

LE1:G2

PRÁCTICA 4: FILTROS DIGITALES IIR

Laboratorio de PDS



Álvaro Prado Moreno (201800742) y Javier Álvarez
Martínez (201707599)
24-3-2021

Introducción

En esta práctica se van a diseñar 4 filtros IIR utilizando la herramienta FilterDesigner. Más adelante, se compararán su módulo y su fase. Acto seguido, se estudiará el diagrama de polos y ceros de los filtros con el objetivo de extraer de este diagrama conclusiones de sus características, cómo el tipo de filtro qué son, si son estables y dónde se encuentran los máximos y mínimos de la respuesta en frecuencia.

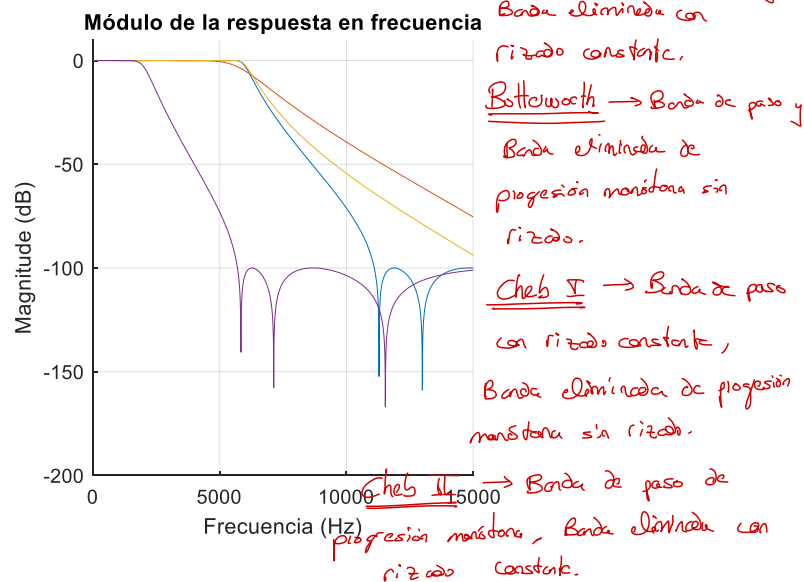
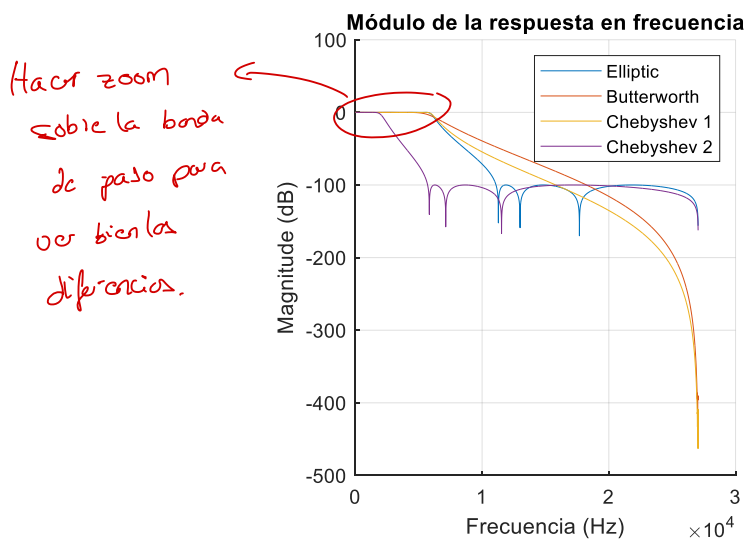
Por último, se observarán los efectos que tiene modificar los polos del filtro Elliptic en sus características.

Análisis de filtros

En este apartado se analiza la respuesta en frecuencia de los filtros diseñados con la herramienta Filter designer. Para ello, se representa el módulo de la respuesta en frecuencia y la fase con el objetivo de plasmar las diferencias entre las distintas expresiones utilizadas para el diseño.

Módulo de la respuesta en frecuencia

A continuación, se adjunta el módulo de la respuesta en frecuencia de los filtros diseñados. Se han representados sobre los mismos ejes con el objetivo de facilitar el análisis de similitudes y diferencias.



En el caso del filtro tipo Butterworth y del Chebyshev tipo 1 se observa que la banda de transición $\Delta\omega$ es mayor que en los otros dos casos. No obstante, con este tipo de filtros se obtiene una atenuación mayor para la banda eliminada. El filtro de Chebyshev tipo 1 consigue una atenuación aún mayor que el Butterworth

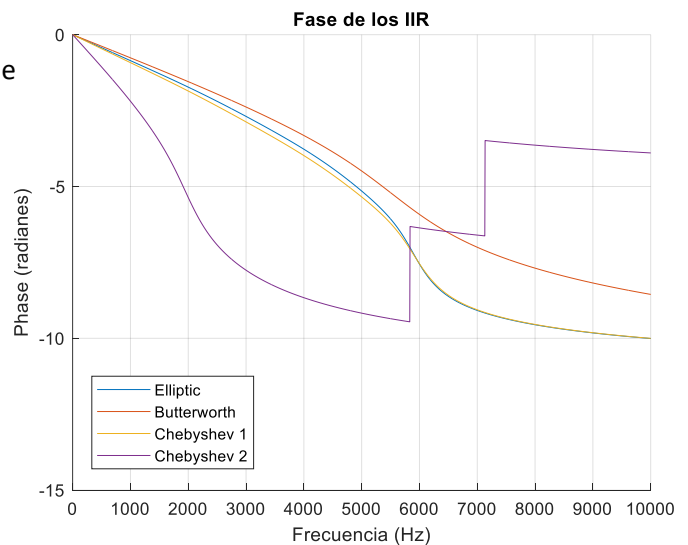
Estos dos obteniendo las gráficas, no están resaltando bien las diferencias.

En cuanto a los filtros de tipo Elliptic y Chebyshev tipo 2 se observa que la atenuación en la banda eliminada no es tan grande. Por otro lado, la precisión es mayor ya que la banda de transición es menor lo cual significa que entre la diferencia entre la banda de paso y la eliminada es más abrupta.

Fase de la respuesta en frecuencia

A continuación, se adjunta una imagen que muestra la fase de los filtros en función de la frecuencia. Se ha delimitado el eje X ya que no interesa la fase en la banda eliminada por la gran atenuación que sufren estas frecuencias.

Puede observarse que la fase no es lineal lo que quiere decir que la pendiente es distinta en función de la frecuencia. Por tanto, estos filtros provocarán un retardo de grupo distinto en función de la frecuencia de la señal de entrada. Al contrario que un filtro FIR simétrico y causal que provoca el mismo retardo de grupo independientemente de la frecuencia.



¿Qué versión presenta un retardo de grupo más plano?

FACTA

Polos y Ceros

En este apartado se estudia el diagrama de polos y ceros de los filtros diseñados con el objetivo de extraer conclusiones de su comportamiento.

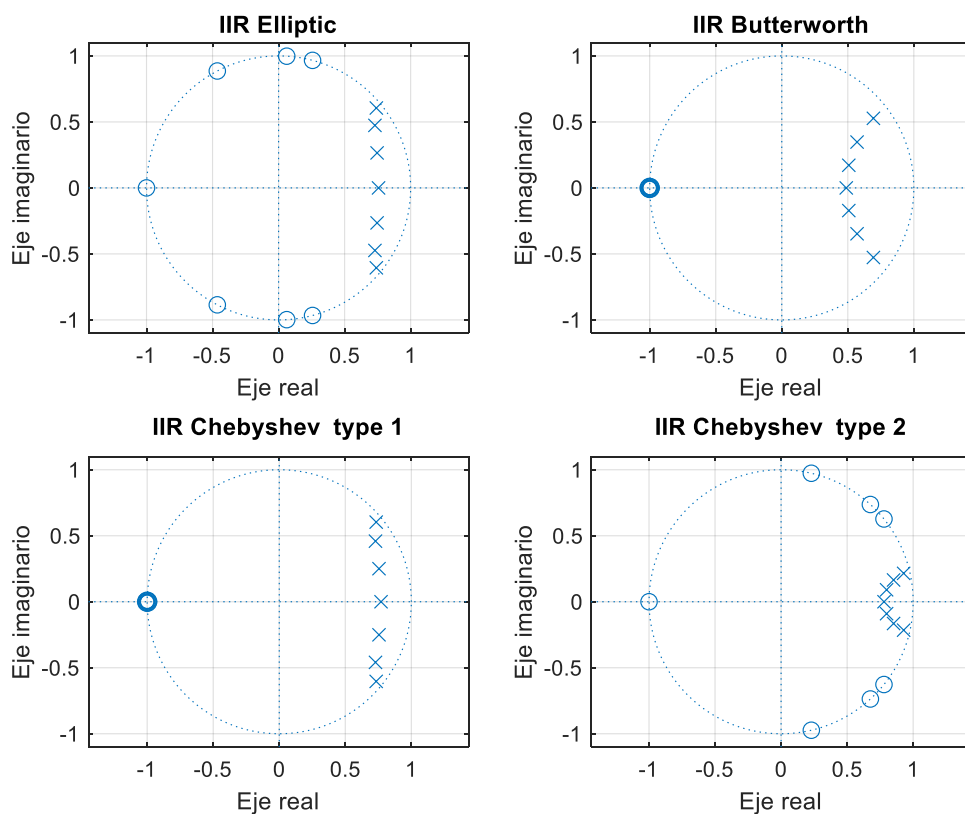
¿Son estables los filtros?

Sí, lo son. Un filtro es estable cuando cumple la condición de que ante una entrada acotada la salida es acotada. Para ello se debe de cumplir la siguiente expresión:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$$

Esto es equivalente a decir que la respuesta al impulso tiene *TFTD* y esto último podemos comprobarlo mediante la región de convergencia en el plano *Z*. Si esta contiene a la circunferencia de radio 1 significa que existe la *TDTF*.

La *RoC* en este caso está determinada por el polo más externo ya que no puede contener ningún polo y al ser todos los filtros causales (por ser realizables) se extiende hacia fuera hasta el infinito. En las gráficas adjuntas puede observarse que todos los polos están dentro de la circunferencia de radio $R = 1$, por tanto, la *RoC* contiene a la misma.



Justificar por qué son filtros paso bajo

A partir de la expresión de un filtro IIR en el dominio Z se puede llegar el módulo de la respuesta en frecuencia del filtro:

$$H(z) = \frac{\prod_0^M (1 - c_k * Z^{-1})}{\prod_0^N (1 - p_k * Z^{-1})} \Rightarrow \{z = e^{j\omega}\} \Rightarrow \dots \Rightarrow |H(e^{j\omega})| = \frac{\prod_0^M |e^{j\omega} - c_k|}{\prod_0^N |e^{j\omega} - p_k|}$$

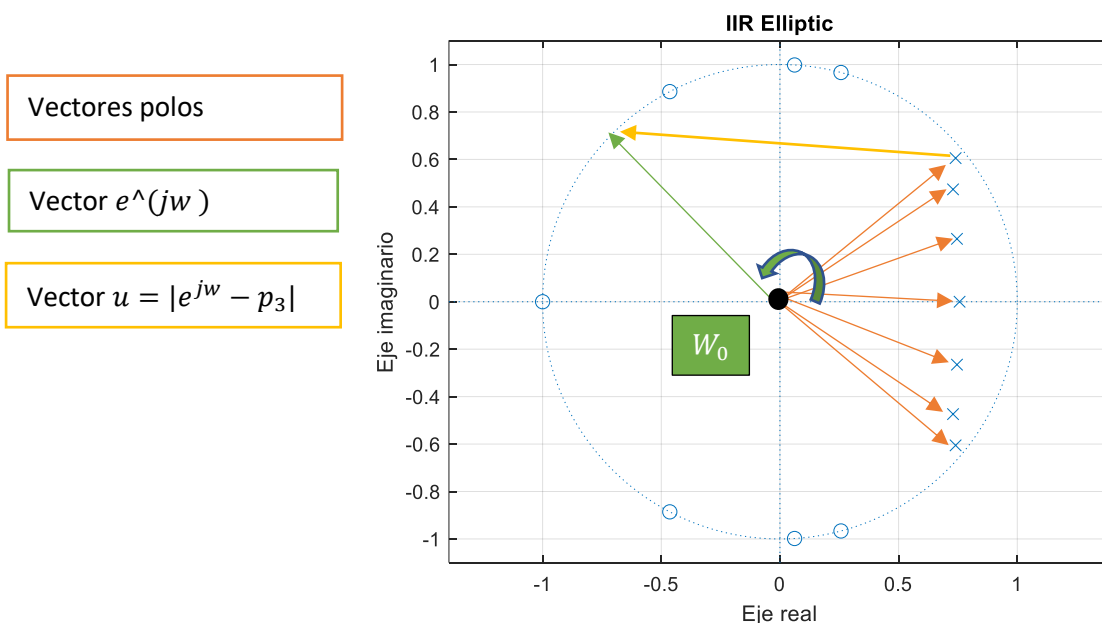
Al observar la expresión vemos que para las frecuencias ω_0 que tengan un cero próximo, el módulo de la diferencia $|e^{j\omega} - c_k|$ será pequeño haciendo que el módulo de la respuesta en frecuencia sea cercano a 0. Lo contrario ocurre si lo que está próximo es un polo ya que en ese caso la respuesta al impulso tiende al infinito porque el denominador tiende a 0.

En el caso de nuestros filtros vemos que todos los polos se concentran entre $[0 - \frac{\pi}{4}]$. Por tanto, en esos puntos la respuesta en frecuencia tendrá un valor alto. Por otro lado, los ceros que vienen a continuación hasta π indican que en esos puntos el módulo se hará 0 eliminando dichas frecuencias. Por tanto, podemos indicar que son filtros paso bajo por la existencia de polos en frecuencias bajas.

Nota: También se puede observar que hay simetría respecto al eje X lo cual quiere decir que el módulo será simétrico y la respuesta al impulso real

Filtro IIR elíptico: máximos y mínimos

Siguiendo la explicación del apartado anterior, podemos justificar donde la expresión del módulo de la respuesta en frecuencia tendrá sus máximos y sus mínimos.



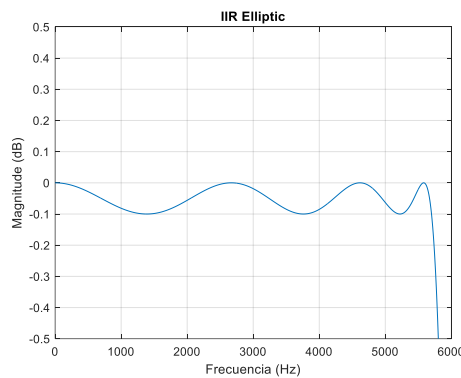
Recordando la expresión del módulo de la respuesta en frecuencia

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{\prod_0^M |e^{j\omega} - c_k|}{\prod_0^N |e^{j\omega} - p_k|}$$



Y teniendo en cuenta que el vector $e^{j\omega}$ se irá desplazando sobre la circunferencia unidad solo cambiando el ángulo del vector. Podemos concluir que los máximos se encontrarán en las frecuencias cercanas a $\omega_0 = 0, \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}$ y $\frac{\pi}{5}$ ya que en estos puntos aproximadamente se encuentran los polos haciendo que la diferencia de módulos $|e^{j\omega} - p_k|$ sea la menor posible y que, por tanto, la respuesta en frecuencia tienda a valores altos. No obstante, también hay que tener en cuenta el valor del numerador, es decir, si hay ceros cerca.

Teniendo en cuenta que la frecuencia de muestreo es $f_s = 54.1 \text{ KHz}$ las frecuencias analógicas donde se sitúan los polos son $f = 0, 2.25 \text{ KHz}, 4.5 \text{ KHz}$ y 5.41 KHz . En la siguiente gráfica puede observarse que, aproximadamente, los puntos en los que se sitúan los polos y los máximos coinciden. El error se debe a la influencia que también tienen los ceros. *y porque los polos no se encuentran directamente sobre la circunferencia de $R=1$.*



polos no se encuentran directamente sobre la circunferencia de $R=1$.

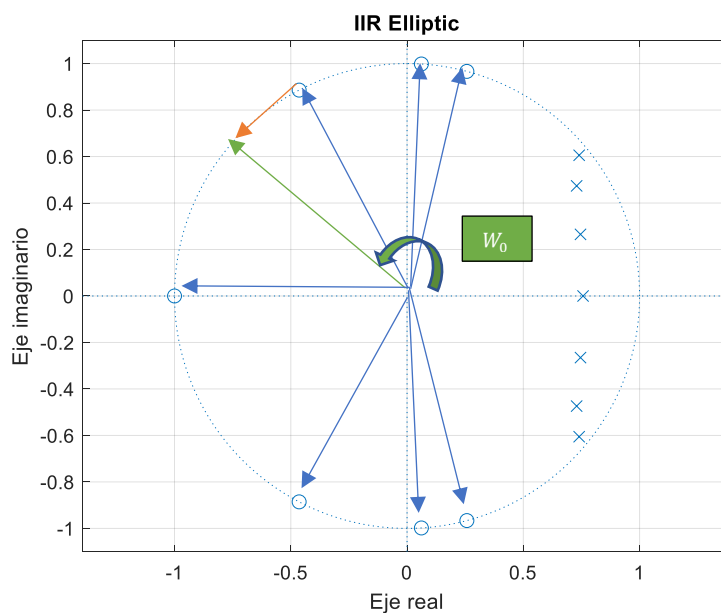
En cuanto a los mínimos, estos estarán situados próximos a las ω_0 para las cuales la diferencia $|e^{j\omega} - c_k|$ es menor. Ya que esto provoca que el módulo de la respuesta en frecuencia se acerque al 0 dando lugar a un mínimo en la respuesta. Observando la siguiente gráfica, podemos concluir que los ceros están en $\omega_0 = [\frac{5\pi}{12}, (\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{32}), (\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}) \text{ y } \pi]$.



Vectores ceros

Vector $e^{j\omega}$

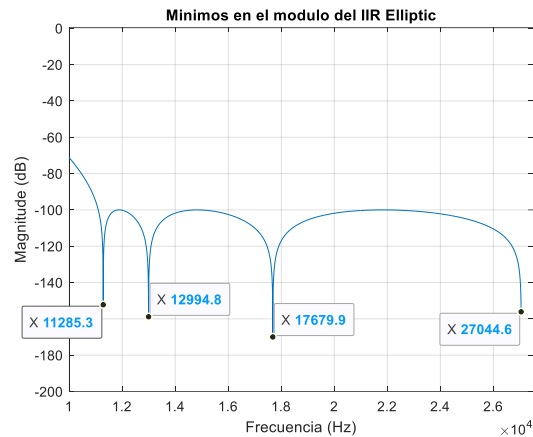
Vector $v = |e^{j\omega} - c_2|$



Sabiendo que la $f_s = 51.4\text{KHz}$, pasamos las frecuencias de los ceros a analógico para poder observar si las conclusiones coinciden con la representación del módulo. Las frecuencias en analógico son:

$$f = [11.27\text{KHz}, 12.68\text{ KHz}, 17\text{KHz}, 27\text{KHz}] \quad \checkmark$$

La representación del módulo centrada en la banda eliminada para ver los mínimos es la siguiente:



Se puede observar como los cálculos coinciden con un ligero error con los mínimos reales. El error se debe a que el mínimo no viene únicamente determinado por el valor del numerador si no también por el denominador. Además, cabe destacar los ceros no se encuentran exactamente **sobre** la circunferencia de radio unidad, por tanto, el módulo de la respuesta en frecuencia no se hace exactamente 0.

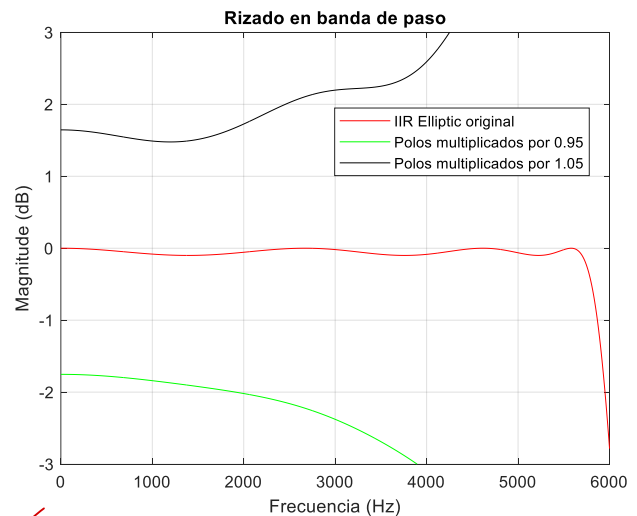
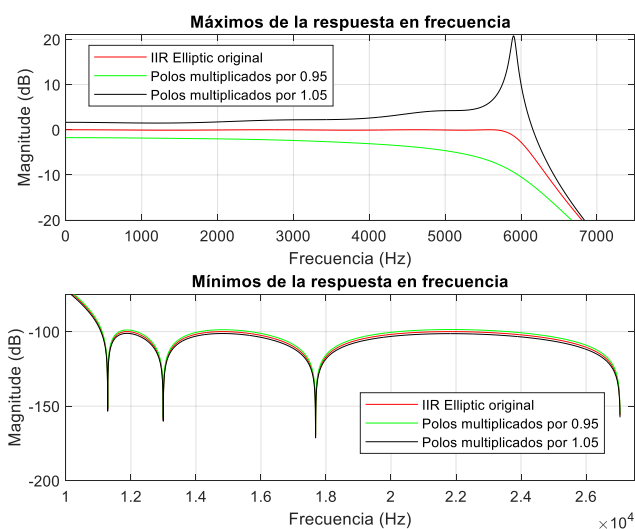
El módulo de los "ceros" es: que debería ser "1", precisamente por eso el cálculo teórico de los polos coincide con el experimental, la diferencia es debida a la herramienta de visualización de plots.

Estabilidad

En este apartado, se va a modificar el valor de los polos del filtro IIR Elíptico mediante el producto con el factor 0.95 y 1.05. Posteriormente se estudiarán las consecuencias que este cambio tiene en la respuesta en frecuencia del filtro IIR y en su diagrama de polos y ceros. ✓

Módulo de la respuesta en frecuencia

A continuación, se pueden ver en las imágenes las tres respuestas en frecuencias correspondientes al filtro original y a sus variaciones.



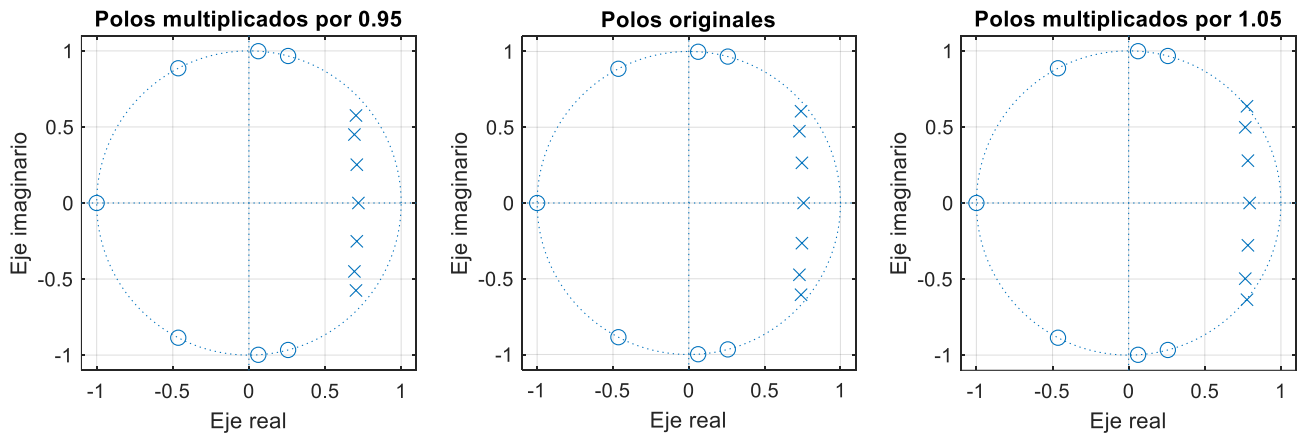
Puede observarse como aparece un rizo bastante prominente en la respuesta para $f = 5.75 \text{ KHz}$. Esto se debe a que al multiplicar por 1.05 uno de los polos habrá quedado muy cerca de la circunferencia de radio unidad haciendo que la diferencia de vectores $|e^{j\omega} - p_k|$ sea muy pequeña y el módulo de la respuesta en frecuencia muy grande. ✓

También se puede observar como al multiplicar los polos por 0.95 se pierde tanto ganancia en la banda de paso como atenuación en la banda eliminada. Ocurriendo lo contrario en el caso de la multiplicación de los polos por el factor 1.05. Además, se ve como para el primer caso disminuye el rizado en la banda de paso y en el segundo caso, aumenta. ✓

Por último, se aprecia que los máximos ya no ocurren en las mismas frecuencias que en el caso original. El factor 1.05 hace que los máximos se desplacen a frecuencias superiores y el factor 0.95 hace que se desplacen hacia frecuencias inferiores. A pesar de que los polos no cambian de W_0 , se debe tener en cuenta que el máximo también viene determinado por el valor del numerador. Por tanto, concluimos que al multiplicar por 1.05 el W_0 para el que el cociente $\frac{|e^{j\omega_0} - c_k|}{|e^{j\omega_0} - p_k|}$ es mayor, aumenta. Y en el caso del factor 0.95 disminuye. ✓

Diagrama de polos y ceros

En la imagen adjunta se pueden observar los 3 diagramas de polos y ceros.

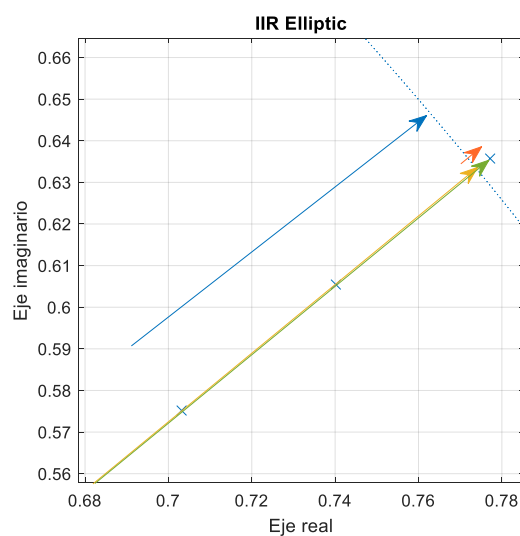
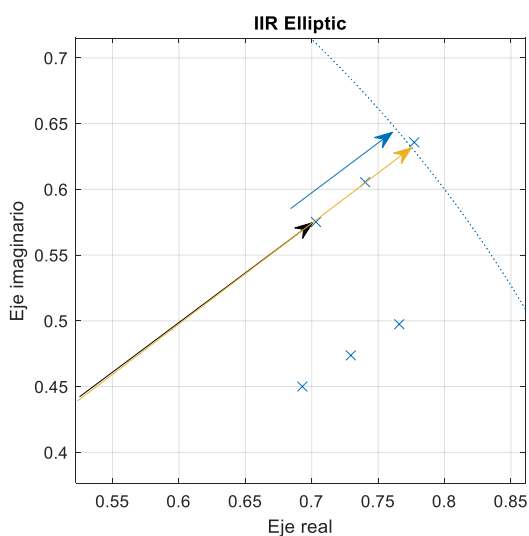


Al multiplicar los polos por 0.95 hacemos que el vector $u = |e^{j\omega} - p_k|$ sea mayor ya que los polos se alejan de la circunferencia de radio 1. Esto provoca que en los W_0 donde se encuentran los polos, el denominador del módulo de la respuesta en frecuencia será mayor que en caso original. Esto significa una menor ganancia en la banda de paso y un menor rizado porque la tendencia a ∞ no es tan abrupta.

En el segundo caso, el efecto es el contrario. Aumenta la ganancia y el rizado porque el denominador de la respuesta en frecuencia se acerca más a 0 haciendo que el módulo de la respuesta tienda a valores más altos.

En la imagen que se muestra a continuación se ha hecho zoom en los polos localizados en $\omega_0 = \frac{\pi}{4}$ para poder representar el cambio que supone en el módulo de la diferencia $|e^{j\omega} - p_k|$

el producto de los polos por los dos factores.



$$u = |e^{j\frac{\pi}{4}} - p_3'|$$

$$u = -|e^{j\frac{\pi}{4}} - p_3''|$$

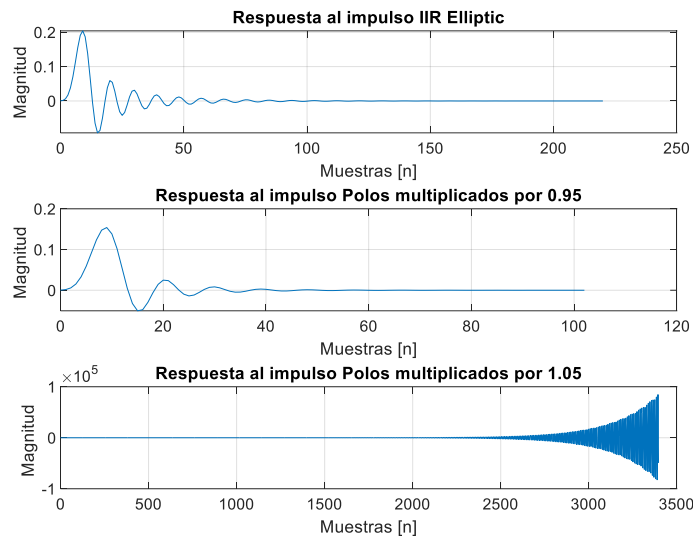
$$e^{j\frac{\pi}{4}}$$

$$p_3'$$

$$p_3''$$

Respuesta al impulso

A continuación, se muestran las tres respuestas al impulso:



En la respuesta al impulso correspondiente a la modificación de los polos mediante un producto por 1.05 se observa que no converge. Por tanto, el filtro deja de ser estable ya que no se cumple que:

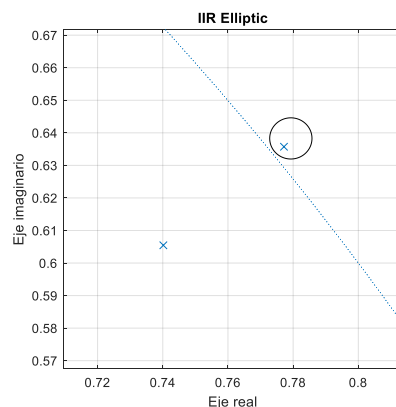
$$\sum_{-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$$

Esto también quiere decir que la respuesta al impulso no tiene TFTD. Al no ser estable, el filtro ante una entrada acotada podría darnos una salida no acotada y provocar un desbordamiento en bits. ✓

En el otro caso, la respuesta al impulso sí converge lo cual nos lleva a afirmar que el filtro será estable y que la respuesta al impulso tiene TFTD.

Los tres filtros son causales: $h[n] = 0 \forall n < 0$. En caso contrario no se podrían programar.

El hecho de que la modificación por un factor de 1.05 del filtro original no sea estable se aprecia también en el diagrama de polos y ceros. Ya que el polo más externo cae fuera de la circunferencia de radio $r=1$ y, por tanto, la RoC no contiene a la misma. ✓



Conclusión

En esta práctica se ha aprendido a diseñar distintos tipos de filtros IIR utilizando la herramienta filterDesigner de Matlab. Hemos analizado los distintos filtros creados en función de su respuesta en frecuencia y de sus diagramas de polos y ceros.

A raíz de los coeficientes de estos filtros, expresados como una fracción, (numerador y denominador) son muy importantes las raíces de dichos polinomios, ya que hacen que la respuesta tienda a 0 o a infinito, lo que caracteriza la respuesta de nuestro filtro.

Finalmente se ha visto la estabilidad de nuestro filtro Elliptic al operarse las raíces de numerador y denominador por dos factores diferentes.

