi}_{\beta}(y) \right] | \Phi_0 \rangle}{\langle \Phi_0 | \hat{S} | \Phi_0 \rangle} \quad (16.65)$$

と書くことができる。いつもの $x = (x, t_x)$ という表記を採用。これ以降相互作用描像の添字 I を省略する。ここで相互作用を

$$U(x_1, x_2) = V(x_1, x_2) \delta(t_1 - t_2) \quad (16.66)$$

とすると便利。 $G_{\alpha\beta}(x, y)$ の分子 $\tilde{G}_{\alpha\beta}(x, y)$ は

$$i\tilde{G}_{\alpha\beta}(x, y) = iG_{\alpha\beta}^0(x, y) + \left(\frac{-i}{\hbar} \right) \sum_{\lambda\lambda'\mu\mu'} \frac{1}{2} \int d^4x d^4x' U(x_1, x'_1) \times \langle \Phi_0 | T [\hat{\psi}_{\lambda}^{\dagger}(x_1) \hat{\psi}_{\mu}^{\dagger}(x'_1) \hat{\psi}_{\mu'}(x'_1) \hat{\psi}_{\lambda'}(x_1) \hat{\psi}_{\alpha}(x) \hat{\psi}_{\beta}^{\dagger}(y)] | \Phi_0 \rangle + \cdots \quad (16.67)$$

のように非相互作用部 G^0 と相互作用部の積分に分解できる。つまり、相互作用を考えるためには積分項、特に $\langle \Phi_0 | T [\hat{\psi}^{\dagger} \cdots \hat{\psi} \hat{\psi}_{\alpha}(x) \hat{\psi}_{\beta}^{\dagger}(y)] | \Phi_0 \rangle$ みたいな項を評価しなければならない。

明らかなのは生成演算子と消滅演算子はペアになっていなければならないこと。さもなくば期待値はゼロになる。しかしながら、交換・反交換関係のみを用いてゼロにならない項を分類するのはとってもめんどくさい。その処方箋としての Wick の定理である。これは行列要素を評価する一般的な手続きらしい。今後は第二量子化の際に導入した single mode $\{c_k\}$ ではなく、場の演算子 $\hat{\psi}(x)$ をまんま使ったほうが見通しがよい。まず、一般に場の演算子が生成部と消滅部に分解できるとする：

$$\hat{\psi}(x) = \hat{\psi}^{(+)}(x) + \hat{\psi}^{(-)}(x) \quad (16.68)$$

(+) が消滅部, (−) が生成部を担う。

Wick の定理を証明するためにいくつかの新しい定義を導入する。

²⁰分母の \hat{S} 行列の位相因子と分子の位相因子が $\epsilon \rightarrow 0$ のもとでキャンセルする

1. T 積

場の演算子についてはすでに定義した。Fermion については定義より

$$T(\hat{A}\hat{B}\hat{C}\hat{D}\cdots) = (-1)^P T(\hat{C}\hat{A}\hat{D}\hat{B}\cdots) \quad (16.69)$$

となる。P は演算子の入れ替えの回数。

2. N 積

生成演算子を左に、消滅演算子を右に並べ替える積。これまた入れ替えの時には T 積と同様の因子がかかる：

$$N(\hat{A}\hat{B}\hat{C}\hat{D}\cdots) = (-1)^P N(\hat{C}\hat{A}\hat{D}\hat{B}\cdots) \quad (16.70)$$

消滅演算子が左にあるので、Free Hamiltonian の基底状態 $|\Phi_0\rangle$ による N 積の期待値はゼロになる。これ重要。また分配法則も成り立つ。

3. 縮約

\hat{U} と \hat{V} の縮約を以下のように定義する：

Contraction

$$\overline{\hat{U}\hat{V}} = T(\hat{U}\hat{V}) - N(\hat{U}\hat{V}) \quad (16.71)$$

原文の例にあるとおり、多くの縮約は T 積と N 積が同じ値を取るによりゼロになる。じゃあゼロじゃない縮約はどんなのがあるかというと原文の (8.27) みたいなやつ。これは $|\Phi_0\rangle$ による N 積の期待値がゼロになることから簡単に証明できる。つまり

Contraction と Green 関数

$$\overline{\psi\psi^\dagger} = iG_{\alpha\beta}^0(x, y) \quad (16.72)$$

4. 規約

縮約された演算子の入れ替えは任意の演算子と同じ規則を持ち、かつ縮約は c-数なので縮約がまとまれば N 積の外に出すことができる：

$$N(\overline{ABCD}) = \pm N(\overline{ACBD}) = \pm \overline{AC} N(BD) \quad (16.73)$$

また、縮約の定義から $\overline{UV} = \pm \overline{VU}$ であることもわかる。

5. Wick の定理

原文の (8.32) のとおり。演算子の T 積は N 積とあらゆる可能な縮約の和で表される。

イメージとして、T 積の中で生成演算子を左にどんどん持っていくときに、演算子が交換しない時に余分な項を生み出し、これが縮約である。原書の (8.27) のとおり、生成演算子が消滅演算子の左側にあると縮約は消える（ほとんどの縮約はゼロだったよね）。

これを証明するために以下の補題を考える。

6. 補題

ある N 積 $N(UV \cdots XY)$ とある演算子 \hat{Z} の積について、 \hat{Z} は $UV \cdots XY$ よりも早い時間変数を持っている (つまり、T 積では右に来る)。このとき、原書の (8.33) の式が成り立つ。言い換えると、N 積に早い時間の演算子 Z を右から掛けたらもともと N 積にあった演算子それぞれについて Z と縮約を取った N 積の和と、もとの N 積に Z を加えたものの和になる。これを証明するにあたって以下の 3 点に注意する:

(a) Z が消滅演算子なら、T 積と N 積がイコールになり縮約はゼロになる。よって、補題の右辺は最後の項しか残らず、補題は証明される。

(b) N 積内の $UV \cdots XY$ は既に正規順序積になっていると考えて良い。つまり $UV \cdots XY = N(UV \cdots XY)$ 。もし正規順序積になっていなかったとしても余計に出てくる因子は左辺と右辺で打ち消し合うことになる。

(c) $UV \cdots XY$ はすべて消滅演算子だと考えて良い。生成演算子を含む場合も、左から生成演算子を掛けることで議論を一般化できる。

この補題は演算子が 2 つの場合はすぐに証明ができる。ここから帰納法で補題を証明する。補題も原書の (8.36) のような定理を用いることで証明できる。

さらにこの補題は演算子の縮約 \overline{RS} を掛けることで一般化できる。

Wick の証明

2 つの演算子については自明。補題と同様に帰納法で証明する。

16.3.2 (16.64)

16.3.3 (16.64)

16.3.4 (16.71) の縮約ゼロについて

たとえば

$$T[\hat{\psi}^{(+)}(x)\hat{\psi}^{(-)}(y)] = \begin{cases} \hat{\psi}^{(+)}(x)\hat{\psi}^{(-)}(y) & t_x > t_y \\ \pm\hat{\psi}^{(-)}(y)\hat{\psi}^{(+)}(x) & t_x < t_y \end{cases} \quad (16.74)$$

について、 ψ は相互作用描像の演算子 $c_k e^{-i\omega_k t}$ の線型結合であり時間変数をくくり出せることから T 積は意味を成さなくなる。よって ψ は (反) 交換が可能であり

$$T[\hat{\psi}^{(+)}(x)\hat{\psi}^{(-)}(y)] = \pm\hat{\psi}^{(-)}(y)\hat{\psi}^{(+)}(x) = N(\hat{\psi}^{(+)}(x)\hat{\psi}^{(-)}(y)) \quad (16.75)$$

と一意に書くことができる。T 積と N 積の値が同じになるので Contraction はゼロになる。

なぜ Heisenberg 描像では成り立たないのか?

16.3.5 (16.72)

$|\Phi_0\rangle$ による T 積の期待値を計算する。縮約の定義から:

$$\langle\Phi_0|T(UV)|\Phi_0\rangle = \langle\Phi_0|\overline{UV}|\Phi_0\rangle + \langle\Phi_0|N(UV)|\Phi_0\rangle = \overline{UV} \quad (16.76)$$

縮約は c-数なので $|\Phi_0\rangle$ の外に出すことができ、 $|\Phi_0\rangle$ による N 積の期待値はゼロになる。

16.3.6 縮約とは？

いきなり縮約の定義が出てきたことを不思議に思うかもしれない。そもそもは T 積からスタートし、

$$T[\hat{\psi}(x_1)\hat{\psi}^\dagger(x_2)] = \theta(t_1 - t_2)\hat{\psi}(x_1)\hat{\psi}^\dagger(x_2) \pm \theta(t_2 - t_1)\hat{\psi}^\dagger(x_2)\hat{\psi}(x_1) \quad (16.77)$$

$$= \theta(t_1 - t_2) \left[\hat{\psi}(x_1), \hat{\psi}^\dagger(x_2) \right]_{\mp} \pm \hat{\psi}^\dagger(x_2)\hat{\psi}(x_1) \quad (16.78)$$

$$= \theta(t_1 - t_2) \left[\hat{\psi}(x_1), \hat{\psi}^\dagger(x_2) \right]_{\mp} + N(\hat{\psi}(x_1)\hat{\psi}^\dagger(x_2)) \quad (16.79)$$

$$\text{where} \quad \theta(t_2 - t_1) = 1 - \theta(t_1 - t_2)$$

右辺第一項を Contraction と呼ぶ。交換関係から c-数であることは明らか。Wick の証明で「演算子が交換しない時に余分な項を生み出し」とあるが、演算子が交換する場合右辺第一項は消えることからこれも明らか。

16.3.7 補題の (b)

例として $N(XUY)Z$ を考える。U のみ生成演算子として N 積内を正規順序にすると

$$N(XUY)Z = (-1)N(UXY)Z \quad (16.80)$$

となる。これについて補題を適応すると

$$(-1)N(UXY)Z = (-1) \left[N(U\overline{XY}Z) + N(U\overline{XY}Z) + N(\overline{U}XYZ) + N(UXYZ) \right] \quad (16.81)$$

となり (-1) の因子が打ち消されて N 積内が正規順序である場合に帰着された。もっと一般的な場合も直感的に大丈夫そう。

16.3.8 補題の (c)

E を生成演算子として補題の左から掛ける。生成演算子は N 積の左に来る：

$$(\text{左辺}) = EN(UV \cdots XY)Z = N(EUV \cdots XY)Z \quad (16.82)$$

右辺についても最後の項も含めて同様に E を挿入することができる。つまり

$$\begin{aligned} N(EUV \cdots XY)Z &= N(EUV \cdots \overline{XY}Z) + N(EUV \cdots \overline{XY}Z) + \cdots \\ &\quad N(\overline{EUV}X \cdots YZ) + N(EUV \cdots XYZ) \end{aligned} \quad (16.83)$$

となる。これでは $N(\overline{EUV}X \cdots YZ)$ の項が足りないので補題の形を満足していないが、そもそも $\overline{E}Z$ は生成演算子同士の縮約であることからゼロになるので $N(\overline{EUV}X \cdots YZ)$ を勝手に追加しても良い。これで生成演算子があった場合でも補題を満たすことが示された。

16.3.9 演算子が 2 つのときの補題

$$N(Y)Z = YZ = T(YZ) = \overline{Y}Z + N(YZ) \quad (16.84)$$

より証明完了。

16.3.10 帰納法で補題を証明

ある消滅演算子 D を補題の左から掛ける. $UV \cdots XY$ は全て消滅演算子なので:

$$DN(UV \cdots XY)Z = N(DUV \cdots XY)Z \quad (16.85)$$

ここで補題を適応:

$$\begin{aligned} N(DUV \cdots XY)Z &= N(DUV \cdots \overline{XYZ}) + N(DUV \cdots \overline{XYZ}) + \cdots \\ &\quad N(\overline{DUVX \cdots YZ}) + DN(UV \cdots XYZ) \end{aligned} \quad (16.86)$$

原文の補題 (8.33) に左から消滅演算子 D を掛けても, 最後の項以外は D をそのまま N 積の中に入れてしまうことができる. なぜなら唯一の生成演算子である Z が縮約を取って c -数になっているからである. ゆえに, まだ縮約を取っていない最後の項の D を N 積の先頭に追加することは許されない. その代わりもし

$$DN(UV \cdots XYZ) = N(\overline{DUV \cdots XYZ}) + N(DUV \cdots XYZ) \quad (16.87)$$

が成立していれば, 補題は証明できそうである.

16.3.11 補題の補題

(16.87) について. N 積の定義より

$$DN(UV \cdots XYZ) = (-1)^P DZUV \cdots XY \quad (16.88)$$

P は Z を D の前まで持ってくるのに要した交換回数. さらに Z は D より早い時間を持つので T 積を挿入できる:

$$(-1)^P DZUV \cdots XY = (-1)^P T(DZ)UV \cdots XY \quad (16.89)$$

T 積を縮約と N 積に展開:

$$(-1)^P T(DZ)UV \cdots XY = (-1)^P \overline{DZ} UV \cdots XY + (-1)^{P+Q} N(ZD)UV \cdots XY \quad (16.90)$$

Q は D と Z を入れ替えたときの因子. 右辺第一項の \overline{DZ} は既に c -数なので N 積に書き換え, 再び Z を一番後ろに持っていく²¹:

$$(-1)^P \overline{DZ} UV \cdots XY = (-1)^P N(\overline{DZ} UV \cdots XY) = (-1)^{2P} N(\overline{DUV \cdots XYZ}) = N(\overline{DUV \cdots XYZ}) \quad (16.91)$$

右辺第二項の Z も同様に一番後ろに持っていく:

$$(-1)^{P+Q} N(ZD)UV \cdots XY = (-1)^{2(P+Q)} N(DUV \cdots XYZ) = N(DUV \cdots XYZ) \quad (16.92)$$

よって (16.87) が証明できた.

16.3.12 補題の一般化

補題に \overline{RS} を掛ける:

$$\begin{aligned} \overline{RS} N(DUV \cdots XY)Z &= \overline{RS} N(DUV \cdots \overline{XYZ}) + \overline{RS} N(DUV \cdots \overline{XYZ}) + \cdots \\ &\quad \overline{RS} N(\overline{DUVX \cdots YZ}) + \overline{RS} N(\overline{DUV \cdots XYZ}) + \overline{RS} N(DUV \cdots XYZ) \end{aligned} \quad (16.93)$$

この \overline{RS} を N 積の中に入れて正規順序になるような入れ替えを両辺で行うと, 結局両辺に同じ因子 $(-1)^P$ がかることになり, R と S のラベルを V と X に入れ替えてあげれば原文の (8.38) が得られる.

²¹これは「4. 規約」で説明済み

16.3.13 2つの演算子の Wick

これは「演算子が2つのときの補題」と同じ。

16.3.14 帰納法で Wick を証明

補題と同じように他の任意の演算子より早い時間を持つ演算子 Ω を左から掛ける。ここで Ω は生成・消滅を特定しない:

$$T(UVW \cdots XYZ)\Omega = T(UVW \cdots XYZ\Omega) \quad (16.94)$$

上式の右辺は帰納法の仮定を用いて

$$T(UVW \cdots XYZ)\Omega = N(UVW \cdots XYZ)\Omega + N(\overline{UV}W \cdots XYZ)\Omega + N(\overline{UVW} \cdots XYZ)\Omega + \cdots \quad (16.95)$$

ここで補題を使うと Ω を N 積の中に入れることができる。 Ω が一番早い時間を持ったものでなくても、それぞれの項で演算子を並べ直してあげれば大丈夫。これで、演算子が生成部と消滅部に分けられるという仮定のもと、Wick の定理が証明できた。Wick の定理を使うのは $\langle \Phi_0 | \cdots | \Phi_0 \rangle$ に対してであって、縮約していない N 積を含む項は消える。

16.4 Diagrammatic Analysis of Perturbation Theory

Wick の定理のおかげで

$$i\tilde{G}_{\alpha\beta}(x, y) = \sum_{\nu} \left(\frac{-i}{\hbar} \right)^{\nu} \frac{1}{\nu!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \cdots dt_{\nu} \frac{\langle \Phi_0 | T[\hat{H}_1(t_1) \cdots \hat{H}_1(t_{\nu}) \hat{\psi}_{\alpha}(x) \hat{\psi}_{\beta}(y)] | \Phi_0 \rangle}{\langle \Phi_0 | S | \Phi_0 \rangle} \quad (16.96)$$

みたいなやつが評価できるようになる。縮約は単なる Free-field Green 関数 G^0 であるので、 G は U と G^0 を含む級数で表されることになる。この展開は座標空間や (一様系では) 運動量空間で解析することができる。ボソンについては今回も扱いません。

16.4.1 Feynman Diagrams in Coordinate Space

Wick の定理の例として

$$i\tilde{G}_{\alpha\beta}(x, y) = iG_{\alpha\beta}^0(x, y) + \left(\frac{-i}{\hbar} \right) \sum_{\lambda\lambda'\mu\mu'} \frac{1}{2} \int d^4x d^4x' U(x_1, x'_1) \times \langle \Phi_0 | T[\hat{\psi}_{\lambda}^{\dagger}(x_1) \hat{\psi}_{\mu}^{\dagger}(x'_1) \hat{\psi}_{\mu'}(x'_1) \hat{\psi}_{\lambda'}(x_1) \hat{\psi}_{\alpha}(x) \hat{\psi}_{\beta}^{\dagger}(y)] | \Phi_0 \rangle + \cdots \quad (16.97)$$

の一次の寄与について考えてみる。noninteracting ground state $|\Phi_0\rangle$ での期待値を計算するとき N 積は消えて場の演算子の縮約²²のみが残る。Wick の定理は取りうる全ての縮約の和が必要であり、その縮約は $\hat{\psi}$ とその共役で

²²ここでは2点相関関数のことを縮約 (contraction) と呼ぶ。

ある $\hat{\psi}^\dagger$ によって作られるものである. (16.97) の一次の項は

$$\overbrace{\psi_\lambda^\dagger(x_1)\psi_\mu^\dagger(x'_1)\psi_{\mu'}(x'_1)\psi_{\lambda'}(x_1)\psi_\alpha(x)\psi_\beta^\dagger(y)} \cdots (A) \quad (16.98)$$

$$\overbrace{\psi_\lambda^\dagger(x_1)\psi_\mu^\dagger(x'_1)\psi_{\mu'}(x'_1)\psi_{\lambda'}(x_1)\psi_\alpha(x)\psi_\beta^\dagger(y)} \cdots (B) \quad (16.99)$$

$$\overbrace{\psi_\lambda^\dagger(x_1)\psi_\mu^\dagger(x'_1)\psi_{\mu'}(x'_1)\psi_{\lambda'}(x_1)\psi_\alpha(x)\psi_\beta^\dagger(y)} \cdots (C) \quad (16.100)$$

$$\overbrace{\psi_\lambda^\dagger(x_1)\psi_\mu^\dagger(x'_1)\psi_{\mu'}(x'_1)\psi_{\lambda'}(x_1)\psi_\alpha(x)\psi_\beta^\dagger(y)} \cdots (D) \quad (16.101)$$

$$\overbrace{\psi_\lambda^\dagger(x_1)\psi_\mu^\dagger(x'_1)\psi_{\mu'}(x'_1)\psi_{\lambda'}(x_1)\psi_\alpha(x)\psi_\beta^\dagger(y)} \cdots (E) \quad (16.102)$$

$$\overbrace{\psi_\lambda^\dagger(x_1)\psi_\mu^\dagger(x'_1)\psi_{\mu'}(x'_1)\psi_{\lambda'}(x_1)\psi_\alpha(x)\psi_\beta^\dagger(y)} \cdots (F) \quad (16.103)$$

の 6 通り. 全ての可能な時間順序で消えない寄与を列挙することによって得られる²³が, この手続きは 1 次ですらかなり複雑. Wick はそれをかなり簡単にしてくれる. これをダイアグラムで表記するとそれぞれ Fig. 9.1 みたいになる. 実線は contraction G^0 で, 波線が相互作用ポテンシャルを表している.

原書の式 (9.1) の式と対応する Fig. 9.1 はいくつか面白い特徴がある.

1. (A), (B), (D), (F) は同時刻 Green 関数を持っており, ダイアグラムはそれ自体で閉じている. さて同時刻 Green 関数の解釈について考えてみる. 同時刻について T 積は定義されていないんだけど, そういう項が相互作用ハミルトニアン H_I の縮約で現れてしまう. こいつは $\hat{\psi}^\dagger\hat{\psi}$ の形で現れる. 原書 (0.2) における $n^0(x)$ は非摂動基底状態での粒子密度であり, 相互作用系では $n(x)$ と同じになる必要はない. (D), (F) は (9.2) のような項を持っており, 全粒子の最低次直接相互作用を表している. この全粒子は非相互作用基底状態を作る²⁴. (C), (E) は交換相互作用を表している²⁵.

2. (A), (B) は disconnected diagrams であり, 他のダイアグラムのどの線にもつながってないサブユニットを含んでいる. サブユニットの中で相互作用の効果が閉じており, 結果的にサブユニットの効果を \tilde{G} から取り除くことができる. これまで $\langle\Phi_0|\hat{S}|\Phi_0\rangle$ は無視されてきたが, 今回はちゃんと考えてあげることにする. これは原文の (8.9) の項のうち, $\hat{\psi}_\alpha(x)\hat{\psi}_\beta^\dagger(y)$ を除いたものにあたるので, Fig. 9.3 のような $\tilde{G}_{\alpha\beta}$ の外線がないダイアグラムが出てくる. これが $\tilde{G}_{\alpha\beta}$ の disconnected diagram と約分されて消える²⁶. これが disconnected diagram の寄与が打ち消される理由.

原文の (8.9) は (9.3) みたいに connected な部分と disconnected な部分に分けられる. ν についてはクロネッカーデルタがあるので $\mu = n + m$ となる. 後ろの disconnected な積分は $\langle\Phi_0|\hat{S}|\Phi_0\rangle$ と約分されて消える. 結果, (9.5) みたいなすっきりとした形になる.

さて, これから Feynman diagram と摂動級数の関係を導出する. しかし, Feynman rule は相互作用ハミルトニアン H_I に依存することを強調しておかなければならない. 今回は 2 体ポテンシャルを通して相互作用する同種粒子系を考える.

3. まず, ダイアグラムの形が同じであれば, 相互作用ハミルトニアンの添字のラベルが異なっても G への寄与は同じ²⁷. 加えてそいつらの符号も同じである. なぜなら H_I に含まれる演算子の数が偶数であり, H_I は自由に動かせるから²⁸. 摂動 m 次ではラベルが違うだけで同じダイアグラムが $m!$ 個出てくるが, 原文 (9.5) の $(m!)^{-1}$ の因子で打ち消されることになるので, 結局同じ形のダイアグラムは 1 回数えればいい²⁹.

²³T 積を N 積と T 積の真空期待値にマシ展開して N 積が絡んだ項を消すということ. 山中先生の資料を参照. 確かに, めんどい.

²⁴フェルミの海のこと

²⁵Slater 行列より

²⁶ちゃんと証明できてないような気がする... なんとなくわかるけど.

²⁷dummy index が違うだけだから.

²⁸ $(-1)^P$ の因子が打ち消す

²⁹この結果は connected diagram についてのみ正しいらしい.

.. 工事中..

(a) n 本の相互作用線と $2n + 1$ 本の方向を持つ Green 関数 G^0 を用いて書けるダイアグラムを列挙する.

4. 1 次では C と E は同じで, D と F も同じ. 異なるのは x と x' のラベルだけ. この置換えはポテンシャルが対称な場合. ダイアグラムは 1 種類だけ数えればよく, 原文 (9.1) の $1/2$ の因子はオミットできる. ここで追加のルールを得る:

(b) バーテックスを 4 次元空間 x_i でラベリングする.

(c) $y \rightarrow x$ の向きに進む実線は $G_{\alpha\beta}^0$ を表す.

(d) 波線は相互作用を表す.

(e) 全ての空間と時間について積分する.

5. Green 関数とポテンシャルにある添字の和は, fermion line に沿って走る行列積の式にある. このことより次のルールが生まれる:

(f) fermion line に沿ったスピン行列の積が存在し, 各バーテックスにポテンシャルを含んでいる

6. ダイアグラムの符号は次のように決まる:

それぞれの時刻で fermion line が閉じていたら $-$ の符号がつく.

(g) 各項に $(-1)^F$ をつける. F は閉じたループの数.

7. (9.5) 式の n 次には $(-i/\hbar)^n$ がついており, $2n + 1$ 組の縮約には $(i)^{2n+1}$ がつくことから

(h) G の n 次を計算するときは, $(i/\hbar)^n$ をつける.

最後に (9.2) の議論から

(i) 同時刻の Green 関数は $G_{\alpha\beta}(x, t; x', t^+)$ としましょう.

16.4.2 Feynman Diagrams in Momentum Space

原理的に, 任意のオーダーで各ダイアグラムは Green 関数に書き換えることができる. しかし, non-interacting Green 関数のそれぞれが, 2 つの繋がっていないピース³⁰で出来ていることから, 実際の期待値は厄介な問題を抱えている. 原書 (9.6) の一次の寄与でさえ, 時間変数の相対値によって多くのピースに分かれてしまう. 対照的に, 時間の Fourier 変換によって得られる $G^0(x, y, \omega)$ はシンプルな形をしており, 計算に用いるのに便利である. $G_{\alpha\beta}(x, x', \omega)$ を考えることもできるが, 時間非依存のハミルトニアンを持つ非一様系に適応することになる. というので, 今は一様系でかつ空間等方は系に議論を限定する. ここでは Green 関数は $\delta_{\alpha\beta}G(x - y)$ という形を取る. 一様系なので Fourier 変換が許され,

$$G_{\alpha\beta}(x, y) = (2\pi)^{-4} \int d^4k e^{ik(x-y)} G_{\alpha\beta}(k) \quad (16.104)$$

$$G_{\alpha\beta}^0(x, y) = (2\pi)^{-4} \int d^4k e^{ik(x-y)} G_{\alpha\beta}^0(k) \quad (16.105)$$

³⁰ $G(x, y)$ の x と y はそれぞれ $\hat{\psi}(x)$ と $\hat{\psi}^\dagger(y)$ のようにバラバラなピースからできている. これを Fourier 変換すると $G(k)$ のように 1 変数になり, 言わば対角的になる.

熱力学極限 $V \rightarrow \infty$ は既に取り替えているものとする。ここでは 4 次元の notation を採用している:

$$d^4k \equiv d^3k d\omega \quad k \cdot x \equiv \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t \quad (16.106)$$

さらに相互作用は座標にのみ依存するとする:

$$U(x, x') = V(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \delta(t - t') \quad (16.107)$$

これも運動量表示で

$$\begin{aligned} U(x, x')_{\alpha\alpha', \beta\beta'}(x, x') &= (2\pi)^{-4} \int d^4k e^{ik(x-y)} U(k)_{\alpha\alpha', \beta\beta'} \\ &= (2\pi)^{-3} \int d^3k e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} U(\mathbf{k})_{\alpha\alpha', \beta\beta'} \delta(t - t') \end{aligned} \quad (16.108)$$

また

$$U(k)_{\alpha\alpha', \beta\beta'} = V(\mathbf{k})_{\alpha\alpha', \beta\beta'} = \int d^3x e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} V(\mathbf{x})_{\alpha\alpha', \beta\beta'} \quad (16.109)$$

原書 Fig. 9.7b の Green 関数を運動量表示に書き換えると原書 (9.12) みたいになる。Green 関数が 2 点じゃなくて 1 点に書き換えられた。k-表示された Green 関数でも x-表示の時と同じように Feynman ルールが存在する。

16.4.3 Dyson's Equation

0. General derivation of Dyson's Equation

まずは一般的な Dyson 方程式の導出について。ハミルトニアンが

$$H = \int dx \hat{\psi}^\dagger(x) h(x) \hat{\psi}(x) + \frac{1}{2} \int dx dx' \hat{\psi}^\dagger(x) \hat{\psi}^\dagger(x') U(x, x') \hat{\psi}(x') \hat{\psi}(x) \quad (16.110)$$

があるとする。また、スピンの添字 α, β は省略し、 $x = (\mathbf{x}, t)$, $x' = (\mathbf{x}', t)$ としている。これの Heisenberg 方程式は

$$i\partial_t \hat{\psi}(x) = [\hat{\psi}, H] = h(\mathbf{x}) \hat{\psi}(x) + \int dx' \hat{\psi}^\dagger(x') U(x, x') \hat{\psi}(x') \hat{\psi}(x) \quad (16.111)$$

$$(16.112)$$

遅延 Green 関数を

$$iG^R(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', 0) = \langle \Psi_0 | \left\{ \hat{\psi}(\mathbf{x}, t), \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x}', 0) \right\} | \Psi_0 \rangle \theta(t) \quad (16.113)$$

とすると、この時間発展は

$$\begin{aligned} i\partial_t G^R(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', 0) &= \langle \Psi_0 | \left\{ \partial_t \hat{\psi}(\mathbf{x}, t), \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x}', 0) \right\} | \Psi_0 \rangle \theta(t) + \langle \Psi_0 | \left\{ \hat{\psi}(\mathbf{x}, t), \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x}', 0) \right\} | \Psi_0 \rangle \partial_t \theta(t) \\ &= -i \langle \Psi_0 | \left\{ h(\mathbf{x}) \hat{\psi}(x) + \int dx'' \hat{\psi}^\dagger(x'') U(x, x'') \hat{\psi}(x'') \hat{\psi}(x), \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x}', 0) \right\} | \Psi_0 \rangle \theta(t) \\ &\quad + \langle \Psi_0 | \left\{ \hat{\psi}(\mathbf{x}, t), \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x}', 0) \right\} | \Psi_0 \rangle \delta(t) \\ &= h(\mathbf{x}) G^R(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', 0) - i\theta(t) \int dx'' U(x, x'') \langle \Psi_0 | \left\{ \hat{\psi}^\dagger(x'') \hat{\psi}(x'') \hat{\psi}(x), \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x}', 0) \right\} | \Psi_0 \rangle \\ &\quad + \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta(t) \\ [i\partial_t - h(\mathbf{x})] G^R(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', 0) &+ i\theta(t) \int dx'' U(x, x'') \langle \Psi_0 | \left\{ \hat{\psi}^\dagger(x'') \hat{\psi}(x'') \hat{\psi}(x), \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x}', 0) \right\} | \Psi_0 \rangle = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta(t) \end{aligned} \quad (16.114)$$

左辺第二項目を

$$i\theta(t) \int dx'' U(x, x'') \langle \Psi_0 | \left\{ \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x}'', t) \hat{\psi}(\mathbf{x}'', t) \hat{\psi}(\mathbf{x}, t), \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x}', 0) \right\} | \Psi_0 \rangle = - \int dx'' \int dt'' \Sigma(\mathbf{x}, \mathbf{x}''; t - t'') G^R(\mathbf{x}'', t''; \mathbf{x}', 0) \quad (16.115)$$

という形で書くことで Self-energy $\Sigma(\mathbf{x}, \mathbf{x}; t)$ を定義する. 結局遅延 Green 関数の時間発展方程式は

$$[i\partial_t - h(\mathbf{x})]G^R(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; t) - \int d\mathbf{x}'' \int dt'' \Sigma(\mathbf{x}, \mathbf{x}''; t - t'')G^R(\mathbf{x}'', t''; \mathbf{x}', 0) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\delta(t) \quad (16.116)$$

さて, ここで前節でやったように Green 関数, Self-energy, デルタ関数を

$$G^R(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; t) = (2\pi)^{-4} \int d\mathbf{k} d\omega e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} e^{-i\omega t} G(\mathbf{k}, \omega) \quad (16.117)$$

$$\Sigma(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; t) = (2\pi)^{-4} \int d\mathbf{k} d\omega e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} e^{-i\omega t} \Sigma(\mathbf{k}, \omega) \quad (16.118)$$

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\delta(t) = (2\pi)^{-4} \int d\mathbf{k} d\omega e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} e^{-i\omega t} \quad (16.119)$$

のように Fourier 変換する. これで微分などが処理できる:

$$\begin{aligned} \int d\mathbf{k} d\omega \left[(\omega - k^2) e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} e^{-i\omega t} G(\mathbf{k}, \omega) - \Sigma(\mathbf{k}, \omega) e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} e^{-i\omega t} G(\mathbf{k}, \omega) \right] &= \int d\mathbf{k} d\omega e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} e^{-i\omega t} \\ \therefore (\omega - k^2) G(\mathbf{k}, \omega) - \Sigma(\mathbf{k}, \omega) G(\mathbf{k}, \omega) &= 1 \end{aligned} \quad (16.120)$$

ここで無次元化のことを考えると $\omega \rightarrow \hbar\omega, k^2 \rightarrow \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \equiv \epsilon_k$ なので,

$$G(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{\hbar\omega - \epsilon_k - \Sigma(\mathbf{k}, \omega)} \quad (16.121)$$

が求まる. (16.120) の右辺は 1 になったが, 本来はスピンの足があることを考えると $\delta_{\alpha\beta}$ になるべき. それで原文の (9.33) みたいになる.

1. Self-energy insertion

Green 関数 G の構造は, 非摂動 Green 関数 G^0 と G^0 がたくさん connect した項の和になっている. Fig. 9.12 は例えば Green 関数の摂動 1 次までの展開を考えるとわかりやすい. 摂動 2 次以上を考えるともっといろんなダイアグラムが出てきそうだけど, 1 次も含めたそれらの寄与を Self-energy に押し付けることで Fig. 9.12 のような表現になる. Fig. 9.12 に対応する Green 関数は原文 (9.25).

ここで「proper な self-energy の挿入」という概念を導入する. proper な self-energy の挿入とは, 1 本の粒子線を切って 2 つの term に分けられないような self-energy の挿入を proper であるという. 原文の Fig. 9.8 を例にすると, (a), (b), (c), (d) は x, y を除く vertex を切断することにより 2 つの部分に分けることができるが, それ以外はできない. 定義より, proper self-energy は proper self-energy insertion の全ての和になっている. proper self-energy $\Sigma(x, x')$ の proper Self-energy insertion $\Sigma^*(x, x')$ による表現は原文 (9.26) のとおり. (9.26) のダイアグラムが Fig. 9.13. self-energy の展開 (9.26) を Green 関数の self-energy 表現 (9.25) に代入すると (9.27) になる. これを Dyson 方程式と呼ぶ.

第17章 数値計算手法

山中研でよく用いられる数値計算アルゴリズムを実例とともに紹介.

17.1 Symplectic 数値解法

17.1.1 ハミルトニアン分解

例えば, ある Time-depend Schrödinger 方程式

$$i\partial_t\psi(t) = \hat{H}\psi(t) = (\hat{K} + \hat{V})\psi(t) \quad (17.1)$$

の時間発展はハミルトニアンが時間並進の Generator であることから, 微小時間 Δt を用いて

$$\psi(t + \Delta t) = \exp\left[-i(\hat{K} + \hat{V})\Delta t\right]\psi(t) \quad (17.2)$$

とかける. この $\exp[\bullet]$ を評価できれば時間発展が記述できるが, 当然 \hat{K} には微分演算子が含まれているのでそんなに単純ではない. これを処理するには拡散方程式を解く場合と同様, Fourier 変換を用いる方法が考えられる. しかし, Fourier 変換を必要としているのは \hat{K} の部分であり, \hat{V} ではない. ということで, $\exp[\bullet]$ を Baker-Campbell-Hausdorff 公式で分解する:

$$\exp\left[-i(\hat{K} + \hat{V})\Delta t\right] = e^{-i\hat{K}\Delta t}e^{-i\hat{V}\Delta t}e^{\frac{1}{2}[\hat{K}, \hat{V}]\Delta t^2} \quad (17.3)$$

$$= e^{-i\hat{K}\Delta t}e^{-i\hat{V}\Delta t}\left(I + \frac{1}{2}[\hat{K}, \hat{V}]\Delta t^2 + \dots\right) \quad (17.4)$$

$$= e^{-i\hat{K}\Delta t}e^{-i\hat{V}\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t^2) \quad (17.5)$$

これは Δt について 2 次の誤差を持つ.

17.1.2 エネルギーの保存

では, Symplectic 解法における時間発展演算子は $e^{-i\hat{H}\Delta t}$ ではなく $e^{-i\hat{K}\Delta t}e^{-i\hat{V}\Delta t}$ になるわけだが, この近似によってエネルギーの誤差はどの程度になるのだろうか. その前に, この時間発展演算子によって保存する量がどんなものであるかを考えてみよう. $e^{-i\hat{H}\Delta t}$ で保存する量が \hat{H} ならば

$$e^{-i\hat{K}\Delta t}e^{-i\hat{V}\Delta t} = e^{-i\hat{H}\Delta t} \quad (17.6)$$

という \tilde{H} を導入すればこれは保存する筈である. ではこの \tilde{H} が具体的に何になるかという以下通り.

$$e^{-i\hat{K}\Delta t}e^{-i\hat{V}\Delta t} = e^{-i(\hat{K}+\hat{V})\Delta t - \frac{1}{2}[\hat{K}, \hat{V}]\Delta t^2 + \dots} \quad (17.7)$$

$$\therefore \tilde{H} = \hat{K} + \hat{V} - \frac{i}{2}[\hat{K}, \hat{V}]\Delta t + \dots \quad (17.8)$$

つまり, この \tilde{H} が $\psi(t_1)$ に作用しようが, $\psi(t_2)$ に作用しようが全エネルギーの誤差は t_1, t_2 に依らず Δt にのみ依存する. つまり t を並進するごとに誤差が蓄積することではなく, Δt が無視できるほど小さいなら $\tilde{H} \simeq H$ である. これが Symplectic 解法の強みである.

17.1.3 Formulate for Schrödinger equation

Schrödinger 方程式の逐次時間発展:

$$\psi(t + \Delta t) = \exp \left\{ -\frac{i}{2} (-\partial_x^2 + x^2) \right\} \psi(t) \quad (17.9)$$

$$\simeq \exp(K\delta t) \exp(V\delta t) \psi(t) \quad (17.10)$$

$$\text{where} \quad K = \frac{i}{2} \partial_x^2, \quad V = -\frac{i}{2} x^2$$

ここでポテンシャル項についてはまとめてしまう:

$$\exp(V\Delta t) \psi(t) = \psi_V \quad (17.11)$$

$$\psi(t + \Delta t) = \exp(K\delta t) \psi_V \quad (17.12)$$

ψ_V はもちろん時間に依存しているが, その引数は省略している. 運動エネルギー項のもともとの微分方程式は拡散方程式なので, これを Fourier 変換する:

$$i\partial_t \psi_V = -\frac{1}{2} \partial_x^2 \psi_V \quad (17.13)$$

$$i\partial_t \int dk e^{ikx} \tilde{\psi}_V(k) = -\frac{1}{2} \partial_x^2 \int dk e^{ikx} \tilde{\psi}_V(k) \quad (17.14)$$

$$\partial_t \tilde{\psi}_V(k) = -\frac{1}{2} ik^2 \tilde{\psi}_V(k) \quad (17.15)$$

$$\therefore \tilde{\psi}_V(k, t + \Delta t) = e^{-\frac{1}{2} ik^2 \Delta t} \tilde{\psi}_V(k) \quad (17.16)$$

$$\begin{aligned} \therefore \exp(K\delta t) \psi_V &= \mathcal{F}^{-1} \left[e^{-\frac{1}{2} ik^2 \Delta t} \tilde{\psi}_V(k) \right] \\ &= \mathcal{F}^{-1} \left[e^{-\frac{1}{2} ik^2 \Delta t} \mathcal{F}[\psi_V] \right] \end{aligned} \quad (17.17)$$

まとめると,

$$\psi(t + \Delta t) = \mathcal{F}^{-1} \left[e^{-\frac{1}{2} ik^2 \Delta t} \mathcal{F}[\exp(V\Delta t) \psi(t)] \right] \quad (17.18)$$

具体的な手順としては

1. 時刻 t の波動関数に $\exp(V\Delta t)$ を掛ける
2. Fourier 変換する
3. $e^{-\frac{1}{2} ik^2 \Delta t}$ を掛ける
4. 逆 Fourier 変換する

といったところ.