

UNIVERZITA KARLOVA
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA



MATEMATICKÁ KARTOGRAFIE
Výpočet souřadnic bodů v rovině Křovákova zobrazení

Jáchym Černík, Monika Novotná

1 Zadání

Úloha č. 1: Výpočet souřadnic bodů v rovině Křovákova zobrazení

GPS aparaturou změřte zeměpisné souřadnice bodů φ, λ bodů P_1, P_2 vztažené k elipsoidu WGS-84 a vypočtěte jejich obraz v rovině Křovákova zobrazení. Měření proveďte na bodech o známých souřadnicích (trigonometrický bod) a to opakovaně.

Pro transformaci mezi elipsoidy použijte sedmiprvkovou Helmertovu prostorovou podobnostní transformaci danou vztahem

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} 1 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 1 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{pmatrix}.$$

Parametry prostorové transformace:

ω_x	4.9984''
ω_y	1.5867''
ω_z	5.2611''
$m - 1$	-3.5623e-6
ΔX	-570.8285 m
ΔY	-85.6769 m
ΔZ	-462.8420 m

Určení zeměpisné šířky φ obrazu bodu P na Besselově elipsoidu proveďte s přesností 0.001". Souřadnice obrazu bodu P v rovině Křovákova zobrazení určete s přesností na cm.

V bodech P_1, P_2 dále vypočtěte:

- hodnoty délkového zkreslení m ,
- hodnoty meridiánové konvergence c .

Porovnejte vliv následujících faktorů na souřadnice bodů P_1, P_2 a vzdálenosti $\|P_1 - P_2\|$:

- zanedbání změny elipsoidu: souřadnice φ, λ měřeny na Besselově elipsoidu,
- zanedbání vlivu elipsoidu: souřadnice měřeny na Gaussově kouli.

Jak se budou lišit takto určené souřadnice a vzdálenosti od hodnot vztažených k elipsoidu WGS-84? Pro jaká měřítká map si taková zjednodušení můžeme dovolit?

Obrazy bodů P_1, P_2 a jejich blízkého okolí vizualizujte s použitím vhodných podkladových geografických dat (např. WMS). Výpočty realizujte v SW Matlab.

2 Teoretický úvod ke zpracování zadání

2.1 Obecný Popis problému

Transformaci bodu $P' = [\varphi', \lambda']$ ze systému zeměpisných souřadnic vztažených ke zdrojovému referenčnímu nebo zemskému elipsoidu, který je dán parametry (a, b) , na bod $P = [\varphi, \lambda]$ v systému zeměpisných souřadnic cílového referenčního/zemského elipsoidu daného parametry (a, b) lze provést následujícími kroky:

- Převod zeměpisných souřadnic bodu $P' = [\varphi', \lambda']$ zdrojového elipsoidu na geocentrické prostorové souřadnice $P' = [X', Y', Z']$ vztažené k tomuto elipsoidu.
- Prostorová podobnostní transformace (Helmertova) mezi geocentrickými souřadnicemi bodu $P' = [X', Y', Z']$ zdrojového elipsoidu a geocentrickými souřadnicemi bodu $P = [X, Y, Z]$ cílového elipsoidu.
- Převod geocentrických souřadnic bodu $P = [X, Y, Z]$ cílového elipsoidu na zeměpisné souřadnice $P = [\varphi, \lambda]$ vztažené k cílovému elipsoidu.

Oba elipsoidy jsou vůči sobě posunuté, natočené, mají rozdílné hodnoty poloos a, b , jedná se o transformaci nestejnorodých souřadnic. Níže uvedené vztahy jsou přibližné a poskytují přesnost transformace v řádech *cm*.

2.2 Vztah zeměpisných a geocentrických souřadnic

Prvním krokem je přepočítání souřadnic naměřených na elipsoidu WGS-84 na prostorové geocentrické souřadnice. Prostorové geocentrické souřadnice (X, Y, Z) pro bod určený zeměpisnými souřadnicemi (φ, λ) a ležící na povrchu referenčního elipsoidu s parametry (a, b) je možné určit ze vztahu

$$P = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \lambda \\ \cos \varphi \sin \lambda \\ (1 - e^2) \sin \varphi \end{pmatrix},$$

kde N představuje příčný poloměr křivosti

$$N = \frac{a}{W},$$

W první geodetickou funkci

$$W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi},$$

a e^2 první excentricitu elipsoidu

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}.$$

Získáním prostorových geocentrických souřadnic (X, Y, Z) na elipsoidu WGS-84 nám posléze umožní převod na geocentrické souřadnice náležící Besselovu elipsoidu. Tento převod je zprostředkován Helmerovou transformací.

2.3 Helmertova prostorová podobnostní transformace souřadnic

Helmertova transformace v \mathbb{E}^3 je sedmiprvková lineární transformace, která bodu $P'_i = [X'_i, Y'_i, Z'_i]$ v daném souřadnicovém systému $(0', X', Y', Z')$ přiřazuje právě jeden bod $P_i = [X_i, Y_i, Z_i]$ v souřadnicovém systému $(0, X, Y, Z)$ a je definována vztahem

$$\mathbf{P} = m\mathbf{R}\mathbf{P}' + \mathbf{\Delta}.$$

Matice $\mathbf{\Delta}$ vyjadřuje posun obou soustav, matice \mathbf{R} je rotační matice, jejíž koeficienty představují směrové kosiny úhlů rotace $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ dle jednotlivých souřadnicových os, a m je měřítkový koeficient.

K výpočtu transformačního klíče ($1 \times$ měřítko, $3 \times$ rotace, $3 \times$ posuny) je nutná znalost čtyř identických bodů v obou souřadnicových systémech. Prvky matice \mathbf{R} představují směrové kosiny rotací dle jednotlivých os.

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_x \mathbf{R}_y \mathbf{R}_z,$$

kde

$$\mathbf{R}_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \omega_x & \sin \omega_x \\ 0 & -\sin \omega_x & \cos \omega_x \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_y = \begin{pmatrix} \cos \omega_y & 0 & -\sin \omega_y \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \omega_y & 0 & \cos \omega_y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_z = \begin{pmatrix} \cos \omega_z & \sin \omega_z & 0 \\ -\sin \omega_z & \cos \omega_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Po roznásobení a úpravě matic lze matici rotace \mathbf{R} vyjádřit ve tvaru

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 1 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 1 \end{pmatrix}.$$

Rovnici Helmertovy transformace lze tedy rozepsat do tvaru

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} 1 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 1 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{pmatrix}.$$

Transformační koeficienty lze vidět v tabulce v Zadání. Po získání $P = [X, Y, Z]$ prostorových geocentrických souřadnic na Besselovu elipsoidu lze transformaci finalizovat převodem geocentrických souřadnic na zeměpisné souřadnice.

Geocentrické souřadnice lze vzhledem k matici \mathbf{N} z kapitoly 2.2 vyjádřit ve tvaru:

$$X = N \cos \varphi \cos \lambda$$

$$Y = N \cos \varphi \sin \lambda$$

$$Z = N(1 - e^2) \sin \varphi.$$

Zeměpisnou délku λ je pak možné určit ze vztahu

$$\tan \lambda = \frac{Y}{X}.$$

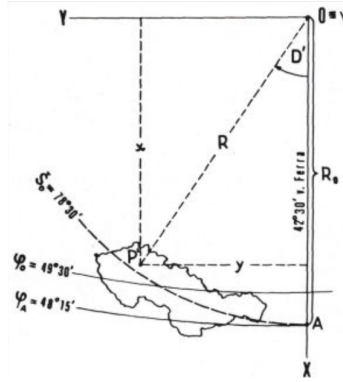
Součet čtverců prvních dvou geocentrických souřadnic $\sqrt{X^2 + Y^2} = N \cos \varphi$. Zeměpisnou šířku φ je pak možné určit ze vztahu

$$\frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2}} = \frac{N(1 - e^2) \sin \varphi}{N \cos \varphi} = (1 - e^2) \tan \varphi,$$

$$\tan \varphi = \frac{Z}{(1 - e^2) \sqrt{X^2 + Y^2}}.$$

2.4 Křovákovo zobrazení

Křovákovo zobrazení je konformní zobrazení navržené Ing. Josefem Křovákem v roce 1922 pro území Československa a odráží tak jeho protáhlý a mírně zakřivený tvar. Jedná se o dvojité kuželové konformní zobrazení v šikmé poloze, které nejprve převádí Besselův elipsoid na referenční kouli (první krok je Gaussovo konformní zobrazení elipsoidu na kouli) a následně tuto kouli do roviny pomocí Lambertova konformního kuželového zobrazení. Parametry zobrazení lze vidět v Obrázku 1.



Obrázek 1: Zobrazovací parametry Křovákova zobrazení (zdroj: *Multimediální učebnice Kartografie a Geoinformatiky*)

Výpočet zobrazení zahrnuje několik kroků, které je možné zapsat zkráceně takto:

$$\varphi, \lambda \rightarrow U, V \rightarrow \check{S}, D \rightarrow \rho, \varepsilon \rightarrow X, Y$$

Kde:

1. φ, λ jsou zeměpisné souřadnice na Besselově elipsoidu.
2. U, V jsou souřadnice po Gaussově konformním zobrazení elipsoidu na kouli.
3. \check{S}, D jsou kartografické souřadnice na kouli (sférické polární souřadnice vztahované ke kartografickému pólu K).
4. ρ, ε jsou polární souřadnice v rovině kuželového zobrazení.
5. X, Y jsou výsledné rovinné pravoúhlé souřadnice S-JTSK.

Pro využití referenční plochy platí tyto parametry:

- Besselův elipsoid: $a = 6377397.1550$ m, $b = 6356078.9633$ m,
- Gaussova koule: $R = 6380703.6105$ m.

2.4.1 Konformní zobrazení referenčního elipsoidu na Gaussovu sféru

Tento krok (U, V) využívá Gaussovo konformní zobrazení z elipsoidu na sféru, které pracuje s jednou nezkreslenou rovnoběžkou (Obrázek 1) $\varphi_0 = 49^\circ 30'$. Konstanty zobrazení se určují z následujících vztahů:

$$\alpha = \sqrt{1 + \frac{e^2 \cos^4 \varphi_0}{1 - e^2}},$$

$$k = \frac{\tan\left(\frac{\alpha \varphi_0}{2} + 45^\circ\right)}{\left(\frac{1 - e \sin \varphi_0}{1 + e \sin \varphi_0}\right)^{\frac{\alpha e}{2}} \tan\left(\frac{\varphi_0}{2} + 45^\circ\right)},$$

$$R = \frac{a \sqrt{1 - e^2}}{1 - e^2 \sin^2 \varphi_0},$$

$$\sin u_0 = \frac{\sin \varphi_0}{\alpha}.$$

Zobrazovací rovnice mají tvar:

$$\tan\left(\frac{u}{2} + 45^\circ\right) = \frac{1}{k} \left[\tan\left(\frac{\varphi}{2} + 45^\circ\right) \left(\frac{1 - e \sin \varphi}{1 + e \sin \varphi}\right)^{\frac{\varepsilon}{2}} \right]^\alpha,$$

$$v = \alpha \lambda_F = \alpha(\lambda + 17^\circ 40').$$

2.4.2 Transformace zeměpisných souřadnic na kartografické souřadnice

Kartografický pól byl určen na základě vhodného bodu (Obrázek 1), který by zajišťoval vhodný průběh nezkreslené rovnoběžky a jeho souřadnice jsou:

$$u_k = 59^\circ 42' 42,6969'' \text{ s.š.}, \quad v_k = 42^\circ 31' 31,41725'' \text{ v.d. (Ferro)}.$$

Pro převod souřadnic (\check{S}, D) je využito vztahů sférické geometrie:

$$\sin \check{s} = \sin u \sin u_k + \cos u \cos u_k \cos(v_k - v),$$

$$\sin d = \frac{\cos u}{\cos \check{s}} \sin(v_k - v).$$

2.4.3 Konformní zobrazení Gaussovy koule do roviny

Pro zobrazení koule do roviny (ρ, ε) je využito Lambertovo konformní kuželové zobrazení s jednou nezkreslenou rovnoběžkou $\check{s}_0 = 78^\circ 30'$. Pro konstanty zobrazení platí:

$$c = \sin u_0,$$

$$\rho_0 = k \cdot R \cdot \cot(u_0) = 0,9999 \cdot R \cdot \cot(u_0).$$

Zobrazovací rovnice mají tvar:

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{\tan\left(\frac{\check{s}_0}{2} + 45^\circ\right)}{\tan\left(\frac{\check{s}}{2} + 45^\circ\right)} \right)^c,$$

$$\varepsilon = c \cdot d.$$

2.4.4 Transformace polárních souřadnic na pravoúhlé

Převod polárních souřadnic na pravoúhlé (X, Y) je dán vztahem:

$$x = \rho \cos \varepsilon,$$

$$y = \rho \sin \varepsilon.$$

2.4.5 Délkové zkreslení m

Délkové měřítko v rovnoběžce Křovákova zobrazení je možné určit pomocí vztahu:

$$m_r = \frac{c \cdot \rho}{R \cos \check{s}}.$$

Pro délkové zkreslení pak platí:

$$m = m_r - 1.$$

2.4.6 Meridiánová konvergence c

Meridiánová konvergence odpovídá úhlu, který svírá obraz místního poledníku s obrazem základního poledníku. Pro Křovákovo zobrazení se určuje ze vztahu:

$$c = \varepsilon - \xi,$$

kde ξ představuje úhel mezi obrazem zeměpisného a kartografického poledníku a je vyjádřen vztahem:

$$\sin \xi = \frac{\cos u_k \sin(180^\circ - d)}{\cos u}.$$

Meridiánovou konvergenci je také možné určit prostřednictvím řady:

$$c = 0,008257 \cdot y + 2,373 \cdot \frac{y}{x} \quad [\text{km}].$$



Obrázek 2: Způsob měření

3 Vypracování

Pro účely úlohy byly GPS aparátem zaměřeny zeměpisné souřadnice φ , λ bodů P_1 , P_2 vztažené k elipsoidu WGS-84. Bod P_1 byl naměřen pomocí sportovních hodinek Garmin Instinct I (2018). Bod P_2 byl naměřen pomocí novějšího modelu hodinek Garmmin Instinct III Solar (2025). Způsob měření lze vidět na Obrázku 2. Měření byla prováděna na bodech o známých souřadnicích – trigonometrických bodech. Bodu P_2 tak odpovídá trigonometrický bod v Dejvicích a bodu P_1 trigonometrický bod na Divčích hradech. Souřadnice každého bodu byly měřeny třikrát a z jejich hodnot byl vypočítán aritmetický průměr. Naměřené a vypočítané souřadnice obou bodů jsou uvedeny v tabulce 1.

	φ'	λ'
P_1	50.050572	14.384475
	50.05059	14.384457
	50.05057	14.384455
P_1 – průměr	50.050580	14.384462
P_2	50.101878	14.392657
	50.101885	14.392600
	50.101895	14.392632
P_2 – průměr	50.101886	14.392629

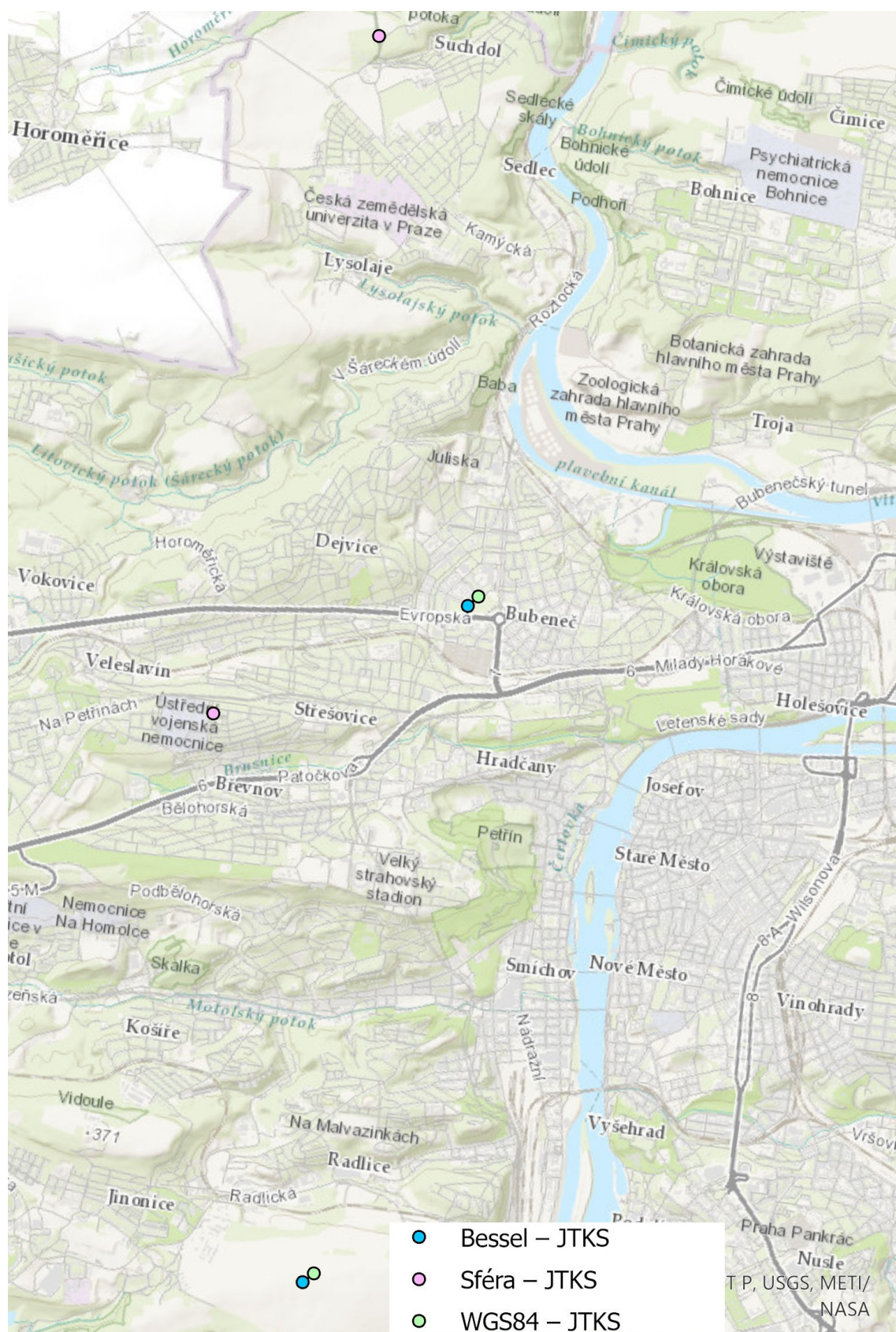
Tabulka 1: Naměřené souřadnice bodů P_1 a P_2 a jejich průměry.

V rámci úlohy byly vypracovány dva skripty:

- `uv_sd.m` – funkce převádí konformní souřadnice (u, v) z Gauss-Krügerovy projekce do obecné polohy vůči kartografickému pólu (s, d) .
- `wgs_jtsk.m` – hlavní skript, který obsahuje tři funkce. První z nich je převod souřadnic WGS84 do Křovákova zobrazení (`wgs_jtsk`). Další funkcí je výpočet na Besselově elipsoidu (`bess_jtsk`). Poslední funkce nebere vliv elipsoidu, ale vliv Gaussovy sféry s Lambertovo koželovým zobrazením (`sphere_jtsk`).
Ve skriptu jsou dále každou variantu funkce vypočtena vzdálenost mezi body P_1 , P_2 , rozdíl v souřadnicích oproti WGS84 a nakonec. Skript také obsahuje souřadnice z dat ČÚZK (2025), pro které je určena vzdálenost a odchylky.

4 Výsledky

V tabulce 2 a 3 jsou kromě vypočtených souřadnic v Křovákově zobrazení bodu P_1 a P_2 uvedeny hodnoty jejich měřítka délek (m_r), délkového zkreslení (v) a meridiánové konvergence (c) pro všechny tři typy převodu souřadnic. Pro kontrolu přesnosti jsou zde uvedeny hodnoty z ČÚZK (2025).



Obrázek 3: Vizualizace výsledků transformace

	Souřadnice		Charakteristiky		
	X [m]	Y [m]	m_r	ν	c
WGS84 – JTKS	1046717.27	745979.04	0.999902	-0.098013	7.860587°
Bessel – JTKS	1046792.37	746067.82	0.999902	-0.098048	7.861419°
Sféra – JTKS	1042104.93	746802.88	0.999903	-0.096854	7.8760285°
ČÚZK	1046719.42	745979.37	–	–	–

Tabulka 2: Vypočtené souřadnice a charakteristiky pro bod P1

	Souřadnice		Charakteristiky		
	X [m]	Y [m]	m_r	ν	c
WGS84 – JTKS	1041144.57	744619.60	0.999904	-0.095992	7.854274°
Bessel – JTKS	1041220.27	744708.75	0.999904	-0.096042	7.855110°
Sféra – JTKS	1036525.62	745442.19	0.999906	-0.094398	7.869708°
ČÚZK	1041146.32	744619.69	–	–	–

Tabulka 3: Vypočtené souřadnice a charakteristiky pro bod P₂

Na obrázku 3 lze vidět výsledné pozice souřadnic, přičemž v obou lokalitách je posun mezi varianty vizuálně podobný. Při porovnání souřadnic v tabulkách 2 a 3 je patrné, že hodnotě z ČÚZK je nejbližší převod WGS84 - JTSK. V obou případech se neliší o více jak 2,5 metru. Pokud budeme pracovat na úrovni Bessel - JTSK, kdy vynecháme určité kroky a zanedbáme změny elipsoidu, rozdíl bude dosahovat už téměř 89 metrů. Ve třetí variantě, kde zanedbáme elipsoid jsou rozdíly obrovské, dosahují přes 4,5 km.

Při porovnávání vzdáleností mezi body P1 a P2 v jednotlivých případech vidíme (tabulka 4), že se jedná o téměř stejnou vzdálenost mezi body. Nejvyšší rozdíl vykazuje pouhých 6,7 metru.

Měřítko délek (m_r), délkové zkreslení (ν) a meridiánová konvergence (c) se pohybují v každé transformaci na velmi podobných hodnotách.

Když zanedbáme změny elipsoidu, maximální odchylka je rovna 88,78 metru viz tabulka 8. Při grafické přesnosti 1 mm se odchylka 88,78 rovná měřítku 1 : 88 780, což znamená, že zanedbání změny elipsoidu je možno pro mapy s měřítkem 1:88 780.

Úplném zanedbání elipsoidu pak znamená, že mapy musí mít měřítko minimálně 1 : 4 612 000 viz tabulka 5.

	$ P_1 - P_2 $	Rozdíl vůči WGS84
WGS84 – JTKS	5736.12	–
Bessel – JTKS	5735.45	0.6729
Sféra – JTKS	5742.84	-6.7200
ČÚŽK	5736.56	-0.4409

Tabulka 4: Vzdálenost mezi body P_1 a P_2 a rozdíl vůči WGS84

	bod P_1		bod P_2	
	X [m]	Y [m]	X [m]	Y [m]
Bessel – JTKS	-75.0964	-88.7798	-75.7002	-89.1438
Sféra – JTKS	4612.3393	-823.8398	4618.9516	-822.5908
ČÚŽK	-2.1432	-0.3224	-1.7466	-0.0881

Tabulka 5: Rozdíly mezi souřadnicemi bodů vůči WGS-84

5 Závěr

Úkolem bylo změřit zeměpisné souřadnice dvou bodů, které jsou vztažené k elipsoidu WGS-84 a poté je převést do Křovákova zobrazení. Pro tento úkol byly vytvořeny dva skripty, jeden pomocný a jeden hlavní, který se spouští a počítá charakteristiky. Bylo testováno zjednodušení převodu souřadnic, přičemž byl zanedbán vliv elipsoidu.

Výsledky, která byly komentovány v kapitole 4 ukazují, že vypočítané souřadnice jsou velmi podobné souřadnicím poskytovaným ČÚŽK. Zanedbání elipsoidu přináší výrazně odlošnou hodnotu x a y. Dochází pouze k chybám v hodnotách souřadnic, nikoliv chybě vzájemné vzdálenosti.

V případě této práce byly provedeny dvě měření. Každé měření proběhlo v jinou dobu, jiným přístrojem a v jiném prostředí. Bod P_1 byl měřen v březnu, v nezastavěném prostředí hodinkami Garmin Instinct I. Druhý bod P_2 byl měřen v květnu, v zastavěném prostředí pomocí hodinek Garmin Instinct III Solar. Přes tyto rozdíly lze vidět na obrázku 2, že vzájemná vzdálenost bodů je stejná v obou případech.

6 Zdroje

ČÚŽK (2025): Polohové bodové pole. Dostupné z: [https://geoportal.cuzk.cz/\(S\(zvss2yko0zwqxgiwtc5hn3oq\)\)/default.aspx?mode=TextMetaside=bodpolemetadataID=CZ-CUŽK-DBP-PBPmenu=271](https://geoportal.cuzk.cz/(S(zvss2yko0zwqxgiwtc5hn3oq))/default.aspx?mode=TextMetaside=bodpolemetadataID=CZ-CUŽK-DBP-PBPmenu=271)

7 Seznam příloh

- uv_sd.m
- wgs_jtsk.m

Reference

- [1] ČÚZK(2025). *Geoportál Zeměměřického úřadu*. dostupné z <https://ags.cuzk.gov.cz/geoprohlizec/>
- [2] Kaplan, V., Keptrová, K., Konečný, M., Stachoň, Z., Tajovská, K. (2020). *Multimediální učebnice Kartografie a Geoinformatiky*. Geografický ústav PřF MU Brno. Dostupné z: <https://gis.geogr.muni.cz/ucebnice>. [12. 4. 2025].
- [3] Bayer. T(2025) *Transformace zeměpisných souřadnic mezi elipsoidy*. https://web.natur.cuni.cz/~bayertom/images/courses/mmk/mmk_cv_1_navod.pdf

..