LE1:G2

PRÁCTICA 5: EFECTOS DE LA PRECISIÓN FINITA EN FILTROS DIGITALES IIR

Laboratorio de PDS

Álvaro Prado Moreno (201800742) y Javier Álvarez Martínez (201707599)

1-4-2021

Introducción

En esta práctica se va a diseñar un filtro IIR mediante la herramienta FilterDesigner de Matlab. A partir de estos coeficientes se van a realizar diferentes cuantificaciones, cuantificación de los coeficientes a y b del filtro, cuantificación de los coeficientes de las secciones de segundo orden y, por último, cuantificación de raíces. Posteriormente, se observarán los efectos del proceso en la respuesta en frecuencia y en el diagrama de polos y ceros.

Análisis general

En este apartado, vamos a analizar el resultado entre cada uno de los procesos realizados anteriormente, observando como afecta la cuantificación al trabajar con un microprocesador de precisión finita.

Análisis del error cuadrático medio de las raíces de cada filtro cuantificado

En la tabla que se muestra a continuación se pueden observar los errores cuadráticos medios de cada uno de los filtros cuantificados en relación con el filtro original.

Cuantificación de coeficientes	ECM= 0.614
Secciones de segundo orden	ECM= $9.38\text{x}10^{-6}$
Cuantificación de las raíces	ECM= $2.30\text{x}10^{-6}$

La función de transferencia de un filtro se puede expresar así:

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k * z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k * z^{-k}} = \cdots = \frac{\prod_{k=0}^{M}(1 - c_k * z^{-1})}{\prod_{k=0}^{N}(1 - p_k * z^{-1})}$$

Como puede observarse lo que caracteriza la respuesta del filtro son sus raíces, tanto las del numerador (ceros) como las del denominador (polos). Cuanto mas se parezcan las raíces del filtro tras la cuantificación a las originales menor será el ECM.

En el primer caso cuando cuantificamos los coeficientes $a_k\ y\ b_k$ podemos ver en la expresión que el efecto que esto tendrá sobre las raíces no es directo. Por eso, el error cuadrático medio es el más alto de los tres casos. En el código de Matlab observamos como pasamos de tener 8 raíces distintas en el numerador a tener como raíz el 0 de orden 8. Una aproximación nada buena

En el segundo caso el efecto de cuantificación sí tiene un efecto mucho más directo sobre las raíces. El filtro Elliptic diseñado tiene una respuesta en frecuencia con simetría par (Filtro real). Por tanto, el productorio de raíces se puede reescribir como un productorio de secciones de segundo orden del estilo (teniendo en cuenta $c_2 = c_1^*$):

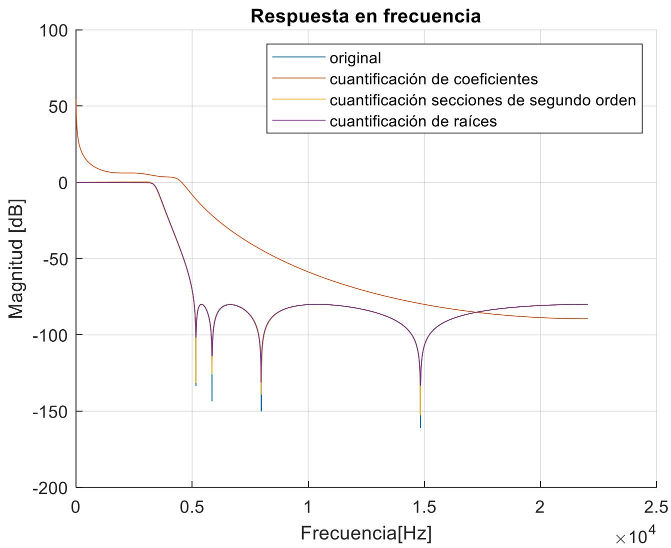
$$H(z) = \frac{(1 - c_1 * z^{-1}) * (1 - c_2 * z^{-1})}{(1 - p_1 * z^{-1}) * (1 - p_2 * z^{-1})} * \dots = \frac{1 - 2r\cos(\alpha) * z^{-1} + r^2 z^{-2}}{1 - 2r\cos(\beta) * z^{-1} + r^2 * z^{-2}} * \dots$$

En este caso se puede apreciar como al cuantificar los coeficientes de las secciones de segundo orden todavía seguimos sin cuantificar las raíces pero se aproxima bastante más que en el primer caso. Estaríamos cuantificando $1, 2rcos(\alpha) y\, r^2$.

Esto explica que el caso 2 tenga mucho menor ECM que el caso 1 pero no tan poco como el caso 3 en el que la cuantificación sí es directa sobre las raíces.

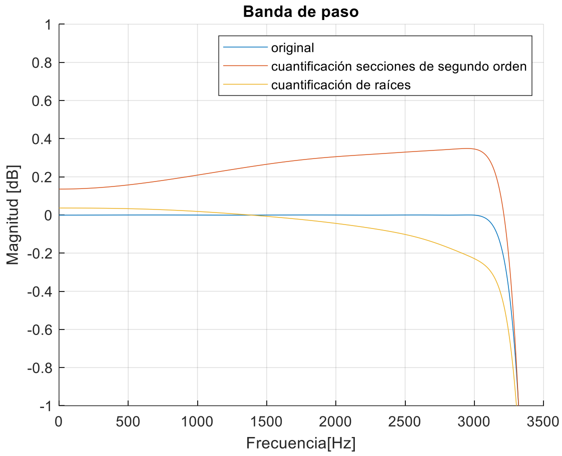
Análisis de las diferencias en la ganancia

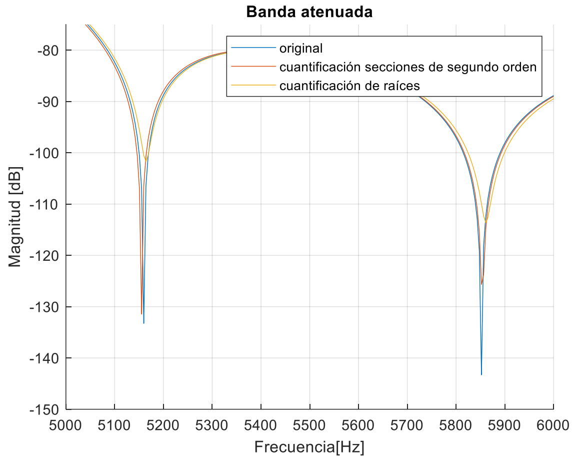
A continuación, se adjunta una gráfica en la que se muestran el módulo de la respuesta en frecuencia de cada uno de los filtros cuantificados.



Como se puede observar el filtro cuantificado con los coeficientes a y b no se ajusta a la respuesta en frecuencia del filtro original, por lo que se puede entender que el error cometido en dicha cuantificación es tan grande que hace que cambien las propiedades de nuestro filtro (polos y ceros) demasiado y por ello su respuesta. Además, esta cuantificación tiene una menor atenuación para la banda eliminada y la banda de paso es distinta en función de la frecuencia por lo que no actúa de la misma forma en las frecuencias deseadas en las que se quiere que actúe el filtro.

El resto de las cuantificaciones se ajustan en gran medida a la original por lo que se puede concluir que mejora notablemente el resultado de la cuantificación de coeficientes mediante la cuantificación de los coeficientes de las secciones de segundo orden y de las raíces.



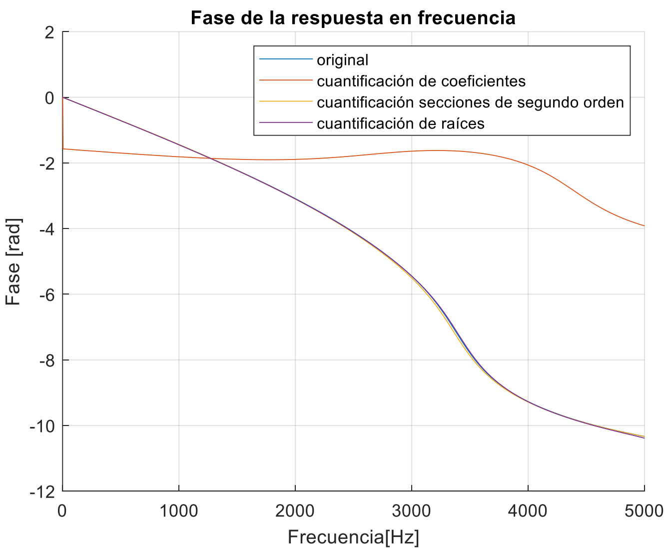


En la banda de paso observamos que el filtro resultante de cuantificar los coeficientes de las secciones de segundo orden tiene una ganancia mayor que el filtro original. Lo cual quiere decir, como se verá posteriormente, que los polos se acercan más a la circunferencia de radio unidad. En el caso de la cuantificación de raíces, observamos que la ganancia es mayor para frecuencias entre [0-1000Hz] y menor para el resto de las frecuencias de la banda de paso.

En la banda atenuada se pueden observar ligeras diferencias en la atenuación. Siendo la mayor la del filtro original, seguida de la cuantificación de las secciones de segundo orden y, por último, la de la cuantificación de las raíces.

Análisis de las diferencias en fase

A continuación, se adjunta la fase de los filtros en la banda de paso que son las frecuencias para las cuales interesa su estudio.

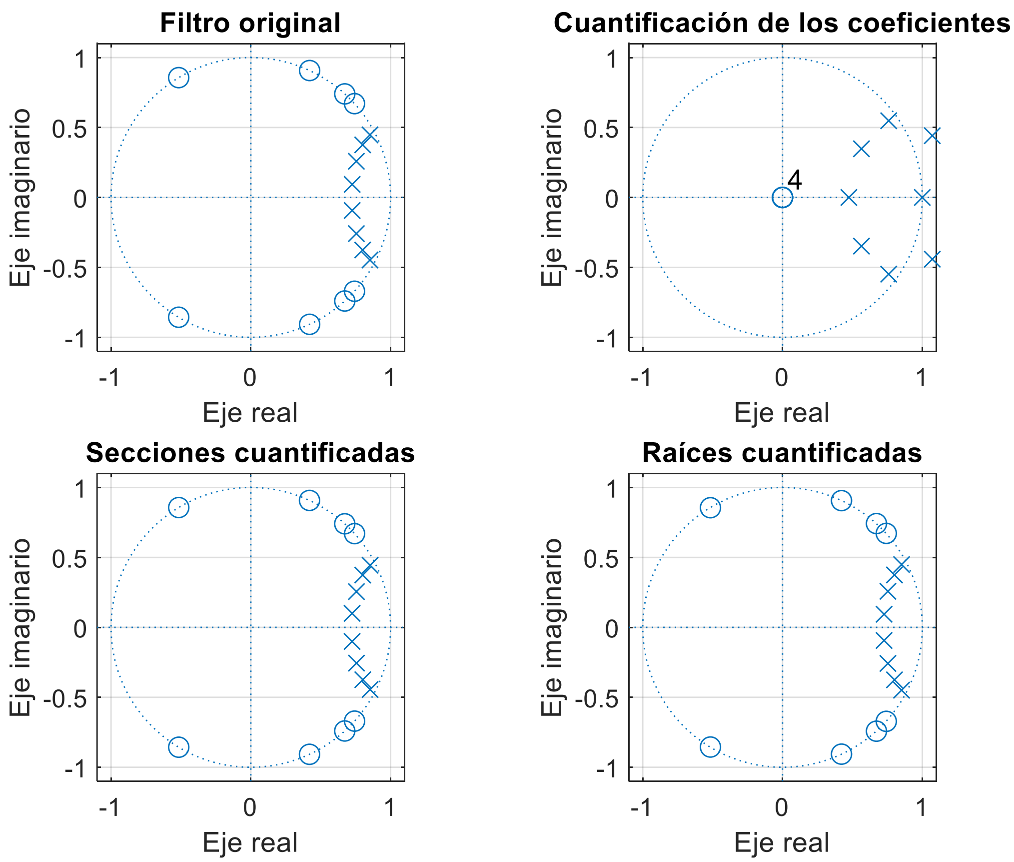


Como se puede observar la fase es distinta para el caso en el que la cuantificación se ha realizado con los coeficientes a y b, por lo que no es un resultado ajustado ya que no sigue la fase del filtro original. El resto de las cuantificaciones se ajustan bien a la fase del filtro original.

Se puede afirmar que todos los filtros son filtros IIR ya que provocan un retardo de grupo distinto en función de la frecuencia de la señal de entrada. Sabemos que esto es así porque la fase no es lineal, es decir, la pendiente es distinta en función de la frecuencia.

Análisis de las diferencias en el diagrama de polos y ceros

A continuación, se muestran los diagramas de polos y ceros para cada uno de los filtros diseñados.



Como se puede observar las cuantificaciones realizadas sobre los coeficientes de las raíces y de las secciones de segundo orden dan como resultado filtros con aproximadamente el mismo diagrama de polos y ceros que el filtro original. Se puede concluir que los polos y los ceros apenas varían y, por tanto, las características del filtro original se mantienen.

Para el caso de la cuantificación realizada con los coeficientes podemos afirmar que las raíces cambian por completo alterando de tal manera, el comportamiento del filtro. Este pasa a ser un filtro no estable. La región de convergencia está determinada por el polo más externo y como los filtros son causales se extiende desde fuera hacia el infinito. En este caso, el último polo está fuera de la circunferencia de radio unidad por lo que la *RoC* no contiene a la circunferencia de radio 1.

Además, se puede observar como se ha pasado de tener 8 raíces en el numerador (8 ceros) a tener 4. Esto se debe a que a la hora de cuantificar se ha aproximado por 0 el valor de algunos coeficientes eliminándolos de la expresión.

Conclusión

En esta práctica se ha observado que en función del método de cuantificación que se emplee sobre la función de transferencia de un filtro los resultados varían ampliamente. Si se opta por cuantificar los coeficientes del numerador y del denominador, el error cometido es alto y se puede llegar a cambiar por completo el comportamiento del filtro, por ejemplo, llegando a convertirse en inestable. Por otro lado, existen métodos como la cuantificación de los coeficientes de las secciones de segundo orden o la cuantificación directa de las raíces que ofrecen resultados mucho más ajustados al filtro original y apenas modifican sus características.