Univerzita Karlova
Přírodovědecká fakulta

MATEMATICKÁ KARTOGRAFIE
Konstrukce polyedrických glóbů

Jáchym ČERNÍK, Monika NOVOTNÁ
1. N-GKDPZ
Praha

1. Zadání

Vybraná platónská tělesa (šestistěn, čtyřstěn a osmistěn nebo dvanáctistěn) použijte pro polyedrickou aproximaci sféry. Na plošky platonských těles znázorněte v gnómonické projekci

$$x = R * \tan(90° - š)\cos d,$$
$$y = R * \tan(90° - š)\sin d,$$

Geografickou síť doplněnou zákresem kontinentů. Skript pro generování sítě poledníků, rovnoběžek a znázornění kontinentů realizujte v programu MATLAB bez použití externích funkcí. Soubory se zákresem kontinentů exportujte z vhodné datové sady.

Vytvořte prostorové modely polyedrických glóbů v měřítku 1:100 000 000 nebo 1:50 000 000 dle možností Vaší tiskárny a pošlete fotografii/video Vašeho glóbu. Součástí úlohy bude příloha s rozloženými modely glóbů.

Zjistěte následující vlastnosti gnómonické projekce v okrajovém bodě Q jedné ze stěn Platónského tělesa:

- měřítko mp v poledníku, měřítko mr v rovnoběžce,
- poloosy a, b Tissotovy indikatrix,
- úhel ω' mezi obrazem poledníku a rovnoběžky,
- maximální úhlové zkreslení Δω,
- měřítko ploch P,
- meridiánovou konvergenci c.

Vypočtené parametry v bodě Q použijte k zákresu Tissotovy indikatrix (doporučené měřítko 1:1 000 000), jako podklad využijte obraz geografické sítě na příslušné stěně Platónského tělesa v gnomonické projekci, volte Δu = Δv = 10° (formát A4, popř. odpovídající).

Výpočty proveďte pro referenční kouli s poloměrem R = 6380 km, hodnoty měřítek a poloos Tissotovy indikatrix uveďte s přesností na 6 desetinných míst, úhlové hodnoty s přesností na ''.
Výsledky zkontrolujte s hodnotami získanými z programu Proj.4.

2. Popis a rozbor problému + vzorce

2.1. Úvod

Při konstrukci polyedrického glóbu na platónském tělese je nutné, aby rovina definovaná stranou platónského tělesa a středem sféry, přičemž rovina je vůči tělesu opsaná či vepsaná, řezala sféru v hlavní kružnici, tedy v ortodromě (Bayer 2025a). Hranice stěn platónského tělesa, při zobrazení v gnomonické projekci, jsou úsečky a celou sféru lze bez překryvu rozložit po jednotlivých ploškách.

Tvorba polyedrického glóbu je tvořena několika kroky, jako první je nutné určit zeměpisné souřadnice vrcholů plošek tvořící platonské těleso. U každé plošky se počítá kartografický pól K, který je definován těžištěm plošky. Pro lepší přehlednost se vygeneruje zeměpisná síť. Následně jsou vloženy body, které definují kontinenty a podle plošek se transformují vzhledem ke kartografickým pólům a jsou zobrazovány v gnomonické projekci. Ve vyznačené plošce se zobrazí kontinent a mimo plošku dochází k velkému zkreslení. Pro výsledek to však nevadí, jelikož se vyříznou zájmové plošky, které jsou definované souřadnicemi vrcholů. Vzniklé stěny platónského tělesa se následně spojí a vytvoří polyedrický glób.

2.2. Pravidelný dvanáctistěn

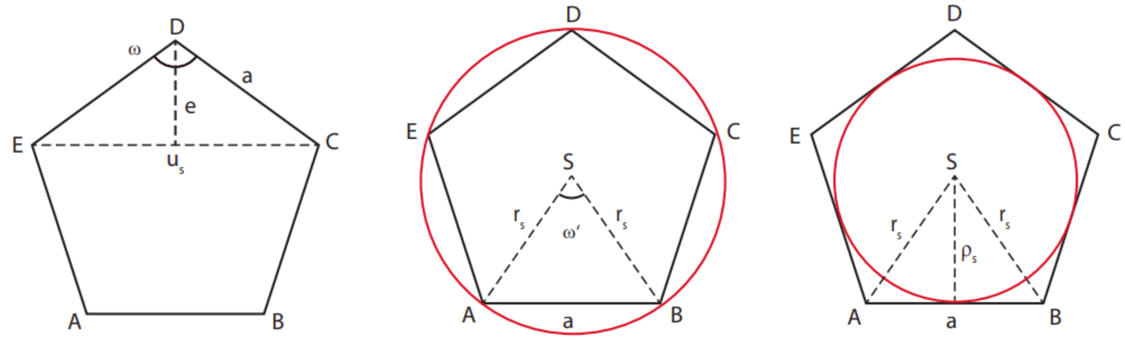
Dvanáctistěn je jedním z pěti platónských těles. Jedná se o 12 pravidelných pětiúhelníků s hranou a. V těchto pětiúhelnících platí, že dvě strany svírají úhel $\omega = \frac{3}{5}\pi = 108°$. Délka stěnové úhlopříčky u_s (Obr. 1) je vypočítána pomocí kosinové věty z rovnoramenného trojúhelníka CDE

$$u_s = a\sqrt{2(1 - cos\omega)} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Poloměr opsané kružnice r_s (Obr. 1) určíme z rovnoramenného trojúhelníku s pomocí kosinové věty, *cos* = 72°, poloměr vepsané kružnice ρ_s (Obr. 1) pětiúhelníku určíme z Pythagorovy věty (Bayer 2025)

$$r_s = \frac{a}{2(1-cos\omega)} = \frac{a}{10}\sqrt{10(5+\sqrt{5})},$$

$$\rho_s = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}.$$



Obr. 1: Výpočet délky stěnové úhlopříčky $u_{s,}$ poloměru r_s a ρ_s (Bayer 2025)

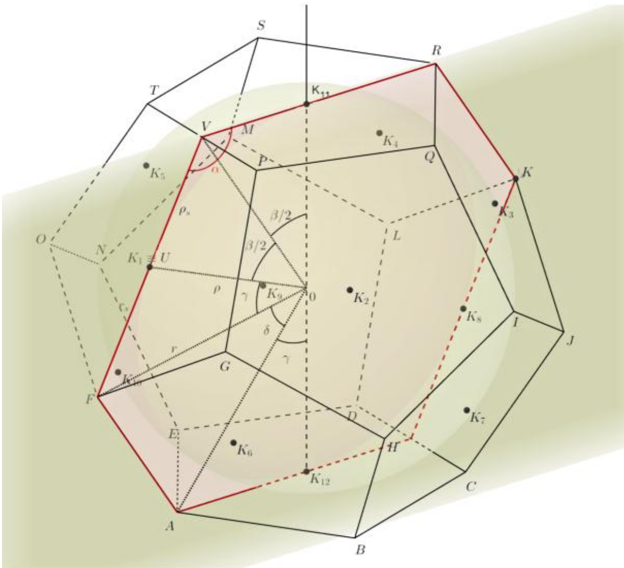
Mezi jednotlivými pětiúhelníky – plochami dvanáctistěnu platí, že úhel $\beta = 180° - \alpha$, přičemž $\alpha = 116{,}5651°$. Rovina 0AF, která má střed v těžišti dvanástistěnu se dotýká těžiště každé stěny (Obr. 2), jedná se o bod U. Jeho zeměpisnou šířku určujeme

$$u_\alpha = 90° - \beta = \alpha - 90° \approx 26.5651°.$$

Kartografické póly jsou určeny již zmíněnou zeměpisnou šířkou u_α, která je shodná na severní polokouli, na jižní polokouli je tato zeměpisná šířka záporná. Na severním a jižním pólu se zeměpisná šířka rovná 90° a -90°. Co se týče zeměpisné délky, tak rovina základního poledníku a rovina řezu AF0 se shodují, tedy kartografický pól K1 = 0°. Další kartografické póly jsou vzdálené 72°. Hodnoty K1 – K5 na severní polokouli jsou následující
K1 = [u_α;0°], K2 = [u_α;72°], K3 = [u_α;144°], K4 = [u_α;216°], K5 = [u_α;288°].

Kartografické póly na jižní polokouli K6 – K10 jsou
K6 = [-u_α;36°], K7 = [-u_α;108°], K8 = [-u_α;180°], K9 = [-u_α;252°], K10 = [-u_α;324°].

Poslední dva kartografické póly jsou umístěny na severním a jižním pólu, tedy K11[90;0°] a 12[- 90°;0°].



Obr. 2: Řez dvanáctistěnem rovinou 0AF odpovídající rovině základního poledníku (Bayer 2025)

Poloměr vepsané sféry je označován jako , z pravoúhlého trojúhelníku vychází

$$tan\ \frac{\alpha}{2}\ = \frac{\rho}{\rho_s}, \rightarrow \rho = \rho_s tan\ \frac{\alpha}{2}$$

Sféra řeže dvanáctistěn v bodech ACKSPF, přičemž poloměr je označen jako 0F. Zeměpisou šířku bodů P – T, získáme z , kde γ = 37,3774°. Pro jižní polokouli pak platí symetrie, tedy u_j= - , odlehlost bodů je v obou případech 72°. Vrcholy G – O jsou dány a vrcholy F – N se rovnají záporné hodnotě (Bayer 2025a).

2.3. Gnómonická projekce

Gnómonická projekce je jedním z azimutálních zobrazení, přičemž promítá ze středu sféry na rovinu, která je k ní tečná v kartografickém pólu. Zobrazovací rovnice v obecné poloze má tvar

$$(\rho, \varepsilon) = (r\ tan\ \ (90° - š)\ , d)$$

a je vztažena ke kartografickému pólu, proměnné š,d jsou souřadnice bodu. Zobrazovací rovnice v pravoúhlém tvaru jsou

$$(x, y) = (r\ tan\ \ (90° - š) cos\ d\ \ , r\ tan\ (90° - š) sin\ d\ )$$

Při zobrazení zeměpisné sítě se díky gnomonické projekci zobrazují poledníky jako přímky vycházející z pólů a rovnoběžky jako kružnice. Co se týče rovníku, gnomonická projekce ho nedokáže zobrazit, jedná se tedy o polokouli bez rovníku.

3. Výpočty včetně všech potřebných mezivýpočtů s odpovídající přesností a jednotkami

Dvanáctistěn byl vytvořen v programu MATLAB za použití vzorců definovaných v kapitole 2.2. s využitím skriptů z předmětu Matematická kartografie. Pomocí programu byly také vypočítány vlastnosti gnómonické projekce. Výpočty jsou založeny na informaci ze zobrazovacích rovnic v pravoúhlém tvaru z kapitoly 2.3. a jejich parciálních derivacích.

Gnomonická projekce je definována tímto vztahem:

$$x = R * \tan(90° - u)\cos v$$
$$y = R * \tan(90° - u)\sin v$$

Parciální derivace gnomonické projekce:

$$fu = \frac{\partial x}{\partial u} = -\frac{R * cos(v)}{cos^2(90° - u)}$$

$$fv = \frac{\partial x}{\partial v} = -R\ tan\ (90° - u)\ sin(v)$$

$$gu = \frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{R * sin(v)}{cos^2(90° - u)}$$

$$gv = \frac{\partial y}{\partial v} = R\ tan\ (90° - u)\ cos(v)$$

3.1. Měřítko v poledníku a v rovnoběžce

Měřítko poledníku m_p a měřítko rovnoběžek m_r je dáno vztahem:

$$m_p^2 = \frac{fu^2 + gu^2}{R^2}$$

$$m_p^2 = \frac{fv^2 + gv^2}{R^2 * cos^2 u}$$

Jedná se o čtverce měřítek, poté $m_p = \sqrt{m_p^2}$ a $m_r = \sqrt{m_r^2}$.

3.2. Poloosy a,b Tissatovy indikatrix

Při určování poloos Tissotovy indikatrix v jednoduchém zobrazení odpovídají hlavním paprskům:

$$a = m_p$$

$$b = m_r$$

3.3. Úhel ω' mezi obrazem poledníku a rovnoběžky

Úhel je definován pomocí parciálních derivací:

$$tan\ \ \omega' \ = \frac{gu\, fv - fu\, dv}{fu\, fv + gu\, gv}$$

3.4. Maximální úhlové zkreslení Δω

Pro maximální úhlové zkreslení platí:

$$sin\ \frac{\Delta\omega}{2}\ = \frac{|b - a|}{b + a}$$

3.5. Měřítko ploch P

Měřítko ploch vyjadřuje poměr mezi diferenciálním elementem v obraze a odpovídající element na sféře:

$$P = \frac{gu\, fv - fu\, gv}{r^2 u}$$

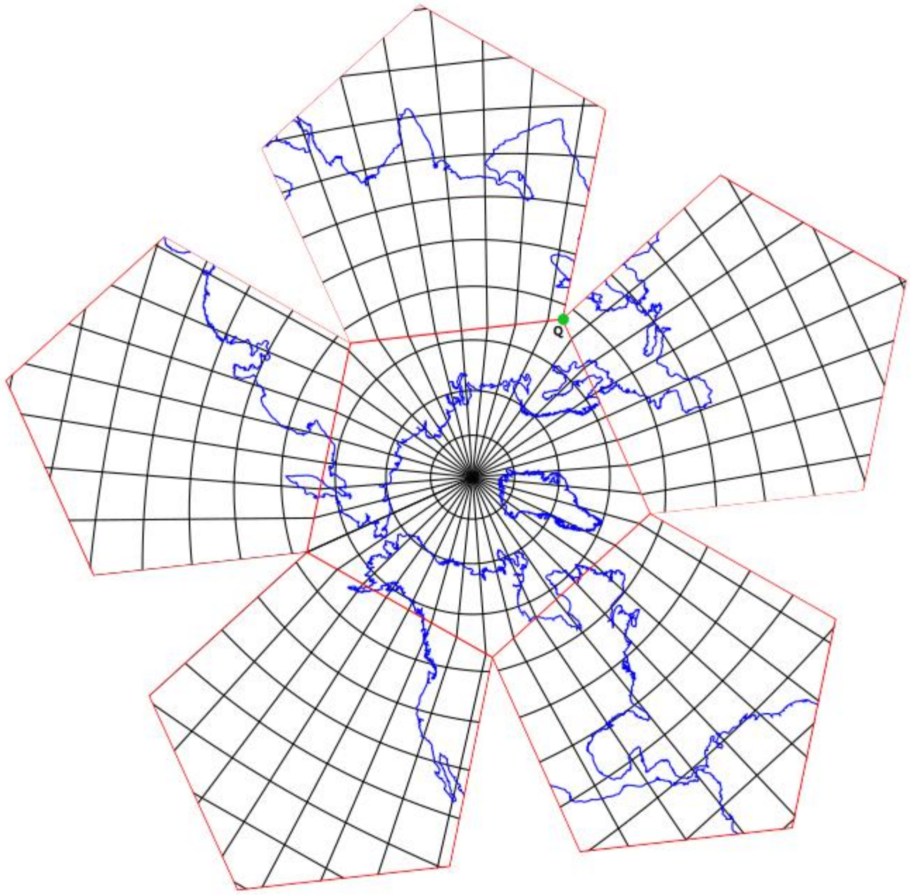
3.6. Meridiánová konvergence c

Jedná se o úhel mezi obrazem místního poledníku ve zvoleném a obrazem základního poledníku:

$$c = \frac{\pi}{2} - arctan\ \left(\frac{fu}{gu}\right)$$

4. Zhodnocení výsledků + závěr

K výpočtu zadaných vlastností gnómonické projekce byl zvolen bod Q (Obr. 3).



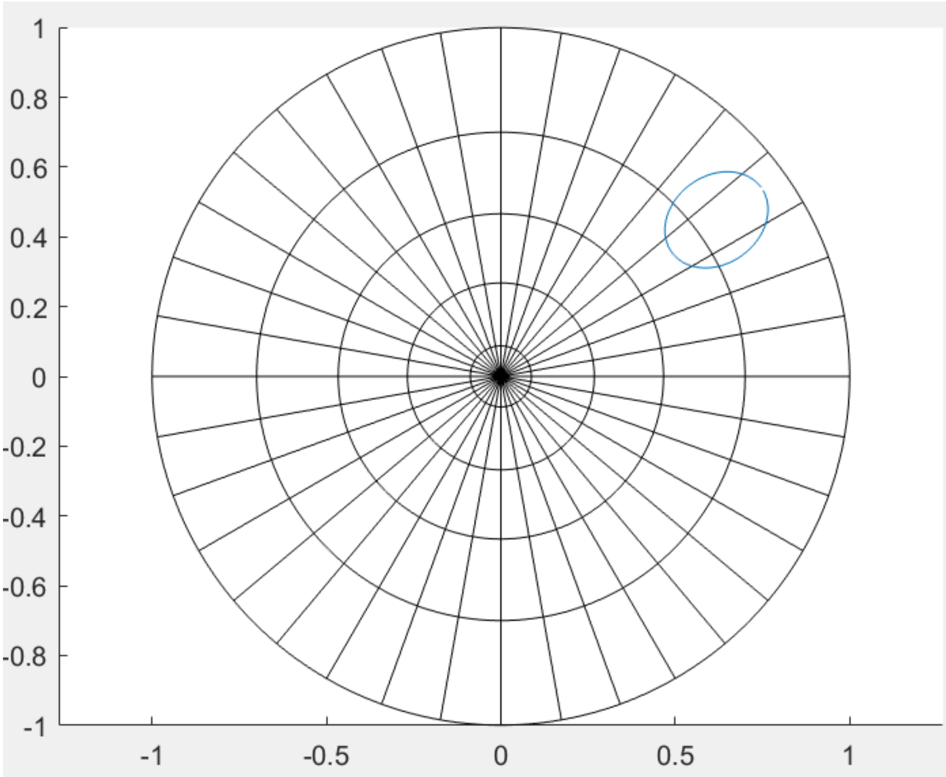
Obr. 3: Poloha bodu Q

Hodnoty byly vypočteny podle vzorců z kapitoly 3. a jsou zobrazeny v tabulce č. 1.

Vlastnosti	výsledná hodnota
Měřítko v poledníku m_p	1,583593
Měřítko v rovnoběžce m_r	1,258409
Tissatova indikatrix poloosa a	1,583593
Tissatova indikatrix poloosa b	1,258409
Úhel ω’ mezi obrazem poledníku a rovnoběžky	90°
Maximální úhlové zkreslení Δω	13,140444
Měřítko ploch P	1,992808
Meridiánová konvergence c	54°

Tab. č. 1: Hodnoty vlastností gnómonické projekce vypočtené v prostředí MATLAB

Vypočtené hodnoty byly využity k zakreslení Tissatovy indikatrix (Obr. 4)



Obr. 4: Tissatova indikatrix v bodě Q

V rámci této práce byl vytvořen polyedrický glóbus v podobě pravidelného dvanáctistěnu. Glóbus je v měřítku 1 : 50 000 000, což znamená, že hrana pětiúhleníku je rovna 5,7 cm. Zeměpisná síť je vytvořena pomocí skriptu Graticule.m, který generuje síť poledníků a rovnoběžek podle zadaných parametrů. Pro načtení kontinentů byl použit sktipt globeFace.m, proběhla transformace zeměpisných souřadnic pomocí uv_sd.m. V u12.m byl nastaven kartografický pól pro každou plošku a vrcholy plošek, které definují řez plošek viz. kapitola 2.2. Vykreslení pouze potřebného pětiúhelníkového tvaru plošek bylo vytvořeno ořezem pomocí skriptu boundary.m.

Model byl vytisknut na pevný papír a následně byl sestaven dvanáctistěn. Pro zobrazení kontinentů a zeměpisné sítě bylo dle zadání využilo gnómonické projekce. V bodě Q byly vypočteny potřebné vlastnosti k zakreslení Tissatovy indikatrix.

5. Seznam Příloh

- Kontinenty - složká .txt obsahující body kontinentů
- *uv_sd.m* - převod zeměpisných souřadnic na souřadnice kartografické
- *u12.m* - řídící skript pro vytvoření 12 plošek polyedrického glóbu.
- *severni_polokoule.pdf* - výstup severní části polyedrického glóbu
- *jizni_polokoule.pdf* - výstup jižní polyedrického glóbu
- *graticule.m* - funkce pro vytvoření zeměpisné sítě
- *gnom.m* - skript pro gnómonickou projekci
- *gnom_distortion.m* - výpočet parametrů gnómonické projekce
- *globeFace.m* - skript k vykreslení všech plošek glóbu
- *continent.m* - skript pro nahrání kontinetů ze souboru a jejich vykreslení
- *boundary.m* - vykreslení hraniční línie

5. Zdroje

BAYER, T. (2025a): Konstrukce glóbů na platonských tělesech, návod na cvičení. Přírodovědecká fakulta UK. Dostupné z: https://web.natur.cuni.cz/~bayertom/images/courses/mmk/mmk_cv_2_navod.pdf [cit. 10. 4. 2025]