IMT2112
Tarea 3

Elwin van 't Wout

October 18, 2021

Introducción

Muchas de las ecuaciones diferenciales parciales solo se puede resolver con métodos numéricos. El método de diferencias finitas es uno de los métodos mas populares para aproximar la solución de una ecuación diferencial. En este tarea consideramos el problema de Laplace en una cuadra, dado por

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\alpha \nabla u) + u = f, & 0 < x, y < 1; \\ u = 0, & x = 0, x = 1, y = 0, \text{ or } y = 1; \end{cases} \tag{1}$$

para la función incognita $u = u(x, y)$ y funciones conocidas $f = f(x, y)$ y $\alpha = \alpha(x, y)$ distintas a cero. En este tarea,

$$\alpha(x, y) = x(x-1)y(y-1) + 1.$$

Usamos una malla rectangular con nodos dados por $(x_i, y_j) = (ih_x, jh_y)$ en donde h_x y h_y son los pasos de la malla en la dirección x e y. La versión estandar del método de diferencias finitas está dado por el *stencil*

$$\begin{bmatrix} & -\frac{\alpha_{i,j+\frac{1}{2}}}{h_y^2} & \\ -\frac{\alpha_{i-\frac{1}{2},j}}{h_x^2} & \frac{\alpha_{i-\frac{1}{2},j}+\alpha_{i+\frac{1}{2},j}}{h_x^2} + \frac{\alpha_{i,j-\frac{1}{2}}+\alpha_{i,j+\frac{1}{2}}}{h_y^2} + 1 & -\frac{\alpha_{i+\frac{1}{2},j}}{h_x^2} \\ & -\frac{\alpha_{i,j-\frac{1}{2}}}{h_y^2} & \end{bmatrix}. \tag{2}$$

La variable $\alpha(x, y)$ se evalúa en los puntos del medio, por ejemplo $\alpha_{i,j+\frac{1}{2}} = \alpha(x_i, y_{j+\frac{1}{2}}) = \alpha(ih_x, (j + \frac{1}{2})h_y)$.
El sistema lineal resultante se puede escribir como

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

en lo cual A es simétrica y positiva definita si $\alpha > 0$. Por lo tanto, se puede usar gradientes conjugados para resolver el sistema lineal.

Tareas

Esta tarea contempla la implementación del método de gradientes conjugados (CG) en paralelo con la biblioteca MPI.

1. Expliquen por qué se puede usar el método de CG para resolver el sistema lineal.
   Sugerencia: se puede usar el teorema de Gershgorin para demostrar que la matriz es positiva definita.

2. En esta tarea, tienen que usar el almacenamiento por *stencils* para la matriz A.

   (a) Pueden particionar el dominio en bloques horizontales, bloques verticales o bloques rectangulares según tu preferencia.

   (b) Expliquen como se puede almacenar las variables (matrices, vectores y números) en una implementación de MPI. En tu respuesta, incluye los tamaños de cada variable.

3. Implementen el algoritmo de CG para este sistema lineal.

   (a) El algoritmo está dado en Figura 5.9 del libro de Eijkhout, en lo cual $K = I$ la identidad.

   (b) Se sugiere comenzar con la implementación de las operaciónes básicas del algoritmo, es decir, suma de vectores, producto punto y multiplicación matriz-vector.

   (c) Tienen que verificar la convergencia del método, es decir, la norma del residuo debe disminuirse.

   (d) Se puede eligir el vector f. Una opción es un modelo simple de un fuente puntual: el vector es cero salvo en un nodo de la malla en lo cual tiene valor uno.

   (e) En el informe, expliquen como han implementado la comunicación entre los procesos.

4. El código debe funcionar para cualquier número de nodos en la malla y cualquier número de procesos en MPI.

5. El código debe funcionar en el clúster Mazinger. En el informe, incluye una grabación de pantalla del *output* de tu código en lo cual debe ser visible cuales nodos estan usando, es decir hagan un *print* de los nombres de los procesadores usados.

Evaluación

Entreguen un archivo comprimido con el código de C++ y el informe (en pdf) a través de Canvas.

Los reglamientos del curso se puede encontrar en Canvas. Se destaca que las tareas deben ser hechas de forma individual.