

Równania Różniczkowe i Różnicowe

Zadanie obliczeniowe MES

Wariant 4.2: Wibracje akustyczne warstwy materiału

Jacek Łoboda

19 stycznia 2026

1 Sformułowanie problemu

Celem zadania jest rozwiązywanie równania różniczkowego metodą elementów skończonych.

Równanie różniczkowe w dziedzinie $\Omega = (0, 2)$:

$$-\frac{d^2u(x)}{dx^2} - u(x) = \sin(x) \quad \text{dla } x \in (0, 2) \quad (1)$$

Warunki brzegowe:

$$u(0) = 1 \quad (\text{Warunek Dirichleta}) \quad (2)$$

$$u'(2) - u(2) = 5 \quad (\text{Warunek Robina}) \quad (3)$$

2 Sformułowanie wariacyjne

Aby zastosować metodę elementów skończonych, należy przekształcić równanie (1) do postaci słabiej (wariacyjnej).

Mnożymy równanie stronami przez funkcję testową $v(x) \in V$, taką że $v(0) = 0$ (ze względu na warunek Dirichleta w punkcie $x = 0$), i całkujemy po dziedzinie:

$$\int_0^2 (-u''(x) - u(x)) v(x) dx = \int_0^2 \sin(x) v(x) dx \quad (4)$$

Korzystając z liniowości całki:

$$-\int_0^2 u''(x) v(x) dx - \int_0^2 u(x) v(x) dx = \int_0^2 \sin(x) v(x) dx \quad (5)$$

Całkujemy pierwszy człon przez części:

$$\int_0^2 u''(x) v(x) dx = [u'(x)v(x)]_0^2 - \int_0^2 u'(x)v'(x) dx \quad (6)$$

Podstawiając to do równania otrzymujemy:

$$-\left(u'(2)v(2) - u'(0)\underbrace{v(0)}_0\right) + \int_0^2 u'(x)v'(x) dx - \int_0^2 u(x)v(x) dx = \int_0^2 \sin(x)v(x) dx \quad (7)$$

Uwzględniamy warunek brzegowy Robina (3). Przekształcamy go do postaci $u'(2) = u(2) + 5$ i podstawiamy:

$$-((u(2) + 5)v(2)) + \int_0^2 u'(x)v'(x) dx - \int_0^2 u(x)v(x) dx = \int_0^2 \sin(x)v(x) dx \quad (8)$$

Porządkujemy równanie, przenosząc znane wartości na prawą stronę:

$$\int_0^2 u'(x)v'(x) dx - \int_0^2 u(x)v(x) dx - u(2)v(2) = \int_0^2 \sin(x)v(x) dx + 5v(2) \quad (9)$$

2.1 Homogenizacja warunku brzegowego

Ponieważ $u(0) = 1 \neq 0$, stosujemy podstawienie:

$$u(x) = w(x) + \tilde{u}(x), \quad \text{gdzie } \tilde{u}(x) = 1 \quad (10)$$

Wtedy $w(0) = 0$, więc $w \in V$. Pochodna $\tilde{u}'(x) = 0$. Forma dwuliniowa $B(u, v)$:

$$B(u, v) = \int_0^2 u'v' dx - \int_0^2 uv dx - u(2)v(2) \quad (11)$$

Liniowa forma funkcjonalna $L(v)$:

$$L(v) = \int_0^2 \sin(x)v dx + 5v(2) \quad (12)$$

Podstawiając $u = w + 1$:

$$B(w, v) = L(v) - B(1, v) \quad (13)$$

Obliczamy $B(1, v)$:

$$B(1, v) = \int_0^2 (0)v' dx - \int_0^2 (1)v dx - (1)v(2) = - \int_0^2 v dx - v(2) \quad (14)$$

Ostateczne równanie wariacyjne dla funkcji w :

$$B(w, v) = \int_0^2 \sin(x)v dx + 5v(2) - \left(- \int_0^2 v dx - v(2) \right) \quad (15)$$

$$\boxed{\int_0^2 w'v' dx - \int_0^2 wv dx - w(2)v(2) = \int_0^2 (\sin(x) + 1)v dx + 6v(2)} \quad (16)$$

3 Metodyka rozwiązania

Problem rozwiązyano przy użyciu:

- Dyskretyzacji odcinka $[0, 2]$ na n elementów skończonych.
- Liniowych funkcji kształtu (baza Lagrange'a).
- Numerycznego całkowania metodą kwadratury Gaussa-Legendre'a (2 punkty).
- Algorytmu Thomasa do rozwiązyania trójdiagonalnego układu równań liniowych.

Ostateczne rozwiązanie uzyskuje się poprzez dodanie przesunięcia: $u_h(x) = w_h(x) + 1$.

4 Wyniki obliczeń

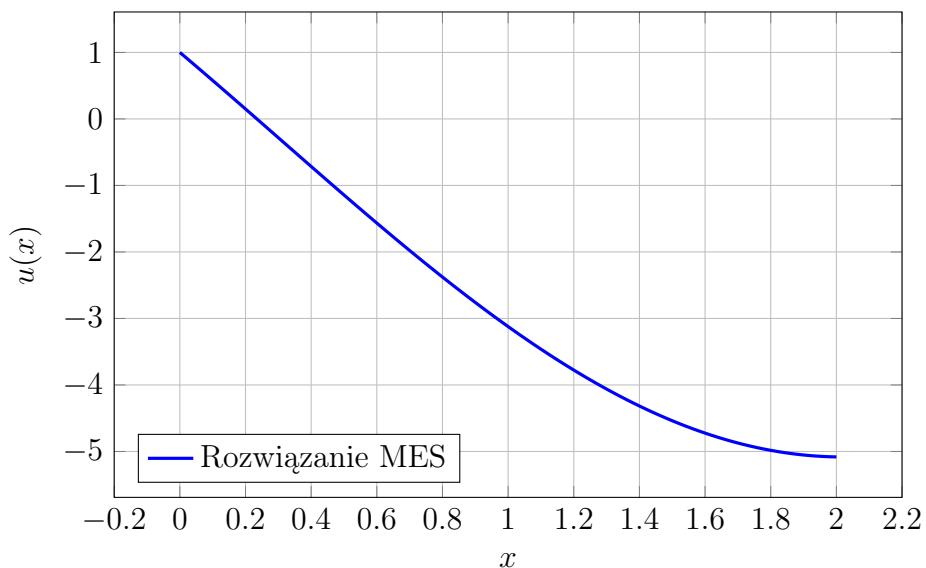
Przeprowadzono symulację dla liczby elementów $n = 100$.

Sprawdzenie warunków brzegowych:

- Wartość w $x = 0$: $u(0) = 1.000000$ (Zgodne z założeniem).
- Wartość w $x = 2$: $u(2) \approx -5.0819$.
- Pochodna numeryczna w $x = 2$: $u'(2) \approx -0.1237$.
- Sprawdzenie warunku Robina: $u'(2) - u(2) \approx -0.1237 - (-5.0819) = 4.9582$.

Otrzymany wynik jest bardzo bliski wartości teoretycznej 5, co potwierdza poprawność implementacji.

Wykres rozwiązania przybliżonego $u(x)$



Rysunek 1: Wykres wygenerowany na podstawie danych z pliku CSV.