Introducción a los Modelos Lineales: fundamentos teóricos y prácticos

Javier Fernández-López, Profesor Ayudante Doctor

Unidad de Matemática Aplicada

Departamento de Biodiversidad, Ecología y Evolución, UCM

eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

DOKTOREGO ESKOLA
ESCUELA DE DOCTORADO
DOCTORAL SCHOOL

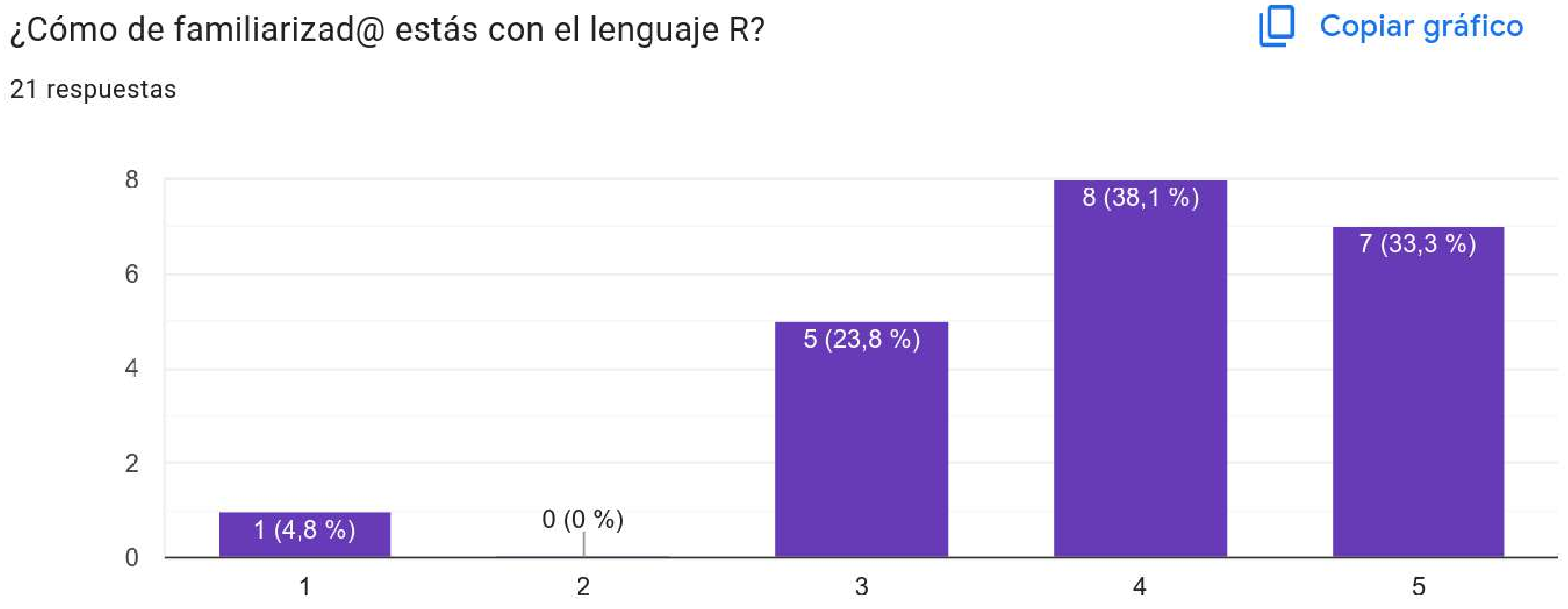
Programas de doctorado:

- Agrobiología Ambiental
- Calidad y Seguridad Alimentaria
- Biodiversidad, Funcionamiento y Gestión de Ecosistemas

Sobre mi…

Javier Fernández-López
javfer05@ucm.es

Sobre vosotrxs...

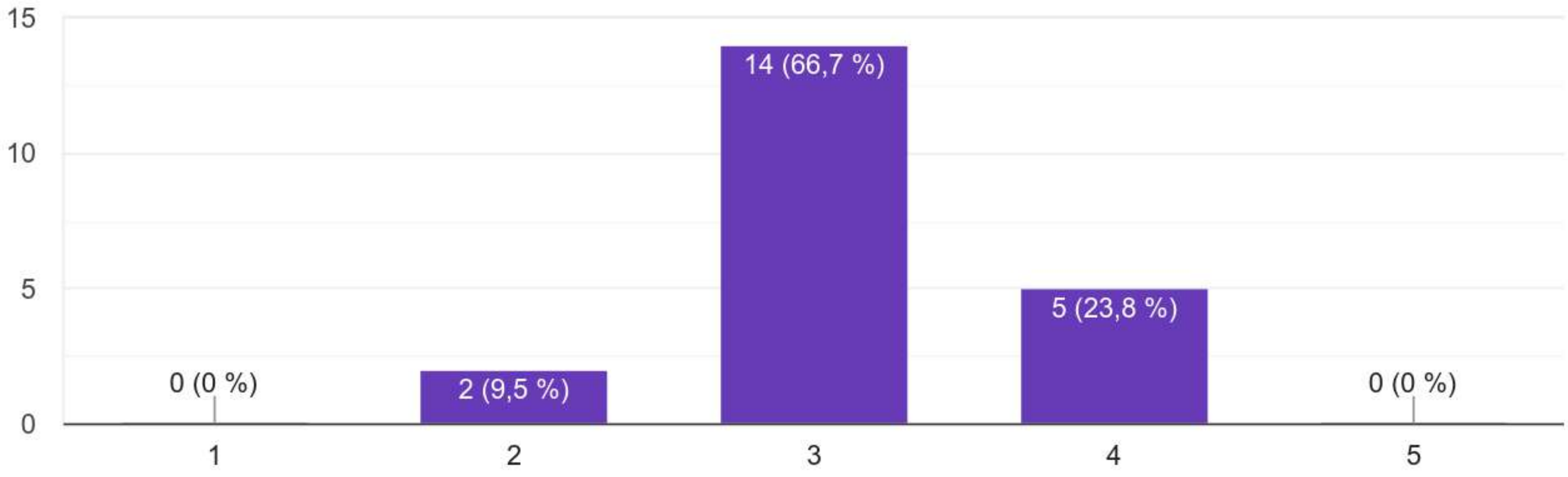


Sobre vosotrxs...

¿Cómo de familiarizad@ estás con los modelos lineales (regresiones, GLM, etc.)?

Copiar gráfico

21 respuestas



Sobre vosotrxs...

Grupo muy diverso (tres programas de doctorado):
50% BFGE
20% CSA
23.3% ABA
6.7% otros.

Muchas disciplinas diferentes: ganadería, agricultura, ecología, microbiología, calidad alimentaria, nutrición, botánica, zoología…

Reto, pero también oportunidad!

Sobre el curso...

- Módulo 1 - Introducción a la modelización

  (5 horas, 20 y 27 de octubre)

Sobre el curso...

- Módulo 1 - Introducción a la modelización

  (5 horas, 20 y 27 de octubre)
- Módulo 2 - Modelos lineales generalizados

  (5 horas, 3 y *10?* de noviembre)

Sobre el curso...

- Módulo 1 - Introducción a la modelización

  (5 horas, 20 y 27 de octubre)

- Módulo 2 - Modelos lineales generalizados

  (5 horas, 3 y *10?* de noviembre)

- Módulo 3 - Modelos mixtos y otras extensiones

  (5 horas, 17 y 24 de noviembre)

Sobre el curso...

- Dinámica. Teoría y práctica

Sobre el curso...

- Dinámica. Teoría y práctica

- Presentaciones, material y grabación:

  https://jabiologo.github.io/web/tutorials/estadisticaUPV.html

Sobre el curso...

- Dinámica. Teoría y práctica
- Presentaciones, material y grabación:

  https://jabiologo.github.io/web/tutorials/estadisticaUPV.html

- Dudas y preguntas: estadística (interrumpir?) y software (esperar?)

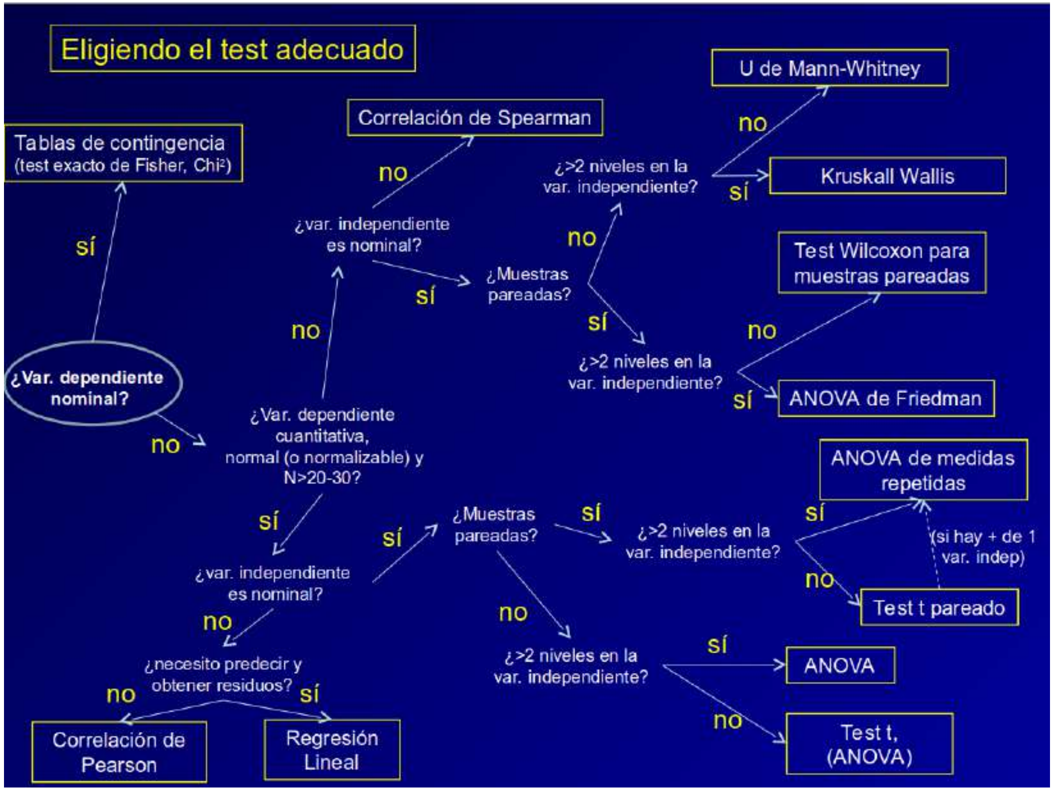
Sobre el curso...

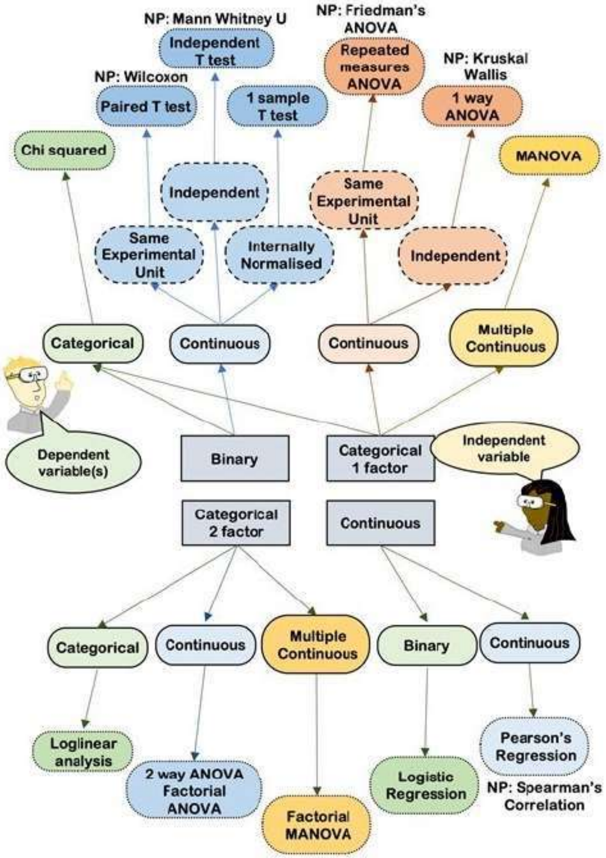
- Dinámica. Teoría y práctica
- Presentaciones, material y grabación:

  https://jabiologo.github.io/web/tutorials/estadisticaUPV.html

- Dudas y preguntas: estadística (interrumpir?) y software (esperar?)
- Filosofía docente

Sobre el curso...





Bloque 1: Introducción a la modelización

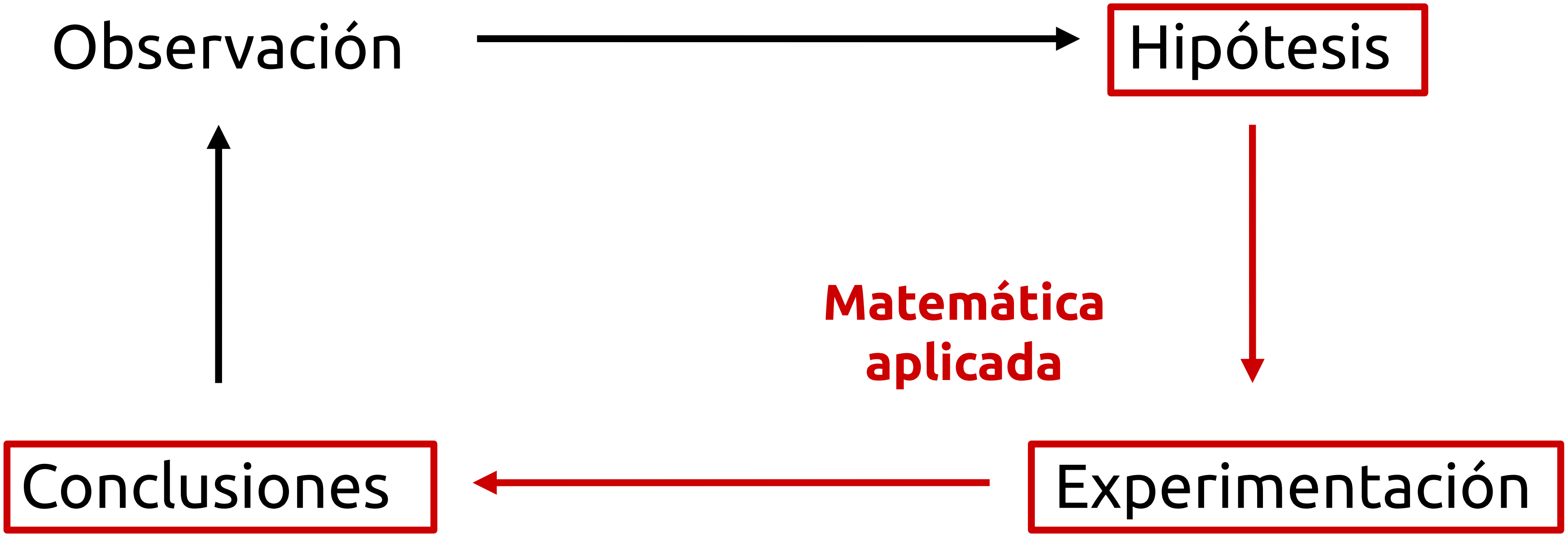
- El método científico y la estadística
- Diseños experimentales VS datos observacionales
- Concepto de modelo
- Las variables y las distribuciones de probabilidad
- Las simulaciones como un laboratorio
- Introducción al modelo lineal

Bloque 1: Introducción a la modelización

- El método científico y la estadística
- Diseños experimentales VS datos observacionales
- Concepto de modelo
- Las variables y las distribuciones de probabilidad
- Las simulaciones como un laboratorio
- Introducción al modelo lineal

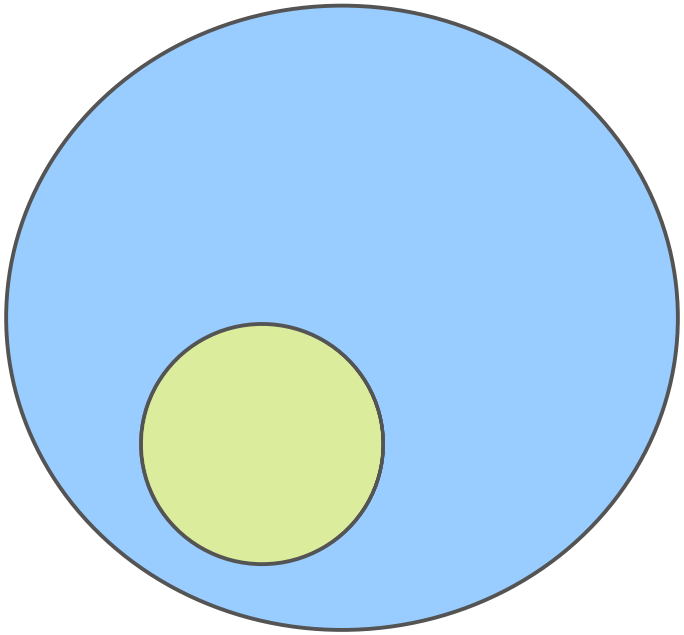
El método científico

El método científico



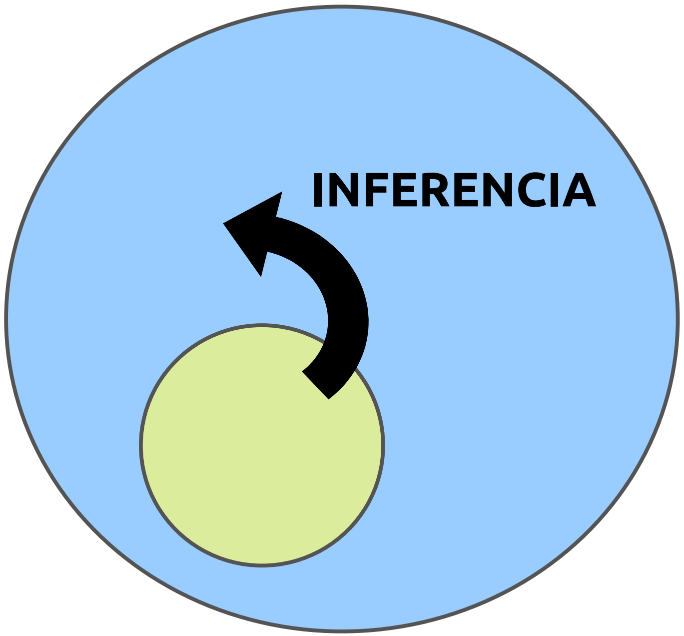
- Población: Conjunto **total de individuos u observaciones** sobre los que queremos sacar conclusiones.

- Muestra: **Subconjunto representativo** de la población, seleccionado para su estudio.



- Población: Conjunto **total de individuos u observaciones** sobre los que queremos sacar conclusiones.

- Muestra: **Subconjunto representativo** de la población, seleccionado para su estudio.



Inferencia estadística

El proceso de usar los datos de una muestra para estimar o tomar decisiones sobre una población, reconociendo la incertidumbre del muestreo.

DISEÑO EXPERIMENTAL VS DATOS OBSERVACIONALES

	Diseño experimental	Estudio observacional
Control	El investigador **manipula** una o más variables (tratamientos) y **controla** las condiciones.	El investigador **no manipula** nada; solo **observa y registra** lo que ocurre naturalmente.
Ejemplo		
Fuentes de variabilidad		

DISEÑO EXPERIMENTAL VS DATOS OBSERVACIONALES

	Diseño experimental	Estudio observacional
Control	El investigador **manipula** una o más variables (tratamientos) y **controla** las condiciones.	El investigador **no manipula** nada; solo **observa y registra** lo que ocurre naturalmente.
Ejemplo	Ensayo clínico, experimento de laboratorio, cultivo en condiciones controladas.	Ecología de campo, estudios sociales, encuestas, registros médicos.
Fuentes de variabilidad		

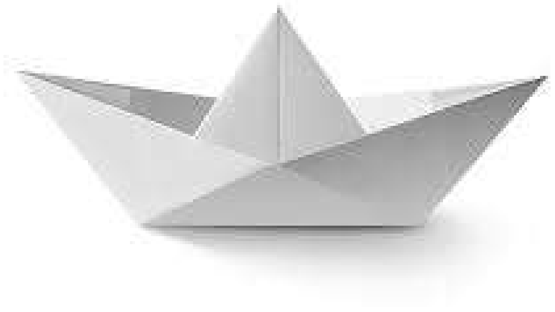
DISEÑO EXPERIMENTAL VS DATOS OBSERVACIONALES

	Diseño experimental	Estudio observacional
Control	El investigador **manipula** una o más variables (tratamientos) y **controla** las condiciones.	El investigador **no manipula** nada; solo **observa y registra** lo que ocurre naturalmente.
Ejemplo	Ensayo clínico, experimento de laboratorio, cultivo en condiciones controladas.	Ecología de campo, estudios sociales, encuestas, registros médicos.
Fuentes de variabilidad	Pueden **controlarse o aislarse** (aleatorización, réplicas, bloqueos).	Difíciles de controlar: el entorno, el comportamiento, la historia previa...

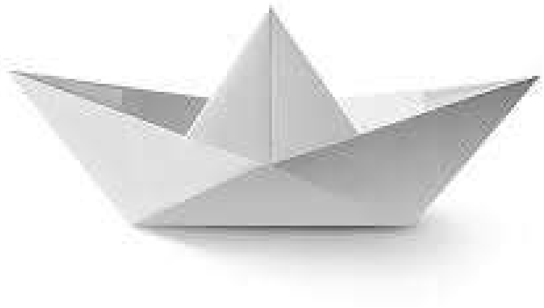
En experimentos, la estadística ayuda a diseñar los tratamientos, minimizar sesgos, y evaluar diferencias entre grupos. En estudios observacionales permite controlar confusores, modelar la variabilidad natural y extraer patrones sin control directo.

¿Qué es un modelo?

¿Qué es un modelo?



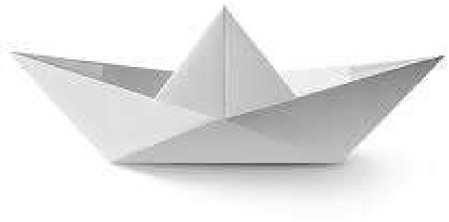
¿Qué es un modelo?



CONCEPTO DE MODELO

¿Qué es un modelo?

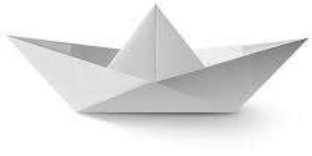
Un modelo es una **representación simplificada** de la realidad, elaborada con el fin de **explicar y/o predecir** ciertos aspectos de la misma



¿Qué es un modelo?

Un **modelo matemático** es la traducción de una hipótesis sobre la realidad a lenguaje matemático, de modo que pueda ponerse a prueba y contrastarse con datos.

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \cdots + \beta_p X_{ip} + \varepsilon_i$$

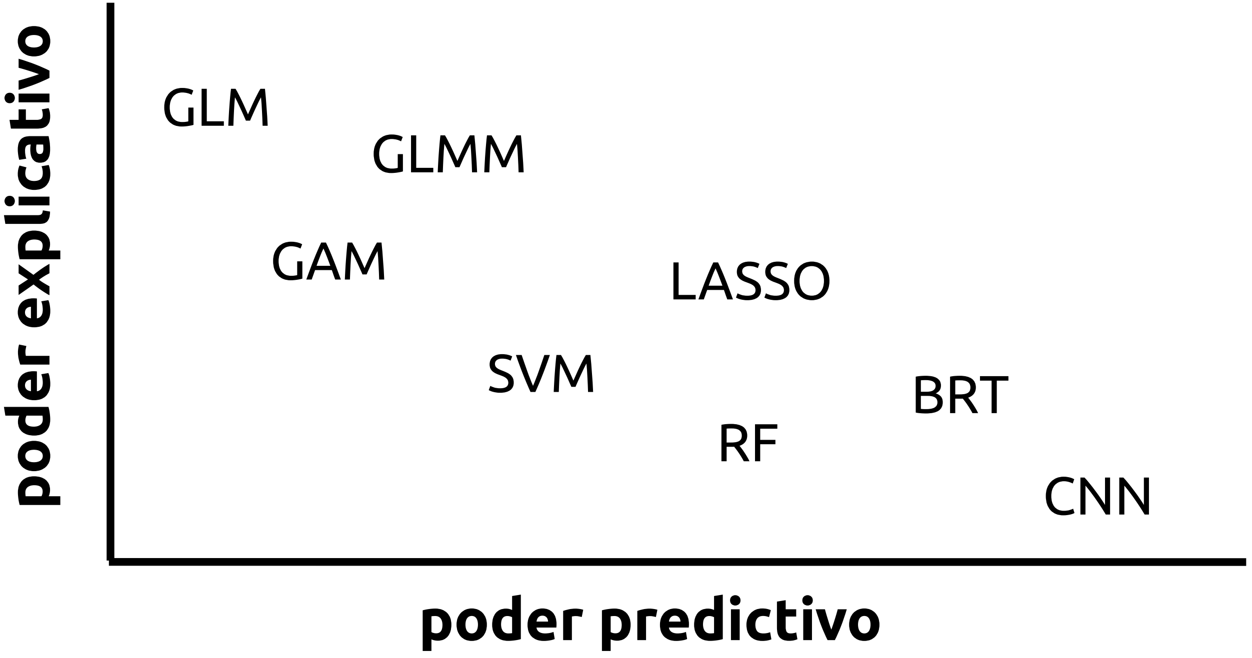


Sobre explicaciones y predicciones..

Un modelo es una **representación simplificada** de la realidad, elaborada con el fin de **explicar** **y/o** **predecir** ciertos aspectos de la misma

Sobre explicaciones y predicciones..

Un modelo es una **representación simplificada** de la realidad, elaborada con el fin de **explicar** **y/o** **predecir** ciertos aspectos de la misma



Tipos de variables (clasificación clásica)

Tipos de variables (clasificación clásica)

- Cuantitativas (se expresa mediante números, se puede operar)

Continuas (decimales)

Discretas (enteros)

Tipos de variables (clasificación clásica)

- Cuantitativas (se expresa mediante números, se puede operar)

Continuas (decimales)

Discretas (enteros)

- Semicuantitativas u ordinales (variable cualitativa que se puede ordenar)

Tipos de variables (clasificación clásica)

- Cuantitativas (se expresa mediante números, se puede operar)

Continuas (decimales)

Discretas (enteros)

- Semicuantitativas u ordinales (variable cualitativa que se puede ordenar)

- Cualitativas o nominales (describe un atributo o categoría)

Tipos de variables (clasificación clásica)

- Cuantitativas (se expresa mediante números, se puede operar)

  Continuas (decimales)

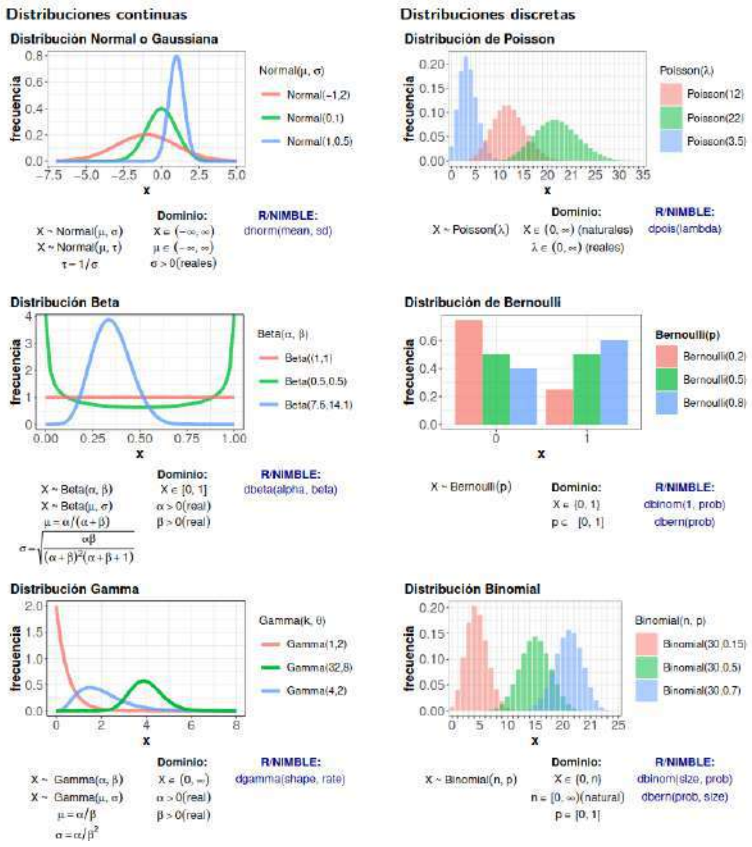
  Discretas (enteros)

- Semicuantitativas u ordinales (variable cualitativa que se puede ordenar)

- Cualitativas o nominales (describe un atributo o categoría)

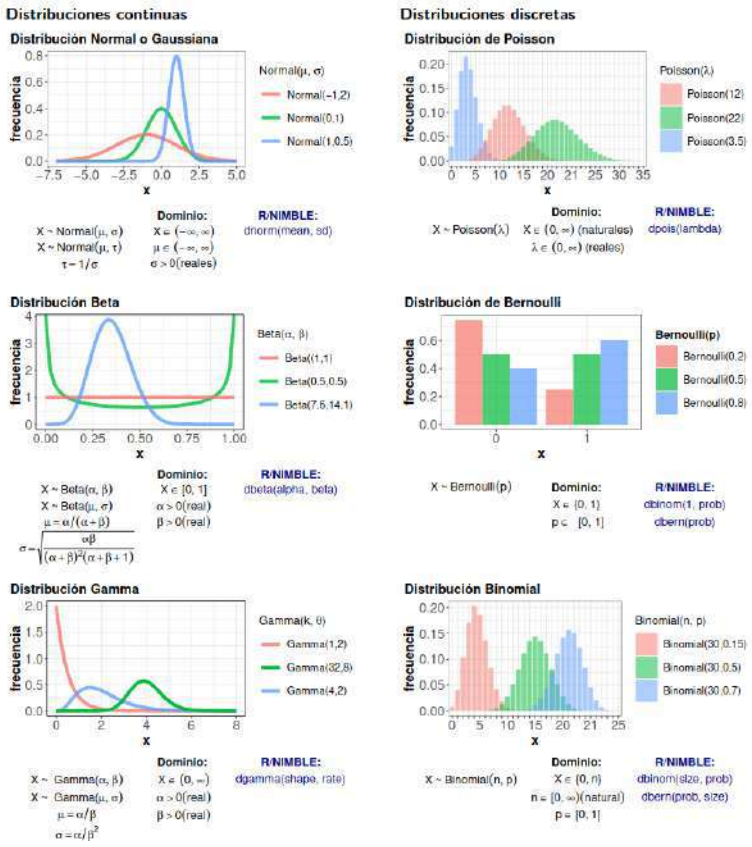
¿Con qué variables trabajáis? ¿de qué tipo son?

Distribuciones de probabilidad



- Van a ser nuestros modelos, nuestra abstracción matemática, la representación simplificada de la realidad!

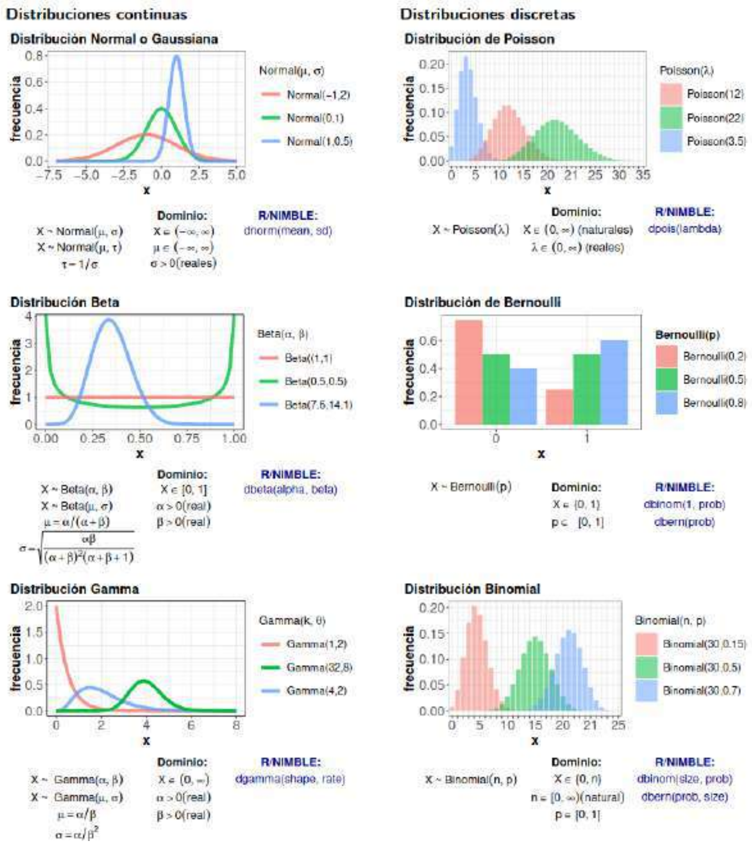
Distribuciones de probabilidad



- Van a ser nuestros modelos, nuestra abstracción matemática, la representación simplificada de la realidad!

- Cada una tiene unas características diferentes que hacen que sean más aptas para uno u otro tipos de datos.

Distribuciones de probabilidad

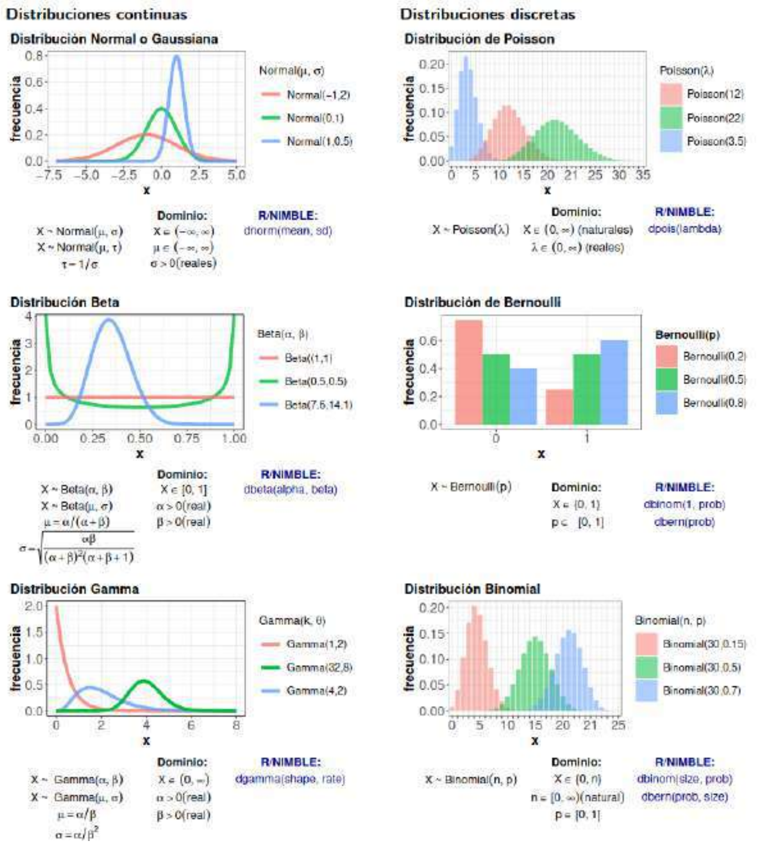


- Van a ser nuestros modelos, nuestra abstracción matemática, la representación simplificada de la realidad!

- Cada una tiene unas características diferentes que hacen que sean más aptas para uno u otro tipos de datos.

- Es necesario conocer las más importantes y sus principales características.

Distribuciones de probabilidad



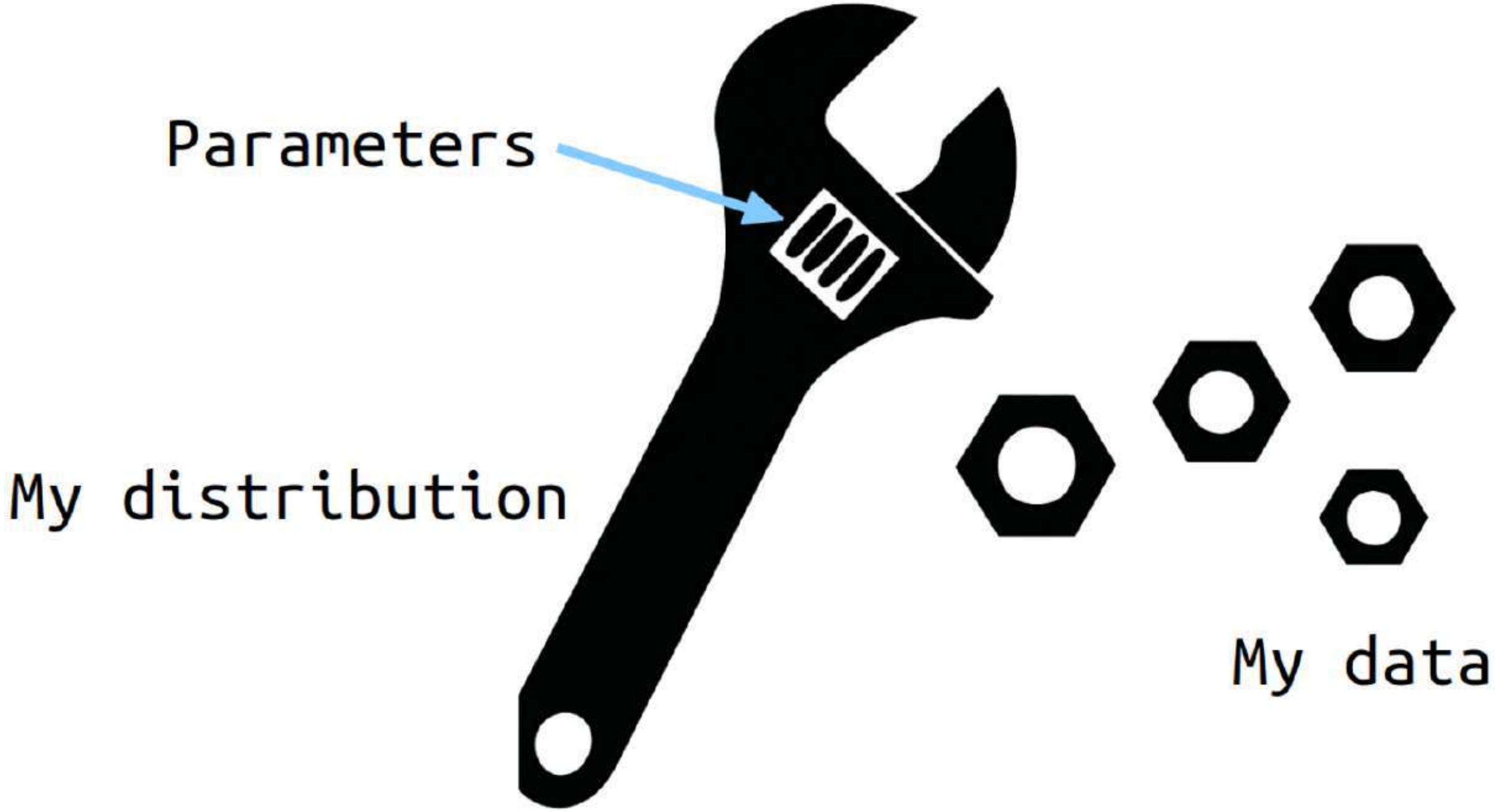
- Van a ser nuestros modelos, nuestra abstracción matemática, la representación simplificada de la realidad!

- Cada una tiene unas características diferentes que hacen que sean más aptas para uno u otro tipos de datos.

- Es necesario conocer las más importantes y sus principales características.

- Hay muchísimas, pero me gustaría que te aprendieses sólo tres (+1): la **Normal**, la de **Poisson** y la **Binomial** (+Uniforme).

Distribuciones de probabilidad



Distribuciones de probabilidad: notación

$$X \sim Name(parameter_1, parameter_2)$$

Distribuciones de probabilidad: notación

$$\boxed{X} \sim Name(parameter_1, parameter_2)$$

Mi variable

Distribuciones de probabilidad: notación

"se distribuye como"

$$\boxed{X} \sim Name(parameter_1, parameter_2)$$

Mi variable

Distribuciones de probabilidad: notación

"se distribuye como"

$$\boxed{X} \sim \boxed{Name}(parameter_1, parameter_2)$$

Mi variable

Nombre de la distribución

Distribuciones de probabilidad: notación

"se distribuye como"

$$\boxed{X} \sim \boxed{Name}(\underline{parameter_1, parameter_2})$$

Mi variable

Nombre de la distribución

Parámetros de la distribución

Distribuciones de probabilidad: notación

OJO: la misma distribución puede parametrizarse de diferentes formas

"se distribuye como"

$$\boxed{X} \sim \boxed{Name}(\underline{parameter_1, parameter_2})$$

Mi variable

Nombre de la distribución

Parámetros de la distribución

Distribuciones de probabilidad: notación

Temperatura media anual ~ Normal(media = 15, desviación estándar = 5)

Distribuciones de probabilidad: notación

Temperatura media anual ~ Normal(media = 15, desviación estándar = 5)

Temperatura media anual ~ Normal(μ = 15, σ = 5)

Temperatura media anual ~ N(15, 5)

Distribuciones de probabilidad: notación

Temperatura media anual ~ Normal(media = 15, desviación estándar = 5)

Temperatura media anual ~ Normal(μ = 15, σ = 5)

Temperatura media anual ~ N(15, 5)

Standard deviation

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$$

Distribuciones de probabilidad: notación

Temperatura media anual ~ Normal(media = 15, desviación estándar = 5)

Temperatura media anual ~ Normal(μ = 15, σ = 5)

Temperatura media anual ~ N(15, 5)

Standard deviation

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$$

Variance

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

Distribuciones de probabilidad: notación

Temperatura media anual ~ Normal(media = 15, desviación estándar = 5)

Temperatura media anual ~ Normal(μ = 15, σ = 5)

Temperatura media anual ~ N(15, 5)

Standard deviation

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$$

Variance

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

Precision

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \tau)$$

$$\tau = \frac{1}{\sigma^2}$$

Distribuciones de probabilidad: notación

Temperatura media anual ~ Normal(media = 15, desviación estándar = 5)

Temperatura media anual ~ Normal(μ = 15, σ = 5)

Temperatura media anual ~ N(15, 5)

Standard deviation

$$\boxed{X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)}$$

Variance

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

Precision

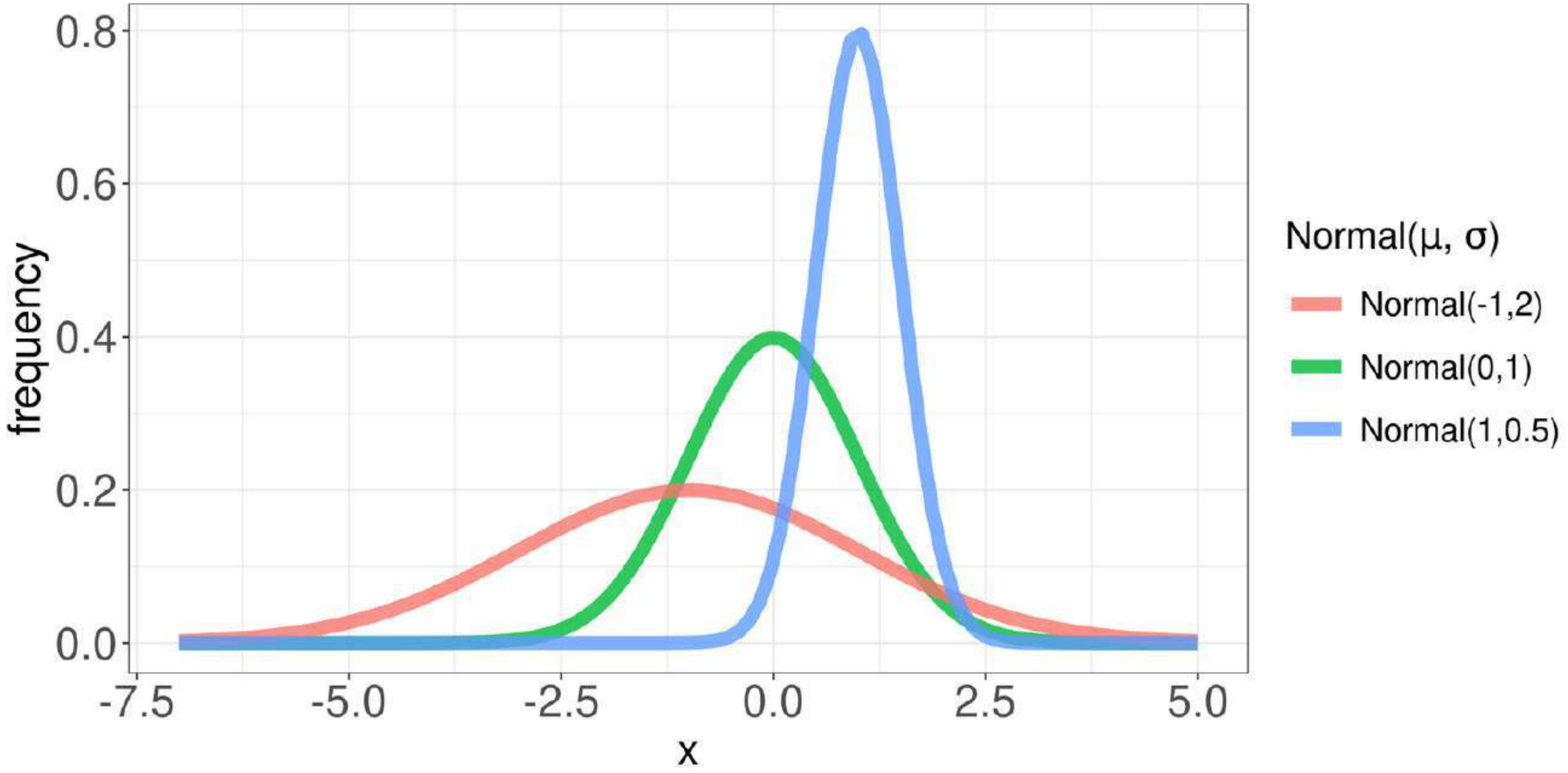
$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \tau)$$

$$\tau = \frac{1}{\sigma^2}$$

$$X \sim Normal(\mu, \sigma)$$

Continuas

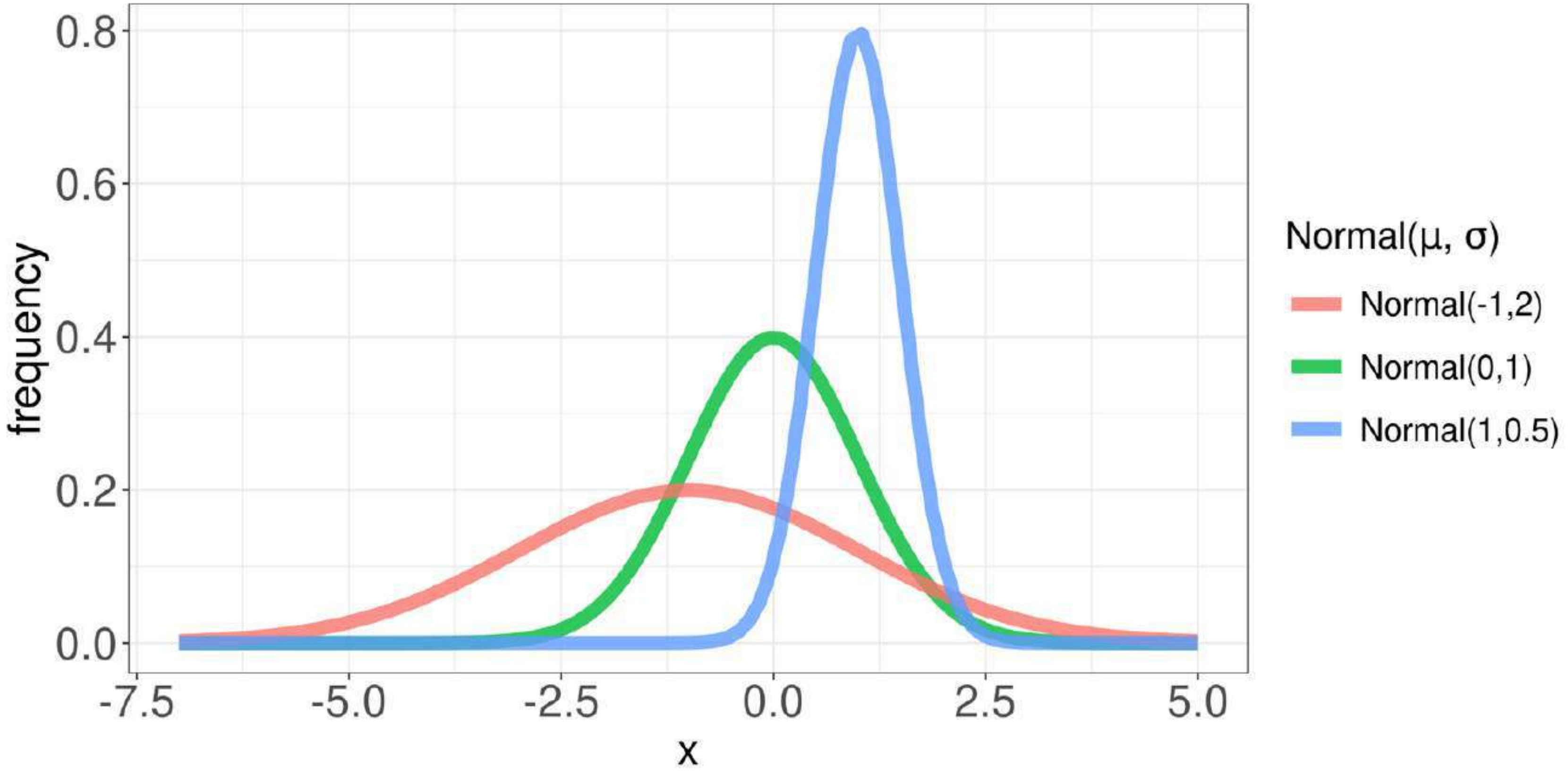
Support: $X \in (-\infty, \infty); \mu \in (-\infty, \infty); \sigma > 0$ (real)



Continuas

$$X \sim Normal(\mu, \sigma)$$

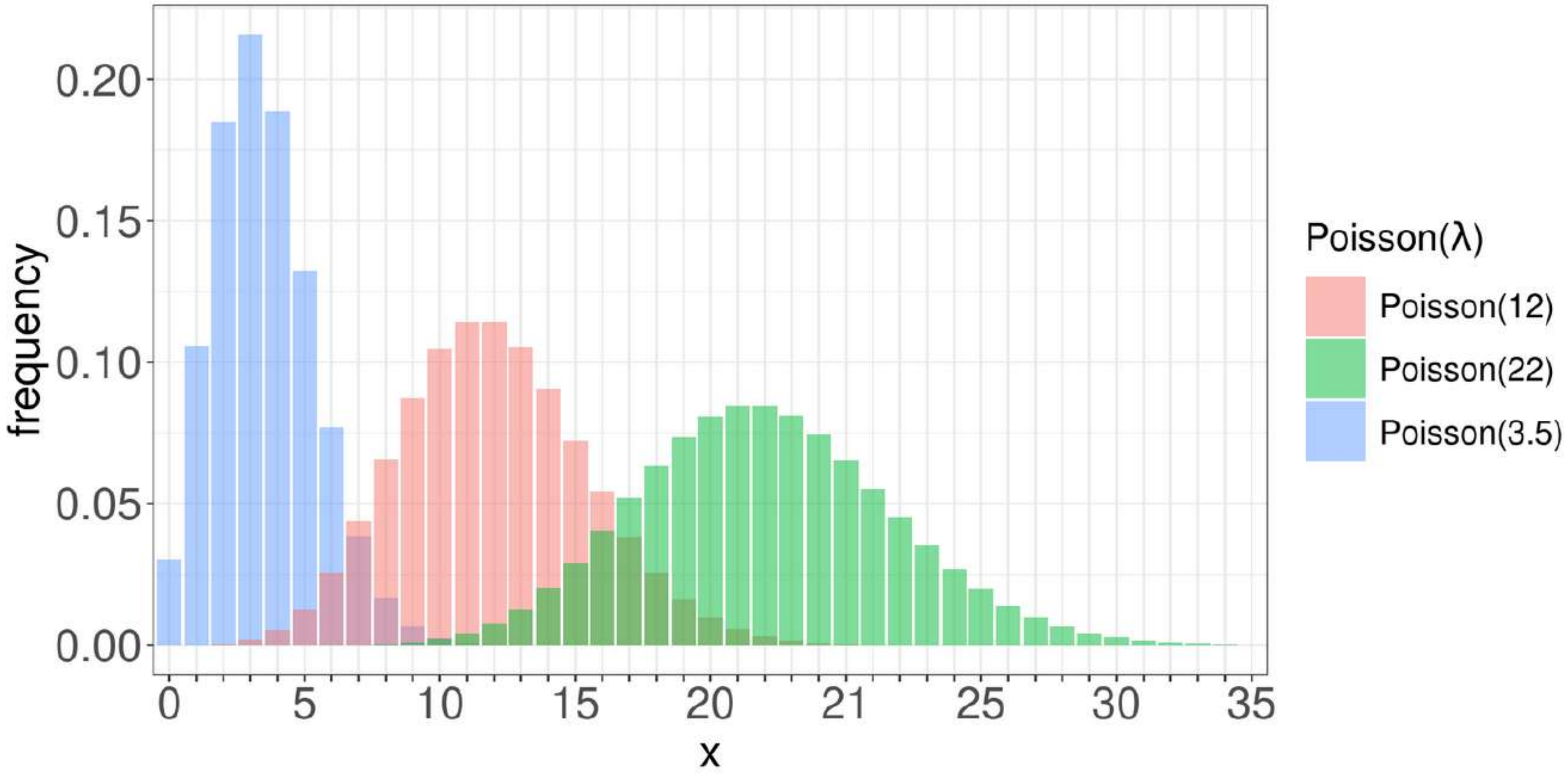
Support: $X \in (-\infty, \infty); \mu \in (-\infty, \infty); \sigma > 0$ (real)



$$X \sim Poisson(\lambda)$$

Conteos

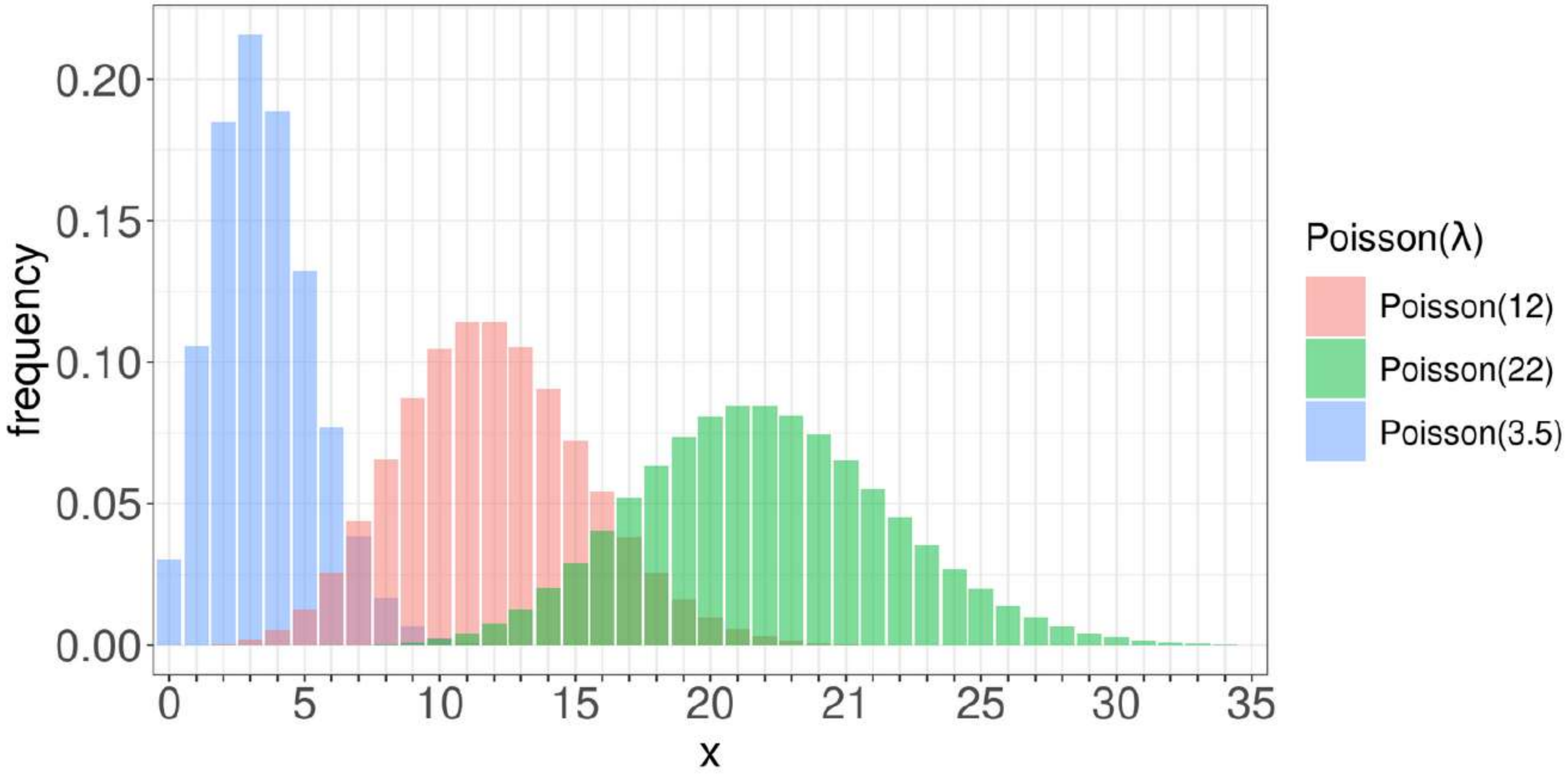
Support: $X \in (0, \infty)$ (natural); $\lambda \in (0, \infty)$ (real)



$$X \sim Poisson(\lambda)$$

Conteos

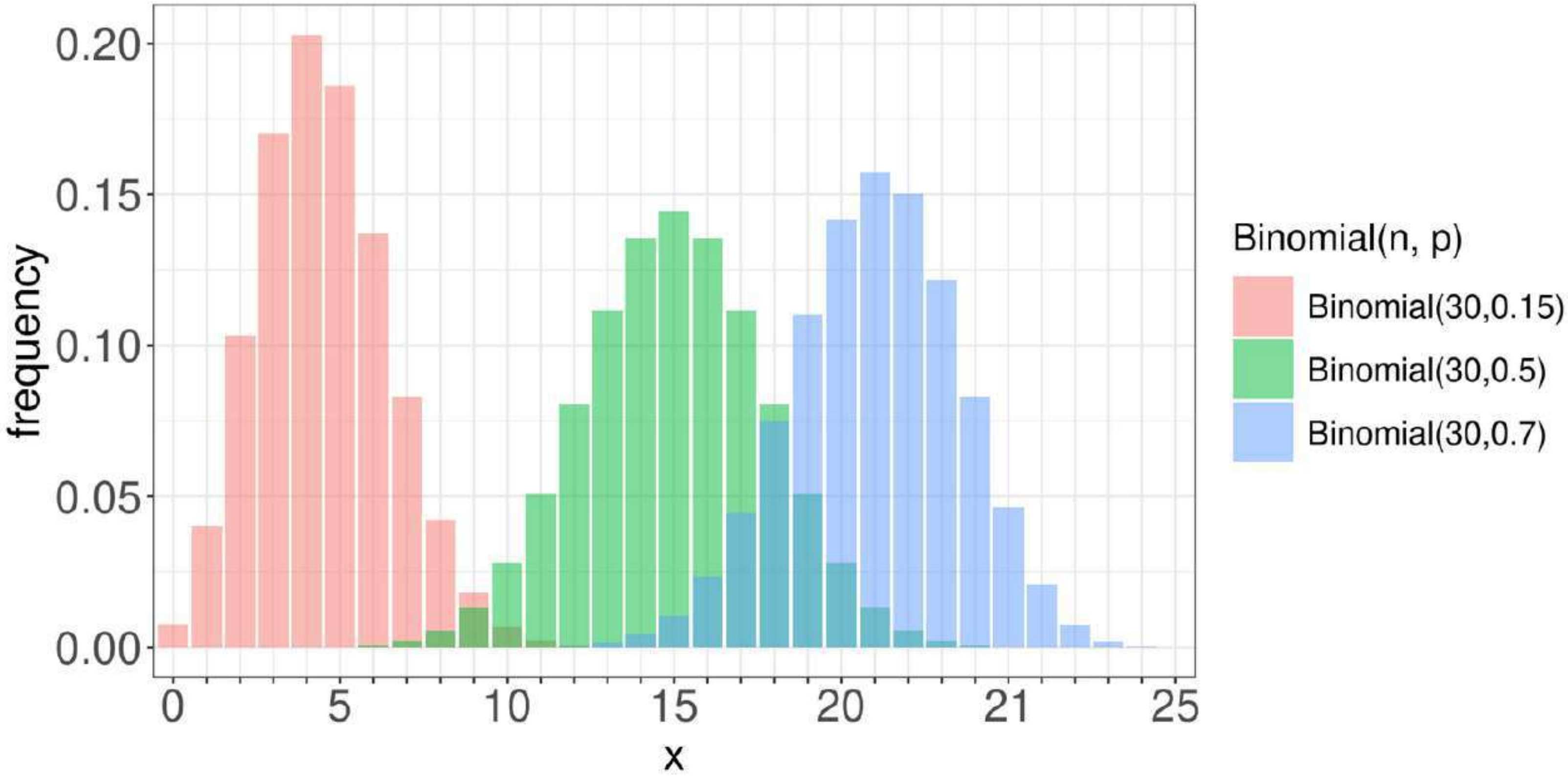
Support: $X \in (0, \infty)$ (natural); $\lambda \in (0, \infty)$ (real)



$$X \sim Binomial(n, p)$$

Presencia/ausencia

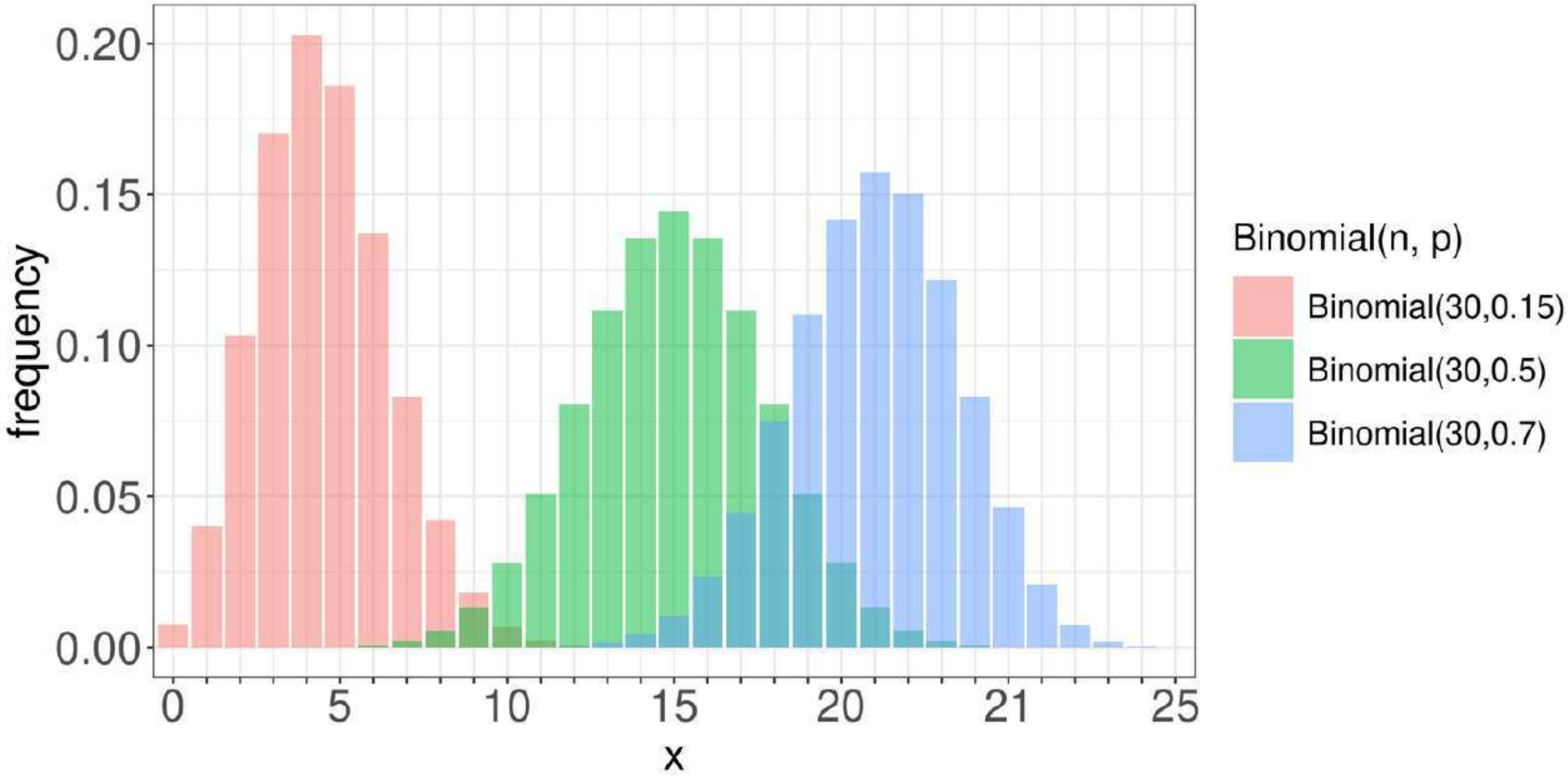
Support: $X = \{0, 1\}$;$n \in (0, \infty)$ (natural) $p \in (0, 1)$



$$X \sim Binomial(n, p)$$

Presencia/ausencia

Support: $X = \{0, 1\}$;$n \in (0, \infty)$ (natural) $p \in (0, 1)$

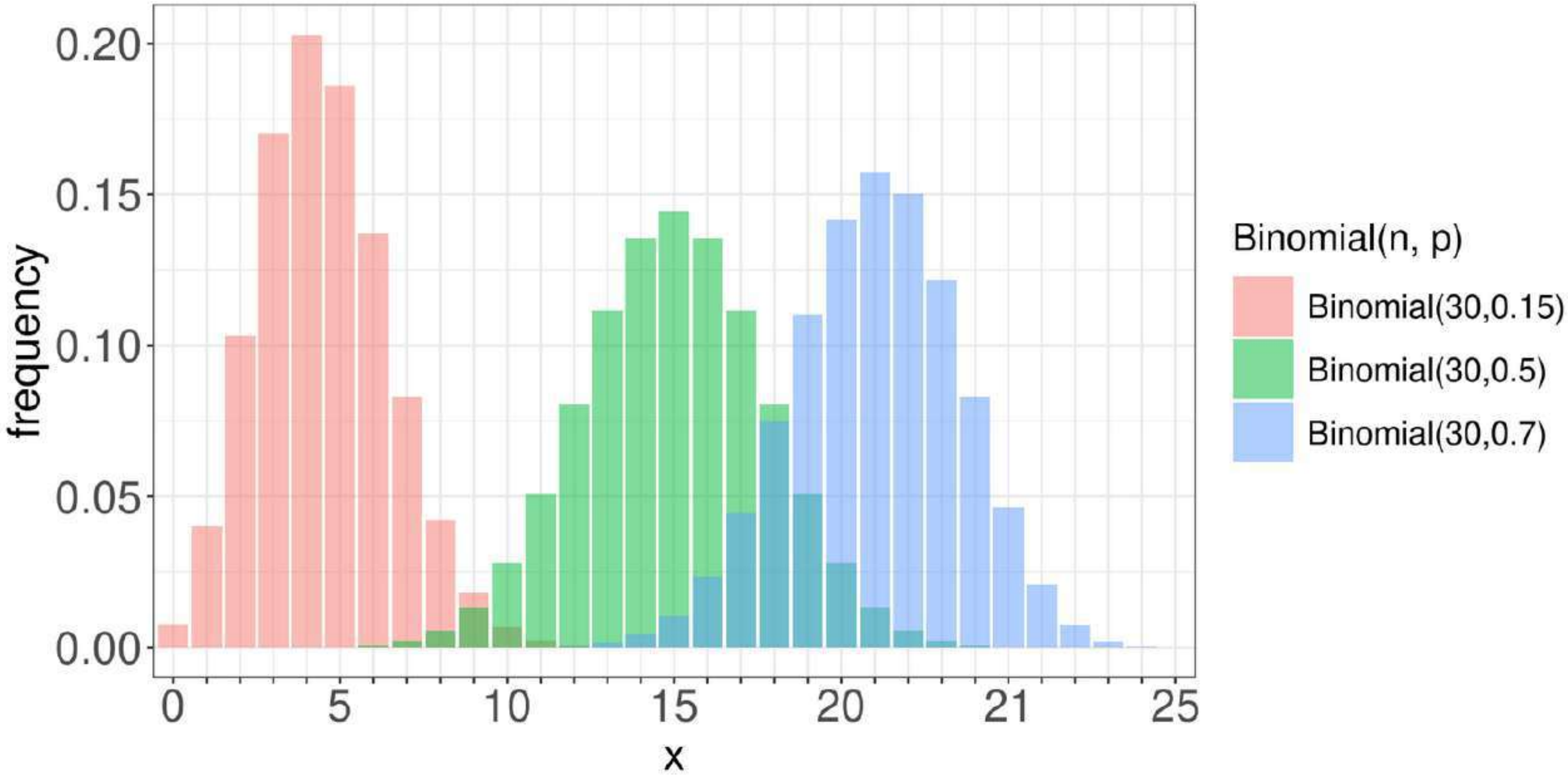


$$X \sim Binomial(n, p)$$

Presencia/ausencia

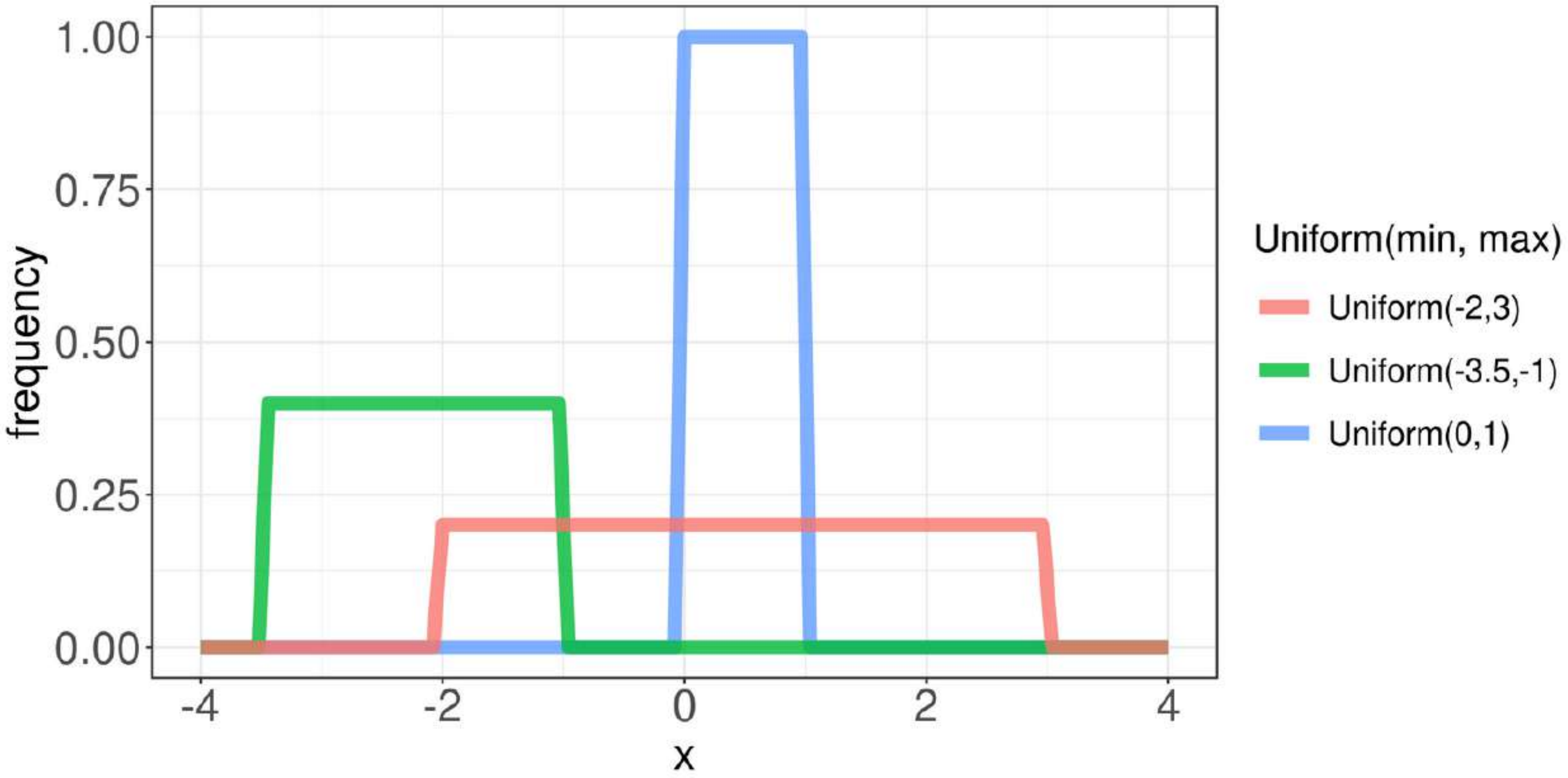
Support: $X = \{0, 1\}$;$n \in (0, \infty)$ (natural) $p \in (0, 1)$

$\boxed{\text{Bernoulli = Binomial(1,p)}}$

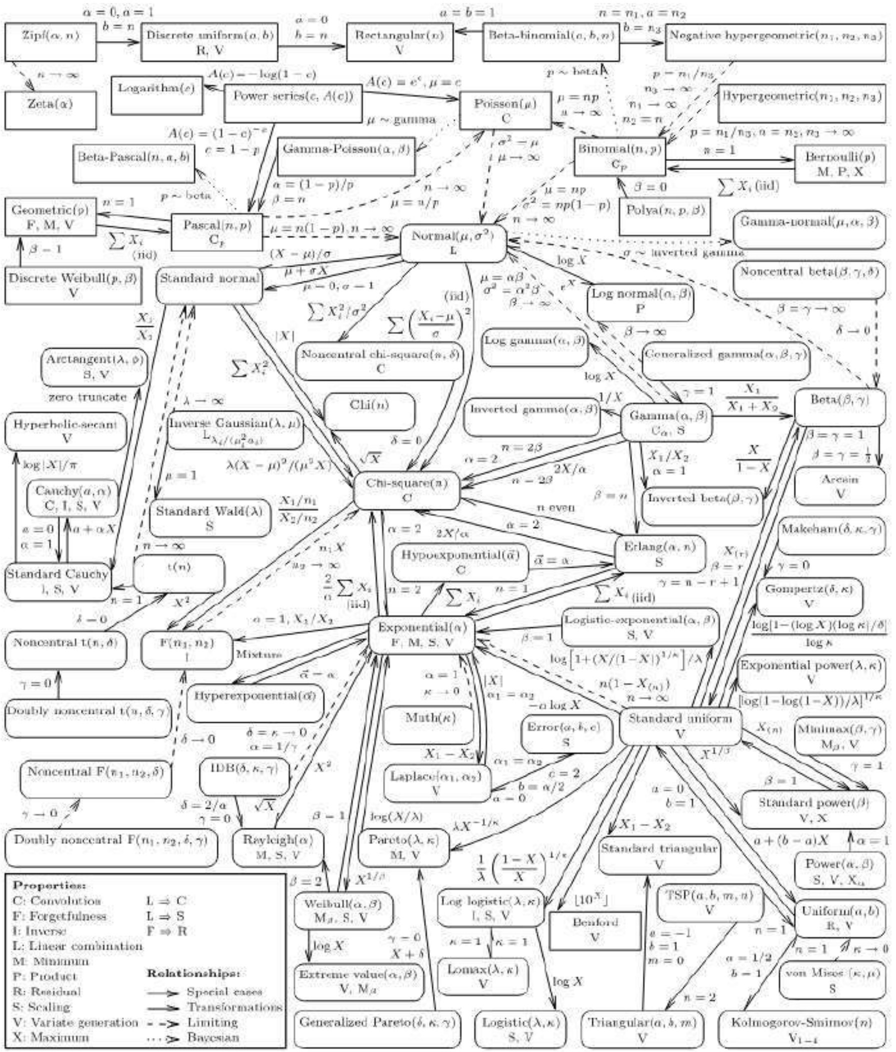


$$X \sim Uniform(min, max)$$

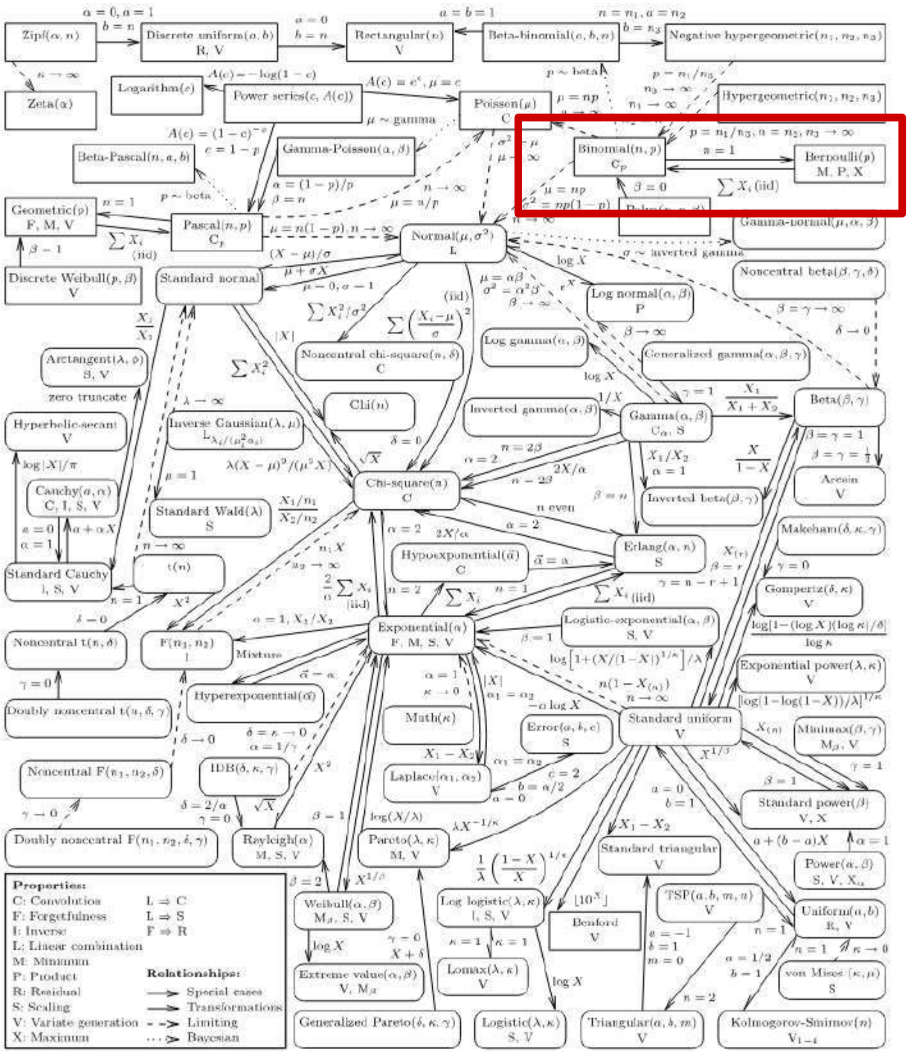
Support: $X \in (-\infty, \infty); min \in (-\infty, \infty)$ (real); $max \in (-\infty, \infty)$ (real)



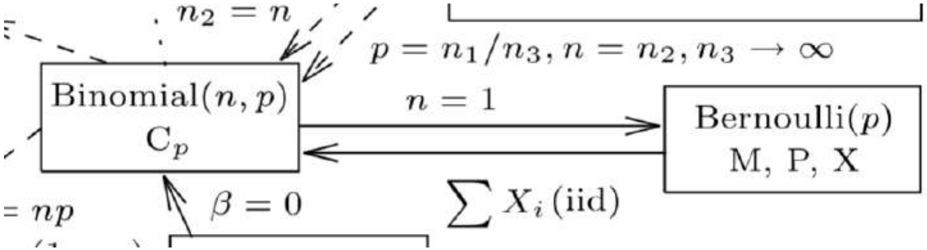
Relación entre distribuciones de probabilidad univariadas



Leemis & McQueston, American Satistician (2008)

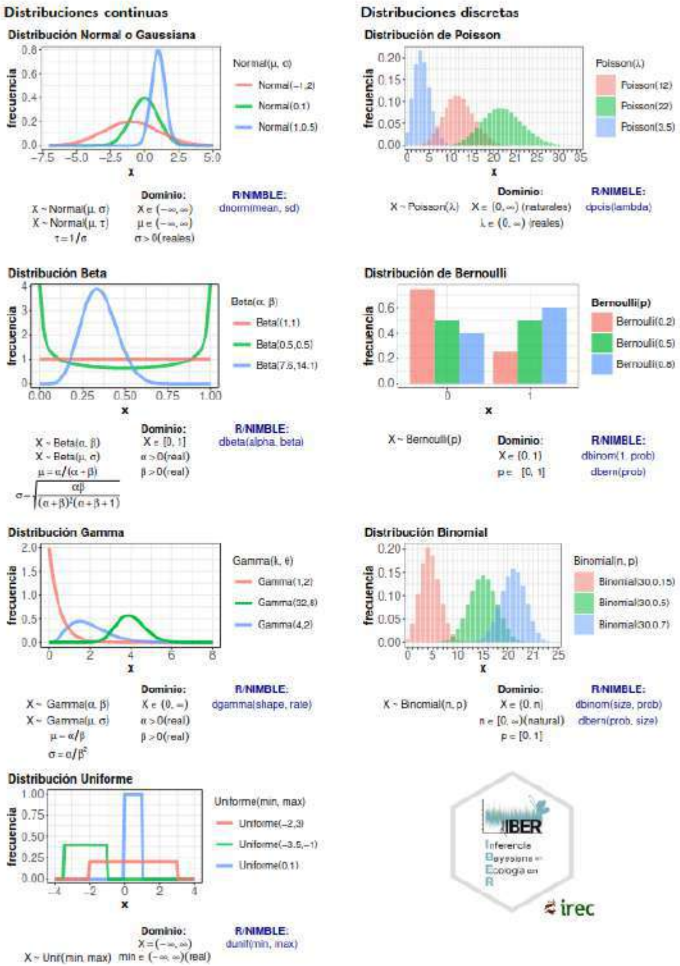


Relación entre distribuciones de probabilidad univariadas



Leemis & McQueston, American Satistician (2008)

VARIABLES Y DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

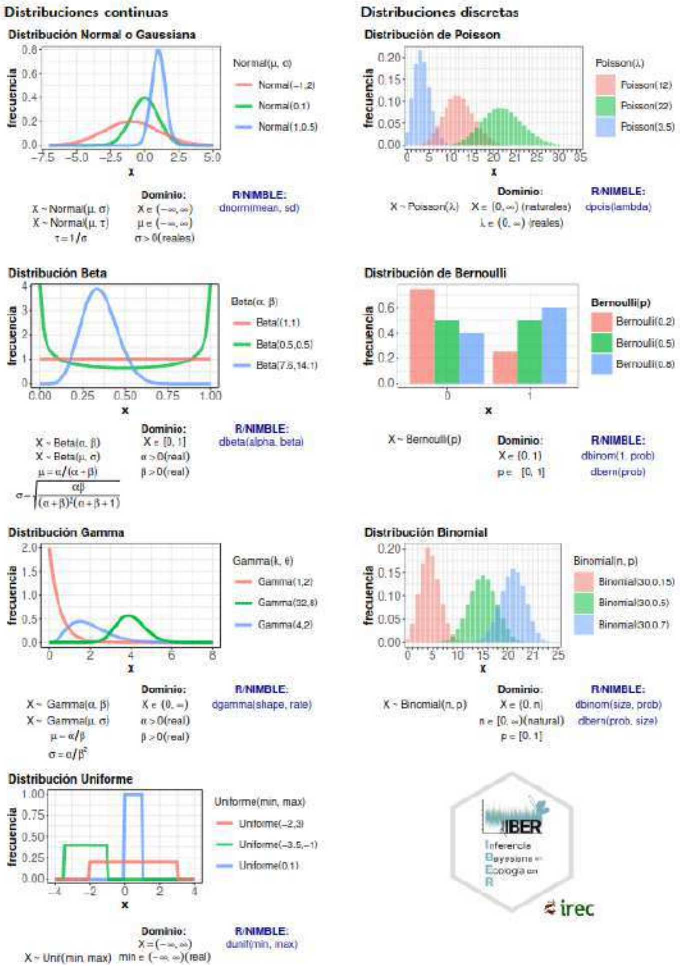


Principales funciones vínculo para GLM

Las funciones vínculo (*link functions*) sirven para enlazar los parámetros de las distribuciones de probabilidad con la ecuación general del modelo lineal, conviertendo el modelo lineal *general* en *generalizado*. Los parámetros de algunas distribuciones no pueden tomar cualquier valor, por lo que se utilizan las funciones vínculo para adaptar los resultados de la ecuación del modelo lineal a los requerimientos del parámetro. En teoría (matemáticamente) es posible emplear cualquier función vínculo con cualquier distribución siempre que nuestros datos lo permitan. Sin embargo, en la práctica se suelen utilizar unas pocas funciones con cada una de las distribuciones de probabilidad. En la tabla se muestran las más comunes para las distribuciones estudiadas. Nótese que algunas distribuciones no se muestran con su parametrización más habitual.

Distribución	Links	Fórmula	Inversa
Gaussiana(μ, σ)	**Identidad**	$\mu = \beta X$	$\mu = \beta X$
Beta(μ, σ)	**Logit**, probit, cloglog	$log(\frac{\mu}{1-\mu}) = \beta X$	$\mu = \frac{e^{(\beta X)}}{1+e^{(\beta X)}}$
Gamma(μ, σ)	**Log**	$log(\mu) = \beta X$	$\mu = e^{(\beta X)}$
Poisson(λ)	**Log**	$log(\lambda) = \beta X$	$\lambda = e^{(\beta X)}$
Bernoulli(p)	**Logit**, probit, cloglog	$log(\frac{p}{1-p}) = \beta X$	$p = \frac{e^{(\beta X)}}{1+e^{(\beta X)}}$
Binomial(n,p)	**Logit**, probit, cloglog	$log(\frac{p}{1-p}) = \beta X$	$p = \frac{e^{(\beta X)}}{1+e^{(\beta X)}}$

https://jabiologo.github.io/web/tutorials/prob_dist_links_merged.pdf



¿Con qué distribuciones de probabilidad habéis trabajado?

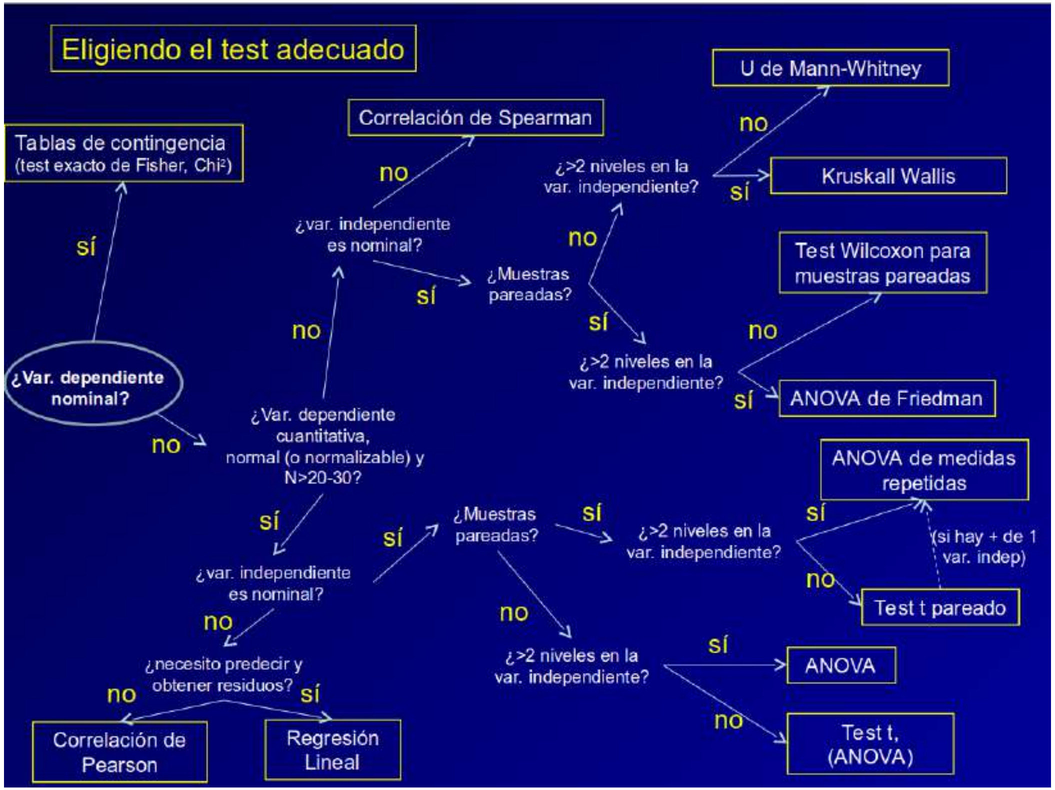
¿Qué otras distribuciones de probabilidad conocéis?

Matt Bognar website:

https://homepage.divms.uiowa.edu/~mbognar/

https://jabiologo.github.io/web/tutorials/prob_dist_links_merged.pdf

Las simulaciones en el proceso de aprendizaje



Las simulaciones en el proceso de aprendizaje

REALIDAD

Las simulaciones en el proceso de aprendizaje

REALIDAD $\xrightarrow{\text{muestra}}$ DATOS

Las simulaciones en el proceso de aprendizaje

muestra

modelo/ inferencia

REALIDAD ← - - - - - - - - - - - - - - DATOS

(parámetros de nuestra distribución)

Las simulaciones en el proceso de aprendizaje

muestra

modelo/ inferencia

REALIDAD ←------?------- DATOS

(parámetros de nuestra distribución)

Las simulaciones en el proceso de aprendizaje

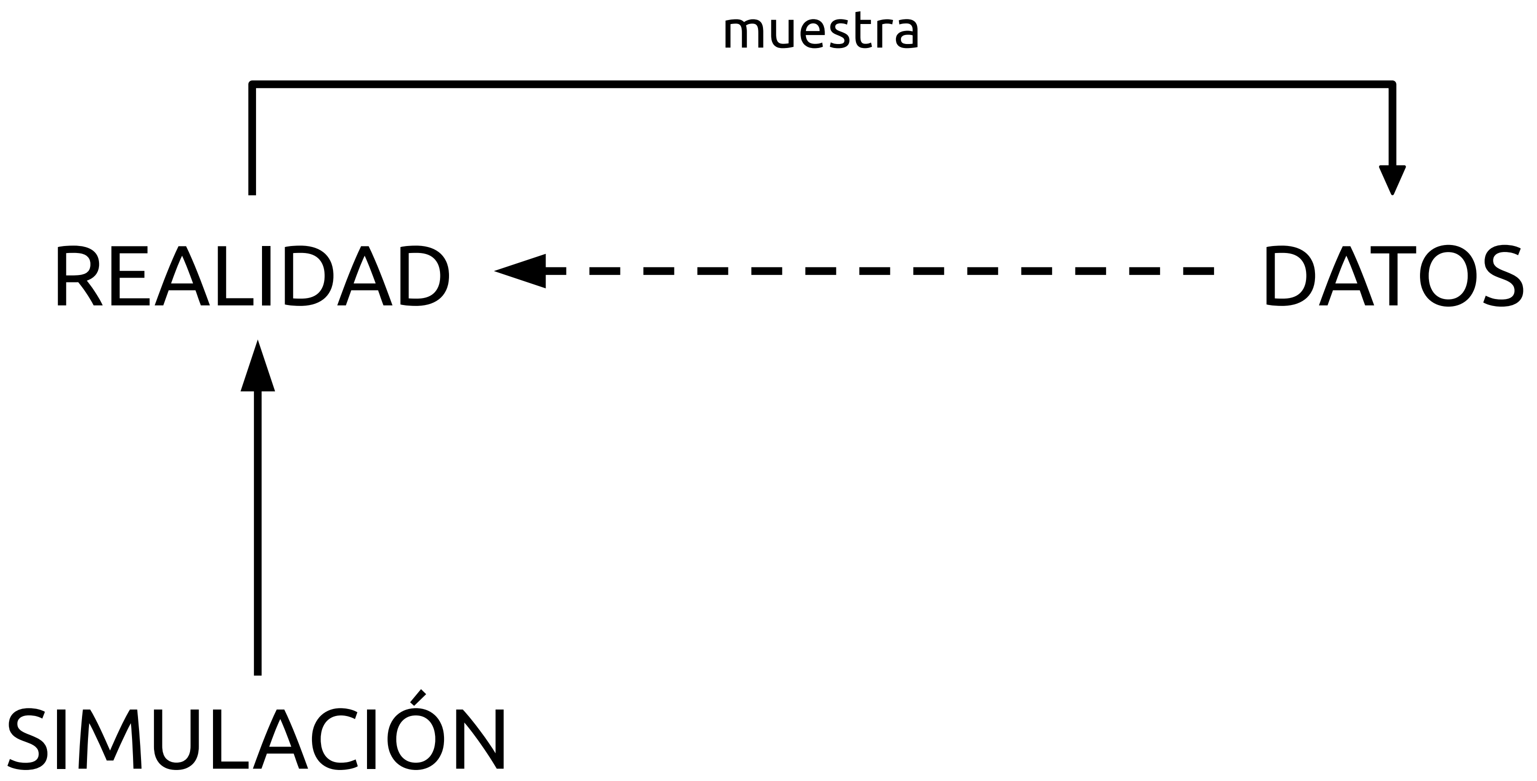
REALIDAD

↑

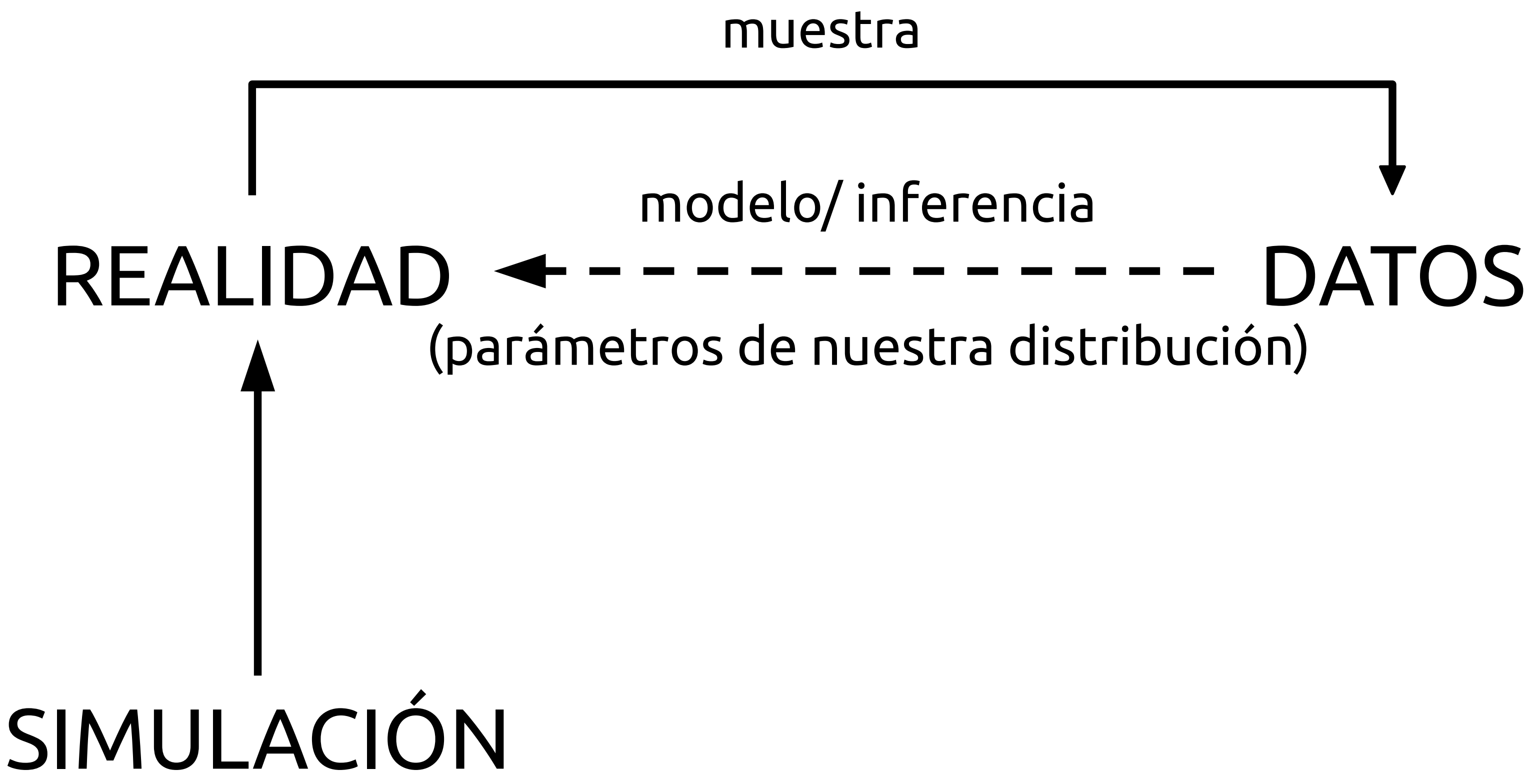
SIMULACIÓN

Las simulaciones en el proceso de aprendizaje

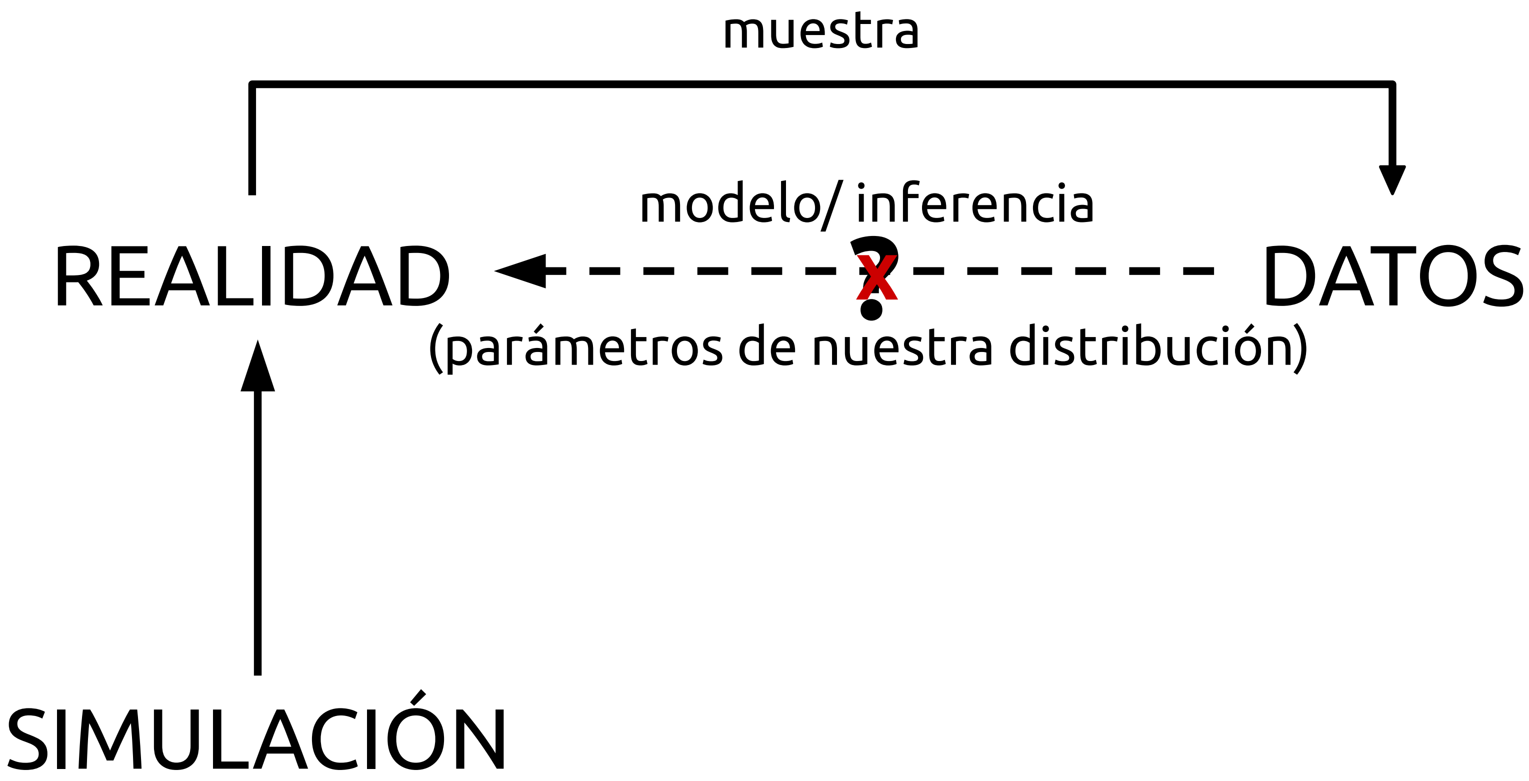
Las simulaciones en el proceso de aprendizaje



Las simulaciones en el proceso de aprendizaje



Las simulaciones en el proceso de aprendizaje



Las simulaciones en el proceso de aprendizaje

muestra

modelo/ inferencia

REALIDAD ← - - - - - - ? - - - - - - - DATOS

(parámetros de nuestra distribución)

SIMULACIÓN

- **Control** absoluto del proceso generativo de la “**realidad**”.
- **Control** absoluto del proceso de **muestreo**.

Las simulaciones en el proceso de aprendizaje

muestra

modelo/ inferencia

REALIDAD ← - - - - - ? - - - - - - DATOS

(parámetros de nuestra distribución)

SIMULACIÓN

- **Control** absoluto del proceso generativo de la "**realidad**".
- **Control** absoluto del proceso de **muestreo**.
- Permite conocer cuándo somos capaces de **recuperar la realidad a partir de los datos**.
- Permite "estresar" la situación para entender en qué condiciones nuestro modelo "**se rompe**".

Las simulaciones en el proceso de aprendizaje

muestra

modelo/ inferencia

REALIDAD ← - - - - - - ? - - - - - - - DATOS

(parámetros de nuestra distribución)

SIMULACIÓN

- **Control** absoluto del proceso generativo de la "**realidad**".
- **Control** absoluto del proceso de **muestreo**.
- Permite conocer cuándo somos capaces de **recuperar la realidad a partir de los datos**.
- Permite "estresar" la situación para entender en qué condiciones nuestro modelo "**se rompe**".
- **Reto**: ser consciente del grado de semejanza entre simulación y realidad (ser honestos, cura de humildad).

Las simulaciones en el proceso de aprendizaje

muestra

modelo/ inferencia

REALIDAD ← - - - - - ? - - - - - - DATOS

(parámetros de nuestra distribución)

SIMULACIÓN

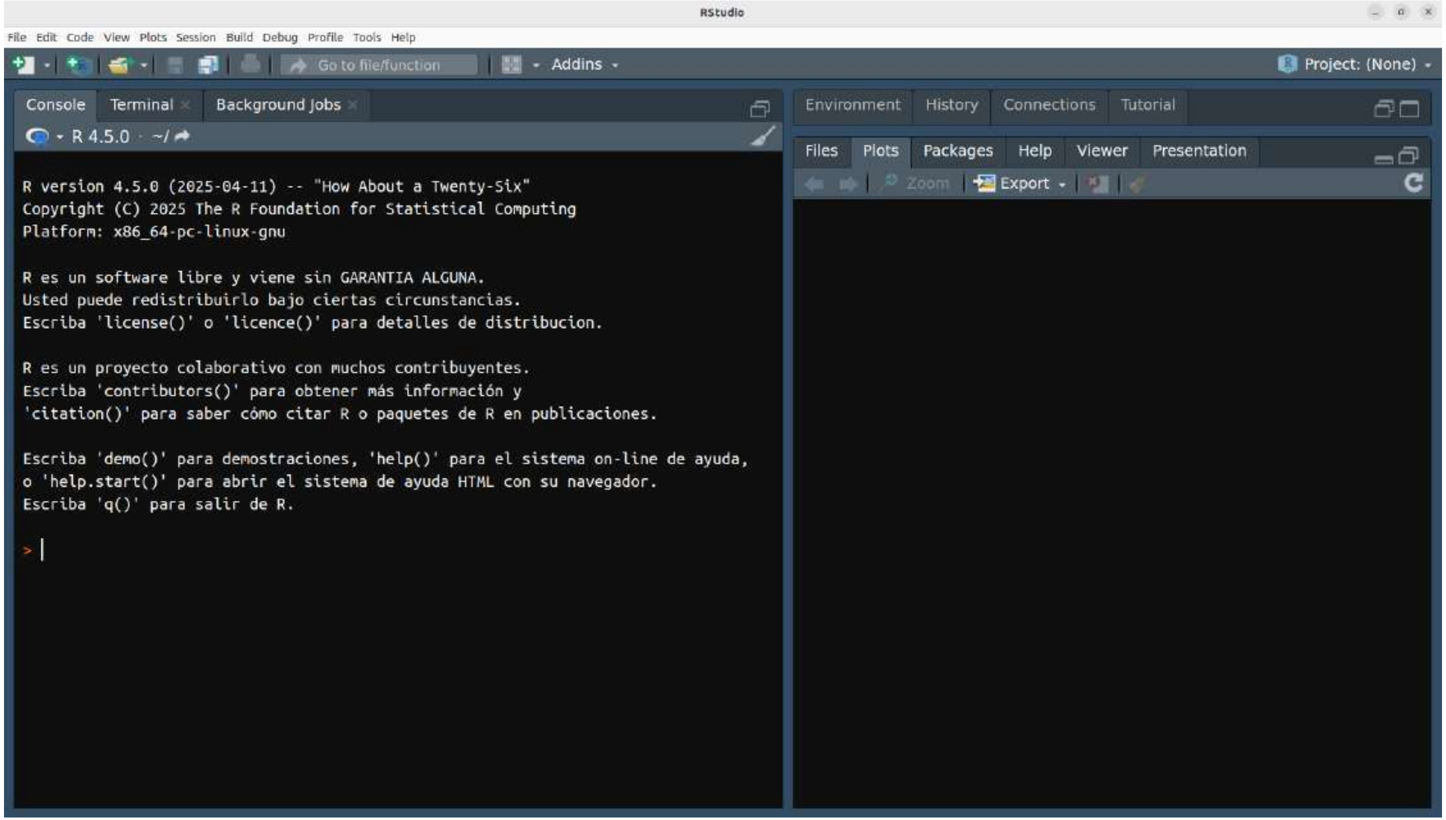
"If you can simulate it, you understand it."

— **Andrew Gelman**

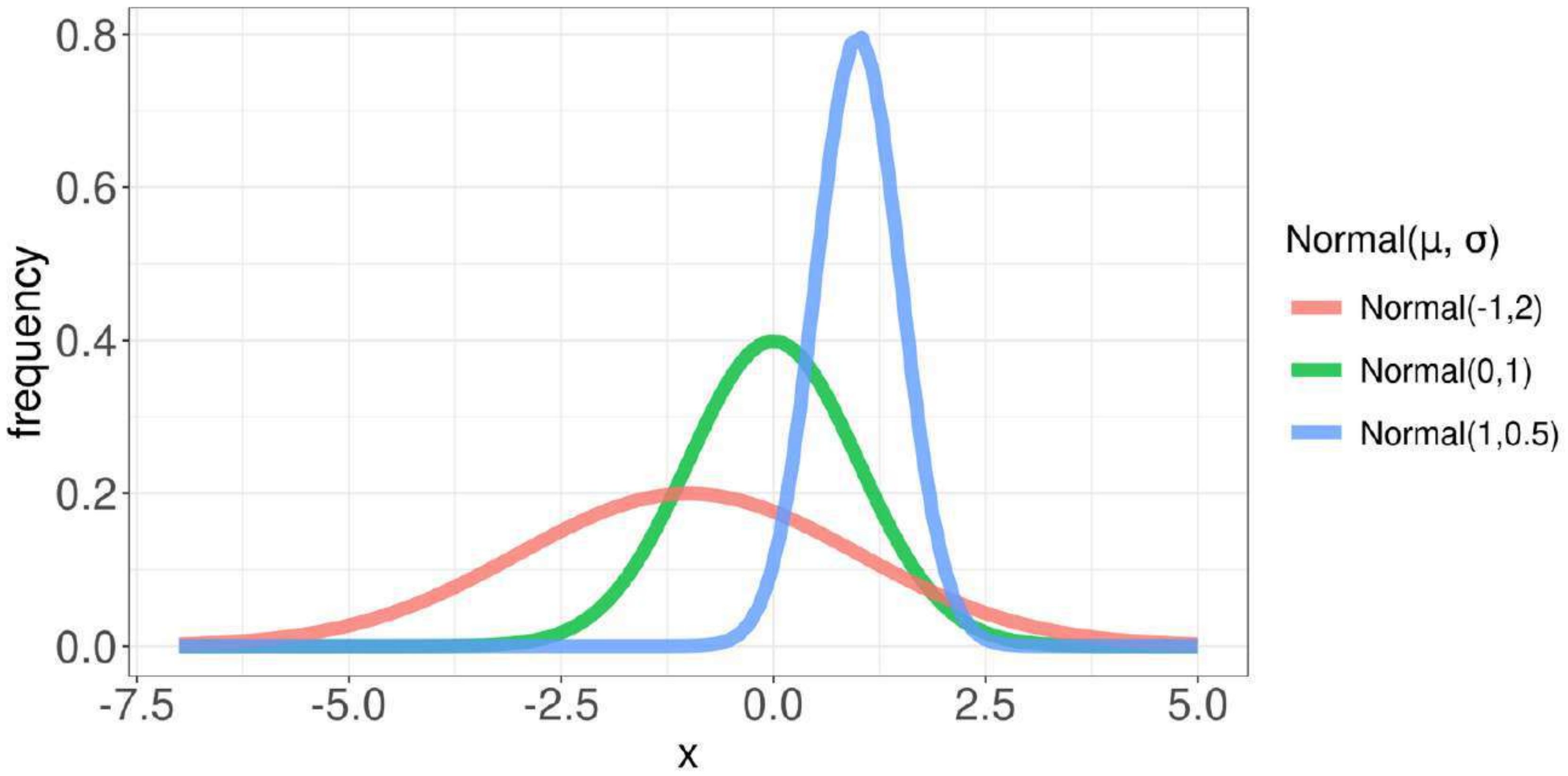
"To understand a model, you should be able to simulate data from it."

— **George Box**

LA SIMULACIÓN COMO UN LABORATORIO



Nuestros modelos...



El modelo lineal (o cuando “la media se mueve”)

$$weight(kg) \sim Normal(mean = 27, sd = 3)$$

El modelo lineal (o cuando "la media se mueve")

$$weight(kg) \sim Normal(mean = 27, sd = 3)$$

$$Y \sim Normal(\mu, \sigma)$$

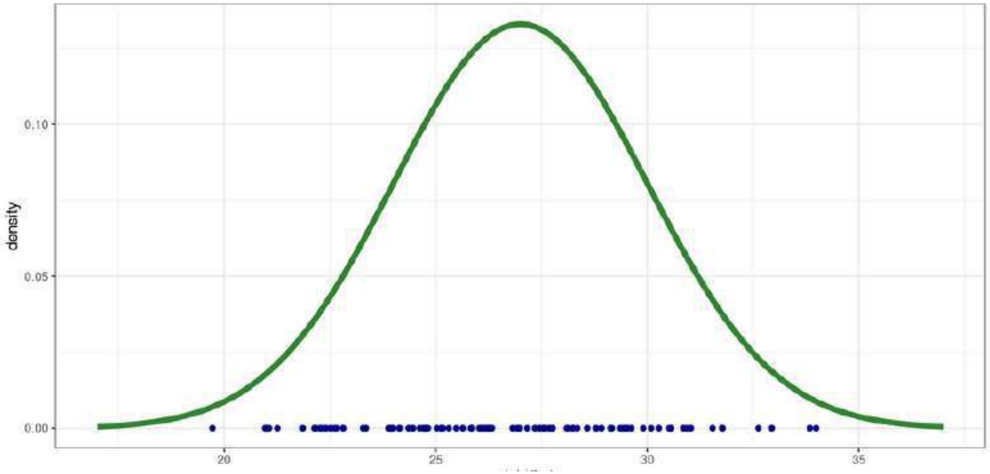
$$Y \sim Normal(27, 3)$$

El modelo lineal (o cuando "la media se mueve")

$$weight(kg) \sim Normal(mean = 27, sd = 3)$$

$$Y \sim Normal(\mu, \sigma)$$

$$Y \sim Normal(27, 3)$$



El modelo lineal (o cuando “la media se mueve”)

i	*peso*	*latitud*
1	27	40
2	35	51
3	42	59
...	...	...
n	50	65

$$weight_i \sim Normal(\mu_i, \sigma)$$

El modelo lineal (o cuando “la media se mueve”)

i	*peso*	*latitud*
1	27	40
2	35	51
3	42	59
...	...	...
n	50	65

$$weight_i \sim Normal(\mu_i, \sigma)$$

$$\mu_i = \beta_0 + \beta_1 X_i$$

El modelo lineal (o cuando "la media se mueve")

i	*peso*	*latitud*
1	27	40
2	35	51
3	42	59
...	...	...
n	50	65

$$weight_i \sim Normal(\mu_i, \sigma)$$

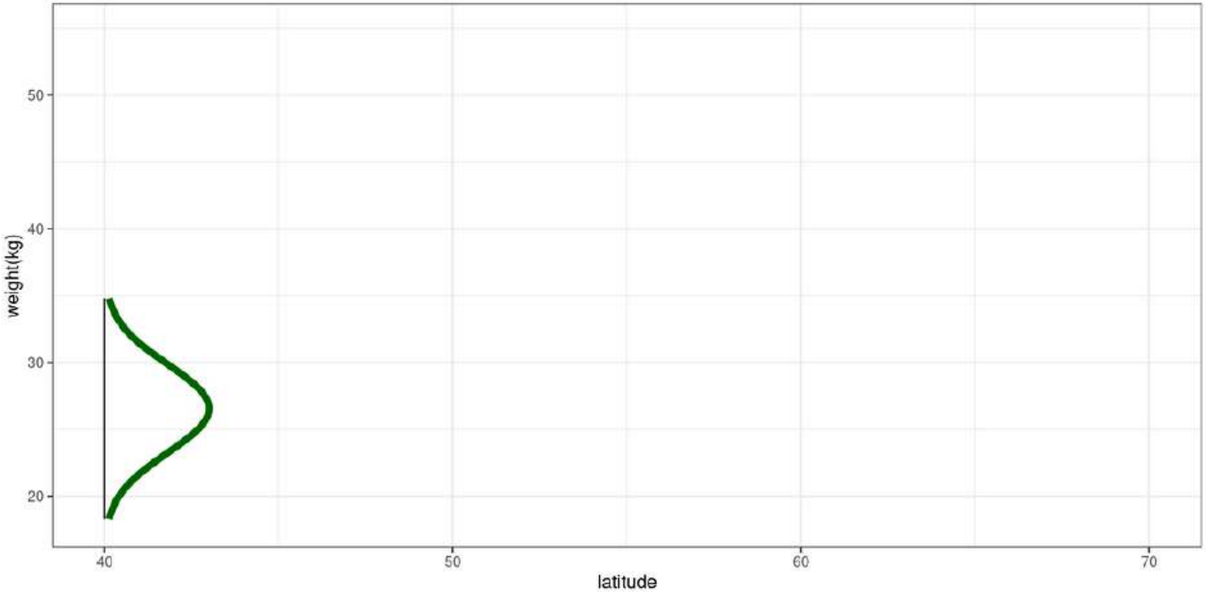
$$\mu_i = \beta_0 + \beta_1 X_i$$

$$\mu_i = \beta_0 + \beta_1 Latitude_i$$

El modelo lineal (o cuando “la media se mueve”)

$$weight_i \sim Normal(\mu_i, \sigma)$$

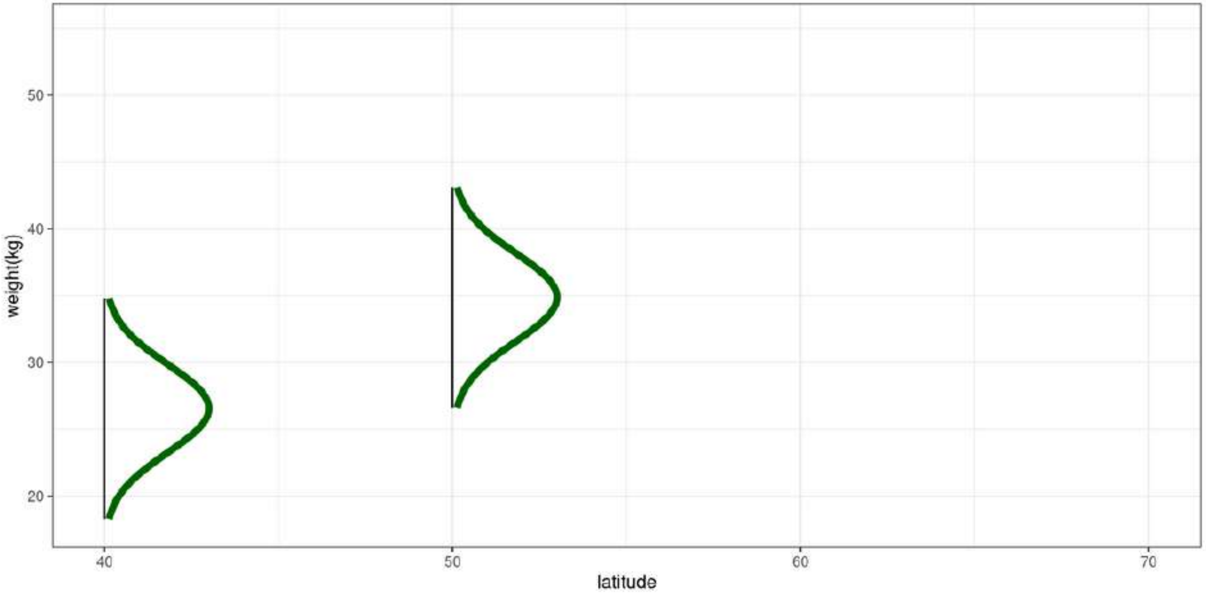
$$\mu_i = \beta_0 + \beta_1 Latitude_i$$



El modelo lineal (o cuando “la media se mueve”)

$$weight_i \sim Normal(\mu_i, \sigma)$$

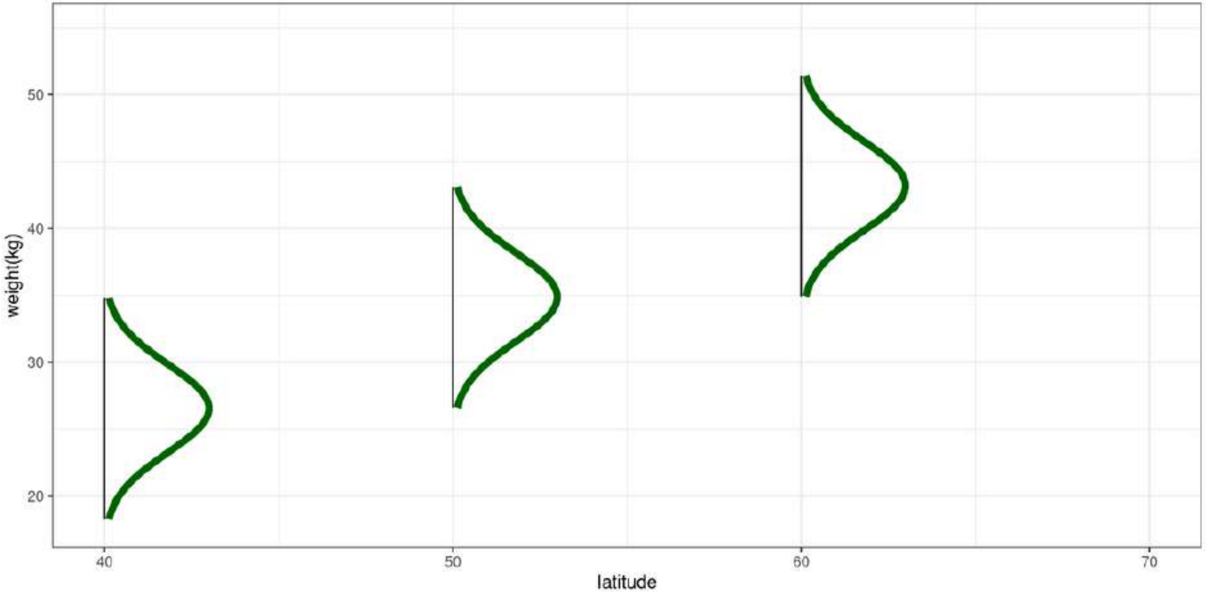
$$\mu_i = \beta_0 + \beta_1 Latitude_i$$



El modelo lineal (o cuando "la media se mueve")

$$weight_i \sim Normal(\mu_i, \sigma)$$

$$\mu_i = \beta_0 + \beta_1 Latitude_i$$



El modelo lineal (o cuando "la media se mueve")

$$weight_i \sim Normal(\mu_i, \sigma)$$

$$\mu_i = \beta_0 + \beta_1 Latitude_i$$