UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA

ANÁLISE EQUAÇÃO DE DIFUSÃO BIDIMENSIONAL

January 9, 2018

José Augusto

Contents

List of Figures

1 INTRODUÇÃO

Este documento contém o relatório dos métodos empregados na simulação númerica da equação de difusão bidimensional, apresenta os resultados obtidos e uma análise dos mesmos.

2 PROBLEMA

Essa seção apresenta o problema e a maneira como tal foi atacado para obtenção dos resultados.

2.1 Equação de difusão bidimensional

A equação é apresentada da seguinte maneira:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) + g(x, y, t) \qquad (1)$$

Tal que, $T(x, y, t) = sin(\pi x)\, sin(\pi y)\, e^{-2\alpha\pi^2 t}$, dessa maneira, aplicando as derivadadas, obtemos:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -2\alpha\pi^2\, sin(\pi x)\, sin(\pi y)\, e^{-2\alpha\pi^2 t} \qquad (2)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = -\pi^2\, sin(\pi x)\, sin(\pi y)\, e^{-2\alpha\pi^2 t} \qquad (3)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = -\pi^2\, sin(\pi x)\, sin(\pi y)\, e^{-2\alpha\pi^2 t} \qquad (4)$$

Desta maneira, substituindo (2), (3) e (4) em (1), podemos encontrar o termo fonte g(x, y, t).

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \alpha\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) = g(x, y, t)$$

$$g(x, y, t) = -2\alpha\pi^2\, sin(\pi x)\, sin(\pi y)\, e^{-2\alpha\pi^2 t} - \alpha[-\pi^2\, sin(\pi x)\, sin(\pi y)\, e^{-2\alpha\pi^2 t} - \pi^2\, sin(\pi x)\, sin(\pi y)\, e^{-2\alpha\pi^2 t}]$$

$$g(x, y, t) = -2\alpha\pi^2\, sin(\pi x)\, sin(\pi y)\, e^{-2\alpha\pi^2 t} + 2\alpha\pi^2\, sin(\pi x)\, sin(\pi y)\, e^{-2\alpha\pi^2 t}$$

$$g(x, y, t) = 0$$

2.2 Discretização

Para a discretização da equação diferencial, foi utilizado o método de Crank-Nicolson, que é baseado no método das diferenças centradas no espaço e da regra trapezoidal no tempo, com uma combinação do método de Euler implícito e explícito. Tem-se que tal método é um método de segunda ordem no tempo e no espaço. A discretização foi realizada a partir de (4), da seguinte maneira:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)$$

Aplicando o método de Crank-Nicolson em duas dimensões nos deixa com:

$$T_{j,l}^{n+1} = T_{j,l}^{n} + \frac{1}{2}s\left(\delta_x^2 T_{j,l}^{n+1} + \delta_x^2 T_{j,l}^{n} + \delta_y^{n+1} T_{j,l}^{n+1} + \delta_y^2 T_{j,l}^{n}\right)$$

Tomamos então s=$\frac{\alpha\cdot\Delta t}{2\Delta^2}$ levando em consideração que $\Delta \equiv \Delta x = \Delta y$, e temos que:

$$\delta_x^2 T_{j,l}^{n} \equiv T_{j-1,l}^{n} - 2T_{j,l}^{n} + T_{j-1,l}^{n}$$

Valendo também para $\delta_y^2 T_{j,l}^{n}$. Mas agora existe o problema das várias equações a serem solucionadas numa matriz que não é mais tridiagonal. Para resolver esse problema, ainda mantendo as ordens de erro do método de Crank-Nicolson, podemos utilizar o método da direção implícita alternada, que ainda teremos $\mathcal{O}(\Delta^2)$ e $\mathcal{O}(\Delta t^2)$, ou seja, segunda ordem no tempo e espaço. Teremos que resolver as seguintes sistemas de equações:

$$T_{j,l}^{n+1/2} = T_{j,l}^{n} + \frac{1}{2}s\left(\delta_x^2 T_{j,l}^{n+1/2} + \delta_y^2 T_{j,l}^{n}\right)$$
$$T_{j,l}^{n+1} = T_{j,l}^{n+1/2} + \frac{1}{2}s\left(\delta_x^2 T_{j,l}^{n+1/2} + \delta_y^2 T_{j,l}^{n+1}\right)$$

O que resulta em um sistema tridiagonal que será resolvido na direção de x e depois na direção de y.

Para obtenção da solução do problema foram definidas as seguintes condições:

$$\begin{aligned} T(0, y, t) &= 0, \quad \forall t > 0 \text{ e } \forall y > 0 \\ T(L, y, t) &= 0, \quad \forall t > 0 \text{ e } \forall y > 0 \\ T(x, 0, t) &= 0, \quad \forall t > 0 \text{ e } \forall x > 0 \\ T(x, L, t) &= 0, \quad \forall t > 0 \text{ e } \forall x > 0 \\ T(x, y, 0) &= sin(\pi x)\, sin(\pi y), \quad \forall x \in [0, 1] \text{ e } \forall y \in [0, 1] \end{aligned}$$

O domínio escolhido é contido no intervalo $[0, \leq x \leq 1]$ e $[0, \leq y \leq 1]$, ou seja, se trata de uma malha quadrada.

2.3 Implementação

A implementação do método foi realizada utilizando a linguagem Fortran. Para facilitar a simulação do método, alguns parâmetros foram deixados como constantes, sendo eles $\alpha = 1$ e também $\Delta t = 0.0001$ e foram feitos 100 passos no tempo.

Como se trata de um método implícito, é necessário realizar a resolução de um sistema de equações a cada passo tempo, uma vez para cada direção de cada dimensão, como em cada direção essa sistema será tridiagonal, para ajudar na performance, foi utilizado o algoritmo de Thomas, que tem um complexidade de $\mathcal{O}(n)$.

Nessa implementação, para o calculo do erro foi utilizada o norma L_∞, como se trata de uma norma que captura o maior erro, foi implementada da seguinte maneira. A cada passo de tempo executado pelo programa, é realizado a captura do maior erro para o passo, seguindo a seguinte maneira:

$$
\begin{gathered}
an \leftarrow \text{matrix solução analítica} \\
nu \leftarrow \text{matrix solução numérica} \\
l \leftarrow l = \{x_{i,j} \,|\, x = \sqrt[2]{(an_{i,j} - nu_{i,j})^2}\} \\
\epsilon \leftarrow max(l)
\end{gathered}
$$

Retornamos ϵ e adicionamos em um vetor de erros, em que cada posição contém o maior erro cometido a cada passo de tempo, assim, quando o programa executa todos os passos de tempo, retiramos o maior valor desse vetor de erros, dessa forma é possível capturar o error de maior magnitude que ocorreu durante a execução do método levando em consideração todos os passos de tempo.

3 Resultados

Essa seção apresenta os resultados que foram obtidos a partir da implementação explicada na seção anterior.

3.1 Resultados

Para analisar o valor do erro em relação a solução analítica, foram executadas diversas execuções em sequência. Para esse teste variamos o valor de Δx, dobrando o número de nodos na malha a cada execução, ou seja, diminuindo o valor de Δx, com isso podemos analisar o que acontece com o erro entre a solução analítica e numérica. Como Crank-Nicolson é um método de segunda ordem, tanto em tempo como em espaço, o resultado esperado seria de que a cada execução, com o número de nodos da malha dobrando, temos que o erro diminuiria numa razão de 4. Dessa execução, os resultados obtidos foram:

Número de nodos	ϵ	Razão
2^2	8.1340970029509796E-003	–
2^3	2.0575119873840197E-003	3.9533655467509115
2^4	5.1587161073007870E-004	3.9884187161843627
2^5	1.2905213280334227E-004	3.9973892683834698
2^6	3.2259124661537797E-005	4.000484642945372
2^7	8.0553631820468041E-006	4.004676627546048
2^8	2.0040783927921524E-006	4.019485071551412
2^9	4.9123535339479218E-007	4.079670526444237
2^{10}	1.1302353553066524E-007	4.346310271470065

3.2 Análise dos resultados

Podemos notar que a razão é o valor esperado, pois como citado anteriormente, o método de Crank-Nicolson é de segunda ordem tanto em espaço e tempo, e foi obtida uma redução do erro por uma razão de 4. Inicialmente, com a malha contendo 4 células, valores um pouco menores, mas assim que o número de células da malha começa a aumentar, a razão logo converge para 4.

Visualmente, o gráfico gerado a partir dos erros foi o seguinte:

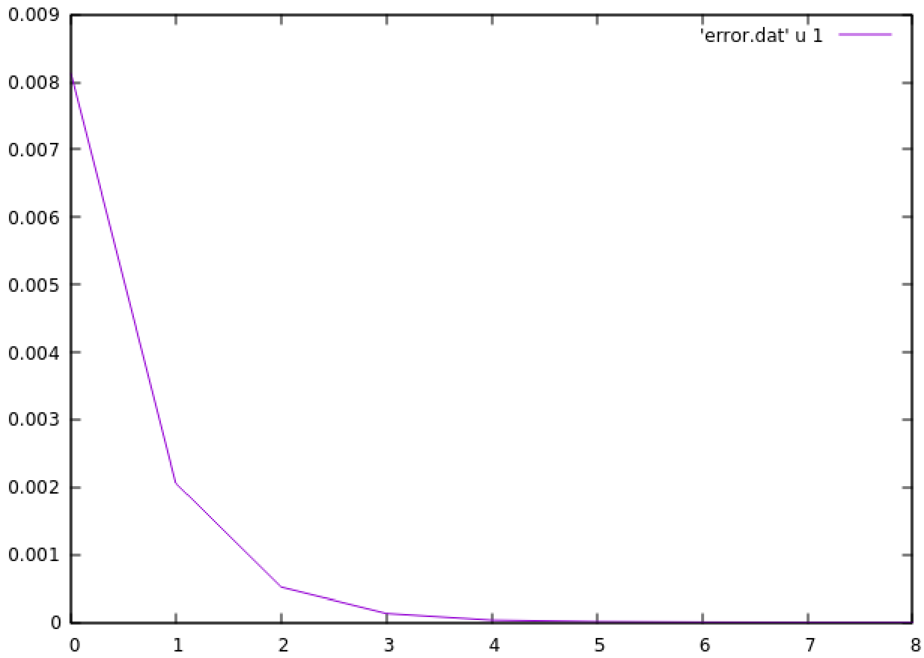

Figure 1: Decaimento do erro pelo aumento do número de nodos

Tanto pelo valores, como pelo gráfico, podemos notar que com um aumento do número de nodos na malha, a solução numérica se aproxima mais e mais da solução analítica.

Para quesito de visualização, esses foram os gráficos gerados para solução analítica e númerica:

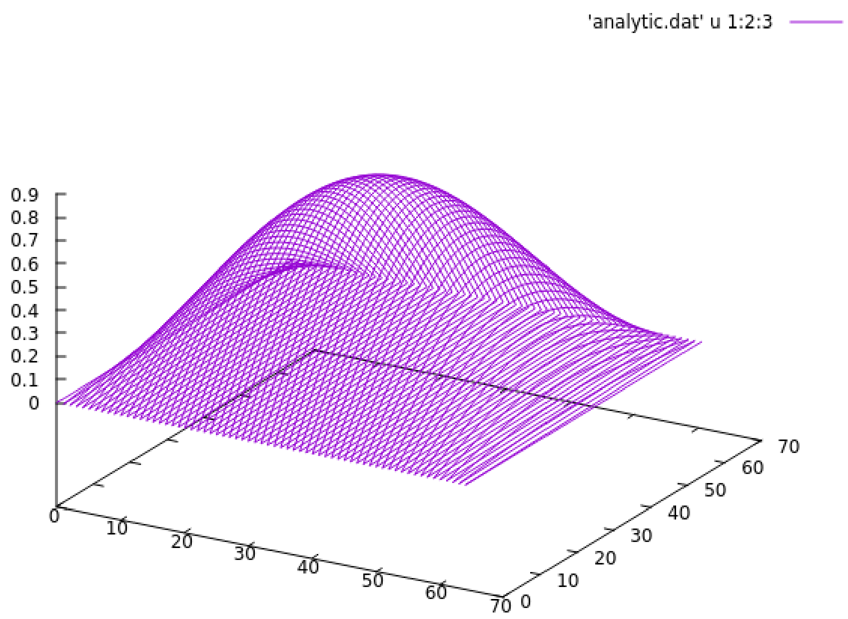

Figure 2: Solução analítica.

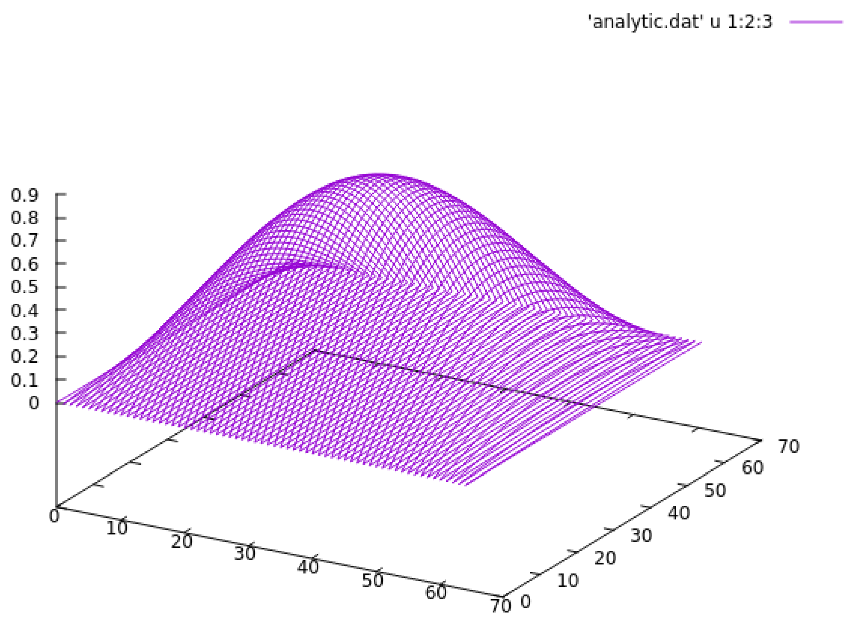

Figure 3: Solução numérica.

Ambas as soluções do gráfico, foram feitas com uma malha possuindo 64 nodos, após serem realizados os 100 passos de tempos da simulação.

4 Conclusão

Inicialmente um problema da equação de difusão bidimensional, representada por uma equação diferencial, se utilizando do método de Crank-Nicolson e do método da direção implícita alternada, para resolver cada dimensão por vez, quando realizada a comparação dos resultados obtidos pelo método númerico com os resultados da solução analítica, é possível comprovar a relação de Δt, Δx e o erro.

Nesse aspecto, é possível encontrar valores ótimos para manter o sistema estável, mesmo Crank-Nicolson sendo um método incondicionalmente estável, ainda podem existir fatores que criam oscilações na resolução, o que pode se propagar com os passos tempos.

Com o nosso experimento realizado, foi possível comprovarmos que o erro do método é de segunda ordem, e que ao dobrar o número de nodos reduzimos o nosso erro por 4.