UNIVERZITA KARLOVA
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

MATEMATICKÁ KARTOGRAFIE
Srovnání konformních kartografických zobrazení pro zvolené území

Jáchym Černík, Monika Novotná

14. května 2025

1 Zadání

Úloha č. 3: Srovnání konformních kartografických zobrazení pro zvolené území

Pro zvolenou dvojici států (dominantní směr, bez dominantního směru) porovnejte hodnoty délkového zkres- lení u následujících kartografických zobrazení:

- Konformní válcové zobrazení se dvěma nezkreslenými rovnoběžkami (Mercatorovo zobrazení)

$$x = R \cdot \cos(u_0)\cos(v),$$

$$y = R \cdot \ln\tan\left(\frac{u}{2} + 45°\right).$$

- Konformní kuželové zobrazení se dvěma nezkreslenými rovnoběžkami (Lambertovo zobrazení)

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{\tan(\frac{u_0}{2} + 45°)}{\tan(\frac{u}{2} + 45°)}\right)^n,$$

$$\varepsilon = n \cdot v.$$

- Konformní azimutální zobrazení (stereografická projekce)

$$\rho = 2R \cdot \tan\left(\frac{90° - u}{2}\right)$$

$$\varepsilon = v.$$

Kartografická zobrazení pro každý stát navrhněte v obecné poloze, parametry potřebné pro výpočet odvoďte z vhodného mapového podkladu.

Pro konformní válcové a konformní kuželové zobrazení volte dvě nezkreslené rovnoběžky tak, aby ve středu i na okraji zájmového území byly stejné absolutní hodnoty délkového zkreslení: tj. $m_{sr} = m_{jr} = 1 + \nu$, $m_{rr} = 1 - \nu$. V případě stereografické projekce použijte jednu nezkreslenou rovnoběžku volenou s využitím multiplikační konstanty μ.

Rozhodněte, kolik pásů bude potřeba, pokud délkové zkreslení na okrajích nemá překročit 20 cm/km.

Pro každou z variant na podkladové mapě se zákresem státu vygenerujte ekvideformáty délkového zkreslení s vhodně zvoleným krokem.

V závěru proveďte diskuzi nad dosaženými hodnotami, pokuste se tyto výsledky zobecnit a rozhodnout, které zobrazení je pro každý ze států vhodnější.

Úhlové výpočty proveďte s přesností na minuty, výpočty zkreslení na $1 \cdot 10^{-6}$.

2 Popis a rozbor problému

Hlavním úkolem této práce je porovnat charakteristiky různých jednoduchých kartografických zobrazení pro dvě odlišné geografické oblasti – jednu s výrazným podélným či příčným rozsahem a druhou bez takového dominantního směru. Cílem je zhodnotit, jak jsou tato zobrazení vhodná pro daná území. Toto hodnocení bude vycházet z analýzy hodnot délkového zkreslení, konkrétně na okrajových rovnoběžkách zkoumaných oblastí. Všechna posuzovaná zobrazení jsou navržena v obecné poloze. Jedná se o tři typy: válcové konformní zobrazení se dvěma standardními (nezkreslenými) rovnoběžkami, kuželové konformní zobrazení, rovněž se dvěma standardními rovnoběžkami, a stereografickou projekci.

Očekává se, že pro území, která jsou výrazně protažená v jednom směru, budou nejlépe vyhovovat válcová nebo kuželová zobrazení. U těchto typů zobrazení tvoří izolinie stejného zkreslení (ekvideformáty) obrazy kartografických rovnoběžek, které mají podobu křivek nebo úseček. Naopak pro území, která nemají zřetelný dominantní tvar (např. jsou spíše kruhová nebo nepravidelná), by mělo být vhodnější použít azimutální zobrazení. U azimutálních zobrazení odpovídají ekvideformáty obrazům kartografických rovnoběžek ve tvaru soustředných kružnic.

2.1 Válcové konformní zobrazení

Pro válcové konformní zobrazení je v této práci využito Mercatorovo zobrazení v obecné poloze. Teoretické principy tohoto zobrazení formuloval Gerhard Mercator (rodným jménem Kremer), který jej poprvé využil v roce 1569. toto zobrazení mezi konformními válcovými zobrazeními vyniká tím že zobrazuje geografickou síť jako dvě osnovy rovnoběžných na sebe kolmých přímek. Dalším aspektem je že loxodromy zde protínají pod stejným úhlem. Z této vlastnosti vyplývá časté použí Mercatory mapy pro navigační účely. Nevýhodou tohoto zobrazení ale je že s rostoucí zeměpisnou/ kartografickou šířkou ze zvětšují deformace nejen ploch ale i délek. (Pyšek 1995) Zobrazovací rovnice v obecné poloze má následující tvar:

$$x = c \cos d$$
$$y = R \cdot \ln \tan \left(\frac{\check{s}}{2} + 45° \right),$$

kde $c = R \cdot \cos \check{s}_0$. Nezkreslená rovnoběžka $\check{s}_0$ je volena tak, aby absolutní hodnota zkreslení ν byla na severním i jižním okraji $m_{sr} = m_{jr}$ a na rovníku m_{rr} stejná a platí pro ni vztah

$$\cos \check{s}_0 = \frac{2 \cos \check{s}_s}{1 + \cos \check{s}_s}.$$

Druhá nezkreslená rovnoběžka, jež je symetrická vůči rovníku, bude mít zeměpisnou šířku o hodnotě $-\check{s}_0$. Kartografický rovník prochází středem vymezeného území. Dvě kartografické rovnoběžky jsou následně vedeny s cílem sevřít toto území do co možná nejužšího pásu. Na tomto kartografickém rovníku se vyberou dva body, jejichž souřadnice jsou zjištěny jako $P_1 = [u_1, v_1]$ a $P_2 = [u_2, v_2]$. Na základě těchto bodů se pak stanoví zeměpisné souřadnice kartografického pólu $K = [u_k, v_k]$.

$$\tan v_k = \frac{\tan u_1 \cos v_2 - \tan u_2 \cos v_1}{\tan u_2 \sin v_1 - \tan u_1 \sin v_2}$$

$$\tan u_k = -\frac{\cos(v_1 - v_k)}{\tan u_1} = -\frac{\cos(v_2 - v_k)}{\tan u_2}.$$

Na okrajové rovnoběžce je vybrán libovolný bod $P_3 = [u_3, v_3]$; kartografickou šířku dané rovnoběžky pak stanovíme pomocí vztahu.

$$\check{s}_s = \arcsin[\sin u_3 \sin u_k + \cos u_3 \cos u_k \cos(v_3 - v_k)].$$

Měřítko délek m v libovolném bodě s kartografickou šířkou $\check{s}$ je určeno vztahem

$$m = m_p = m_r = \frac{\cos \check{s}_0}{\cos \check{s}},$$

zkreslení délek ν pak jako

$$\nu = m - 1.$$

2.2 Kuželové konformní zobrazení

Kuželové konformní zobrazení, také nazýváno Lambertovo zobrazení, bylo jako jedno ze 7 dalších zobrazení představenými Johannem Heinrichem Labertem v 18. století. Jedná se o sečné provedení a tudíž umožňuje v rovnoběžkách kde kužel protíná sféroid vzniku tzv. standardních/ základních rovnoběžek kde úhlové zkreslení je nulové. Zobrazení je využívano pro pro mapy stárů/kontinentů, nicméně pro celý svět se nepoužívá poněvadž na okrajích může docházet k extrémním délkovým zkreslením. Dalším využítím je v avionice kde jse zobrazení využiváno v leteckých mapách pro aproximací obloukových cest z bodu A do bodu B. Lambertovo zobrazení je také doporučený zobrazení INSPIRE pro konformní mapování v měřítkách 1:500 000 a menších. Zobrazovací rovnice Lambertova kuželového konformního zobrazení v obecné poloze jsou ve tvaru:

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{\tan(\frac{\check{s}_0}{2} + 45°)}{\tan(\frac{\check{s}}{2} + 45°)} \right)^c,$$

$$\varepsilon = c \cdot d.$$

Konstanty zobrazení ρ_0 a c se určují na základě dvou podmínek. První z těchto podmínek je znovu zvolena s cílem zajistit, aby délkové zkreslení v absolutní hodnotě bylo identické jak na severním a jižním okraji ($m_{sr} = m_{jr} = 1 + \gamma$), tak i ve středu dané oblasti ($m_{0r} = 1 - \gamma$). Součtem obou rovnic je pak získána podmínka:

$$c\rho_s \cos \check{s}_0 + c\rho_0 \cos \check{s}_s = 2R \cos \check{s}_0 \cos \check{s}_s.$$

Po dosazení rovnice se získá konstanta ρ_0 ve tvaru

$$\rho_0 = \frac{2R \cos \check{s}_0 \cos \check{s}_s \tan^c(\frac{\check{s}_s}{2} + 45°)}{c[\cos \check{s}_0 \tan^c(\frac{\check{s}_0}{2} + 45°) + \cos \check{s}_s \tan^c(\frac{\check{s}_s}{2} + 45°)]}.$$

Konstantu c lze určit dosazením do $m_{sr} = m_{jr} = 1 + \gamma$ jako

$$c = \frac{\log \cos \check{s}_s - \log \cos \check{s}_j}{\log \tan(\frac{\check{s}_j}{2} + 45°) - \log \tan(\frac{\check{s}_s}{2} + 45°)},$$

hodnotu $\check{s}_0$ je pak možné určit ze vztahu

$$\sin \check{s}_0 = c.$$

Zvolené území je sevřeno dvěma co nejužšímí soustřednými kružnicemi představující kartografické rovnoběžky. Kartografický pól K je určen středem kružnic a odečtením z mapy určíme jeho souřadnice u_k, v_k. Na každé z okrajových rovnoběžek zvolíme libovolný bod a z mapy odečteme jejich souřadnice $P_1 = [u_1, v_1]$ a $P_2 = [u_2, v_2]$. Kartografické šířky obou rovnoběžek jsou určené následujícími vztahy:

$$\check{s}_s = \arcsin[\sin u_1 \sin u_k + \cos u_1 \cos u_k \cos(v_1 - v_k)]$$

$$\check{s}_j = \arcsin[\sin u_2 \sin u_k + \cos u_2 \cos u_k \cos(v_2 - v_k)].$$

Tyhle hodnoty umožňují určení konstanty c. Poloměry severní a jižní rovnoběžky ρ_s a ρ_j jsou spočítány dosazením $\check{s}_s$ a $\check{s}_j$ do první zobrazovací rovnice za $\check{s}$. Hodnoty délkových zkreslení $\nu = m-1$ na severní a jižní okrajové rovnoběžce jsou získané dosazením do vztahu pro výpočet měřítka délek

$$m = m_p = m_r = \frac{c\rho_s}{R \cdot \cos u_s} = \frac{c\rho_j}{R \cdot \cos u_j} = 1 + \gamma.$$

2.3 Azimutální konformní zobrazení

Azimutální konformní zobrazení nebo-li stereografická projekce pochází již z starověkého Řecka, kdy ji navrhl řecký astronom, matematik a geograf Hipparchus a to ve 2. století př. n. l. Jedná se o konformní zobrazení, které je často používané pro zobrazování map v polových oblastech. V obecné poloze má zobrazovací rovnice stereografická projekce tvar:

$$\rho = c \cdot \tan \frac{\psi}{2}$$

$$\varepsilon = d,$$

Hodnota c je konstantou projekce. Termín ψ, definovaný jako $\psi = 90° - š$, označuje kartografické šířky dosahující až 90° pro obecnou polohu. Hodnota konstanty c je určena volbou parametru t tak, aby řezná rovina protínala kulovou plochu v nezkreslené rovnoběžce $š_0$. Pro tuto rovnoběžku je odpovídající kartografická šířka $\psi_0 = 90° - š_0$. Výpočet konstanty c je dán následujícím vztahem:

$$c = 2R\cos^2\frac{\psi_0}{2}.$$

Zobrazovací rovnice stereografické projekce s jednou nezkreslenou rovnoběžkou mají tvar

$$\rho = 2R\cos^2\frac{\psi_0}{2}\tan\frac{\psi}{2}$$

$$\varepsilon = d.$$

Zvolenému území opíšeme kružnici s co nejmenším poloměrem představující kartografickou rovnoběžku. Její střed představuje kartografický pól K a odečtením z mapy určíme jeho souřadnice u_k, v_k. Na kružnici zvolíme libovolný bod $P_1 = [u_1, v_1]$ a určíme jeho kartografickou šířku $š_j$ s využitím vztahu

$$š_j = \arcsin[\sin u_1 \sin u_k + \cos u_1 \cos u_k \cos(v_1 - v_k)],$$

$$\psi_j = 90° - š_j.$$

Za účelem snížení dopadů zkreslení se přistupuje k úpravě hodnot konstant. V polární oblasti se nepřipouští nulové zkreslení; namísto toho zde zkreslení dosahuje úrovně $\mu = 1 - \gamma$, kde μ vystupuje jako multiplikační konstanta. Identifikace nezkreslené rovnoběžky poté vychází z následujícího vztahu:

$$m_r(\psi = 0) = \frac{\cos^2\frac{\psi_0}{2}}{\cos^2\frac{\psi}{2}} = \mu,$$

$$\mu = \cos^2\frac{\psi_0}{2} \to \psi_0 = 2\arccos\sqrt{\mu}.$$

Při požadavku na stejnou hodnotu zkreslení na okraji území platí následující

$$m_r(\psi = 0) = m_{pr} = 1 - \gamma,$$

$$m_j(\psi_j) = m_{jr} = 1 + \gamma.$$

Následným sečtením obou rovnic získáme vztah: μ ve tvaru

$$\mu = \frac{2\cos^2\frac{\psi_j}{2}}{1 + \cos^2\frac{\psi_j}{2}}$$

Hodnotu délkového zkreslení $\nu = m - 1$ na okrajové jižní rovnoběžce ψ_j pak určíme ze vztahu pro měřítko délek m_r

$$m_r = \frac{\cos^2\frac{\psi_0}{2}}{\cos^2\frac{\psi_j}{2}} = \frac{\mu}{\cos^2\frac{\psi_j}{2}}.$$

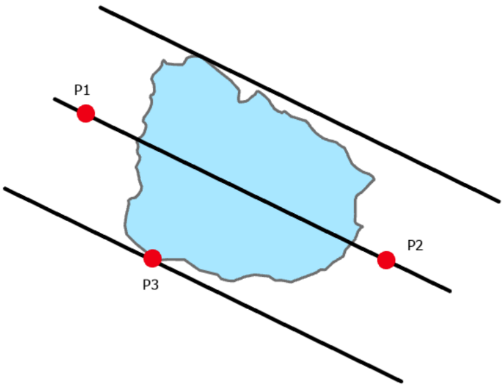
3 Postup a výpočty

Pro účely srovnání konformních zobrazení byly zvoleny dva státy odlišného tvaru. Prvním státem je Argentina, přičemž se jedná o protáhlý stát podél poledníku. Druhým státem je Uruguay, což je stát bez dominantního tvaru. Pro získání potřebných souřadnic byl využit program ArcGIS Pro, kde vznikl návrh projekcí s daty z NAtural Earth Data (NED 2022). Veškeré výpočny byly následně provedeny v prostředí Matlab.

3.1 Konformní válcové zobrazení

Při navrhování konformního válcového zobrazení byla státem vedena přímka, která je rovníkem. Zároveň byly vytvořeny dvě rovnoběžky, které svírají stát v co nejmenším pásu. Na vytvořeném rovníku byly zaznamenány body P1, a P2. Na jedná z rovnoběžných přímek byl vytvořen bod P3, který zároveň leží na hranici státu. Zákres rovnoběžek pro státy je na Obrázku 1 a 2.

Obrázek 1: Rovnoběžky a body pro konformní válcové zobrazení, Argentina



Obrázek 2: Rovnoběžky a body pro konformní válcové zobrazení, Uruguay

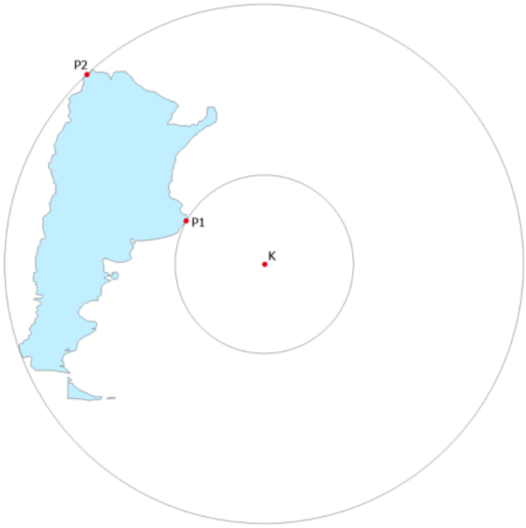
V tabulce 1 jsou zaneseny potřebné souřadnice bodů k vypočtení zobrazení. Souřadnice byl zaneseny do příslušných skriptů, které se zabývají válcovým zobrazením s využitím Mercatorova zobrazení v obecné poloze (viz. kapitola 2.1). Výpočty v matlabu zahrnují výpočet kartografického pólu, nezkreslených rovnoběžek, hodnot délkového zkreslení ve skriptu *mercator_optimal.m*. Následně je pak vykreslen ekvidiformát ve skriptu *mercator_contour_lines.m*. Byla využita funkce *mercator.m*, která převádí souřadnice.

bod	**Argentina**		**Uruguay**	
	u	v	u	v
P1	-59.9029527	-22.1437606	-59.2019872	-31.3713880
P2	-70.6497997	-56.1408647	-52.9436432	-34.4076143
P3	-56.6941130	-36.8601637	-57.8387836	-34.4430222

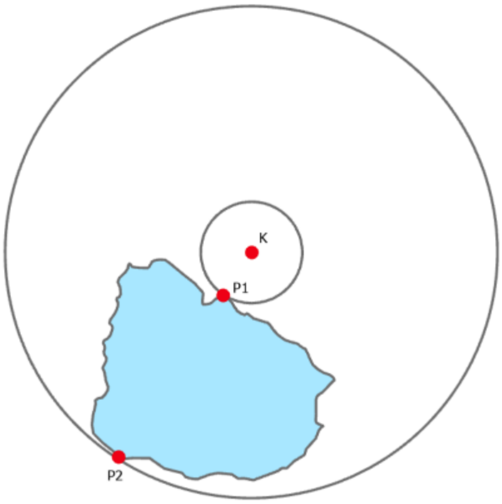
Tabulka 1: Souřadnice bodů pro konformní válcové zobrazení

3.2 Konformní kuželové zobrazení

Při návrhu konformního kuželového zobrazení byly vytvořeny dvě soustředné kružnice, které jsou využity jako rovnoběžky. Střed vytváří kartografický pól K, na rovnoběžkách byly vytvořeny body P1 a P2. Přehled rovnoběžek je vidět na Obrázku 3 a 4.



Obrázek 3: Rovnoběžky a body pro konformní kuželové zobrazení, Argentina



Obrázek 4: Rovnoběžky a body pro konformní kuželové zobrazení, Uruguay

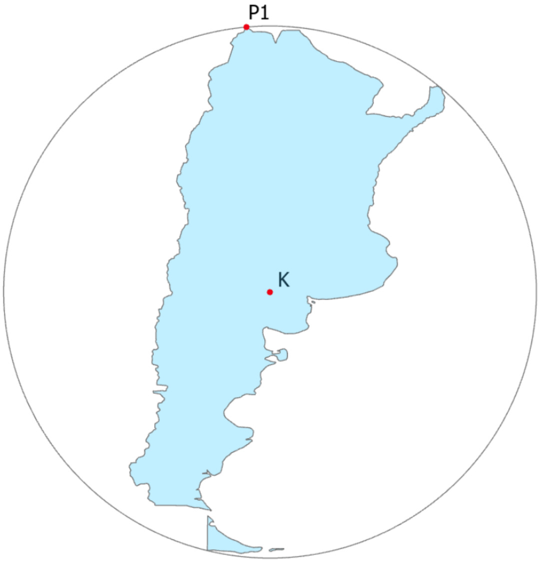
Pro výpočty v matlabu byly využity hodnoty z tabulky 2. Stejně jako u předchozího zobrazení byly vypočítány konstanty, hodnoty délkového zkreslení ve sktiptu *lcc_optimal.m*, a opět byl vykreslen ekvidiformát skriptem *lcc_conrout_lines*. K výpočtům byla využita funkce *lcc.m*.

bod	**Argentina**		**Uruguay**	
	u	v	u	v
K	-48.8630571	-41.3423389	-54.9530408	-29.9196646
P1	-56.7295554	-36.9984758	-55.5705543	-30.8756775
P2	-66.7355685	-22.2595970	-57.8253286	-34.4447926

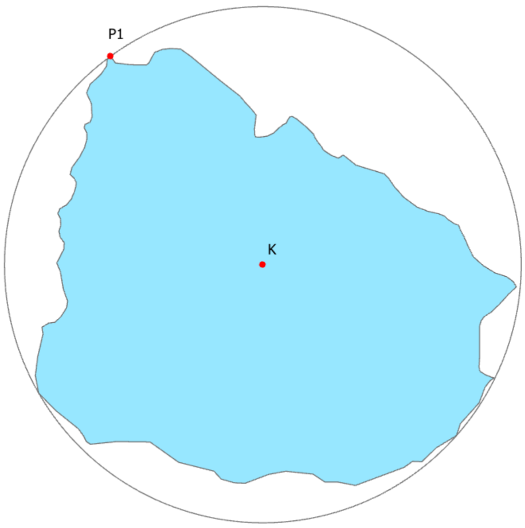
Tabulka 2: Souřadnice bodů pro konformní kuželové zobrazení

3.3 Konformní azimutální zobrazení

Při nákresu konformního azimutálního zobrazení byla nakreslena opsaná kružnice kolem státu. Střed kružnice udává kartografický pól K, další bod P1 byl zvolen na průsečíku kružnice a státu.



Obrázek 5: Rovnoběžky a body pro konformní azimutální zobrazení, Argentina



Obrázek 6: Rovnoběžky a body pro konformní azimutální zobrazení, Uruguay

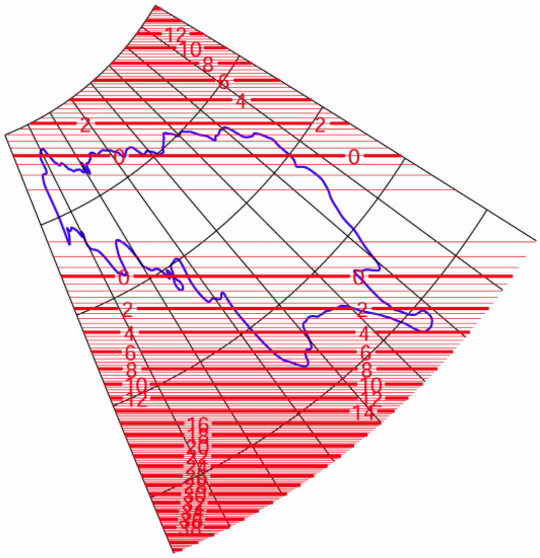
Pro konformní azimutální zobrazení byl výpočet opět proveden v matlabu za pomoci hodnot z tabulky 3. Opět byly vypočítány parametry ve skriptu *stereo_optimal* a následně byl ekvidiformát vykreslen pomocí skriptu *stereo_contour_lines*. Převod souřadnic byl proveden pomocí funkce *stereo.m*.

bod	**Argentina**		**Uruguay**	
	u	v	u	v
K	-64.6764345	-38.5069798	-55.9111758	-32.5188351
P1	-66.1877444	-21.7977490	-66.1877444	-21.7977490

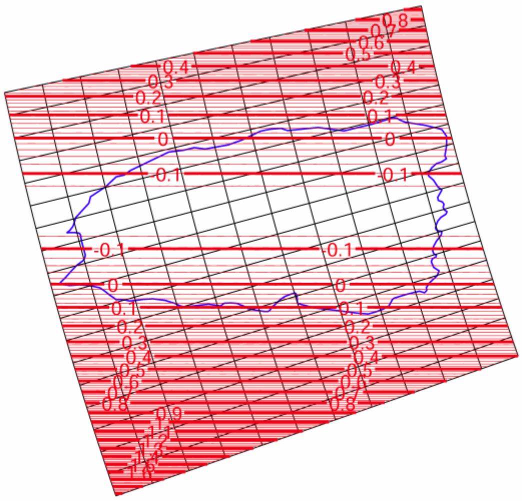
Tabulka 3: Souřadnice bodů pro konformní azimutální zobrazení

4 Výsledky

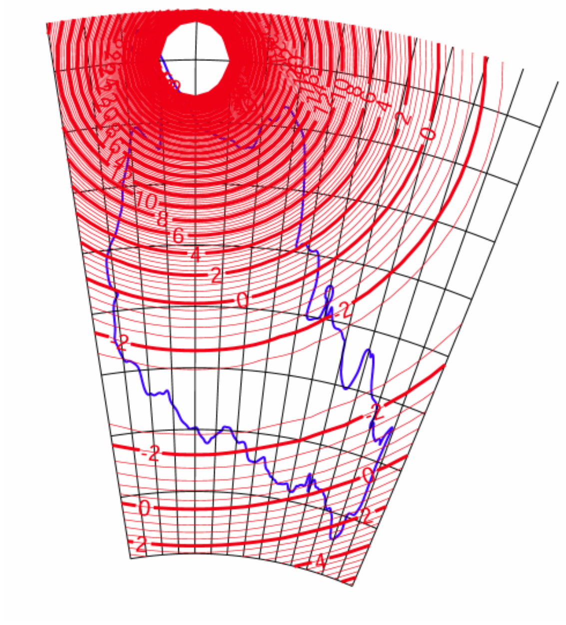
PRo každý stát byly vygenerovány linie znázorňující délkové zkreslení. Pro Argentinu, jelikož zabírá velké území, byl krok délkového zkreslení nastaven na 0.2. Výsledky jsou na Obrázcích 7, 9, 11. Uruguay, jelikož se jedná o mnohem menší území, má nastavená krok délkového zkreslení na 0.02 viz Obrázky 8, 10, 12.



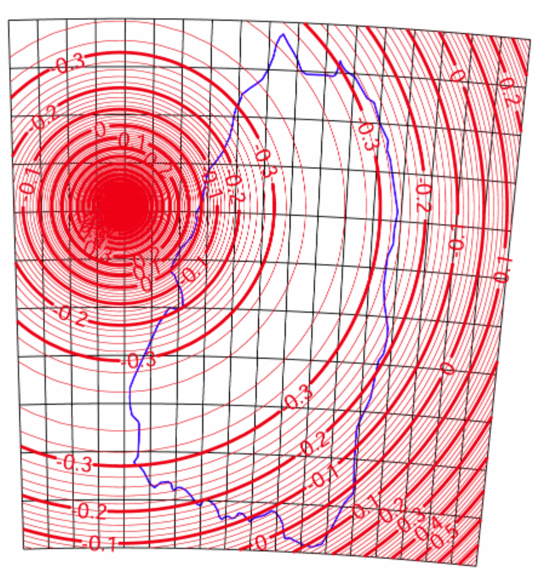
Obrázek 7: Ekvidiformáty válcového zobrazení, Argentina



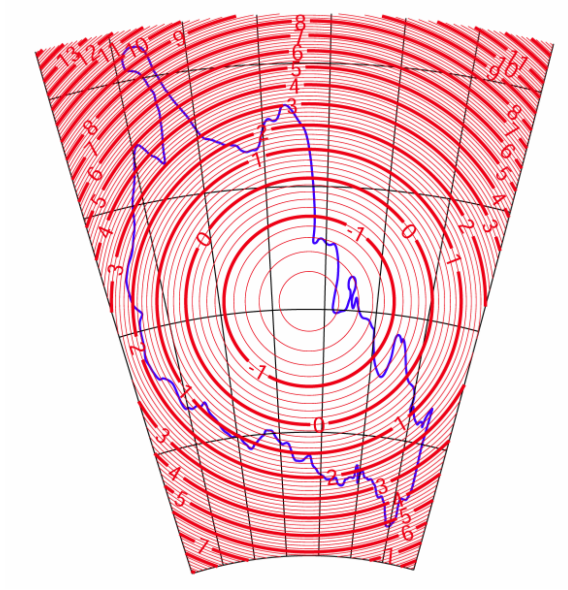
Obrázek 8: Ekvidiformáty válcového zobrazení, Uruguay



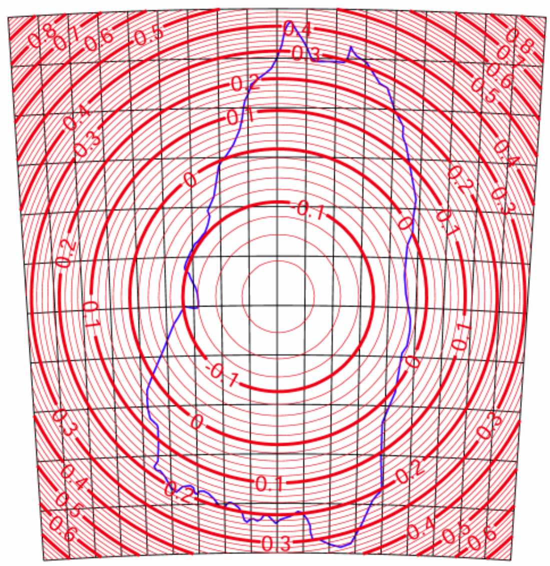
Obrázek 9: Ekvidiformáty kuželového zobrazení, Argentina



Obrázek 10: Ekvidiformáty kuželového zobrazení, Uruguay



Obrázek 11: Ekvidiformáty azimutálního zobrazení, Argentina



Obrázek 12: Ekvidiformáty azimutálního zobrazení, Uruguay

bod	**Argentina**	**Uruguay**
válcové zobrazení		
P1	-1,472734	-0,136215
P2	-1,472734	-0,136215
P3	7,697751	0,080538
kuželové zobrazení		
P1	2,842204	0,179909
P2	2,842204	0,179909
střed území	-2,842204	-0,179909
azimutální zobrazení		
P1	1,913549	0,170055
K	-1,913549	-0,170055
nezkreslená rovnoběžka	0	0

Tabulka 4: Délková zkreslení pro vybrané body a zobrazení (nové hodnoty)

5 Závěr

Předmětem úlohy byla komparativní analýza hodnot délkového zkreslení pro tři specifická kartografická zobrazení aplikovaná v obecné poloze: konformní válcové (Mercator), konformní kuželové (Lambert) a konformní azimutální (stereografická projekce). Tato analýza byla provedena pro dvě modelové situace reprezentované vybranými státy - Argentina, Uruguay. Jeden s převládající směrovou charakteristikou a druhý bez ní. Pro každou z těchto variant bylo dále úkolem vytvořit a vizualizovat na mapovém podkladu ekvideformáty délkového zkreslení, s intervalem izolinií zvoleným adekvátně dané situaci. Při počítání kartografických pólů se ukázalo složité vybrat ten spravný a to kvůli nestandartně velké rozloze Argentiny jakožto osmým největším státem, tím lze také vysvětlit nesourodosti v obrázcích depiktujících Argentinu. Problém nastal především u konformního kuželového zobrazení, kde kvůli velikosti nebylo možné v přesně určit kartografický pól, což může za nesprávné zkreslení (viz. Obrázek 9).

Reference

[1] BAYER, T. (2025).*Srovnání konformních kartografických zobrazení pro zvolené území (návod na cvičení)*

[2] BAYER, T. (2025). *Přednášky Matematická Kartografie*. Dostupné z: https://web.natur.cuni.cz/~bayertom/images/courses/Adk/adk4_new.pdf

[3] GOOGLE(2025) Google Ai Studio, Gemini 2.5 Pro Experimental. Dostupné z https://aistudio.google.com/prompts/new_chat

[4] Pyšek, J (1995) *Matematická Kartografie* Západočeská Univerzita, Pedagogická fakulta, katedra Geografie

*Kód byl konzultován s AI. Přímo řádek: proj = @(R,s,d,s0) lcc(R, s, d, s0, s1, s2); jelikož v kódu nefungovalo proj @lcc, stejně tak proj = @(R,s,d,s0) mercator(R,s,d,s0,Ro0); kde nefungovalo proj @mercator.