Równania Różniczkowe i Różnicowe
Zadanie obliczeniowe MES
Wariant 4.2: Wibracje akustyczne warstwy materiału

Jacek Łoboda

21 stycznia 2026

1 Sformułowanie problemu

Celem zadania jest rozwiązanie równania różniczkowego metodą elementów skończonych.

Równanie różniczkowe w dziedzinie $\Omega = (0, 2)$:

$$-\frac{d^2u(x)}{dx^2} - u(x) = \sin(x) \quad \text{dla } x \in (0, 2) \tag{1}$$

Warunki brzegowe:

$$u(0) = 1 \quad \text{(Warunek Dirichleta)} \tag{2}$$
$$u'(2) - u(2) = 5 \quad \text{(Warunek Robina)} \tag{3}$$

2 Sformułowanie wariacyjne

Aby zastosować metodę elementów skończonych, należy przekształcić równanie (1) do postaci słabej (wariacyjnej).

Mnożymy równanie stronami przez funkcję testową $v(x) \in V$, taką że $v(0) = 0$ (ze względu na warunek Dirichleta w punkcie $x = 0$), i całkujemy po dziedzinie:

$$\int_0^2 (-u''(x) - u(x))\, v(x)\, dx = \int_0^2 \sin(x)v(x)\, dx \tag{4}$$

Korzystając z liniowości całki:

$$-\int_0^2 u''(x)v(x)\, dx - \int_0^2 u(x)v(x)\, dx = \int_0^2 \sin(x)v(x)\, dx \tag{5}$$

Całkujemy pierwszy człon przez części:

$$\int_0^2 u''(x)v(x)\, dx = [u'(x)v(x)]_0^2 - \int_0^2 u'(x)v'(x)\, dx \tag{6}$$

Podstawiając to do równania otrzymujemy:

$$-\left(u'(2)v(2) - u'(0)\underbrace{v(0)}_{0}\right) + \int_0^2 u'(x)v'(x)\, dx - \int_0^2 u(x)v(x)\, dx = \int_0^2 \sin(x)v(x)\, dx \tag{7}$$

Uwzględniamy warunek brzegowy Robina (3). Przekształcamy go do postaci $u'(2) = u(2) + 5$ i podstawiamy:

$$-\left((u(2)+5)v(2)\right) + \int_0^2 u'(x)v'(x)\,dx - \int_0^2 u(x)v(x)\,dx = \int_0^2 \sin(x)v(x)\,dx \tag{8}$$

Porządkujemy równanie, przenosząc znane wartości na prawą stronę:

$$\int_0^2 u'(x)v'(x)\,dx - \int_0^2 u(x)v(x)\,dx - u(2)v(2) = \int_0^2 \sin(x)v(x)\,dx + 5v(2) \tag{9}$$

2.1 Homogenizacja warunku brzegowego

Ponieważ $u(0) = 1 \neq 0$, stosujemy podstawienie:

$$u(x) = w(x) + \tilde{u}(x), \quad \text{gdzie } \tilde{u}(x) = 1 \tag{10}$$

Wtedy $w(0) = 0$, więc $w \in V$. Pochodna $\tilde{u}'(x) = 0$. Forma dwuliniowa $B(u, v)$:

$$B(u,v) = \int_0^2 u'v'\,dx - \int_0^2 uv\,dx - u(2)v(2) \tag{11}$$

Liniowa forma funkcjonalna $L(v)$:

$$L(v) = \int_0^2 \sin(x)v\,dx + 5v(2) \tag{12}$$

Podstawiając $u = w + 1$:

$$B(w,v) = L(v) - B(1,v) \tag{13}$$

Obliczamy $B(1, v)$:

$$B(1,v) = \int_0^2 (0)v'\,dx - \int_0^2 (1)v\,dx - (1)v(2) = -\int_0^2 v\,dx - v(2) \tag{14}$$

Ostateczne równanie wariacyjne dla funkcji w:

$$B(w,v) = \int_0^2 \sin(x)v\,dx + 5v(2) - \left(-\int_0^2 v\,dx - v(2)\right) \tag{15}$$

$$\boxed{\int_0^2 w'v'\,dx - \int_0^2 wv\,dx - w(2)v(2) = \int_0^2 (\sin(x)+1)v\,dx + 6v(2)} \tag{16}$$

3 Metodyka rozwiązania

Problem rozwiązano przy użyciu:

- Dyskretyzacji odcinka $[0, 2]$ na n elementów skończonych.
- Liniowych funkcji kształtu (baza Lagrange'a).
- Numerycznego całkowania metodą kwadratury Gaussa-Legendre'a.
- Algorytmu eliminacji Gaussa do rozwiązania układu równań liniowych.

Ostateczne rozwiązanie uzyskuje się poprzez dodanie przesunięcia: $u_h(x) = w_h(x) + 1$.

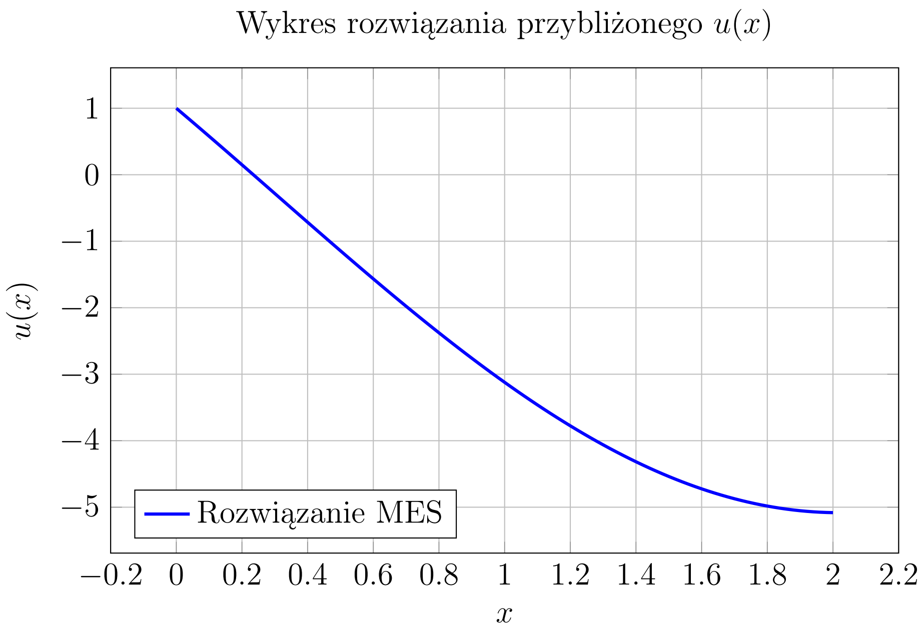
4 Wyniki obliczeń

Przeprowadzono symulację dla liczby elementów $n = 100$.

Sprawdzenie warunków brzegowych:

- Wartość w $x = 0$: $u(0) = 1.000000$ (Zgodne z założeniem).
- Wartość w $x = 2$: $u(2) \approx -5.0819$.
- Pochodna numeryczna w $x = 2$: $u'(2) \approx -0.1237$.
- Sprawdzenie warunku Robina: $u'(2) - u(2) \approx -0.1237 - (-5.0819) = 4.9582$.

Otrzymany wynik jest bardzo bliski wartości teoretycznej 5, co potwierdza poprawność implementacji.



Rysunek 1: Wykres wygenerowany na podstawie danych z pliku CSV.