

交 流 ア ン ダ ー ソ ン 局 在

長 岡 洋 介

周期ポテンシャル中の電子は、ブロッホ状態となって結晶全体を動き回る。だが、不純物などによるポテンシャルの乱れが大きくなると、電子は身動きができなくなるという。電子が局在するとはどういうことなのか、またそれはどんな物理現象に見えてくるだろうか？

§ 1. アンダーソン局在とは

アンダーソン局在とは何か¹⁾を「物理学辞典」風に解説すれば、つぎのようなことになるかと思います。「金属や半導体中の電子が不純物等による不規則なポテンシャルを受けて運動するとき、その波動関数が空間的に局在する現象。はじめ Anderson (1958) が理論的に見出し、Mott (1969) がその考えに基づいて半導体における不純物伝導等の現象を論じた。Abrahams ら (1979) のスケーリング理論以後、理論・実験の両面から活発な研究がなされ、金属的な伝導が見られる領域でも、局在の前駆現象として電気伝導度の温度、磁場依存性に異常が現れることが明らかにされた。この効果は2次元系でとくに著しく、……」

元来、こういう辞典は専門家が引くものではなく、素人のためにあるはずのものです。まったく知らない専門外のことを引いてそれで分かるということは、マア期待できません。辞典は知らなかったことについておおよその見当をつけるためのものと考えれば、それは当然かも知れませんが、第一、こうした10行ほどの解説でこと足りるのであれば、この「交流」を書く必要もないことになります。ここでも、アンダーソン局在とは何かをまったく知らない方のために、大体的見当をつけていただこうと「辞典」風解説を試みたわけですが、これで、それが固体電子論の問題であり、電気伝導の現象に関係があるらしいこと、このところ流行の問題らしいこと、などがお分かりいただけたでしょうか。

不規則ポテンシャル中の電子の波動関数が局在する

というのですが、その前に不規則でないポテンシャル中ではどうでしょうか。つまり完全結晶中の、規則正しく並んだイオンのつくる周期ポテンシャル中の電子の問題です。この場合、電子は定まった波数ベクトルをもつブロッホ状態になり、結晶全体に広がります。電子はほとんど自由電子といってよく、その直進運動を妨げるものはありません。このままでは電気抵抗は0です。

現実の物質が電気抵抗をもつのは、イオンの配列が乱れることによってです。電子は乱れによって波数ベクトルの異なる状態に散乱され、直進運動が妨げられます。乱れとしてはまずイオンの熱振動がありますが、熱振動は温度が下がるほど弱まり、絶対0度では消失します。しかし実際の金属では、絶対0度でも抵抗が0になるわけではありません。(もちろん、超伝導は別の話です。) それは、金属中には必ず不純物や格子欠陥などが存在するからで、電子はそうした乱れによって散乱されるので、金属は絶対0度でも有限の電気抵抗をもつことになります。これが残留抵抗とよばれるものです。

金属の電気伝導度 σ は、よく知られたドルーデの式

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m} \quad (1)$$

で与えられます。ここで n は伝導電子の密度、 m , e は電子の質量と電荷、 τ は緩和時間です。 $1/\tau$ は電子の散乱確率ですが、絶対0度で電子が不純物により散乱される場合を考えますと、不純物濃度 n_i が薄ければ、散乱をボルン近似で扱うことにより $1/\tau \propto n_i$ という結果が得られます。したがって、抵抗率 $\rho (=1/\sigma)$ は n_i に比例することになります。

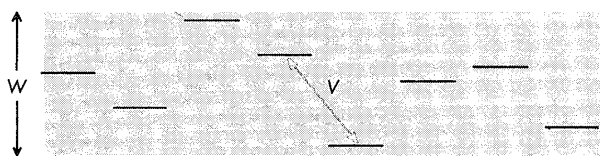
では、不純物濃度が増したとき、抵抗はどう変わるでしょうか。 $\rho \propto n_i$ という関係がいつまでも成り立つわけはありませんが、それでも残留抵抗が不純物の量とともに増大することは明らかでしょう。しかし、抵抗はいつまでも有限の値をとる、つまり無限大にはならないというのが従来の考え方でした。

これに対し Anderson²⁾ は、不純物が増して電子に働くポテンシャルの不規則さが強くなると、電子の波動関数は局在すると主張したのです。局在した電子は電場をかけても動くことができません。したがって電流を運ぶことができない、つまりこれは金属が絶縁体になることを意味します。Anderson は不純物が電子に及ぼす働きを、単にそれを散乱して直進運動を妨げるものとしてだけ見てはならないことを示したのです。

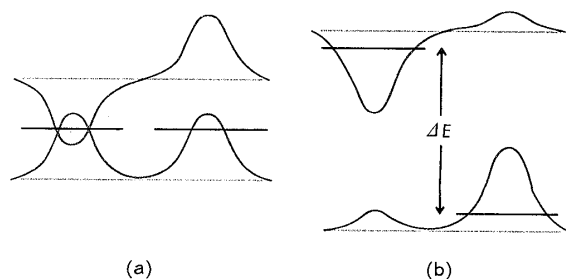
§ 2. Anderson と Mott

Anderson は、このことをつぎのような簡単なモデルについて論じました。空間に配列した“原子”があり、各原子には一つずつ電子の準位があるとします。電子は隣接した原子の準位間を量子力学的にとび移ることができます。すべての準位のエネルギーが同じであれば、これは結晶中のブロッホ状態を求める tight-binding 近似にほかなりません。ここでは第1図のように、準位のエネルギーは原子ごとに不規則に異なっていると考えます。準位間のとび移りの行列要素を V 、準位の不規則なエネルギー分布の幅を W としますと、 $W/|V|$ がこのモデルでの不規則さを表わすパラメータになります。

いま、たまたま隣あう準位が同じエネルギーをもっていたとしましょう。このとき電子準位のエネルギーはとび移りの効果で二つに分裂し、同時に波動関数は第2図(a)のように二つの原子に同じ振幅で広がります。もとの準位のエネルギーが等しくなくても、その差 ΔE が $\Delta E < |V|$ である限り、この傾向は変わります。



第1図 電子が、幅 W でランダムに分布する準位の間を行列要素 V でとび移る。電子は拡散できるか？



第2図 (a) 隣りあう準位 (黒) のエネルギーが等しいとき、電子のとび移りによる準位の分裂 (青) が起こり、波動関数 (赤) は二つの原子に等しい振幅をもって広がる。(b) 隣りあう準位間のエネルギー差 ΔE が大きいと、波動関数の広がりは小さい。

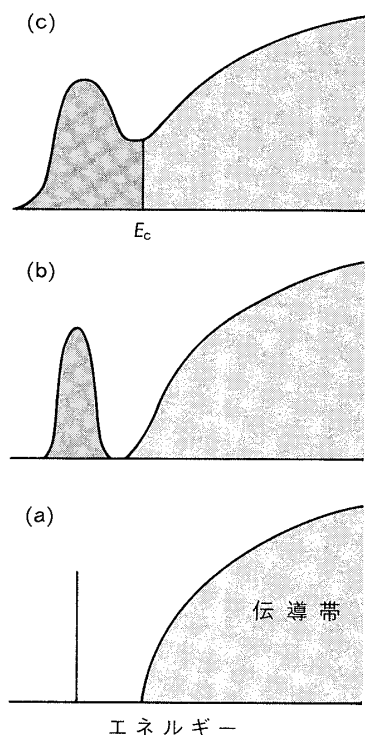
せん。これに対し $\Delta E > |V|$ のとき波動関数は第2図(b)のようになり、隣の原子の上での振幅は $|V|/\Delta E$ の程度の小さいものになります。すなわち、波動関数にとび移りにより隣の原子まで広がるには、エネルギー差が

$$\Delta E < |V| \quad (2)$$

でなければなりません。分布の幅 W が $W \gg |V|$ とすれば、その確率は $|V|/W$ です。波動関数がさらにその隣まで広がるには、その準位も(2)の範囲になければならないので、その確率は $(|V|/W)^2$ です。したがって波動関数がどこまでも広がる確率は0、すなわち波動関数は局在することになります。

Anderson はこの問題を電子の拡散の問題として論じました。はじめ ($t=0$)、電子がある原子の上にあったとしましょう。時間とともに電子は量子力学的な拡散を起こします。電子の波動関数がブロッホ状態のように結晶全体に広がっているときには、電子はどこまでも拡散して、 $t \rightarrow \infty$ で電子がもとの原子の上にある確率は0です。しかし、波動関数が局在していて有限の広がりしかもたない場合には、電子はこの広がり外へは拡散できません。したがって、電子がもとの原子の上にある確率が、 $t \rightarrow \infty$ でも有限に残ります。Anderson が示したことは、 $W/|V|$ がある値を超すと電子が遠くまで拡散しなくなる、つまり電子の波動関数がすべて局在するということでした。

この Anderson の考えに基づいて半導体の不純物伝導を論じたのが Mott³⁾ でした。ふつう不純物を含む半導体では、電流は不純物準位から伝導帯へ熱的に励起された電子によって運ばれます。しかし不純物の濃



第3図 不純物を含む半導体の状態密度. 不純物濃度を増すと, (a), (b), (c) の順に変化する.

度が増すと, 近くにある不純物準位の波動関数が重なり合い, 電子が不純物準位間をとび移りながら移動する伝導が可能になります. これが不純物伝導とよばれる現象です. 電子の状態密度は, 不純物濃度が薄いとときは第3図(a)のようで, 不純物準位は伝導帯から離れて幅のないピークをつくりますが, それは濃度が増すにつれ広がって不純物帯になり(b), ついには伝導帯とひと続きのものになります(c).

このとき電子の波動関数はどうなっているでしょうか. 伝導帯の電子状態は不純物による散乱を受けるにせよ, エネルギーの高い領域では広がったままでしょう. 不純物帯の底の状態は, たまたま近くにある数個の不純物に広がることによってエネルギーが低められた, 局在した状態です. また, 同じエネルギーの所に広がった状態と局在した状態が共存することはありません. もしあれば, エネルギーが等しいから局在した状態から広がった状態へのとび移りが可能で, その結果局在した状態も広がってしまうからです. したがって, エネルギーで見てどこかに境目 E_c があり, エネルギーが E_c より下の状態は局在, 上の状態は広がっ

ているということになっていると考えられます. Mott はこの境目を移動度端とよびました.

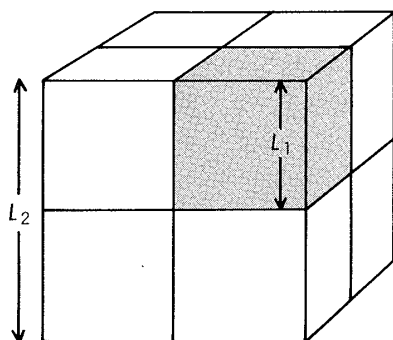
不純物濃度を増すと電子数も増えますから, フェルミ・エネルギー E_F が大きくなります. $E_F < E_c$ であればすべての電子が局在しているから絶縁体, $E_F > E_c$ になると電子が動けるようになって金属的になります. 不純物として P を含む Si の場合は, 不純物濃度を増すとそれが $4 \times 10^{18} \text{ cm}^{-3}$ のあたりで, 伝導度が急に大きくなって金属的になることが見出されています(第14図).

§ 3. スケーリング理論

不規則ポテンシャル中の電子状態についての Anderson の問題提起を, Mott は具体的な物理現象につなげようとした. しかし, Mott を超えて議論を定量的なものにすることは, 決して容易なことではありません. こうした難問を扱う方法として, まず思いつくのが計算機の利用です. 適当に不規則なポテンシャルを与えて波動関数を数値計算し, それが局在しているかどうかを確かめるのです. しかし, 計算機実験は有限な大きさの系でなされねばならず, 有限系では波動関数は多少なりと系の端まで裾を引いています. したがって, それが局在しているかどうかの判定には, 慎重でなければなりません. このような場合にとられる方法は, まず有限な系で波動関数の局在の度合いを求め, それが系を大きくしていったときにどう変わるかを見る, というものです.⁴⁾

この考え方を理論として定式化したものがスケーリング理論にほかなりません. Abrahams, Anderson, Licciardello, Ramakrishnan⁵⁾ によるスケーリング理論は, その後の研究の爆発的な発展を生みだした論文ですから, 少し詳しく紹介したいと思います.

くり返し述べましたように, 電子の波動関数が局在しているかどうかは, その物体の伝導性に反映します. そこで一般に d 次元の, 1 辺が L の“立方体”の物質を考え, そのコンダクタンス (conductivity=伝導度ではない) を g とします. g が L の関数としてどのように変わるか, マクロな系 ($L \rightarrow \infty$) でどうなるか, が問題です. その物質がふつうの金属であれば, マクロな系では系の大きさによらない伝導度 σ が有限な値をもちます. この場合コンダクタンスは, 断面積 (L^{d-1}) に比例し, 長さ (L) に反比例しますから,



第4図 1辺 L_1 の立方体をつないで, 1辺 $L_2(=2L_1)$ の立方体をつくる.

$$g = \sigma L^{d-2} \quad (3)$$

となります.

さて, 立方体の1辺が L_1 のときのコンダクタンスを g_1 とし, 1辺を ν 倍して $L_2(=\nu L_1)$ としたときのコンダクタンス g_2 がどうなるかを考えましょう. もちろん g_2 は g_1 によりますし, ν によっても変わります. しかし, 物体が電子の平均自由行程 l よりも十分大きいとすれば, 不純物の入り方などのミクロな性質が g_1 を通さずに直接 g_2 に影響することはないでしょう. そこで, g_2 は g_1 と ν だけで決まると考え,

$$\frac{g_2}{g_1} = f(\nu) \quad (4)$$

と置きます. これが“スケーリングの仮定”といわれるものです.

ここで, ν を連続的な変数とします. (4) は $\nu \rightarrow 1$ の極限で1です. そこで(4)の対数を取り, $\log \nu$ でわって $\nu \rightarrow 1$ としますと, 左辺は

$$\lim_{\nu \rightarrow 1} \frac{\log(g_2/g_1)}{\log \nu} = \lim_{L_2 \rightarrow L_1} \frac{\log g_2 - \log g_1}{\log L_2 - \log L_1} = \frac{d \log g}{d \log L}.$$

このとき右辺は g のみの関数になりますから, その関数を $\beta(g)$ として

$$\frac{d \log g}{d \log L} = \beta(g) \quad (5)$$

の関係が得られます.

関数 $\beta(g)$ はどのように振舞うでしょうか. まず g が大きい極限は, 物体が金属的な性質をもつ場合と考えてよいでしょう. このとき g は(3)のようになりますから, その対数微分をとって

$$\beta(g) = d - 2 \quad (g \rightarrow \text{大}) \quad (6)$$

です. つぎに, g が小さくなるのは波動関数が局在している場合です. L が小さいときは端まで裾がのびていて電流を運びえた状態も, L が大きくなるとそれが

できなくなり, コンダクタンスは指数関数的に減少すると思われます. すなわち

$$g \propto e^{-\alpha L}, \quad (7)$$

したがって, 対数微分をとり

$$\beta(g) = \log g \quad (g \rightarrow \text{小}) \quad (8)$$

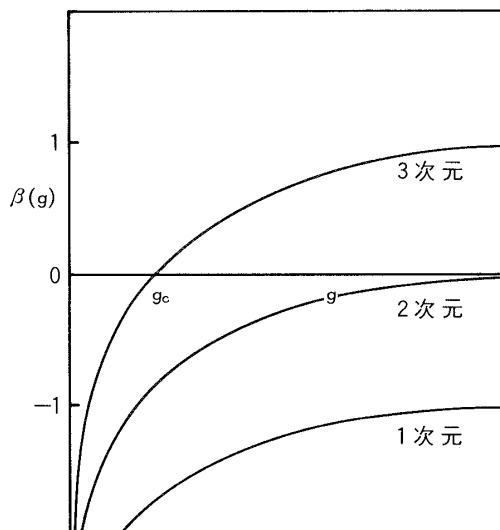
となることがわかります.

$\beta(g)$ の関数形がこの両極限を単調に結ぶものとすれば, それは第5図のようになるでしょう.

この図からただちに, 1次元, 2次元ではすべての状態が局在することが分かります. 1, 2次元ではつねに $\beta(g) < 0$ ですから, (5)により g は L が増すとともに減少します. g が減少すると $\beta(g)$ はさらに小さくなり, g は最後には(7)のように0になります.

これに対し3次元では, 局在する場合と, しない場合があります. $\beta(g) = 0$ となる g の値を g_c とします. g の初期値 g_0 が $g_0 < g_c$ であれば, $\beta(g) < 0$ ですから, 結論は1, 2次元と変わりません. これに対し $g_0 > g_c$ のときは, $\beta(g) > 0$ ですから g は L とともに増大します. g は最後には(3)のように振舞い, 物体は金属になります. 物体のミクロな性質, たとえば不純物濃度を変えると, それによって g_0 の値が変わるでしょう. g_0 が g_c に達したところで, 金属から絶縁体へ, あるいはその逆の転移が起こることになります.

2次元系の振舞をもう少し詳しく考えてみます. 2次元系では g が大きいとき, $\beta(g)$ は0に近づきます. そこで $1/g$ により展開できるとして, その第1項のみを残しますと,



第5図 関数 $\beta(g)$ の振舞.

$$\beta(g) \cong -\frac{a}{g} \quad (a > 0). \quad (9)$$

この式を(5)に代入し、 $L=L_0$ のとき $g=g_0$ として積分しますと、

$$g(L) = g_0 - a \log \frac{L}{L_0} \quad (10)$$

が得られます。物体が大きくなるとともに、コンダクタンス(3)により $d=2$ では伝導度 σ に等しい)ははじめ対数的に減少することが分かります。

くり返しになりますが、マクロな系は絶縁体($\sigma=0$)になるのに、有限な系が有限な伝導度をもつのは、波動関数が端まで裾を引いているからです。物体の大きさ L が波動関数の広がりより小さければ、伝導度は(10)のようになると考えてよいでしょう。

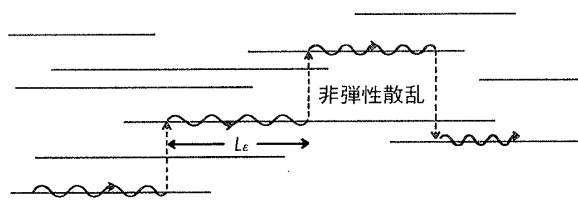
これまでの議論では、不規則ポテンシャル中を運動する1電子の問題を考えました。実際の物質中では、電子はフォノンや他の電子とも相互作用しています。電子がこうした相互作用によって散乱されるときには、不純物による散乱と違って、注目する電子のエネルギーが保存されません。つまり非弾性散乱が起きます。

このような場合、非弾性散乱が起こる平均時間(緩和時間)を τ_e とすれば、電子が静止した不純物中を拡散すると考えてよいのは、大雑把にいうと時間にして τ_e まで、ということになります。非弾性散乱が起これば、局在化の傾向もそこで打ち切りです。電子は非弾性散乱を受けて、エネルギーを保存せずに別の局在状態に移り拡散を続ける、といってもよいでしょう。

電子が不純物により散乱されながら進む運動は、一種のランダムウォークです。電子が時間 t の間に進む距離は、拡散係数を D として \sqrt{Dt} の程度と考えられます。したがって、非弾性散乱を受けるまでに電子が進む距離は

$$L_e = \sqrt{D\tau_e} \quad (11)$$

です。有限系では、電子の局在は系の大きさ L で打ち切られました。マクロな系で非弾性散乱が起これば、



第6図 非弾性散乱が起こると、電子は局在した状態間をとり移りながら拡散する。

L のかわりに L_e が局在を打ち切る働きをすると考えられます。したがって、そのときのコンダクタンスは、(10)で L を L_e に置き換えた式

$$g = g_0 - a \log \frac{L_e}{L} \quad (12)$$

で与えられるでしょう。

絶対0度ではすべての自由度が最低エネルギーの状態にありますから、その間でエネルギーのやりとりは起きえず、 $1/\tau_e=0$ です。したがって、低温では

$$\frac{1}{\tau_e} \propto T^p \quad (p > 0) \quad (13)$$

のように振舞うと思われます。 g は伝導度でもありますから、これを σ と置いて、(11)~(13)から

$$\sigma(T) = \sigma_0 + \frac{1}{2} p a \log T \quad (14)$$

が得られます。温度が下がるとともに、伝導度は対数的に減少することが分かります。

Abrahamsらのスケーリング理論は、簡単な議論だけによっていろいろのことを示しました。しかし、この理論の最大の功績はなんといっても、アンダーソン局在の問題に新しい視野を開いた点にあると思います。この理論は、局在の強い(g の小さい)領域から局在の弱い(g の大きい)領域までを一望のうちに置くことによって、弱局在領域でもそれなりに局在の効果が現れることを示したのでした。局在が強い場合を正面から攻めるかわりに、まず弱局在の場合を問題にするのであれば、定量的なアプローチも可能であるに違いありません。

§ 4. 局在の摂動理論

ポテンシャルの不規則さが弱い場合は、波動関数が局在するとはいっても、その広がり \bar{L} は平均自由行程 l に比べて十分大きいと思われます。いま私たちの注目する長さ L (または L_e) が $l \ll L \ll \bar{L}$ の領域にあるとすれば、ふつうに系はマクロと見てよく、一方、局在の効果はそれほど顕著ではないはずです。この領域が定量的な局在の理論が対象とする“弱局在領域”です。そこでは物質は金属的に振舞い、不規則ポテンシャルは相対的に弱い効果しかもちません。したがって、それは摂動として定量的に扱うことができます。以下、もっとも興味深い現象が期待される2次元系に話を限り、問題をはっきりさせるため、同種の不純物がラン

ダムに分布している場合を考えます。

すでに述べましたように、不純物による散乱をボルン近似で扱うと、緩和時間について $1/\tau$ が不純物濃度 n_i に比例するという結果が得られます。これは、ボルン近似では電子が個々の不純物によって incoherent に散乱されることを意味します。これに対し、電子の局在は散乱された電子波の重ね合わせで定常波ができることによるわけですから、そこでは波動関数のコヒーレンスが重要です。その効果が伝導度にどう現れるかを見るには、ボルン近似を超えて摂動の高次補正を求めなければなりません。

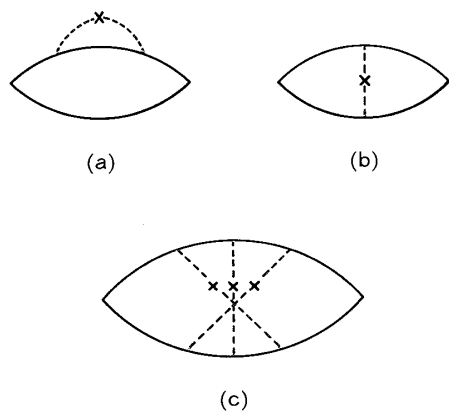
はじめに、補正がどの程度の大きさになるか、見当をつけてみましょう。電子が不純物によって散乱されると、定まった波数をもつブロッホ状態は τ の程度の寿命をもちます。それに伴う電子状態の幅 \hbar/τ があまり大きくなければ、電子系は自由電子的、あるいは金属的に振舞うでしょう。そのための条件は、フェルミ・エネルギーを E_F として、 $\hbar/\tau \ll E_F$ であると思われます。このことは逆にいえば、金属的な性質への不純物散乱による補正が $(\hbar/\tau)/E_F$ のオーダーで生じることを意味します。すなわち、伝導度は

$$\sigma \cong \frac{ne^2\tau}{m} \left(1 + A \frac{\hbar}{E_F\tau} \right) \quad (A \sim 1).$$

フェルミ波数を k_F とすれば $E_F = \hbar^2 k_F^2 / 2m$ 、また2次元の場合 $n \sim k_F^2$ ですから、補正項の大きさは

$$\Delta\sigma \simeq \frac{ne^2\tau}{m} \cdot \frac{\hbar}{E_F\tau} \simeq \frac{e^2}{\pi\hbar} \quad (15)$$

と見積られます。電子密度や不純物散乱の強さによらない、ユニバーサルな大きさをもつことが分かります。



第7図 電気伝導度のダイアグラム。黒線は電子のプロパゲータ、×は不純物、赤点線は電子と不純物の相互作用を表す。

摂動の高次項を系統的に計算するには、グリーン関数による展開が便利です。伝導度は久保公式により電流密度の相関関数によって与えられますが、相関関数は電子の2体グリーン関数と関係づけられます。そこで、2体グリーン関数を不純物ポテンシャルを摂動にして、多体問題の手法にしたがって展開すればよいわけです。⁶⁾ 2次の項をダイアグラムで表わしたものが第7図の(a), (b)です。(a)を電子の自己エネルギー、(b)をバーテックス補正といいます。このようなダイアグラムのくり返しを無限次まで加えると、伝導度に対するドルーデの式(1)と、 τ のボルン近似の表式が得られます。初等的な計算では $1/\tau$ を求めたので2次摂動で済んだのですが、ここでは σ 、すなわち τ を求めるので、無限次までの計算が必要です。

伝導度に対する量子補正は、この計算では落とされていた(c)の型のダイアグラムで与えられます。⁷⁾ このように不純物との相互作用線が最大限に交叉したダイアグラムは、すべて同じオーダーの寄与を与えますので、それを無限次まで加えねばなりません。計算の結果は、振動数 ω の電場に対する伝導度の量子補正として

$$\Delta\sigma(\omega) = -\frac{2e^2 D}{\pi\hbar} \int_0^{1/l} \frac{q dq}{Dq^2 - i\omega} \quad (16)$$

を与えます。ただし、フェルミ速度を v_F として

$$l = v_F\tau, \quad D = \frac{1}{2} v_F^2\tau \quad (17)$$

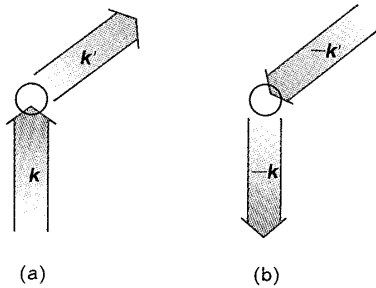
はそれぞれ平均自由行程、拡散係数です。

ここで $\omega \rightarrow 0$ が直流伝導度ですが、そのとき(16)は負で発散します。この計算は $\Delta\sigma$ を小さな補正項として求めたのですから、それが $-\infty$ になったのでは意味がありません。しかし、この結果は直流伝導度が0、すなわち電子系は絶縁体になることの徴候であると考えてよいでしょう。有限な系では、波数ベクトルが $2\pi/L$ を単位に量子化され、(16)の積分は和にかわりまします。大雑把には(16)で積分の下限0を $1/L$ に置き換えればよく、 $\omega=0$ のときの補正は

$$\Delta\sigma = -\frac{2e^2}{\pi\hbar} \log \frac{L}{l} \quad (18)$$

となります。スケーリング理論の結果(10)と一致し、係数が $a = 2e^2/\pi\hbar$ と定まりました。

有限温度で電子が非弾性散乱を受けるときは、電子状態に \hbar/τ_e の幅が加わります。その効果を取り入れて



第8図 k から k' への散乱(a)の時間反転は $-k'$ から $-k$ への散乱(b).

計算しますと, $\omega=0$ の伝導度について, (16)の $-i\omega$ を \hbar/τ_ϵ に置き換えた表式が得られますので, 積分して

$$\Delta\sigma = -\frac{2e^2}{\pi\hbar} \log \frac{L_\epsilon}{l} = -\frac{e^2}{\pi\hbar} \log \frac{\tau_\epsilon}{\tau}. \quad (19)$$

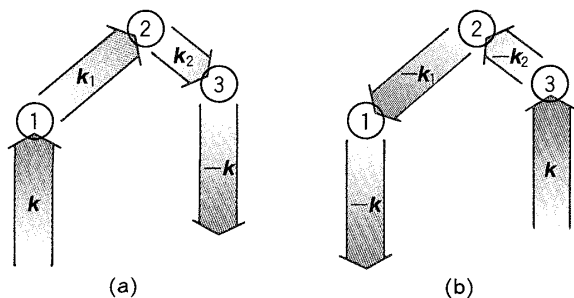
これもスケーリング理論と同じ結果です.

ここで, この伝導度の補正の物理的な意味を考えてみましょう. 不純物ポテンシャルは空間的に見ると不規則ですが, 時間反転の対称性は残しています. 波数 k の状態から k' への散乱の時間を反転させたものは, $-k'$ から $-k$ への散乱です. 不純物ポテンシャルが時間反転の対称性をもつというのは, この二つの散乱について行列要素が等しいこと, すなわちポテンシャル V が

$$\langle k'|V|k\rangle = \langle -k|V| -k'\rangle \quad (20)$$

の性質をもつことです. このような対称性は, 散乱の高次過程についても同様に成り立ちます. たとえば, 電子が不純物 1, 2, 3 によって, k から途中 virtual に k_1, k_2 を経て k' に散乱される3次過程と, その時間反転 $-k' \rightarrow -k_2 \rightarrow -k_1 \rightarrow -k$ とは行列要素が等しいのです.

ここでとくに, k から $-k$ への後方散乱に注目しましょう. $k \rightarrow -k$ の散乱は, 時間を反転させても $k \rightarrow -k$ ですが, 3次の過程でいえば, 第9図の(a), (b)が



第9図 時間反転の関係にある3次の後方散乱過程.

互いに時間反転の関係にあります. 時間反転の対称性によって, この二つの過程が位相も含めて等しい行列要素をもつことになります.

高次の過程で生じる散乱波は, 散乱する不純物の組と順序が異なれば, 一般にはてんでんばらばらな位相をもちます. ボルン近似の場合と同様, それらの散乱は incoherent です. ところが上で見たように, $k \rightarrow -k$ の後方散乱では, (a), (b) 二つの過程が等しい行列要素をもちますから, 二つの散乱波は同じ位相をもち, 干渉して強めあいます. この効果は後方散乱を強め, 後方散乱が強くなれば伝導度は減少します. (18)や(19)の補正は, このようにして生じたものです. 波数 k の入射波に対して $-k$ の強い反射波が生じれば, 今度はその重ね合わせで定常波ができるでしょう. この効果が波動関数を局在に導くものであることも分かります. 後方散乱の役割が系の次元が低いほど重要であること, したがって局在の効果が低次元系において顕著になることも明らかと思います.

伝導度の量子補正は時間反転の対称性に基礎をもつことがわかりました. そうであれば, 時間反転の対称性がないとき, 補正項が大きく変わることは明らかでしょう. たとえば磁場がある場合です.^{8,9)} 磁場 B があるとき, $k \rightarrow k'$ の時間反転は単に $-k' \rightarrow -k$ ではなく, 磁場を反転させたときのそれです. 磁場を添字で示しますと, 対称性として

$$\langle k'|V|k\rangle_B = \langle -k|V| -k'\rangle_{-B} \quad (21)$$

は成り立ちますが, 磁場の向きを決めたときは等しくなりません. 対称性が成り立たないので, 散乱波の干渉は起きず, 補正項は消失します.

この効果をもう少し詳しく考えてみましょう. 2次元面に垂直に一樣な磁場 B が働いているとし, そのベクトルポテンシャルを $A(r)$ とします. $A(r)$ を任意のスカラー関数 $\chi(r)$ によって

$$A(r) \rightarrow A'(r) = A(r) + \nabla\chi(r) \quad (22)$$

のようにゲージ変換しても, B は変わりません. 量子力学では, これと同時に波動関数が

$$\phi(r) \rightarrow \phi(r') = \exp\left[-\frac{ie}{\hbar}\chi(r)\right]\phi(r) \quad (23)$$

と変換されます. 電子のある領域では $B=0$ で, 単にベクトルポテンシャル A のみがあるときには, χ を

$$\chi(r) = -\int_{r_0}^r A(r') \cdot ds \quad (24)$$

とすることにより, その領域で A を消すことができます. 効果は位相変化に押しこめられるわけです.

さて, 伝導度の補正として現れる電子波の干渉に, 磁場はどのように影響するでしょうか. 磁場があまり強くない場合, 効果として最も重要なのは, 上で示したような電子波の位相変化です. 不純物を 1, 2, 3, ... と回る一つの散乱過程では, その道筋をたどる (24) の積分が磁場による位相変化を与えます. ストークスの定理と $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ の関係から, 積分は径路を貫く磁束になりますが, それは径路の直径を R として, BR^2 のオーダーです. (23) により位相変化は eBR^2/\hbar となります. これに対し, 逆コースをたどる散乱過程では, 磁束を逆向きに回るために位相変化も逆向きとなり, 結局二つの散乱波の間には eBR^2/\hbar の程度の位相差が生じることになります. この位相差が 1 のオーダーになれば, 干渉効果は消えるとみななければなりません. そのときの長さを L_m とすれば, $eBL_m^2/\hbar \sim 1$ より

$$L_m \simeq \sqrt{\frac{\hbar}{eB}} \quad (25)$$

となります.

磁場が弱く $L_m > L_e$ のときは, 電子の局在を打ち切るものは非弾性散乱です. しかし, 磁場が強くなって $L_m < L_e$ になりますと, 磁場が局在を打ち切るようになります. そのときの伝導度の補正は, (18) の L を L_m と置いて

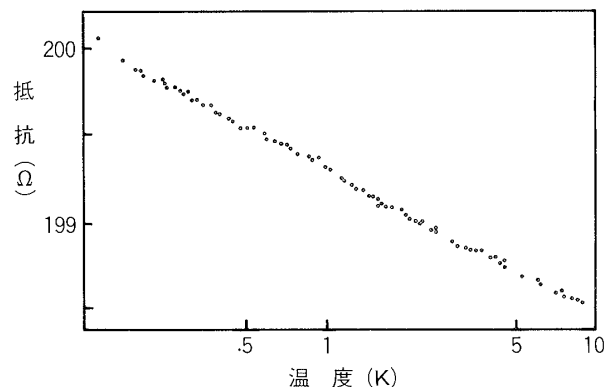
$$\Delta\sigma = -\frac{2e^2}{\pi\hbar} \log \frac{L_m}{l} = -\frac{e^2}{\pi\hbar} \log \frac{\hbar}{eD\tau B} \quad (26)$$

となります. 磁場の増大とともに, 伝導度の対数的な増大, すなわち抵抗の減少(負の磁気抵抗)がみられます. つまり局在による伝導度の減少が, 局在を妨げる磁場の効果によって抑えられ, 負の磁気抵抗が生じるわけです.

§ 5. 実 験

このように, とくに 2 次元系について発展した理論は, 実験との定量的な比較が可能なものです. そして, 実験の結果は理論との見事な一致を示したのでした.

実験を行うには, まず 2 次元の電子系を用意しなければなりません. 実験がなされたのは MOS と金属薄膜でした. MOS とは, Metal-Oxide-Semiconductor の略で, この三つをサンドイッチ状に重ねた半導体素子の一種です. 半導体と酸化物との界面に半導体内部



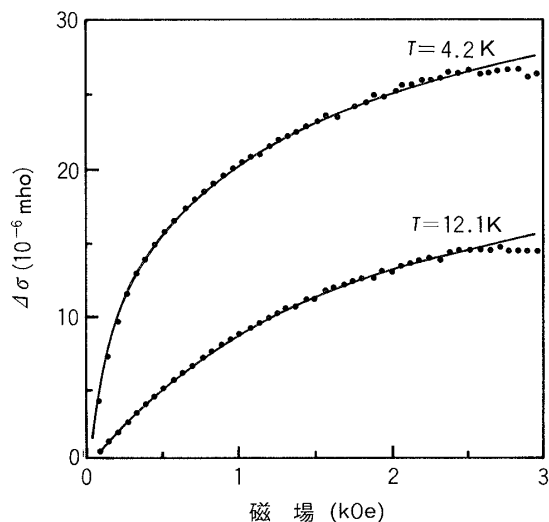
第10図 Cu 薄膜における電気抵抗の温度依存性. 温度軸は対数目盛. (S. Kobayashi, *et al.*: J. Phys. Soc. Jpn. 49 (1980) 1635 より一部修正して転載.)

の強い電場による電子の準位ができ, そこに捕えられた電子が界面にそってのみ運動する 2 次元電子系になります. 界面に垂直な向きの運動は完全に量子化されていますから, この電子系は申し分のない 2 次元系です. 金属薄膜の場合は, 通常厚さが数十 Å 以上もあり, ミクロな長さに比べてかなりの厚さです. しかし, これでも局在する波動関数の広がりには比べれば十分薄く, アンダーソン局在の現象に関しては 2 次元系と見ることができます.

まず, 温度変化の実験を見ましょう. 第10図は東大理学部のグループが Cu の薄膜 (正確に言えば, 表面を酸化させた微粒子を膜状に並べたもの) について行った実験です.¹⁰⁾ 実験結果は, 温度について 3 桁の範囲で, きれいに対数にのっています. 係数は理論とオーダーは一致します. じつは, ここでは説明を省きましたが, 伝導度の対数項には電子間相互作用と局在効果との絡みあった寄与があり, この実験を正しく説明するにはその効果も考慮しなければなりません.

磁気抵抗について, はじめてアンダーソン局在の効果を確認したのは, 学習院のグループによる MOS の実験でした.¹¹⁾ じつは実験が理論よりも先にあったのですが, そこで分かっていたことは, 磁場が界面に垂直にかかったとき, 弱い磁場で大きな負の磁気抵抗が見られることでした. 局在の理論がこの現象を見事に説明したのです.

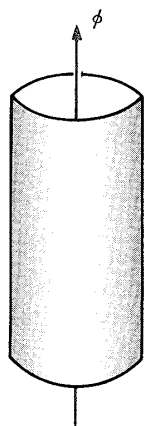
第11図で理論曲線は (26) のように磁場の限られた領域で成り立つ近似ではなく, もっと広い範囲にわたって求められたものです.⁸⁾ 磁場依存性は非弾性散乱と



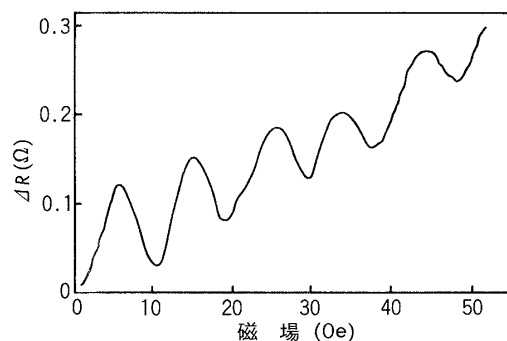
第11図 Si-MOSにおける伝導度の磁場変化 $\Delta\sigma = \sigma(H) - \sigma(0)$. 赤線は理論曲線. (Y. Kawaguchi and S. Kawaji: J. Phys. Soc. Jpn. **48** (1980) 699 より一部修正の上転載.)

競合しますから、理論式にはパラメーターとして τ_e が入ります。図のように理論と実験を比較することによって決められた τ_e は、予想通り (13) のような温度変化を示し、 $p \sim 2$ でした。

伝導度の磁場変化については、これとは別種の興味深い現象も見出されました。¹²⁾ 第12図のような金属薄膜の円筒をつくり、その中に磁束 ϕ を通します。薄膜上で磁場は 0 ですが、 ϕ に伴うベクトルポテンシャルは存在します。それに伴う波動関数の位相変化は前節で見た通りで、不純物につぎつぎに衝突しながら円筒をひと回りする散乱波に対しては、(24) の積分はちょ



第12図 金属薄膜の円筒に磁束 ϕ を通す。薄膜上で磁場が 0 でも、薄膜の伝導度は ϕ に影響されるか？



第13図 Mg 薄膜円筒の抵抗の磁場依存性。振動の周期は、円筒を貫く磁束に換算して、 $h/2e$ に一致する. (D. Yu. Sharvin and Yu. V. Sharvin: Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz. **34** (1981) 285 より一部修正の上転載.)

うど ϕ を与えますから、位相変化は $e\phi/\hbar$ です。逆コースをたどる散乱波の位相変化は符号が逆になって $-e\phi/\hbar$ ですから、二つの散乱波の間には $2e\phi/\hbar$ の位相差が生じることになります。もしも $2e\phi/\hbar = 2n\pi$, すなわち

$$\phi = n \frac{h}{2e} \quad (n \text{ は整数}) \quad (27)$$

であれば、位相がもとに戻りますから、散乱波の干渉による後方散乱の増大は変わりません。しかし、 ϕ が (27) の値からずれると、散乱波は強めあわなくなります。したがって、伝導度は ϕ の関数として、 $h/2e$ を周期として変動することになります。この理論的な予想¹³⁾は実験的にも確かめられました(第13図)。¹⁴⁾

この効果は、伝導度という物理量が磁場ではなく、ベクトルポテンシャルの影響を受けることを示しています。これは一種のアハラノフ・ボーム効果にほかなりません。この現象は、アンダーソン局在による伝導度の補正が、まさに波動関数の干渉によって生じる量子効果であることを、最も直接的な形で示していると思います。

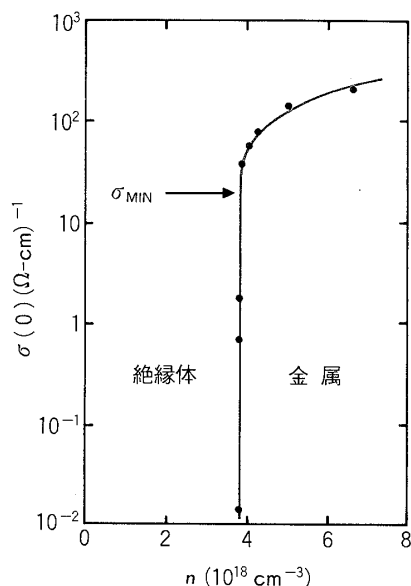
3次元系の理論については紹介できませんでしたが、同様の効果は3次元系でも見られます。3次元では (16) の積分が $\omega=0$ でも発散せず、効果は2次元の場合ほど顕著ではありません。しかしこの場合も、2次元のときと同様の機構で負の磁気抵抗が生じます。半導体の不純物伝導の現象で負の磁気抵抗が現れることは古くから知られており、¹⁵⁾ 未解決の謎の一つでした。この現象もアンダーソン局在の理論によって解明されたのでした。¹⁶⁾

§ 6. いろいろな問題

アンダーソン局在について、すでに定量的な理論が完成されているといっている局在の弱い領域のことを中心に、お話してきました。電子状態の局在はまずその物質の伝導性に反映しますから、伝導度の議論がほとんどでした。しかし問題を弱局在の領域に限っても、局在効果は伝導度以外のいろいろな物性、たとえば超伝導や磁性などにも影響するに違いありません。要するに、これまで電子は周期ポテンシャル中を運動するとして論じられていた金属電子論を、不規則ポテンシャルの効果をきちんと取り入れて書き直すことです。超伝導など、すでにある程度研究がすすめられている問題もあり、これからの問題もあります。

局在が強くなった場合のこととしては、3次元ではまず金属絶縁体転移の問題があります。スケーリング理論は、この転移が Mott の予想に反して連続的であることを示し、そのことは実験的にも確かめられました。¹⁷⁾ しかし、転移の性質については十分に明らかになったとはいいがたく、局在の強い領域の問題については、定量的な理論はまだまです。

アンダーソン局在に関連した興味深い現象に、量子ホール効果があります。¹⁸⁾ その内容に立ち入ることはできませんが、この現象が強磁場下2次元電子系にお



第14図 不純物としてPを含むSiの伝導度のP濃度依存性。σ_{MIN}はMottの予測による金属的伝導度の最小値。(T. F. Rosenbaum, *et al.*: Phys. Rev. Lett. **45** (1980) 1723 より一部修正の上転載。)

けるアンダーソン局在の問題と深くかかわっていることだけ述べておきたいと思います。弱局在領域で磁場が局在を妨げる働きをすることは分かりましたが、その先どうなるかは未解決の問題の一つです。現在、いろいろな議論が活発になされています。

アンダーソン局在について“わかる解説”を、という目的はこれで達せられたでしょうか。筆者としてはまことに心許ないのですが、も早言い訳をする紙数も残っていません。

文 献

- 1) 解説, レビューとして, 福山秀敏: 物理学最前線 2 (共立出版, 1982), G. Bergmann: Phys. Rep. **107** (1984) 1.
- 2) P.W. Anderson: Phys. Rev. **102** (1958) 1008.
- 3) N.F. Mott: Rev. Mod. Phys. **50** (1978) 203.
- 4) D.C. Licciardello and D.J. Thouless: J. Phys. C **8** (1975) 4157.
- 5) E. Abrahams, P.W. Anderson, D.C. Licciardello and T.V. Ramakrishnan: Phys. Rev. Lett. **42** (1979) 673.
- 6) たとえば, 阿部龍蔵: 統計力学(東京大学出版会, 1966) 12章.
- 7) L.P. Gorkov, A. I. Larkin and D. E. Khmel'nitzkii: Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz. **30** (1979) 248 [JETP Lett. **30** (1979) 228].
- 8) S. Hikami, A. I. Larkin and Y. Nagaoka: Prog. Theor. Phys. **63** (1980) 607.
- 9) B. L. Al'tshuler, D. E. Khmel'nitzkii, A. I. Larkin and P. A. Lee: Phys. Rev. B **22** (1980) 5142.
- 10) S. Kobayashi, F. Komori, Y. Ootuka and W. Sasaki: J. Phys. Soc. Jpn. **49** (1980) 1635.
- 11) Y. Kawaguchi and S. Kawaji: J. Phys. Soc. Jpn. **48** (1980) 699.
- 12) 解説として, 長岡洋介: 日本物理学会誌 **40** (1985) 357.
- 13) B. L. Al'tshuler, A. G. Aronov and B. Z. Spivak: Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz. **33** (1981) 101 [JETP Lett. **33** (1981) 94].
- 14) D. Yu. Sharvin and Yu. V. Sharvin: Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz. **34** (1981) 285 [JETP Lett. **34** (1981) 272].
- 15) W. Sasaki: J. Phys. Soc. Jpn. **21** (1966) Suppl., p. 543.
- 16) A. Kawabata: Solid State Commun. **34** (1980) 432.
- 17) T. F. Rosenbaum, K. Andres, G. A. Thomas and R. N. Bhatt: Phys. Rev. Lett. **45** (1980) 1723.
- 18) 解説として, 安藤恒也: 日本物理学会誌 **40** (1985) 499.