数理解析研究所講究録 1413 巻 2005 年 231-238

Gross-Pitaevskii 方程式による超流動乱流のエネルギースペクトル

大阪市立大学理学部物理学科　小林　未知数 (Michikazu Kobayashi)
Faculty of Science,
Osaka City University

自然界における乱流現象を要素還元的に理解するという視点において、超流動乱流が近年非常に注目を浴び、活発に議論されている。超流動乱流とは超流動液体^{4}He 中の量子渦によって引き起こされる現象であり、低温物理学において最も重要なトピックの 1 つである [1]。液体^{4}He は 2.17K 以下において、構成要素である^{4}He 原子が Bose-Einstein 凝縮を起こし、粘性が消失する超流動状態となる。この超流動現象は、流体全体が粘性のある常流体成分と、粘性のない超流体成分から成るという二流体モデルにおいて記述され、これを最も特徴づける現象として、両成分がお互いに反対方向に流れることにより非常に大きな熱伝導度を引き起こす熱対向流がある。両成分の相対速度がある値を超えると、この熱対向流に散逸機構が生じ、超流動乱流状態となる [1]。これは量子化された循環 $\kappa = \oint \boldsymbol{v} \times \mathrm{d}\boldsymbol{s}$ を持つ量子渦がタングルとなった状態であり（$\boldsymbol{v}$ は流体の速度場、$\oint \mathrm{d}\boldsymbol{s}$ は渦回りの線積分)、量子渦と常流体成分との間の相互摩擦力 (mutual friction) によって散逸が引き起こされる [2]。

超流動乱流は発見されて以来ずっとこの熱対向流を用いて研究されてきたが [3]、熱対向流は超流動に固有の現象であるため、通常の古典

流体との対応を持たず、それゆえに超流動乱流と古典乱流との関係は長い間謎のままであった。このような背景のもとで近年、Maurer 達が２枚の回転円盤中で [4]、Stalp 達が振動格子中で [5] 超流動乱流を実現することに成功した。彼らの方法はまさに古典流体において乱流を作る方法と同じであり、古典乱流との対応が可能になったという点において超流動乱流の研究は新しい局面に入ったといえよう。彼らは 1K 以上という比較的高温領域の超流動乱流において、そのエネルギースペクトルが古典乱流の最も重要な統計則である Kolmogorov 則に従い [6]、超流動乱流が古典乱流との類似性を持つことを見出した。

Kolmogorov 則は発達した一様等方定常な非圧縮性古典乱流において成り立つ統計則である [6]。大きなスケールであるエネルギー注入領域からエネルギーが系に注入されると、そのエネルギーのスケールは慣性領域にて小さくなってゆく。慣性領域ではエネルギーが散逸されることなく、系の詳細に依存しないスケール普遍性を持ち、エネルギースペクトル $E(k)$ が Kolmogorov 則

$$E(k) = C\varepsilon^{2/3}k^{-5/3} \tag{1}$$

に従う。ここで $E(k)$ は $E = \int dk\, E(k)$ で定義されるエネルギースペクトル、E は単位質量あたりの運動エネルギー、k は Fourier 変換の波数である。粘性が有効になるエネルギー散逸領域においてエネルギーは散逸率 ε で散逸するが、これは慣性領域におけるエネルギー流量に等しい。Kolmogorov 定数 C はオーダー１の無次元量である。

Maurer 達や Stalp 達が発見した超流動乱流と古典乱流の類似性は、古典流体のように振る舞う常流体成分と超流動成分との相互摩擦力を介してのカップリングによって両者が一緒になって古典乱流のように振る舞う、という考えによって理解されている [7]。そうすると常流

体成分がほとんど存在しない1K以下といったような極低温においても超流動乱流は古典乱流との類似性を持つのであろうか、という大きな疑問が生じる。この疑問に対して、以下のように考える。古典乱流におけるKolmogorov則は通常、大きな渦が小さな渦へと分裂してゆくというRichardsonカスケードという描像で理解される[6]。しかし古典流体では渦そのものの定義が、粘性拡散のために不明瞭であるため、Richardsonカスケードが本当にあるかどうかは分からない。一方、超流動乱流における量子渦は明確に定義できる位相欠陥である。Bose-Einstein凝縮によって形成される巨視的な量子力学的波動関数 $\Phi(\boldsymbol{x},t) = \sqrt{\rho(\boldsymbol{x},t)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi(\boldsymbol{x},t)}$ のダイナミクスはGross-Pitaevskii方程式[8, 9]

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\Phi(\boldsymbol{x},t) = [\nabla^2 - \mu + g|\Phi(\boldsymbol{x},t)|^2]\Phi(\boldsymbol{x},t) \tag{2}$$

によって記述され、超流動速度場 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)$ は $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t) = 2\nabla\phi(\boldsymbol{x},t)$ で与えられる。ここで μ は化学ポテンシャル、g は粒子間相互作用の結合定数、ρ は凝縮体密度、ϕ は凝縮体の位相である。渦度 $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}$ は Φ の単連結領域では存在せず、Φ の位相欠陥でのみ値を持つ。つまり Φ の位相欠陥が量子渦の定義そのものになる。量子渦の回りでは循環が 4π に量子化され、芯のサイズは回復長 $\xi = 1/\sqrt{g\rho}$ で与えられる。高温では量子渦は相互摩擦力を介して減衰するが、極低温では渦の再結合時に起こる圧縮性の素励起放出や回復長 ξ 程度まで小さくなった渦輪の消失を通してのみ減衰する[10]。いずれも場合においても減衰は回復長 ξ よりも短いスケールで起こり、長いスケールでは量子渦は安定に存在することができる。いわば量子渦は古典流体中の渦に付随する粘性散逸といったようなよけいな自由度を取り除いた形となっており、これを構成要素とする超流動乱流は、Kolmogorov則とRichardsonカスケー

ドの関係を明らかにすることのできるプロトタイプであるかもしれない。もしこれが真実であるなら、極低温の超流動乱流も Kolmogorov 則を示すはずである。本研究では Gross-Pitaevskii 方程式を数値的に解くことにより、この問題を理論的に調べた。

本研究以前にも Nore 達が Gross-Pitaevskii 方程式の数値シミュレーションを用いて、超流動乱流のエネルギースペクトルを計算している [11]。Gross-Pitaevskii は圧縮性流体の方程式であるので、彼らは運動エネルギーを圧縮成分と非圧縮成分に分けることによって、非圧縮成分のスペクトルが一時的に Kolmogorov 則に従うことを発見した。しかし渦の再結合時に渦のエネルギーは回復長 ξ よりも短い圧縮性の短波長素励起へと転化し、渦のカスケードに影響を与える [10, 12, 13, 14, 15]。よって Kolmogorov 則とは長時間は一致しない。

本研究では、回復長 ξ よりも短いスケールでのみ働く散逸項を導入し、このような素励起を散逸させることで素励起から渦へのエネルギーの逆流を阻止する、ということを行った。Gross-Pitaevskii 方程式を高い精度で解くために、周期境界条件下でのスペクトル法を用いる [16]。そのために Fourier 変換された Gross-Pitaevskii 方程式

$$\begin{aligned} \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\Phi(\boldsymbol{k},t) &= [k^2-\mu]\Phi(\boldsymbol{k},t) \\ &\quad + \frac{g}{V^2}\sum_{\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2}\Phi(\boldsymbol{k}_1,t)\Phi^*(\boldsymbol{k}_2,t)\Phi(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2,t) \qquad (3) \end{aligned}$$

を解くことになるが、ここで (3) 式の左辺の虚数単位 i を $\mathrm{i}\to[\mathrm{i}-\gamma(k)]$ で置き換えることにより散逸項 $\gamma(k)$ を導入する。この散逸項は $\gamma(k)=\gamma_0\theta(k-2\pi/\xi)$ の形をしており（$\theta(x)$ は階段関数）、回復長 ξ よりも短いスケールでのみ値を持つ。よってこの散逸項は、回復長 ξ よりも短い構造を持たない量子渦を散逸させることなく、渦の再結合によって生じた短波長素励起のみを散逸させる。このようにして量子渦のみに

よって作られる超流動乱流を理論的に議論することが可能になる。

一様で等方な乱流状態を得るために、初期状態としては一様な凝縮体密度 ρ_0 と空間的にランダムな位相 $\phi_0(\boldsymbol{x})$ から出発する。ランダムな位相は図 1 に示されるように、空間中に等間隔 λ 毎に $-\pi$ から π 間での乱数を与え、これを滑らかにつなぐことで得られる。初期の速度場

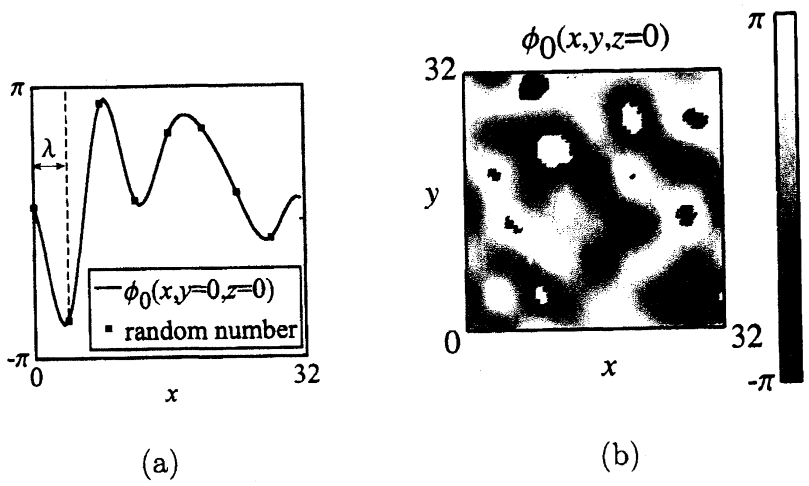

図 1: ランダムな位相を作る方法 (a) と xy 平面におけるランダムな位相の断面図 $\phi_0(x, y, 0)$ の一例 (b)

$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t = 0) = 2\nabla\phi_0(\boldsymbol{x})$ はランダムなので、系はすぐに多くの渦輪を作って一様等方な乱流となる。

数値計算のパラメーターとして、結合定数 $g = 1$、回復長 $\xi = 1$、初期の密度 $\rho_0 = 1$、散逸の大きさ $\gamma_0 = 1$ を用いる。周期境界条件における体積 $V = 32^3$ の立方体を 256^3 の格子点に分け、空間解像度を $\Delta x = 0.125$ とし、空間微分に関してはスペクトル法を用いる。また波数の解像度は $\Delta k = 2\pi/32$ である。時間微分に関しては解像度 $\Delta t = 1 \times 10^{-4}$ においてRunge-Kutta-Verner法を用いる [16]。

得られた超流動乱流状態に関して、運動エネルギーの非圧縮成分 $E^{\mathrm{i}}_{\mathrm{kin}}$ におけるスペクトル $E^{\mathrm{i}}_{\mathrm{kin}}(k)$ を計算する。ここで $E^{\mathrm{i}}_{\mathrm{kin}}(k)$ は $E^{\mathrm{i}}_{\mathrm{kin}} =$

$\int \mathrm{d}k\, E^{\mathrm{i}}_{\mathrm{kin}}(k)$ によって得られ、$E^{\mathrm{i}}_{\mathrm{kin}} = \int \mathrm{d}\boldsymbol{x}\,[(|\Phi|\nabla\phi)^{\mathrm{i}}]^2$ であり、$(|\Phi|\nabla\phi)^{\mathrm{i}}$ は $(|\Phi|\nabla\phi)$ において $\mathrm{div}(|\Phi|\nabla\phi)^{\mathrm{i}} = 0$ を満たす成分である。時間発展が進むにつれスペクトル $E^{\mathrm{i}}_{\mathrm{kin}}(k)$ は、散逸項の効かない慣性領域 $\Delta k < k < 2\pi/\xi$ において波数 k のべき $E^{\mathrm{i}}_{\mathrm{kin}}(k) \propto k^{-\eta}$ を示すようになる。指数 η の時間変化を図 2(a) に示す。$t \gtrsim 4$ において超流動乱流が Kolmogorov

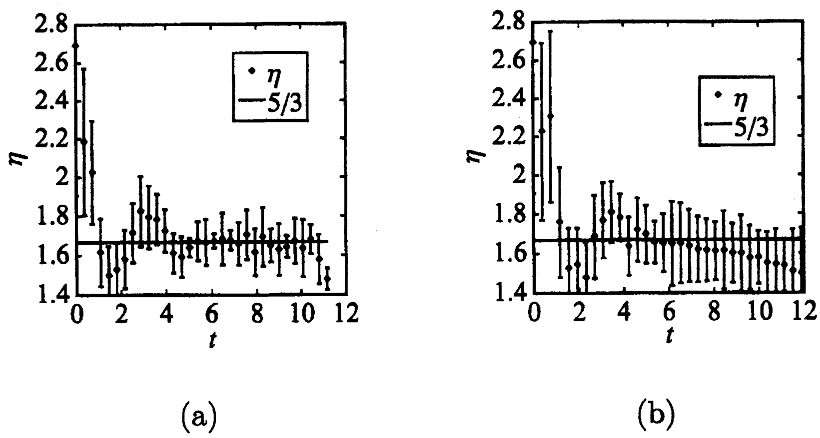

図 2: エネルギースペクトル $E^{\mathrm{i}}_{\mathrm{kin}}(k)$ の指数 η の時間変化。(a) は散逸あり、(b) は散逸なし。

則 $E^{\mathrm{i}}_{\mathrm{kin}}(k) \propto k^{-5/3}$ を満たしていることが分かる。比較のために散逸項を入れない場合の η の時間変化を図 2(b) に示す。この場合、$t \gtrsim 7$ において再び Kolmogorov から外れていくことが分かる。これは短波長の圧縮性素励起が量子渦のダイナミクスに影響を与えているということを意味している。

次に系のエネルギー散逸率 ε を $\varepsilon = \partial E^{\mathrm{i}}_{\mathrm{kin}}(k)/\partial t$ から求めることにより、エネルギースペクトルと Kolmogorov 則との定量的な比較を行った。$t = 6$ における量子渦のスナップショットを図 3(a) に、エネルギースペクトルを図 3(b) に示す。量子渦の分布はほぼ一様で等方であり、発達した一様等方な乱流ができていることを支持している。またその

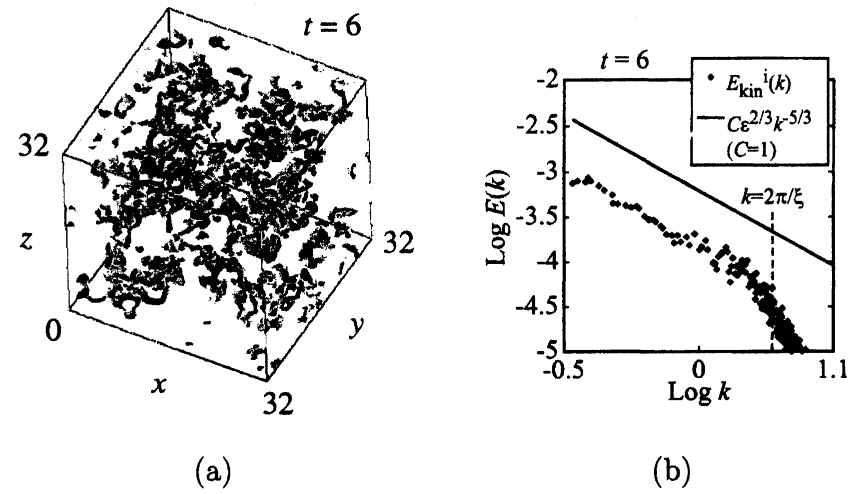

図 3: $t=6$ における量子渦のスナップショット (a) と、エネルギースペクトル (b)。

ときのエネルギースペクトルと Kolmogorov 則との定量的な一致は非常に良い（本研究では Kolmogorov 定数 C に関して、およそ $C\simeq 0.3$ が得られた）。このようにして本研究において、極低温での超流動乱流における量子渦のダイナミクスは、短波長の圧縮性素励起の影響がないときに古典乱流と類似の統計を示すことが証明された。

これまで量子力学の物性への応用はほとんど固体に限定されてきた。しかし本研究を通して、超流動流体力学が通常の古典流体の、特に乱流現象を量子渦を用いて要素還元的に理解できる可能性を持っていることが示された。つまり超流動という概念が、流体に有する非常に多くの自由度を減らす可能性を持っているということである。今後、この量子渦という要素還元的な見方が、流体のより深い理解に貢献するであろうことが期待される。

参考文献

[1] R. J. Donnelly, *Quantized vortices in helium II* (Cambridge University Press, Cambridge, 1991).

[2] W. F. Vinen, Proc. Roy. Soc. A **240**, 114 (1957); *ibid.* A **240**, 128 (1957); *ibid.* A **240**, 493 (1957).

[3] J. T. Tough, in *Progress in Low Temperature Physics* Vol. VIII, edited by C. J. Gorter (North-Holland, Ameterdam, 1955), P. 133.

[4] J. Maurer and P. Tabeling, Europhys. Lett. **43** (1), 29 (1998).

[5] S. R. Stalp, L. Skrbek, and R. J. Donnelly, Phys. Rev. Lett. **82**, 4831 (1999).

[6] U. Frisch, *Turbulence* (Cambridge University Press, Cambridge, 1995).

[7] W. F. Vinen, Phys. Rev. B **61**, 1410 (2000).

[8] E. P. Gross, J. Math. Phys. **4**, 195 (1963).

[9] L. P. Pitaevskii, Soviet Phys. -JETP **13**, 451 (1961).

[10] M. Leadbeater, T. Winiecki, D. C. Samuels, C. F. Barenghi and C. S. Adams, Phys. Rev. Lett. **86**, 1410 (2001).

[11] C. Nore, M. Abid, and M. E. Brachet, Phys. Rev. Lett. **78**, 3896 (1997); Phys. Fluids **9**, 2644 (1997).

[12] S. Ogawa, M. Tsubota and Y. Hattori, J. Phys. Soc. Jpn. **71**, 813 (2002).

[13] N. G. Berloff, Phys. Rev. A **69**, 053601 (2004).

[14] N. G. Berloff and B. V. Svistunov, Phys. Rev. A **66**, 013603 (2002).

[15] J. Koplik and H. Levine, Phys. Rev. Lett. **71**, 1375 (1993); *ibid.* **76**, 4745 (1996).

[16] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling and B. P. Flannery, *Numerical Recipes in Fortran 77* (Cambridge University Press, Cambridge, 1985).