

Gymnázium Evolution Jižní Město



Jáchym Löwenhöff

**Vliv úhlové rychlosti na
zpětný odraz míčku od roviny.**

Ročníková práce

Školitel práce:

Bc. Daniel Chmúrny

Školní rok: 2023/2024

Poděkování

poděkování

Prohlášení

prohlášení in english

V Praze dne 18. března 2024

Jáchym Löwenhoffer

Abstrakt

český abstrakt **Klíčová slova:** random, random2, random3

Abstract

abstract in english **Keywords:** random, random2, random3

Obsah

Úvod	9
I Teoretická část	11
1 Popis problému	15
1.1 Let Míčku	15
1.1.1 Rychlost	15
1.1.2 Gravitační síla	16
1.1.3 Odpor vzduchu	16
1.1.4 Magnusova síla	16
1.2 Odraz míčku	17
1.2.1 Koeficienty restituce	18
1.2.2 Moment hybnosti	18
1.2.3 Tření po dobu odrazu	19
1.2.4 Triviální případy	19
II Praktická část	21
2 Další zajímavá kapitola	23
Závěr	25

Úvod

Míček odrážející se od roviny je v běžném životě velmi častý jev. Ať už jde o míčové sporty, kde bývá odraz daného míče často nejdůležitější částí celého sportu. Pro tuto práci bude důležitější první z navržených využití.

Motivace tématu této práce pochází ze stolního tenisu. Stolní tenis patří ke sportům, kde je odraz míčků nejdůležitější část celé hry a schopnost ho odhadnout dává hráči nemalou výhodu. Zajímavým a pro tuto práci hlavním případem, je odraz míčku, při kterém se míček začne vracet (otočí se rychlost ve vodorovném směru). Tento typ odrazu můžeme vidět napříč míčovými sporty, můžeme v nich tedy najít důvod pro studování právě zpětného odrazu.

Důvodem, již méně *ušlechtilým* za to více upřímným, je pozoruhodnost zmíněného problému. Možnost kvantifikovat problém nad kterým z čisté zvědavosti přemýšlím již několik let je velmi přitažlivá. Proto popsání podmínek za kterých dojde ke zpětnému odrazu je hlavním cílem této práce.

Část I

Teoretická část

1. Popis jednotlivých koeficientů a jejich fyzikální význam.
 - (a) Vertikální/horizontální restituce
 - (b) Pohybové tření
 - (c) Úhlové momentum
 - (d) Poloměr
 - (e) Koeficient D (vzdálenost normálové síly od geometrického středu míčku)
2. Rozbor sil působících v průběhu odrazu.
 - (a) Tření
 - (b) Normálová síla
 - (c) Vertikální/horizontální složka rychlosti
 - (d) Úhlová rychlost
3. Odvození rovnic pro dynamickou simulaci systému. (Lagrangian???)
4. Diskutování předpokladů. zopakovat argumenty z článku [zdroj]

Kapitola 1

Popis problému

Míčkem je myšlena pevná jednolitá dutá nebo plná koule o poloměru (značeném R), kterou bychom našli v běžném životě (nejedná se o subatomické částice ani o planety) pro přesnost uvedeme rozmezí poloměru: 2 až 50 cm. Rychlosti uvažujeme relevantní pro svět sportů tedy: 1 až 10 m/s.

Systém s letícím míčkem a rovným, hladkým povrchem se může na první pohled zdát triviální, tato kapitola předchozí označení vyvrátí. Zároveň uvede čtenáře do velmi specifické části problému, kterou se bude zabývat, aniž by opoměla ostatní části. Tedy bude ve zkratce probrán let a poté velmi podrobně dopad. Nakonec budou rozebrány některé intuitivní případy jako například míček dopadající pod úhlem 90 stupňů atd.

1.1 Let Míčku

Let míčku se často zjednodušuje a zanedbávají se některé síly, které na letící míček působí. Když uvážíme jen gravitaci zjistíme, že by míček za letu měl dráhou opsat parabolu. Pro kratší dobu letu a velkou rychlost tento předpoklad není nikterak škodlivý¹. Tyto síly můžeme vidět na rovnici [rovnici 1.1](#) a na [obrázku 1.1](#).

[Rovnice 1.1](#) získáme, když si rozepíšeme 2. Newtonův kinematický zákon.

$$\vec{v} + \vec{F}_g + \vec{F}_d + \vec{F}_m = m\vec{a} \quad (1.1)$$

Kde:

\vec{v} Rychlost

\vec{F}_g Gravitace

\vec{F}_d Odpor vzduchu (anglicky „drag“)

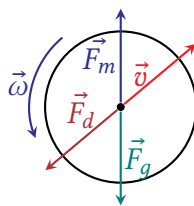
\vec{F}_m Magnusova síla

Síly působící na letící míček v průběhu budou podrobněji popsány dále v této sekci.

1.1.1 Rychlost

Rychlost (\vec{v}), jako derivace polohy je jádrem samotného pohybu (bez změny polohy není pohyb). Ze začátku dáme míčku nějakou energii a tím ho uvedeme v pohyb.

¹Jako tomu bývá často právě ve stolním tenisu



Obrázek 1.1: Síly působící na míček v letu

Jakmile je ve vzduchu, působí na něj ostatní síly a ovlivňují jeho energii. V případě, kterým se budeme zabývat, většina sil disipuje energii míčku. Jediný jev, který by mohla prodlužovat dobu letu (tedy přidávat míčku energii) je jev Magnusův. Tomu je věnována [podsektce 1.1.4](#).

1.1.2 Gravitační síla

Gravitační a v tomto případě můžeme říci i tíhová síla² (F_g) je hned po rychlosti nejdůležitější silou v průběhu pohybu míčku. A spolu s rychlostí nejviditelněji tvoří trajektorii míčku.

Gravitace je také nejednodušší na modelování. Dokud můžeme pro celou trajektorii považovat Zemi za lokálně plochou, gravitační síla míří vždy směrem kolmo dolů. Také její amplituda bývá většinou konstantní, protože není časté, že by míček během letu měnil svojí hmotnost a gravitační zrychlení se také nemění.

Matematicky můžeme z 2. Newtonova zákona velikost gravitační síly vyjádřit jako:

$$F_g = mg$$

Kde g je gravitační zrychlení (často zaokrouhlováno na 10 m/s^2) a m je hmotnost míčku.

Z této rovnice je ještě jednodušší nahlédnout na fakt, že gravitační síla je pro náš případ konstantní.

1.1.3 Odpor vzduchu

Odpor vzduchu (F_d) si můžeme dovolit zanedbat, protože zkoumáme jen velmi krátký let. Kdyby se jednalo například o dlouhé odpaly v baseballu, tehdy již odpor vzduchu zanedbatelný není.

Na rozdíl od gravitační síly, odpor vzduchu není konstantní v průběhu letu. Odpor vzduchu je totiž obecně závislý na rychlosti a ploše, která aktivně do vzduchu naráží. V případě koule se mění jen rychlost. Což o hodně zjednodušuje výsledný výpočet.

Směr odporu vzduchu je vždy opačný ke směru pohybu jak můžeme vidět na [obrázku 1.1](#). Velikost odporu závisí kromě dalších koeficientů hlavně na kvadrátu rychlosti.

1.1.4 Magnusova síla

Magnusova síla (F_m) vzniká díky rotaci a vzájemnému tření mezi míčkem a vzduchem (předpokládáme vzduch bez vlastní rychlosti). Intuitivním vysvětlením tohoto fenoménu je, že rotací a třením se vzduch posouvá po směru rotace, a z 3. Newtonova

²Gravitační a tíhová jsou obecně odlišné síly a v některých případech je nutné je tak vnímat. Toto ovšem není jeden z nich proto je můžeme zaměnit.[3] Dále bude používán jen termín gravitační síla.

zákona plyne, že vzduch by měl opačnou silou působit zpět. Magnusův efekt je znát pouze je-li hmotnost míčku dostatečně malá nebo úhlová rychlost dostatečně velká.[9]

Směr \vec{F}_m na obrázku 1.1 je specifický pro aktuální případ.³ Směr Magnusovi síly závisí na úhlové rychlosti ($\vec{\omega}_1$). Nejen svojí velikostí, ale i směrem. Jestliže $\vec{\omega}_1 < 0$ tak Magnusova síla míří směrem nahoru a v opačném případě dolů.[6]

1.2 Odraz míčku

Samotný odraz je pro tuto práci nejdůležitější. Tedy bude probrán velmi podrobně. Důležitým předpokladem je, že \vec{v}_1 a $\vec{\omega}_1$ jsou hodnoty přímo před odrazem. Díky tomuto předpokladu nemusíme uvažovat let míčku popsany v sekci 1.1 ani jeho letové vlastnosti.

Problém je i tak stále velmi komplexní, protože na odraz má vliv hned několik proměnných. Ty společně s charakteristikou celé odrazové periody budou popsány v této sekci.

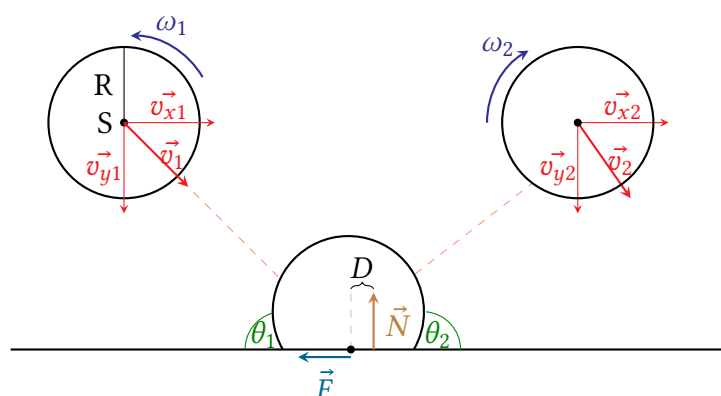
Obecně se všechny proměnné v tomto problému dají rozřadit do tří kategorií:

Nezávislé Pro tuto práci to jsou: \vec{v}_1 , $\vec{\omega}_1$ a θ_1 .

Závislé Analogicky se jedná o: \vec{v}_2 , $\vec{\omega}_2$ a θ_2 .

Kontrolované Jde především o materiálové konstanty: vertikální/horizontální koeficient restituce ($e_{x/y}$), koeficient smýkavého tření (μ), poloměr (R), koeficient momentu hybnosti (α), vzdálenost geometrického středu od působení normálové síly (D).

Závislé a nezávislé proměnné jsou znázorněny na obrázku 1.2. Nezávislé jsou proměnné před odrazem a na nich závisí proměnné po odraze. Kontrolované proměnné na obrázku 1.2 nejsou, ale stále je důležité je uvést pro replikovatelnost výsledků. Také budou z pravidla přebírány z odborné literatury, a tedy nebudou v této práci měřené.



Obrázek 1.2: Síly a veličiny působící na míček při odrazu

³Předpokládáme pouze backspin, jak bude zmíněno v kapitole [triviální případy] je to jedna z podmínek zpětného odrazu.

1.2.1 Koeficienty restituce

Koeficient restituce (e) vyjadřuje jak moc je odraz elastický, kolik energie se v něm ztratí. Perfektně elastický odraz s $e = 1$ tedy znamená, že při odrazu nedojde k disipaci žádné energie. Taková odraz je ovšem v praktických podmínkách nereálný. Hodnoty e jsou v rozmezí $0 \leq e \leq 1$ kde $e = 0$ znamená ztrátu veškeré energie a už nedochází k žádnému odrazu. [4, 7]

Pro náš případ bude důležité rozdělit koeficient restituce na tečný a vertikální ($e_{x/y}$). Tečnou komponentu budeme uvažovat v bodě, nebo ploše, kde míček přichází do kontaktu s odrazovou plochou.

Jak bude popsáno v [podsekci 1.2.3](#) na míček v průběhu kontaktu působí tření, které není po celou dobu ve stejném směru. Pro tento případ by byl nejpřesnější koeficient restituce odvozený z práce, kterou míček a odrazová plocha vykonají za dobu odrazu. Pro jednoduchost bude e zaveden podle Newtona následovně[4]: $e = v_1/v_2$.

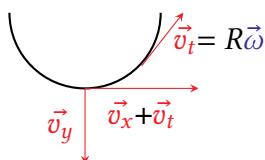
Rozdělení e na jeho vertikální a tečnou komponentu můžeme vidět na rovnicích 1.2 a 1.3. Na rozdíl od e_y není definice e_x intuitivní. Aby byla tato definice logicky motivovaná je třeba vrátit se k obecné definici z předchozího odstavce.

$$e_y = \frac{v_{y2}}{v_{y1}} \quad (1.2)$$

$$e_x = -\frac{(v_{x2} - R\omega_2)}{(v_{x1} - R\omega_1)} \quad (1.3)$$

Lineární a úhlová rychlost

Obecně by koeficient restituce měl být poměr lineární rychlosti před a po odrazu. V našem případě musíme vzít v potaz, že míček má úhlovou rychlost, která se s tou lineární sčítá.[5, 8] Proto ji musíme odečíst abychom získali jen lineární složku rychlosti.



Obrázek 1.3: Tečná, horizontální a vertikální komponenta rychlosti

Jak můžeme vidět na [obrázku 1.3](#), tečná a horizontální složka míří stejným směrem,⁴ tedy horizontální získáme jako $v_x - R\omega$. Tento výraz můžeme vidět v [rovnici 1.3](#).

1.2.2 Moment hybnosti

Moment hybnosti je rotační ekvivalent hybnosti a udává se k nějaké ose. V našem případě tato osa prochází středem míčku a v obrázku ?? si ji můžeme představit jako kolmou na celý obrázek. Úhlová rychlost také je udávána k této ose.

Moment hybnosti definujeme jako:

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

⁴Rovnoběžné jsou tyto složky jen pro póly míčku, ale mají stejné znaménko, pro všechny body na obvodu (pro $v_x > 0$ a $\omega < 0$). My koeficient restituce počítáme pro bod v kontaktu s odrazovou plochou tedy zmíněné výpočty platí.[1, 2] Jinak by bylo zapotřebí započítat odchylku \vec{v}_x a \vec{v}_t .

Kde pro nás případ se moment setrvačnosti (I) rovná αmR^2 .

1.2.3 Tření po dobu odrazu

otáčí se podle toho jestli převládá spin nebo speed (μ)

1.2.4 Triviální případy

Část II

Praktická část

Kapitola 2

Další zajímavá kapitola

kapitola moment

Závěr

závěr

Literatura

- [1] J Hierrezuelo a C Carnero. „Sliding and Rolling: The Physics of a Rolling Ball“. In: *Phys. Educ.* 30.3 (květ. 1995), s. 177–182. ISSN: 0031-9120, 1361-6552. DOI: [10.1088/0031-9120/30/3/009](https://doi.org/10.1088/0031-9120/30/3/009). URL: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0031-9120/30/3/009> (cit. 07. 07. 2023).
- [2] Rod Cross. „Bounce of a Spinning Ball near Normal Incidence“. In: *American Journal of Physics* 73.10 (říj. 2005), s. 914–920. ISSN: 0002-9505, 1943-2909. DOI: [10.1119/1.2008299](https://doi.org/10.1119/1.2008299). URL: <https://pubs.aip.org/aapt/ajp/article/73/10/914-920/1042412> (cit. 08. 07. 2023).
- [3] Jaroslav Reichl a Martin Všetička. *Encyklopedie fyziky*. 2006. URL: <http://fyzika.jreichl.com/main/article/view/60-gravitacni-a-tihova-sila-resp-zrychleni> (cit. 13. 03. 2024).
- [4] Masniezam Ahmad, Khairul Ismail a Fauziah Mat. „Impact Models and Coefficient of Restitution: A Review“. In: 11 (20. květ. 2016), s. 6549–6555.
- [5] *Why People At The Edge Of A Merry Go Round Fly Off At Greater Speeds Than The Ones Inside?* Science ABC. 6. zář. 2017. URL: <https://www.scienceabc.com/nature/universe/what-is-tangential-velocity.html> (cit. 07. 07. 2023).
- [6] *Aerospace Micro-Lesson #22*. www. URL: <https://www.aiaa.org/detail/lesson/Aerospace-Micro-Lesson-22> (cit. 13. 03. 2024).
- [7] *Coefficient of Restitution | Formula & Equation - Video & Lesson Transcript*. study.com. URL: <https://study.com/learn/lesson/coefficient-restitution-overview-equation.html> (cit. 11. 07. 2023).
- [8] *Tangential Velocity Formula & Units | How to Find Tangential Velocity - Video & Lesson Transcript*. study.com. URL: <https://study.com/learn/lesson/tangential-velocity-formula-units.html> (cit. 07. 07. 2023).
- [9] Seattle University. *Magnus Effect | Thermodynamics | Physics Demos | Physics | College of Science and Engineering*. Seattle University. URL: <https://www.seattleu.edu/scieng/physics/physics-demos/thermodynamics/magnus-effect/> (cit. 13. 03. 2024).