

Laboratorio de Procesado Digital de Señal - 3º GITT

Informe Práctica 4: filtros digitales IIR

Alumno 1:	Jaime Arana Cardelús
Alumno 2:	Guillermo Pérez Fernández
ID Grupo:	3ª_LE2_G6
Calificación:	
Comentarios:	

Análisis de filtros

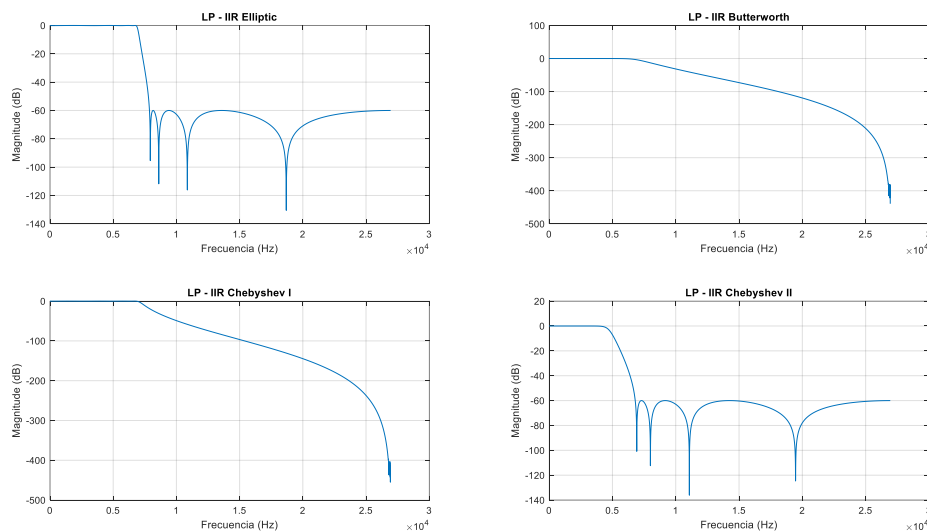
Módulo y fase

En este apartado se va a analizar el módulo y la fase de los filtros diseñados, atendiendo a las diferencias observadas entre ellos, fruto del diseño.

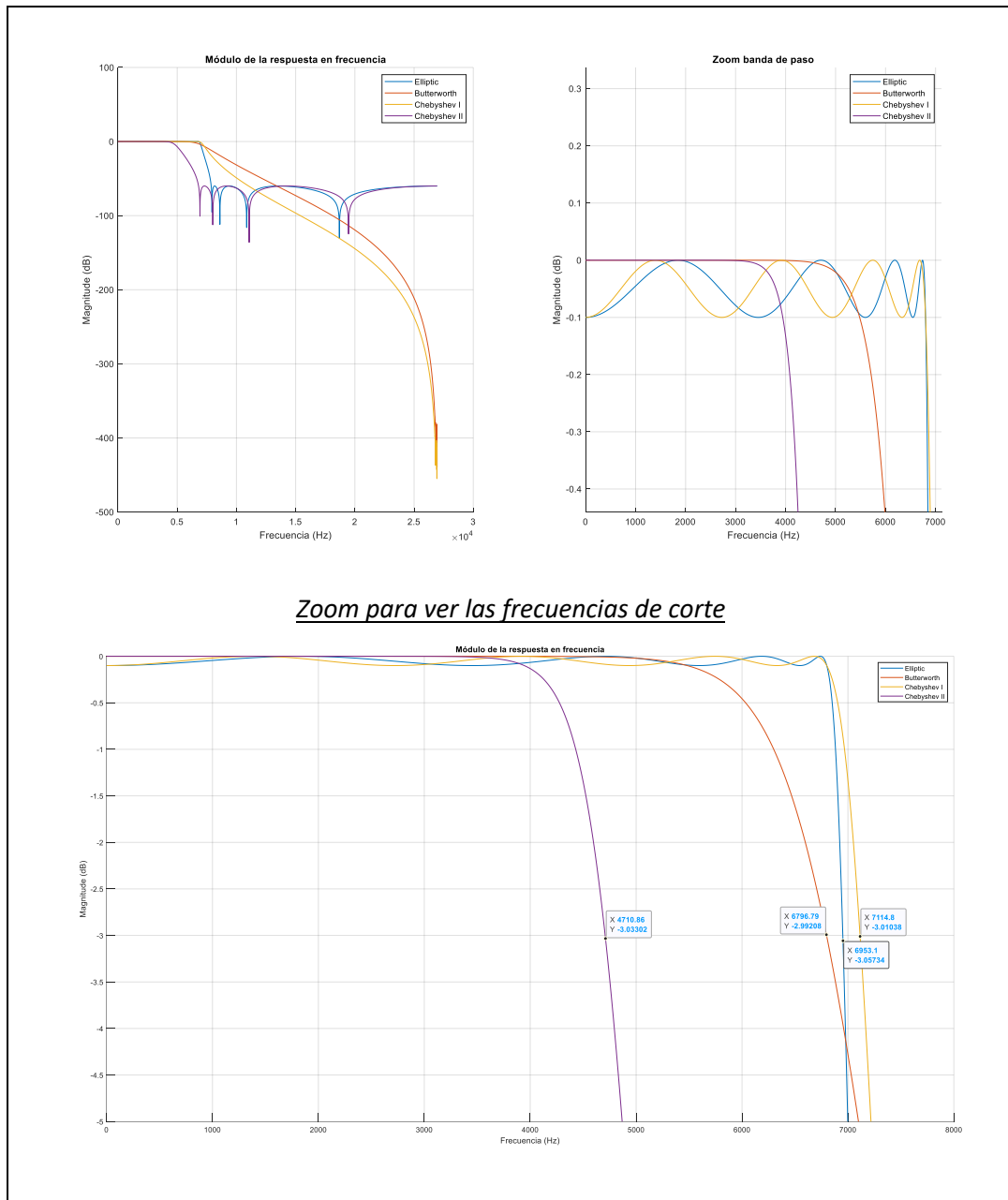
Realice los siguientes apartados, a partir de los resultados del bloque anterior:

- a) Analice las diferencias en la ganancia, en función de la frecuencia, de los cuatro filtros anteriores. Exponga y justifique gráficamente las conclusiones extraídas. Para ello deberá obtener la respuesta en frecuencia de cada filtro (utilizando la función `freqz` con, al menos, 5.000 puntos) y representarla en decibelios vs. Hertzios.

En este apartado se va a analizar el módulo de la respuesta en frecuencia de los filtros diseñados.

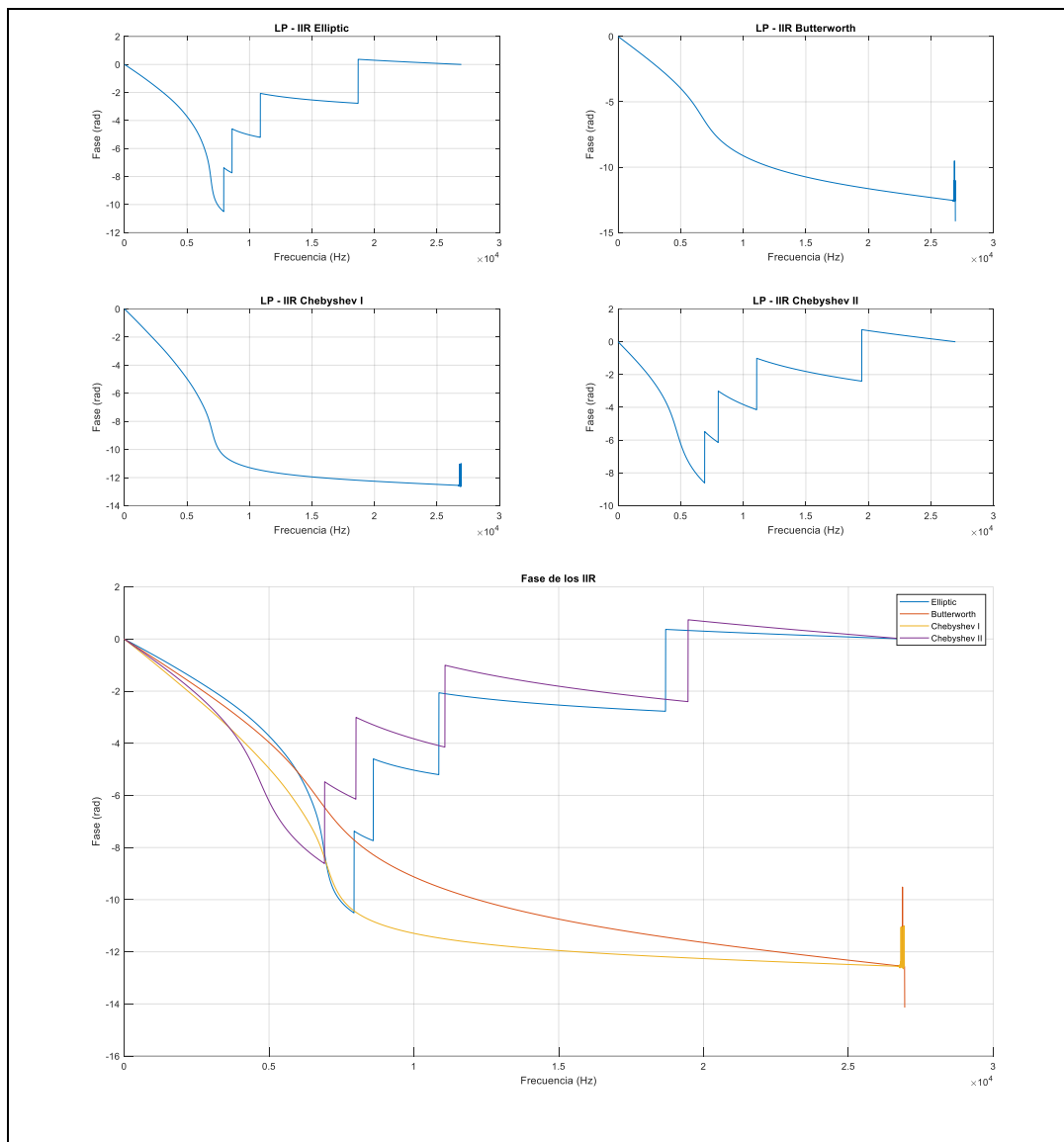


- **Elliptic**
 $f_c = 7 \text{ kHz}$
Tiene en la banda de paso y la banda eliminada un rizado constante
- **Butterworth**
 $f_c = 6.8 \text{ kHz}$
Banda de paso y banda eliminada de progresión monótona sin rizado
- **Chebyshev I**
 $f_c = 7.1 \text{ kHz}$
Banda de paso con rizado constante, banda eliminada de progresión monótona sin rizado
Mayor verticalidad que Butterworth o Elliptic
- **Chebyshev II**
 $f_c = 4.7 \text{ kHz}$
Banda de paso de progresión monótona, banda eliminada con rizado constante
Mayor verticalidad que Elliptic o Butterworth



- b) Analice las diferencias en la fase, en función de la frecuencia, de los cuatro filtros anteriores. Exponga y justifique gráficamente las conclusiones extraídas del análisis. Utilice la función `unwrap` para eliminar saltos en la fase.

En este apartado se va a analizar la fase de la respuesta en frecuencia. Como se puede ver en las gráficas, la pendiente cambia con respecto a la frecuencia, lo que significa que los filtros van a introducir un retardo de grupo. Este retardo de grupo va a depender de la frecuencia de la señal de entrada. Esto último es una diferencia con respecto a los filtros FIR simétricos vistos anteriormente, ya que estos generaban un retardo de grupo que no dependía de la frecuencia de entrada.

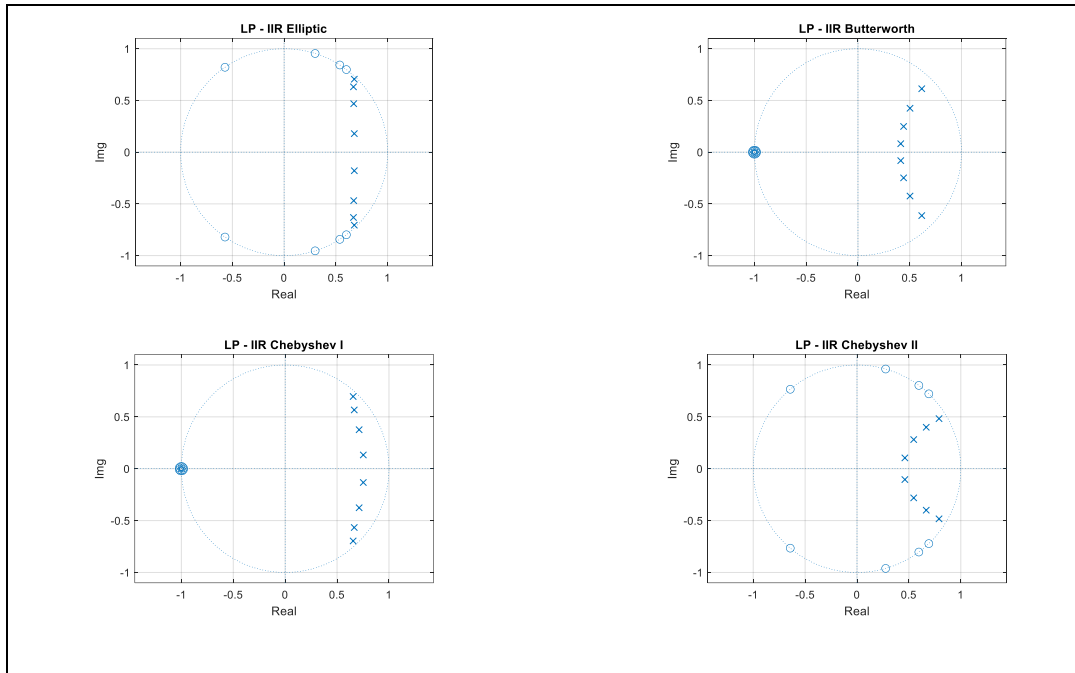


Polos y ceros

En este apartado se van a analizar los filtros IIR a partir de su diagrama de polos y ceros.

A partir de los filtros diseñados anteriormente, realice los siguientes apartados:

- Represente, en ejes independientes dentro de una misma figura, el diagrama de polos y ceros de los filtros IIR diseñados en el primer bloque de apartados. Para evitar errores en la representación, emplee la función `zplane` con las raíces de los polinomios que forman los coeficientes `a` y `b` de cada uno de los filtros.



b) ¿Son estables los filtros? ¿Por qué?

Que un filtro sea estable significa que cumple la condición:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$$

Esto significa que, si el filtro es estable, para una entrada acotada, la salida también estará acotada. Otra forma de ver esta condición es comprobando la existencia de la TFTD. Si la RoC contiene a la circunferencia de radio unidad, significa que la TFTD existe y por lo tanto, es estable.

c) Justifique, a partir del diagrama de polos y ceros, por qué son filtros paso bajo.

De las clases de teoría sabemos que los polos son aquellos valores de z o frecuencias en las cuales el valor del $H(z)$ se hace infinito.

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{\prod_0^M |e^{j\omega} - c_k|}{\prod_0^N |e^{j\omega} - p_k|}$$

De forma matemática se puede explicar de la siguiente forma. Como el filtro IIR está definido de como un cociente entre los ceros (numerador) y polos (denominador), podemos concluir que los polos van a afectar a la banda de paso del filtro. Consecuentemente viendo el diagrama de polos y ceros se aprecia que los polos se encuentran a las frecuencias angulares más bajas. Esto significa que se trata de un filtro

paso bajo ya que la banda de paso se encuentra a frecuencias bajas y la banda de rechazo a frecuencias altas.

Por último, cabe mencionar que como hay simetría con respecto al eje de coordenadas, el módulo es simétrico y la respuesta al impulso real.

- d) Para el filtro IIR Elíptico, justifique matemáticamente, a partir del diagrama de polos y ceros, las frecuencias a las que se producen los máximos en las oscilaciones en la banda de paso. ¿Coinciden con las mostradas en la respuesta en frecuencia del filtro?

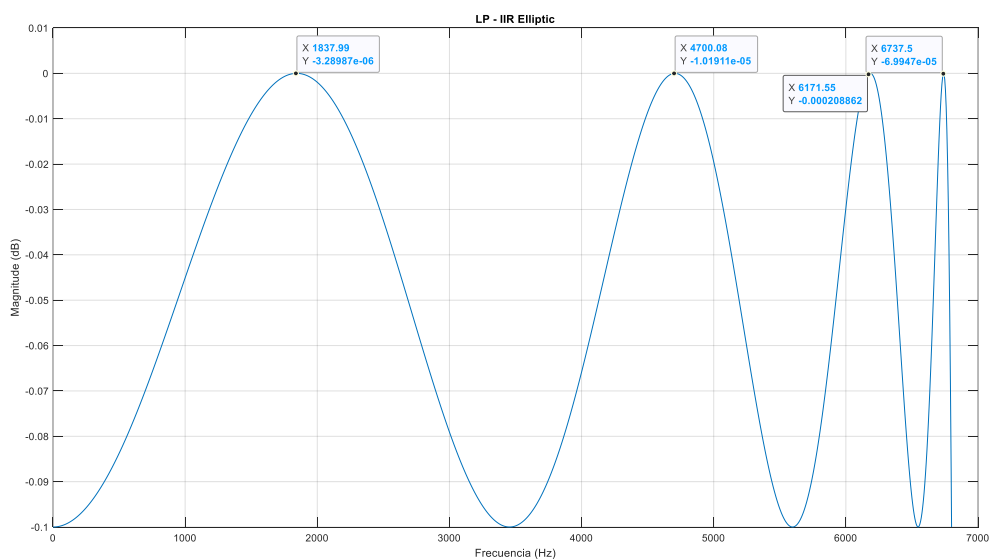
Siguiendo la explicación del apartado anterior, se puede concluir que los máximos se encontraran en valores cercanos a los polos del filtro IIR.

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{\prod_0^M |e^{j\omega} - c_k|}{\prod_0^N |e^{j\omega} - p_k|}$$

Matemáticamente esto se puede explicar con la expresión superior, en la cual se presenta la expresión de un filtro IIR como el cociente entre el productorio de ceros y el productorio de polos. Por lo tanto, como el vector $e^{j\omega}$ se irá desplazando por la circunferencia de radio unidad, los máximos estarán en los polos. Al restar el vector $e^{j\omega}$ al polo, la diferencia será la menor posible y la respuesta en frecuencia será máxima.

Una vez entendido este paso teórico, procedemos a comparar las frecuencias de los polos con las frecuencias de los picos en el rizado de la banda de paso. El resultado esperado es que coincidan.

En la gráfica inferior se ha ampliado el rizado en la banda de paso de filtro IIR – Elliptic para poder ver las frecuencias.



Calculamos primero las frecuencias angulares de los polos y luego las pasamos a frecuencias lineales con ayuda de la frecuencia de muestreo. Finalmente obtenemos:

1
6.9084e+03
-6.9084e+03
6.4834e+03
-6.4834e+03
5.2208e+03
-5.2208e+03
2.2179e+03
-2.2179e+03

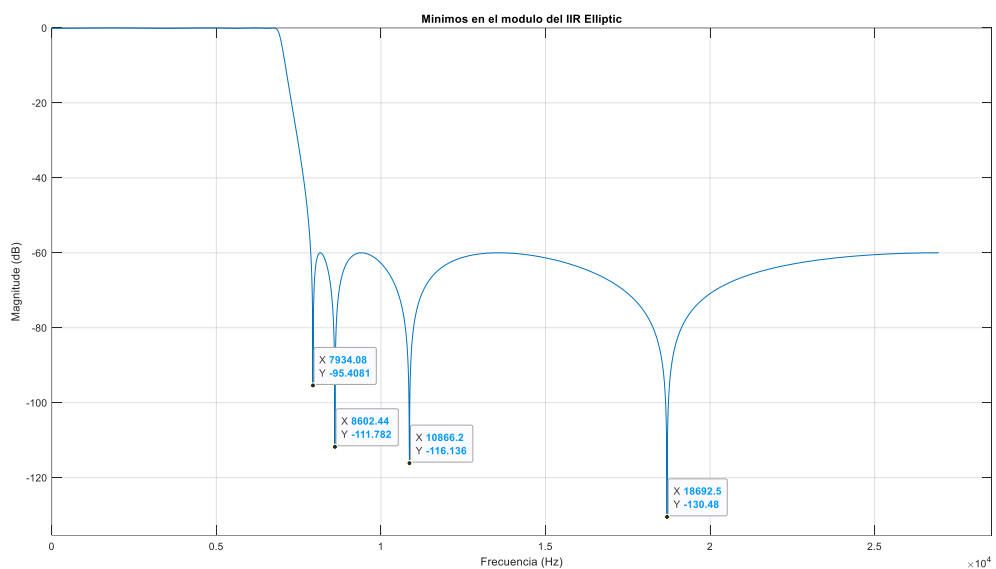
Como se puede ver los picos del rizado en efecto coinciden con los valores calculados, aunque hay un pequeño error.

Este pequeño error se debe, por ejemplo, a que los ceros influyen en el cálculo, ya que son parte de la ecuación y es por eso que los valores pueden variar y puede haber un pequeño error.

- e) Para el filtro IIR Elíptico, justifique matemáticamente, a partir del diagrama de polos y ceros, las frecuencias que se eliminan en la banda eliminada. ¿Coinciden con las mostradas en la respuesta en frecuencia del filtro?

Con respecto a los mínimos del filtro, la explicación es la misma que en el apartado superior, solo que ahora se tienen que analizar los ceros del filtro IIR.

Los ceros son aquellos valores o frecuencias en los cuales el filtro IIR se hace cero. Por lo tanto, al tratarse de un filtro paso bajo, hay que fijarse en la banda de rechazo del filtro.



Al igual que en el apartado anterior volvemos a calcular los valores de los ceros para ver si coinciden con los que aparecen en la banda de rechazo de la gráfica superior.

1
1.8691e+04
-1.8691e+04
1.0864e+04
-1.0864e+04
7.9356e+03
-7.9356e+03
8.6015e+03
-8.6015e+03

Una vez más los valores coinciden con los valores superiores, apareciendo al igual que en el apartado anterior un pequeño. Este error al igual que el anterior también se puede producir por la herramienta de plot(), que no sea del todo exacta.

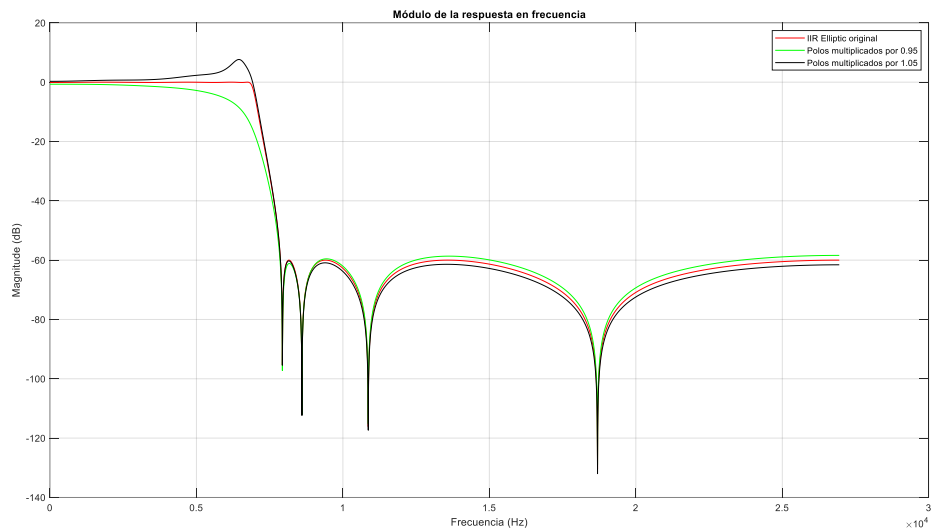
Estabilidad

En este apartado se va a estudiar en profundidad la estabilidad de los filtros IIR y sus efectos, tanto en frecuencia como en tiempo.

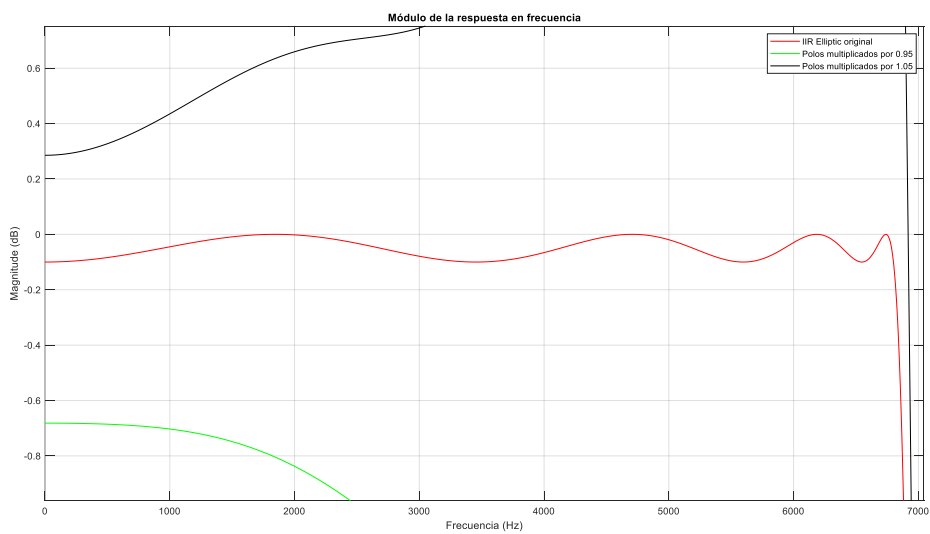
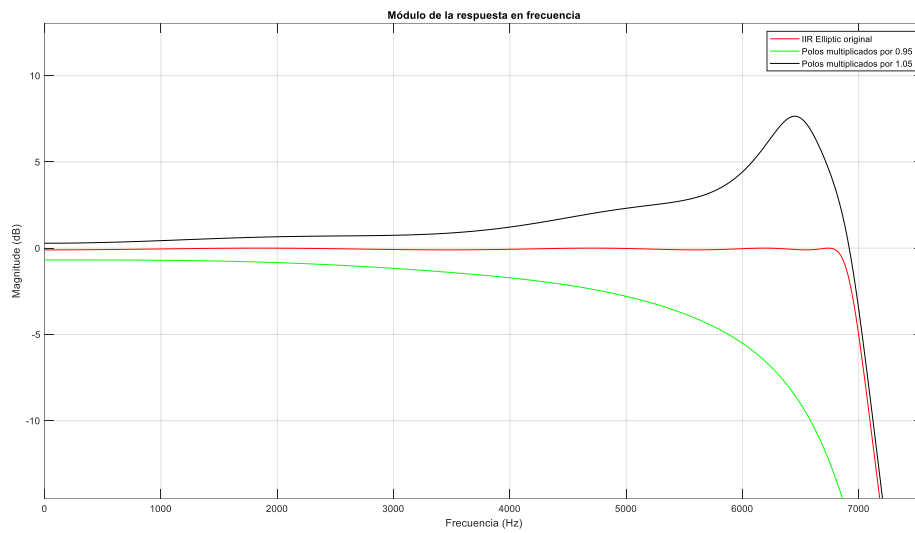
A partir del filtro Elíptico del primer bloque, realice los siguientes apartados:

- Modifique el filtro Elíptico del primer bloque multiplicando sus polos por un factor de 0,95. Tenga en cuenta que los polos son las raíces del polinomio denominador.
- Indique los coeficientes **a** y **b** del nuevo filtro.
- A continuación, modifique el primer filtro Elíptico multiplicando sus polos por un factor de 1,05.
- Indique los coeficientes **a** y **b** del nuevo filtro.
- Calcule la respuesta impulsional del filtro original y de los dos filtros nuevos.
- Comente, justificando gráficamente, qué efectos tienen ambas modificaciones sobre la respuesta en frecuencia de los filtros.

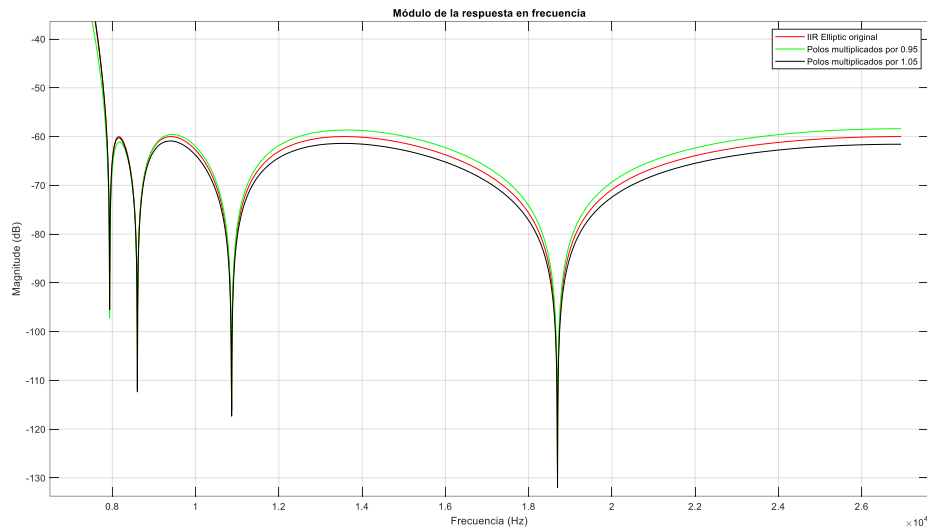
En este apartado se han multiplicado los polos por factores de 0.95 y 1.05 para analizar los cambios que se van a producir en el filtro IIR. Los resultados que creemos que obtendremos son que al multiplicar por 0.95 no va a haber cambios en el filtro IIR. No obstante, al multiplicar por 1.05 es posible que algún polo salga de la circunferencia de radio unidad, cambiando totalmente el comportamiento del filtro.



Módulo respuesta en frecuencia zoom en banda de paso



Módulo respuesta en frecuencia con zoom en banda rechazo



En primera instancia procedemos a comentar la banda de rechazo. Ésta no cambia apenas ya que los ceros del filtro quedan intactos. Se puede ver que se pierde algo de ganancia al multiplicar por 0.95 y se gana un poco al multiplicar por 1.05. No obstante, dicha ganancia, ya sea pérdida o ganancia, es pequeña.

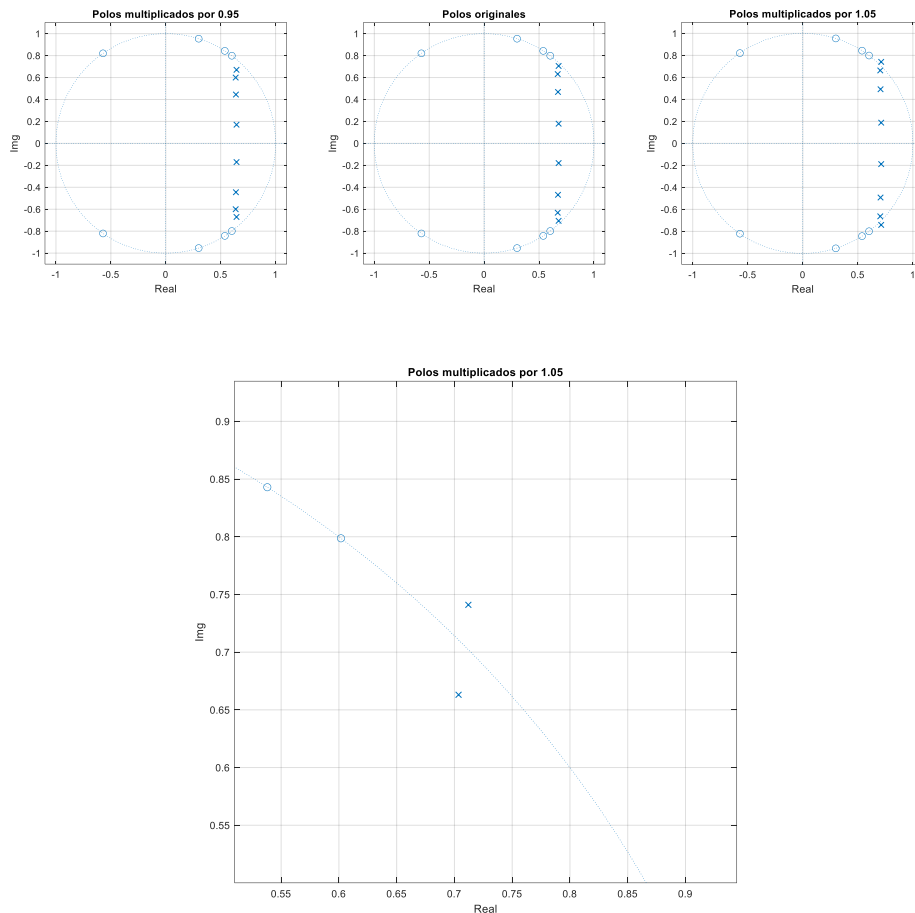
Con respecto a la banda de paso, ésta si tiene cambios considerables. Al multiplicar por 1.05 aparece un pico que seguramente se deba a que un polo ha sobrepasado la circunferencia de radio unidad o se ha acercado considerablemente. Esto haría que la resta entre $|e^{j\omega} - p_k|$ sea muy pequeña y, por lo tanto, haciendo que la respuesta en frecuencia aumente. Además, la ganancia de la banda de paso aumenta, no solo en el pico mencionado anteriormente.

Al multiplicar por un factor de 0.95 como era de esperar, disminuye la ganancia de la banda de paso.

Por último, se puede observar que los máximos que aparecían en ciertas frecuencias, ya no se encuentran en dichas frecuencias. Al multiplicar por 1.05 aumentan dichas frecuencias y al multiplicar por 0.95 disminuyen. Esto se debe a que al multiplicar por dicho factor no solo se tiene en cuenta el denominador, sino también el numerador, que aumentará o disminuirá dependiendo del factor de multiplicación.

- g) Comente, justificando gráficamente, qué efectos tienen ambas modificaciones sobre el diagrama de polos y ceros de los filtros.

Viendo los resultados del apartado anterior esperamos ver que al multiplicar por un factor de 1.05, algún polo haya sobrepasado la circunferencia de radio unidad. Al multiplicar por 0.95 esperamos ver que los polos se alejen de la circunferencia de radio unidad.



Como se puede apreciar en las gráficas en efecto un polo ha sobrepasado la circunferencia de radio unidad, lo que resulta en el pico de la banda de paso al igual que el filtro dejará de ser estable, aunque esto se va a estudiar en más profundidad en el siguiente apartado.

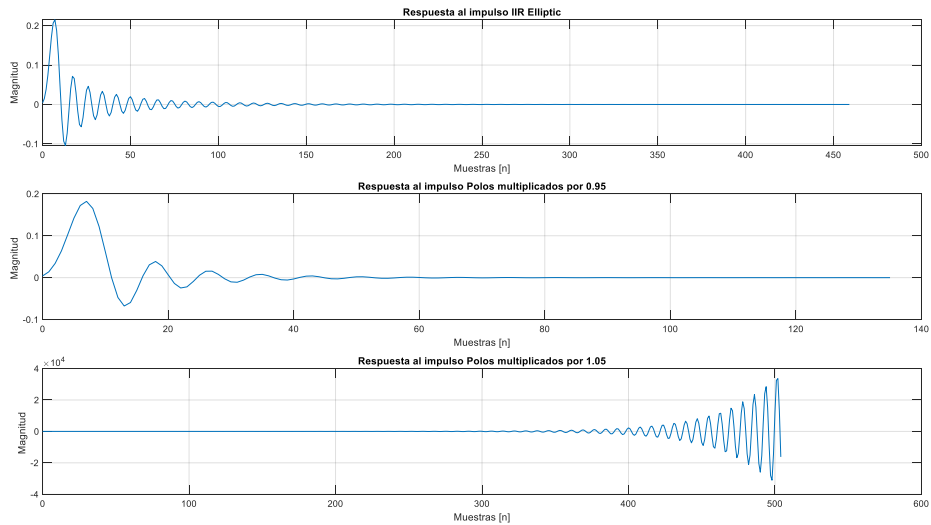
Como se ha mencionado en apartados anteriores en el caso de multiplicar por 1.05, por ejemplo, se produce una ganancia en la banda de paso y el rizado ya que el denominador tiende más a 0 y eso hace que el módulo de la respuesta en frecuencia tienda a valores más grandes.

De la misma manera al multiplicar por 0.95 los efectos son los opuestos.

- h) Comente, justificando gráficamente, qué efectos tienen ambas modificaciones sobre la respuesta impulsional de los filtros.

En este apartado esperamos obtener que el filtro original y el que está modificado con los polos multiplicados por 0.95. No obstante para el filtro con los polos multiplicados por 1.05 esperamos que sea inestable y por lo tanto su repuesta al impulso no converja ya que no cumple la condición de estabilidad:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$$



Como se puede ver en la gráfica superior en efecto el filtro con los polos multiplicados por 1.05 no es estable, ya que no converge.

Además, aunque esto ya se ha visto en el apartado anterior, la razón es que hay un polo que salía de la circunferencia de radio unidad, resultando en que la ROC no contenga dicha circunferencia y rompiendo así la condición de estabilidad.

