

Datorteknik

BCD-aritmetik

Michael Josefsson

Version 0.1 2019

Innehåll

1. Inledning	3
2. Aritmetik	5
2.1. Addition	5
2.2. BCD-adderare	6
2.3. Subtraktion	7
2.4. Multiplikation	9
2.5. Division	12
3. Implementation	15
A. 8x8-multiplikation med upprepad addition	17
B. <i>Double dabble</i>-algoritmen	18

1. Inledning

Vi har tills nu studerat binära tal med basen två och dess ettor och nollor. En annan talbas som kan vara värd att känna till är den decimala, trots att processorn och logiken fortfarande är binär.

Med *binärkodade decimala siffror*, *Binary Coded Digits*, BCD, avses här att de decimala siffrorna 0–9 kodas med fyra bitar vardera. Med fyra bitar har vi det hexadecimala talsystemet med sexton symboler 0000..1111. I BCD-fallet används dock bara de som motsvarar de tio symbolerna 0–9:

Bin	Hex	BCD
0000	0	0
0001	1	1
0010	2	2
0011	3	3
0100	4	4
0101	5	5
0110	6	6
0111	7	7
1000	8	8
1001	9	9
1010	A	x
1011	B	x
1100	C	x
1101	D	x
1110	E	x
1111	F	x

De med 'x' markerade positionerna i BCD-kolumnen är inte tillåtna.

Omvandling mellan decimalt tal och BCD sker med tabellen ovan, siffra för siffra.

Exempel: Omvandla det decimala talet 6591 till BCD

$$6591 = 0110\ 0101\ 1001\ 0001 = 0110010110010001$$

Den resulterande bitsträngen är i detta fall 16 bitar lång och skulle precis få plats i två byte. Generellt kan en byte husera två BCD-kodade decimala siffror. ■

Man förstår av exemplet att BCD-kodning inte är optimal användning av bitarna, 1010–1111 används ju aldrig. Med rent binär tolkning, där alla bitar används, är $6591 = 11001\ 1011\ 1111$ dvs 13 bitar och 3 bitar kompaktare. Man kanske kan undra varför BCD då blivit en så använd kodning?

1. Inledning

Bland fördelarna kan nämnas att utskrifter förenklas avsevärt då talet redan är i presentabel form siffra för siffra. Om det binära talet 1100110111111 skall skrivas ut decimalt måste först de enskilda siffrorna skiljas ut genom en tidsödande "dela med tio"-process.¹

Beräkningarna liknar dessutom de vi är vana vid för hand, varför algoritmer är relativt "rakt på" att implementera och felsöka.

Precis som vid binära tal kan inte avrundningsfel inträffa vid addition, subtraktion och multiplikation. Av denna anledning är BCD-kodning vanlig i kassaregister där varje öre måste räknas. I detta fall unnar man sig dessutom lyxen att *alltid* använda heltal och placera en decimalpunkt två siffror från höger: 123.45.

¹ $\frac{6591}{10} = 110011011111/tio = 1010010011.0001 = 659.1$, $1010010011/tio = 100001.1001 = 65.9$, $1000001/tio = 0110.0101 = 6.5$ och slutligen $0110/tio = .0110 = 0.6$. Divisionen lämnas som en övning till läsaren.

2. Aritmetik

I detta avsnitt beskrivs de grundläggande aritmetiska operationerna addition, subtraktion, multiplikation och division. Läs inte allt på en gång, låt addition sjunka in ordentligt. Allt senare bygger på den.

2.1. Addition

Addition av BCD-kodade tal utförs som vanliga decimala tal, med ett viktigt undantag: **om resultatsiffran efter additionen blivit större än 9 adderas +6**. Anledningen till detta inses om man genomför additionen $9 + 1$ som med fyra bitar blir hexadecimalt A, när det i själva verket skulle bli 0, dvs man måste vid behov hoppa över de icke tillåtna symbolerna A–F.

Denna åtgärd kallas decimaljustering, *decimal adjust*, och flera processorer har stöd för BCD-addition inbyggt.¹

Exempel: Addera 5 + 6 som BCD-kodade tal.

```

  5 = 0101
+ 6 = 0110
-----
      1011   = 11, > 9
      0110   + 6
-----C-----
  1 0001   = '11' i BCD
```

Additionen gav ett resultat, 1011 som inte är inom det tillåtna området 0–9, varför en ytterligare addition med +6 genomfördes för att få rätt siffra. Samtidigt noterar man en utgående carry c från denna siffra till nästa siffra och resultatet är BCD-mässigt korrekt. ■

¹I Motorola M68000 är stödet inbyggt med instruktioner som *Add BCD* och *Sub BCD*, (abcd) och (sbcd). I Z80 heter instruktionen *Decimal Adjust Accumulator* (daa)

2. Aritmetik

Med flera siffror är förfarandet analogt med observationen att man i varje addition kan behöva addera +6. Om den utgående carryn adderas till siffran 9 blir summan A och även i detta fall måste addition med +6 utföras. Ett exempel demonstrerar:

Exempel: Addera 38 + 75 som BCD-kodade tal.

För tydlighets skull används här och i fortsättningen ett mellanslag mellan de olika siffrorna.

```

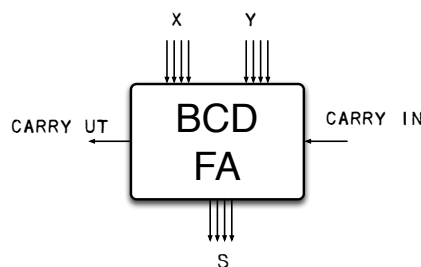
  38 = 0011 1000
+ 75 = 0111 0101
-----C-----
      1010 1101 = $A respektive $D
      0110 0110 = +6 respektive +6
-----C-----
 0001 0001 0011 = '113'

```

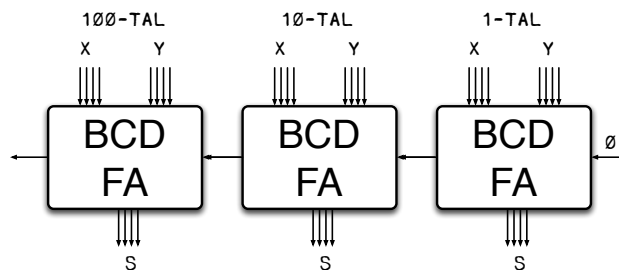
Notera hur en den högra additionen med +6 gav en carry (c) till siffran till vänster. ■

2.2. BCD-adderare

På samma sätt som man beskriver addition av binära tal med en fulladderare, FA, kan en fulladderare för BCD ritas som en komponent som adderar två BCD-siffror plus en inkommande carry och genererar en BCD-siffra och en utgående carry:



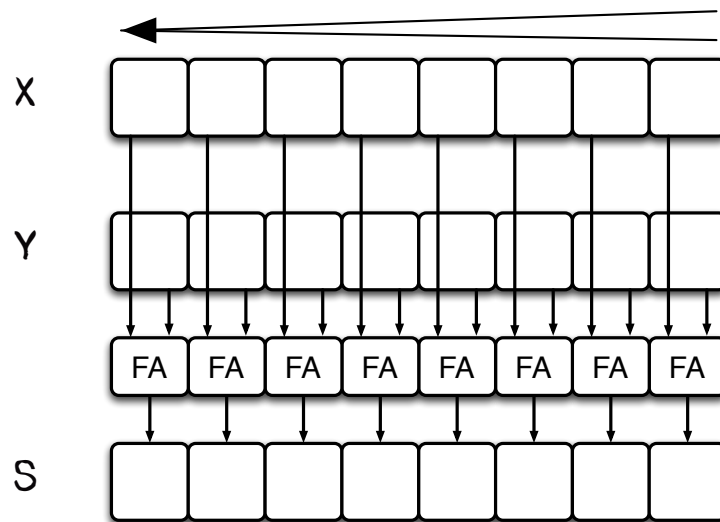
Blocket FA ovan måste alltså innehålla logik som vid behov genomför den önskade extra additionen med +6. Addition av flersiffriga tal utförs med kedjor av fulladderare, en per siffra i talområdet:



Fulladderarkedjan kan således användas för att addera två åtta-siffriga tal genom att, i en loop, addera talen två och två, och i varje loopvarv i erhålla en carry- och en summanbit:

$$(C_i, S_i) = X_i + Y_i + c_{i-1} \quad \text{med} \quad c_{-1} = 0$$

2. Aritmetik



I ett program behövs endast en (1) programrutin för fulladderare. Denna rutin underkastas sedan i tur och ordning de ingående talens siffror med början i minst signifikant siffra, från höger till vänster.

2.3. Subtraktion

Subtraktion utförs enklast som addition med omvänt tecken. Hittills har talen antagits vara teckenlösa men för subtraktion krävs alltså att vi inför tal med tecken.

Tio-komplementet Precis som i tvåkomplementsfallet för basen 2, finns ett *tiokomplement* för basen 10. Genom att komplementera ett tal byts talets tecken. I tvåkomplementsfallet sker detta genom att ett-komplementera (invertera) varje siffra (bit) och addera +1. Tio-komplementering görs på liknande sätt genom att nio-komplementera och addera +1.

I det binära fallet används tvåkomplement och en bit, teckenbiten, indikerar att talet är negativt. I fallet med BCD är situationen något otympligare. Ett ensiffrigt BCD-tal kan med tecken tolkas som:

utan tecken	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
med tecken	0	1	2	3	4	-5	-4	-3	-2	-1

varför alla tal med tecken som inleds med 5–9 i själva verket är negativa tal. Det finns alltså inte längre bara en *bit* som anger om talet är negativt.

En konsekvens av detta är att talområdet inte kan vara $[-9xxx, +9xxx]$ utan enbart $[-5xxx, +4xxx]$. För att undvika detta utnyttjas *tecken-beloppsrepresentation* där beloppet, som ju alltid är positivt, blir $[0000, 9999]$, och minustecknet hanteras på annat sätt.

Nio-komplementet av en siffra, X , är den siffra som skall läggas till för att summan skall bli 9 enligt nedanstående tabell:

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$9-X$	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

2. Aritmetik

Exempel: Bestäm BCD-koden för det negativa talet -963.

Talet är BCD-kodat så att byta tecken på det är detsamma som att tio-komplementera det. Med tabellen ovan, siffra för siffra och en avslutande addition fås

963	talet
036	9-komplement
-----+1-----	
037	10-komplement

En kontroll är att $963 + 037 = 1) 000$ dvs de tre sista siffrorna adderar ihop till 000. Den därvid uppkomna carryn kan man bortse ifrån.²

I full BCD-detalj kan komplementeringen utföras som

963	1001	0110	0011	talet
036	0000	0011	0110	9-komplement
-----+1-----	0000	0000	0001	
037	0000	0011	0111	10-komplement

■

Exempel: Ett annat tal, 960, tio-komplementeras på samma sätt. Glöm inte att decimaljustera resultatet.

960	1001	0110	0000	annat tal
039	0000	0011	1001	9-komplement
-----+1-----	0000	0000	0001	
03A	0000	0011	1010	10-komplement
-----+6-----	0000	0000	0110	DAA
	0000	0100	0000	10-komplement ('040')

Som kontroll ser man att $960 + 40 = 10\ 000$.

■

Subtraktion Med tio-komplementet kan nu subtraktionen $X - Y$ utföras som

$$X - Y = X + (-Y)$$

Exempel: Utför subtraktionen 2943 - 698.

Först tas -698 fram. . .

+0698	0000	0110	1001	1000	
	1001	0011	0000	0001	9-komplement
-----+1-----	0000	0000	0000	0001	+1
-0698	1001	0011	0000	0010	Koll: 0698 + 9302 = 10000

. . . och sedan görs en avslutande addition av de två talen:

²För tre siffror utför man egentligen 1000-komplementet! Och detta genom att beräkna $1000 - x$. Och så vidare.

2. Aritmetik

	2943	0010	1001	0100	0011	
+	9302	1001	0011	0000	0010	
-----		C				
		1011	1100	0100	0101	
	+	0000	0110	0000	0000	Decimaljustera de > 9
-----		1100	0010	0100	0101	
	+	0110	0000	0000	0000	Decimaljustera de > 9
-----		0010	0010	0100	0101	Resultat: +2245

Här har decimaljusteringen utförts parallellt med alla siffror för att kunna betraktas. Med en ensiffras fulladderare sker denna decimaljustering i varje siffra dock automatiskt. ■

2.4. Multiplikation

Multiplikation utförs i huvudsak som upprepad addition men med lite annorlunda disposition än vanligt. En metod anpassad och strömlinjeformad för datorhårdvara blir enklare att implementera än skolmetoden. För enkelhets skull används enbart positiva tal i algoritmen. Den i algoritmerna nedan förekommande additionen utförs i BCD-fallet som komplett addition med decimaljustering.

Först visas multiplikationen på vanligt sätt för att visa de olika delresultaten när algoritmen senare anpassas för datorimplementering.

Exempel: Multiplicera talen 1234 och 4321.

Beräkningarna utförs som med decimala tal för att principen bättre skall framgå.

	1234	multiplikator
	4321	multiplikand

	1234	1234 * 1
	2468	1234 * 2
	3702	1234 * 3
	4936	1234 * 4
-----	5332114	1234*4321

Algoritmen ovan är känd. Ett problem ur vår synvinkel är att ett antal delresultat måste samlas på hög innan en avslutande, tämligen massiv, addition förlöser det hela till ett resultat. Det är en nackdel. Men en nackdel som dock kan lösas genom att införa *partialprodukter*, dvs addera så fort något kan adderas.

Not 1. En multiplikation av två fyra-siffrors tal, en så kallad *4x4*-multiplikation kan inte ge mer än $4 + 4 = 8$ siffror i resultatet.

2. Aritmetik

Med ledning av detta ansätts en nollställd partialprodukt av önskad längd redan i början:

Exempel: Partialprodukt

1234	multiplikator
4321	multiplikand

00000000	partialprodukt p_0 = 0
1234	1234 * 1

1234	partialprodukt p_1
2468	1234 * 2

25914	partialprodukt p_2
3702	1234 * 3

396114	partialprodukt p_3
4936	1234 * 4

5332114	partialprodukt p_4 = 1234*4321

■

Ur denna uppställning och beräkning kan man se hur vissa siffror ändras och hur vissa *aldrig* ändras: I p_1 är sista siffran, 4, redan färdig, klar och beräknad. I p_2 tillkommer näst sista siffran, som sedan aldrig ändras, och så vidare. I varje steg tillverkas alltså en ytterligare siffra som är klar och kan läggas åt sidan. Additionen är i varje steg enbart fyra siffror plus fyra andra siffror! Tyvärr är denna addition mer och mer åt vänster. . . Men, då det enligt ovan, i varje steg, producerats en siffra till höger kan man skifta partialprodukten ett steg åt höger och på så sätt hålla additionerna rakt under varann.

Exempel: Partialprodukt och högerskift

1234	multiplikator
4321	multiplikand

0000 0000	partialprodukt p_0 = 0
1234	1234 * 1

0000 1234	partialprodukt p_1
000 0123 4	skiftad
2468	1234 * 2

000 2591 4	partialprodukt p_2
00 0259 14	skiftad
3702	1234 * 3

00 3961 14	partialprodukt p_3
0 0396 114	skiftad
4936	1234 * 4

0 5332 114	partialprodukt p_4
0533 2114	skiftad = 1234*4321

■

Not 2. Generellt erhålls slutresultatet av en $n \times n$ -multiplikation efter n steg. Multiplikationen är i 4×4 -fallet alltid i 4 steg.

Not 3. Övre halvan av resultatet återfinns under ursprungsoperanderna, undre halvan har producerats under processens gång.

Not 4. För en $n \times n$ -multiplikation behövs enligt ovan endast en $2n$ -adderare. Detta gäller generellt.

2. Aritmetik

Multiplikation med tecken Multiplikationen ovan är beskriven för teckenlösa tal. Med teckenbelopp-representerade tal multipliceras talens belopp och det resulterande tecknet fås genom att betrakta ursprungstalens tecken där olika tecken ger negativt resultat medan samma tecken alltid ger positivt tecken på resultatet.

Multiplikationsdetaljer I beräkningen ovan utfördes delprodukterna, till exempel $3702 = 1234 \cdot 3$ utan förklaring. Man kan notera att en sådan delprodukt som mest är en multiplikation mellan ett fyra-siffrigt tal och ett en-siffrigt. Ett enkelt och direkt sätt att utföra denna multiplikation med ett en-siffrigt tal är direkt upprepad addition. Denna sorts ”multiplikation” tar olika lång tid beroende på antalet additioner men tar under alla förhållanden aldrig mer än högst 9 additioner.

Fler möjligheter

De ensiffriga multiplikationerna kan beräknas på tre sätt:

- upprepade additioner,
- tabelluppslagning i en multiplikationstabell eller
- använda stöd i befintlig hårdvara.

Metoderna med upprepade additioner eller tabelluppslagning är enklast att implementera. Upprepad addition tar, som nämnts, olika lång tid — och i bland väldigt lång tid — beroende på operanderna. Tabelluppslagning tar plats (82 värden) men kan koda hela resultatet i en byte för en total tabellstorlek av 82 bytes. Symmetrier ($3 \cdot 4 = 4 \cdot 3$) kan användas för att få ner tabellstorleken ytterligare. Inte sällan finns multiplikationsinstruktioner i en processor. I fallet med 8x8-till-16-bitars instruktion kan denna användas för 1x1-siffrors multiplikation ($9 \cdot 9 = 81$) enligt ovan, men också för 3x1- eller 2x2-siffrors multiplikation ($999 \cdot 9 = 8991$, $99 \cdot 99 = 9801$).

2. Aritmetik

8x8-multiplikation Med 8 siffror i både multiplikand och multiplikator blir algoritmen något mer omfattande att visualisera men stegen är desamma:

Exempel: Partialprodukt och högerskift 8x8 siffror.

I detta exempel ansätts plats för maximalt resultat om 16 siffror:

				multiplikator
				multiplikand
		1736	5289	p_0 = 0
		3247	5178	1736 5289 * 8
00000	00000	00000	00000	p_1
	1	3892	2312	>>
	1	3892	2312	1736 5289 * 7
		1389	2231	p_2
	1	2155	7023	>>
	1	3544	9254	1736 5289 * 1
		1354	4925	p_3
		1736	5289	>>
		3091	0214	1736 5289 * 5
		309	1021	p_4
		8682	6445	>>
		8991	7466	1736 5289 * 7
		899	1746	p_5
	1	2155	7023	>>
	1	3054	8769	1736 5289 * 4
		1305	4876	p_6
		6946	1156	>>
		8251	6032	1736 5289 * 2
		825	1603	p_7
		3473	0578	>>
		4298	2181	1736 5289 * 3
		429	8218	p_8
		5209	5867	>> svar 16 siffror
		5639	4085	
		0563	9408	

Den avslutande produkten blir 0563940851296442. Kontrollera alla siffror på din miniräknare! Om svaret skall ha 8 siffror blir det en användarfråga om det är den första eller sista delen som skall redovisas, eller om ett felmeddelande skall ges "Svaret får inte plats" så fort en partialprodukt överstiger 8 siffror. ■

2.5. Division

Division utförs i huvudsak som "för hand" med upprepad subtraktion och förflyttning i sidled. Liksom i fallet med multiplikation vill man placera alla subtraktioner och, i förekommande fall, återställande additioner i direkt under varann.

Först visas divisionen

$$\frac{43665}{123} = 355$$

enligt "liggande stolen":

2. Aritmetik

Exempel: Liggande stolen

$$\begin{array}{r} 123 \\ 355 \overline{) 43665} \\ \underline{-355} \\ 816 \\ \underline{-710} \\ 1065 \\ \underline{-1065} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} 1 * 355 \\ 2 * 355 \\ 3 * 355 \end{array}$$

■

Den inledande subtraktionen är $436-355$ och går att göra 1 gång innan resultatet blir negativt. Sedan flyttas nämnaren ett steg höger, nästa siffra ur täljaren läggs till och subtraktionen upprepas tills resultatet blir negativt (2 gånger nu) och metoden fortsätter tills alla siffror i täljaren använts.³

Not. Subtraktionen upprepas tills resultatet är < 0 . Den sista subtraktionen återtas och räknas inte in i kvoten.

³Försåvitt inte decimaltal tillåts, ty då fortsätter man på den inslagna vägen, fast med nollor från täljaren, tills önskat antal decimaler producerats.

2. Aritmetik

8/8-division Metoden går att modifiera med motsvarande knep som i multiplikationsfallet. Utförd i 8 decimala siffror kan den beskrivas enligt nedan där nämnaren är fix i position och storlek medan täljaren flyttas ett steg åt vänster i varje omgång. Nämnaren subtraheras upprepade gånger från täljarens siffror och antalet subtraktioner noteras.

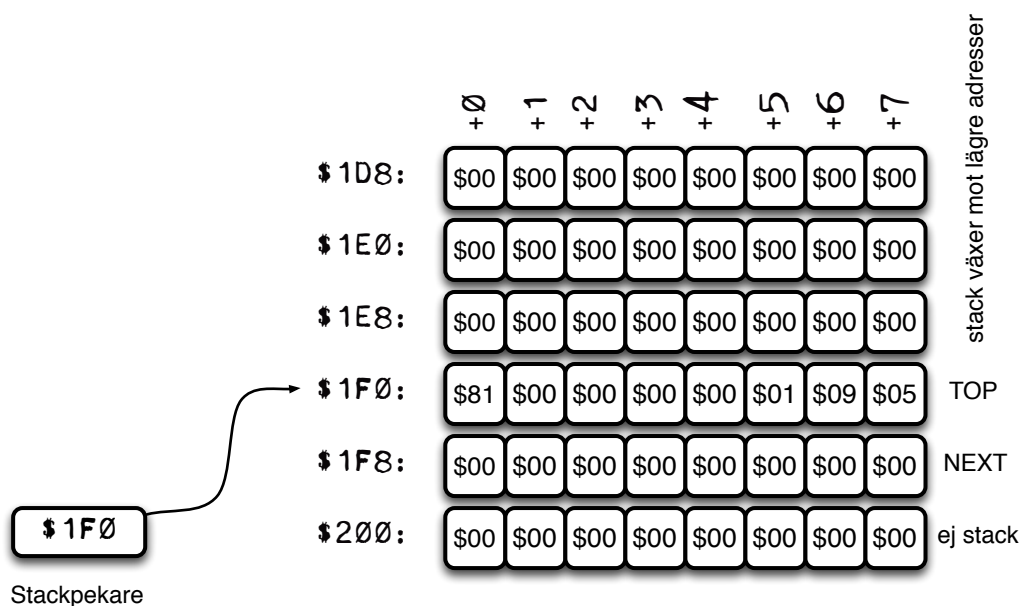
Exempel:

	000000000 00043665	startpositioner
	<<	skift 0
1.	000000000 0043665-	
-	00000355	0 subtraktioner
	000000000 0043665-	
	<<	skift 1
2.	000000000 043665--	
-	00000355	0 subtraktioner
	000000000 043665--	
	<<	skift 2
3.	000000000 43665---	
-	00000355	0 subtraktioner
	000000000 43665---	
	<<	skift 3
4.	000000000 43665---	
-	00000355	0 subtraktioner
	000000000 43665---	
	<<	skift 4
5.	000000004 3665----	
-	00000355	0 subtraktioner
	000000004 3665----	
	<<	skift 5
6.	000000043 665-----	
-	00000355 665-----	0 subtraktioner
	000000043 665-----	
	<<	skift 6
7.	000000436 65-----	
-	00000355	1 * 355 = 81 subtraheras
	000000081 65-----	
	<<	skift 7
8.	000000816 5-----	
-	00000710	2 * 355 = 710 subtraheras
	00000106 5-----	
	<<	skift 8, sista
	00001065 -----	
-	00001065	3 * 355 = 1065 subtraheras
	0	rest = 0

■

Resultatet avläses till höger, uppifrån och ned: 00000123. En 8/8-division tar på detta sätt alltid 8 steg. Det går att snabba upp den genom att studera de ingående talen och vänsterskifta tills första siffran $\neq 0$ finns i entalspositionen men strömlinjeformningen enligt ovan är generell och direkt. Divisionen gick här jämnt ut med resten = 0. I det allmänna fallet ger divisionen dock rest.

3. Implementation



Figuren visar en tänkt minneslayout utförd som en stack där varje tal tar 8 bytes i anspråk. Stackpekaren pekar på senast ditlagda tal, här talet -195 respektive 0 . Med en bestämd maximal tallängd om 8 bytes är upp/ned-räkningen till nästa/föregående tal alltid samma.²

Fördelen är att stacken enkelt kan manipuleras med rutiner som `drop` och `dup` men även med mer komplexa rutiner som `+`, `-` och `negate` med flera.³ Ett tal behöver aldrig *raderas* från stacken, ej heller nollställas, det räcker att peka om stackpekaren. I figuren ovan innehåller de inte utnyttjade talen enbart `$00`, detta är inte nödvändigt och i verkligheten osannolikt.

En ytterligare fördel är att stacken även kan användas *internt* i respektive aritmetisk beräkning för att lagra mellanresultat! Genom att nå respektive siffra i talen med pekare kan effektiva programflöden uppnås.

²Faktum är att de tre lägsta bitarna i adressen är respektive byte-adress inom ett tal.

³Lägg märke till att en subtraktion utförs som "call negate, call plus" om en parameterstack används.

A. 8x8-multiplikation med upprepad addition

Här visas multiplikationen 1234·4321 med upprepad addition utskriven i varje steg.

Exempel: Partialprodukt och högerskift, alla steg

	1234		multiplikator
	4321		multiplikand

0000	0000		partialprodukt p_0 = 0
	1234		1234 * 1

0000	1234		partialprodukt p_1
	123	4	skiftad
	1234		1234 * 2
	1234		

0000	2591	4	partialprodukt p_2
	259	14	skiftad
	1234		1234 * 3
	1234		
	1234		

0000	3961	14	partialprodukt p_3
	396	114	skiftad
	1234		1234 * 4
	1234		
	1234		
	1234		

0000	5332	114	partialprodukt p_4
	0533	2114	skiftad = 1234*4321

■

B. *Double dabble*-algoritmen

Ibland kan befintlig hårdvara för binär multiplikation användas. För att använda sådana basen-2-resultat i decimalaritmetiken måste de först omvandlas till BCD-tal.

För omvandling mellan binära tal och BCD-tal kan en variant av den s.k. *double dabble*-metoden användas. I grova drag utförs successiva vänsterskiftningar av det binära talet och siffran 6 adderas¹ om resultatet i en BCD-kolumn (här "10" och "1") blir större än 9:

Exempel: Omvandla 1100_2 till BCD med *double dabble*-algoritmen

Op	10	1	Binär-tal
Start	0000	0000	1100
Skift	0000	0001	100
Skift	0000	0011	00
Skift	0000	0110	0
Skift	0000	1100	← större än 9
6	0000	0110	← addera 6
+	0001	0010	
BCD	1	2	← svar i BCD

Med resultatet i BCD-form kan det användas för att adderas till partialprodukten i den ursprungliga multiplikationen.

$$-o=\ddot{O}=o-$$

¹I en vanlig implementation av metoden utförs istället addition med 3 innan vänsterskiftningen.