

Gymnázium Evolution Jižní Město



**Jáchym Löwenhöff**

**Vliv úhlové rychlosti na  
zpětný odraz míčku od roviny.**

**Ročníková práce**

Školitel práce:

Bc. Daniel Chmúrny

Školní rok: 2023/2024

## **Poděkování**

poděkování

## **Prohlášení**

prohlášení in english

V Praze dne 19. března 2024

Jáchym Löwenhoffer

## Abstrakt

český abstrakt **Klíčová slova:** random, random2, random3

## Abstract

abstract in english **Keywords:** random, random2, random3



# Obsah

Úvod	9
<b>I Teoretická část</b>	<b>11</b>
<b>1 Popis problému</b>	<b>15</b>
1.1 Let Míčku . . . . .	15
1.1.1 Rychlost . . . . .	16
1.1.2 Gravitační síla . . . . .	16
1.1.3 Odpor vzduchu . . . . .	16
1.1.4 Magnusova síla . . . . .	17
1.2 Odraz míčku . . . . .	17
1.2.1 Koeficienty restituce . . . . .	17
1.2.2 Moment hybnosti . . . . .	18
1.2.3 Tření po dobu odrazu . . . . .	19
1.2.4 Triviální případy . . . . .	20
<b>II Praktická část</b>	<b>21</b>
<b>2 Další zajímavá kapitola</b>	<b>23</b>
<b>Závěr</b>	<b>25</b>





# Úvod

Míček odrážející se od roviny je v běžném životě velmi častý jev. Ať už jde o míčové sporty, kde bývá odraz daného míče často nejdůležitější částí celého sportu. Pro tuto práci bude důležitější první z navržených využití.

Motivace tématu této práce pochází ze stolního tenisu. Stolní tenis patří ke sportům, kde je odraz míčků nejdůležitější část celé hry a schopnost ho odhadnout dává hráči nemalou výhodu. Zajímavým a pro tuto práci hlavním případem, je odraz míčku, při kterém se míček začne vracet (otočí se rychlost ve vodorovném směru). Tento typ odrazu můžeme vidět napříč míčovými sporty, můžeme v nich tedy najít důvod pro studování právě zpětného odrazu.

Důvodem, již méně *ušlechtilým* za to více upřímným, je pozoruhodnost zmíněného problému. Možnost kvantifikovat problém nad kterým z čisté zvědavosti přemýšlím již několik let je velmi přitažlivá. Proto popsání podmínek za kterých dojde ke zpětnému odrazu je hlavním cílem této práce.



# **Část I**

## **Teoretická část**



1. Popis jednotlivých koeficientů a jejich fyzikální význam.
  - (a) Vertikální/horizontální restituce
  - (b) Pohybové tření
  - (c) Úhlové momentum
  - (d) Poloměr
  - (e) Koeficient D (vzdálenost normálové síly od geometrického středu míčku)
2. Rozbor sil působících v průběhu odrazu.
  - (a) Tření
  - (b) Normálová síla
  - (c) Vertikální/horizontální složka rychlosti
  - (d) Úhlová rychlost
3. Odvození rovnic pro dynamickou simulaci systému. (Lagrangian???)
4. Diskutování předpokladů. zopakovat argumenty z článku [zdroj]



# Kapitola 1

## Popis problému

Míčkem je myšlena pevná jednolitá dutá nebo plná koule o poloměru (značeném  $R$ ), kterou bychom našli v běžném životě (nejedná se o subatomické částice ani o planety) pro přesnost uvedeme rozmezí poloměru: 2 až 50 cm. Rychlosti uvažujeme relevantní pro svět sportů tedy: 1 až 10 m/s.

Systém s letícím míčkem a rovným, hladkým povrchem se může na první pohled zdát triviální, tato kapitola předchozí označení vyvrátí. Zároveň uvede čtenáře do velmi specifické části problému, kterou se bude zabývat, aniž by opoměla ostatní části. Tedy bude ve zkratce probrán let a poté velmi podrobně dopad. Nakonec budou rozebrány některé intuitivní případy jako například míček dopadající pod úhlem 90 stupňů atd.

### 1.1 Let Míčku

Let míčku se často zjednodušuje a zanedbávají se některé síly, které na letící míček působí. Když uvážíme jen gravitaci zjistíme, že by míček za letu měl dráhou opsat parabolu. Pro kratší dobu letu a velkou rychlost tento předpoklad není nikterak škodlivý.<sup>1</sup> Tyto síly můžeme vidět na rovnici [rovnici 1.1](#) a na [obrázku 1.1](#).

[Rovnice 1.1](#) získáme, když si rozepíšeme 2. Newtonův kinematický zákon.

$$\vec{v} + \vec{F}_g + \vec{F}_d + \vec{F}_m = m\vec{a} \quad (1.1)$$

Kde:

$\vec{v}$  Rychlost

$\vec{F}_g$  Gravitace

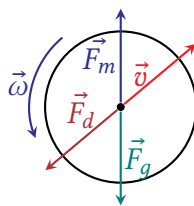
$\vec{F}_d$  Odpor vzduchu (anglicky „drag“)

$\vec{F}_m$  Magnusova síla

Síly působící na letící míček v průběhu budou podrobněji popsány dále v této sekci.

---

<sup>1</sup>Jako tomu bývá často právě ve stolním tenisu



Obrázek 1.1: Síly působící na míček v letu

### 1.1.1 Rychlost

Rychlost ( $\vec{v}$ ), jako derivace polohy je jádrem samotného pohybu (bez změny polohy není pohyb). Ze začátku dáme míčku nějakou energii a tím ho uvedeme v pohyb.

Jakmile je ve vzduchu, působí na něj ostatní síly a ovlivňují jeho energii. V případě, kterým se budeme zabývat, většina sil disipuje energii míčku. Jediný jev, který by mohla prodlužovat dobu letu (tedy přidávat míčku energii) je jev Magnusův. Tomu je věnována [podsekcce 1.1.4](#).

### 1.1.2 Gravitační síla

Gravitační a v tomto případě můžeme říci i tíhová síla<sup>2</sup> ( $F_g$ ) je hned po rychlosti nejdůležitější silou v průběhu pohybu míčku. A spolu s rychlostí nejviditelněji tvoří trajektorii míčku.

Gravitace je také nejednodušší na modelování. Dokud můžeme pro celou trajektorii považovat Zemi za lokálně plochou, gravitační síla míří vždy směrem kolmo dolů. Také její amplituda bývá většinou konstantní, protože není časté, že by míček během letu změnil svojí hmotnost a gravitační zrychlení se také nemění.

Matematicky můžeme z 2. Newtonova zákona velikost gravitační síly vyjádřit jako:

$$F_g = mg$$

Kde  $g$  je gravitační zrychlení (často zaokrouhlováno na  $10 \text{ m/s}^2$ ) a  $m$  je hmotnost míčku.

Z této rovnice je ještě jednodušší nahlédnout na fakt, že gravitační síla je pro náš případ konstantní.

### 1.1.3 Odpor vzduchu

Odpor vzduchu ( $F_d$ ) si můžeme dovolit zanedbat, protože zkoumáme jen velmi krátký let. Kdyby se jednalo například o dlouhé odpaly v baseballu, tehdy již odpor vzduchu zanedbatelný není.

Na rozdíl od gravitační síly, odpor vzduchu není konstantní v průběhu letu. Odpor vzduchu je totiž obecně závislý na rychlosti a ploše, která aktivně do vzduchu naráží. V případě koule se mění jen rychlost. Což o hodně zjednodušuje výsledný výpočet.

Směr odporu vzduchu je vždy opačný ke směru pohybu jak můžeme vidět na [obrázku 1.1](#). Velikost odporu závisí kromě dalších koeficientů hlavně na kvadrátu rychlosti.

<sup>2</sup>Gravitační a tíhová jsou obecně odlišné síly a v některých případech je nutné je tak vnímat. Toto ovšem není jeden z nich proto je můžeme zaměnit.<sup>[4]</sup> Dále bude používán jen termín gravitační síla.



### 1.1.4 Magnusova síla

Magnusova síla ( $F_m$ ) vzniká díky rotaci a vzájemnému tření mezi míčkem a vzduchem (předpokládáme vzduch bez vlastní rychlosti). Intuitivním vysvětlením tohoto fenoménu je, že rotací a třením se vzduch posouvá po směru rotace, a z 3. Newtonova zákona plyne, že vzduch by měl opačnou silou působit zpět. Magnusův efekt je znát pouze je-li hmotnost míčku dostatečně malá nebo úhlová rychlost dostatečně velká.[11]

Směr  $\vec{F}_m$  na [obrázku 1.1](#) je specifický pro aktuální případ.<sup>3</sup> Směr Magnusovi síly závisí na úhlové rychlosti ( $\vec{\omega}_1$ ). Nejen svojí velikostí, ale i směrem. Jestliže  $\vec{\omega}_1 < 0$  tak Magnusova síla míří směrem nahoru a v opačném případě dolů.[7]

## 1.2 Odraz míčku

Samotný odraz je pro tuto práci nejdůležitější. Tedy bude probrán velmi podrobně. Důležitým předpokladem je, že  $\vec{v}_1$  a  $\vec{\omega}_1$  jsou hodnoty přímo před odrazem. Díky tomuto předpokladu nemusíme uvažovat let míčku popsáný v [sekcí 1.1](#) ani jeho letové vlastnosti.

Problém je i tak stále velmi komplexní, protože na odraz má vliv hned několik proměnných. Ty společně s charakteristikou celé odrazové periody budou popsány v této sekci.

Obecně se všechny proměnné v tomto problému dají rozřadit do tří kategorií:

**Nezávislé** Pro tuto práci to jsou:  $\vec{v}_1$ ,  $\vec{\omega}_1$  a  $\theta_1$ .

**Závislé** Analogicky se jedná o:  $\vec{v}_2$ ,  $\vec{\omega}_2$  a  $\theta_2$ .

**Kontrolované** Jde především o materiálové konstanty: vertikální/horizontální koeficient restituce ( $e_{x/y}$ ), koeficient smýkavého tření ( $\mu$ ), poloměr ( $R$ ), koeficient momentu hybnosti ( $\alpha$ ), vzdálenost geometrického středu od působení normálové síly ( $D$ ).

Závislé a nezávislé proměnné jsou znázorněné na [obrázku 1.2](#). Nezávislé jsou proměnné před odrazem a na nich závisí proměnné po odraze. Kontrolované proměnné na [obrázku 1.2](#) nejsou, ale stále je důležité je uvést pro replikovatelnost výsledků. Také budou z pravidla přebírány z odborné literatury, a tedy nebudou v této práci měřené.

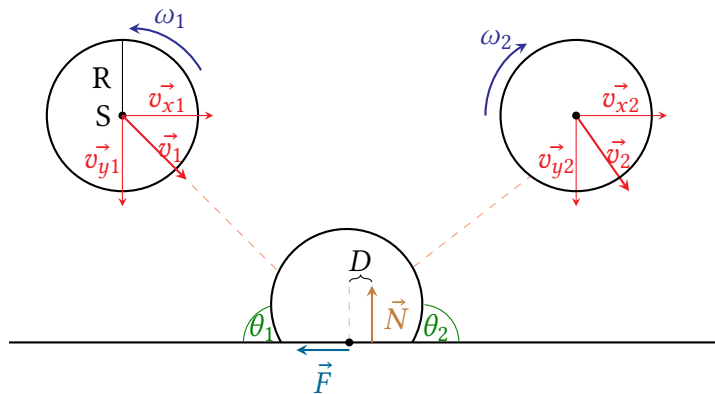
### 1.2.1 Koeficienty restituce

Koeficient restituce ( $e$ ) vyjadřuje jak moc je odraz elastický, kolik energie se v něm ztratí. Perfektně elastický odraz s  $e = 1$  tedy znamená, že při odrazu nedojde k disipaci žádné energie. Taková odraz je ovšem v praktických podmínkách nereálný. Hodnoty  $e$  jsou v rozmezí  $0 \leq e \leq 1$  kde  $e = 0$  znamená ztrátu veškeré energie a už nedochází k žádnému odrazu. [5, 8]

Pro náš případ bude důležité rozdělit koeficient restituce na tečný a vertikální ( $e_{x/y}$ ). Tečnou komponentu budeme uvažovat v bodě, nebo ploše, kde míček přichází do kontaktu s odrazovou plochou.

Jak bude popsáno v podsekcí ?? na míček v průběhu kontaktu působí tření, které není po celou dobu ve stejném směru. Pro tento případ by byl nejpřesnější koeficient

<sup>3</sup>Předpokládáme pouze backspin, jak bude zmíněno v kapitole [triviální případy] je to jedna z podmínek zpětného odrazu.



Obrázek 1.2: Síly a veličiny působící na míček při odrazu

restituce odvozený z práce, kterou míček a odrazová plocha vykonají za dobu odrazu. Pro jednoduchost bude  $e$  zaveden podle Newtona následovně[5]:  $e = v_1/v_2$ .

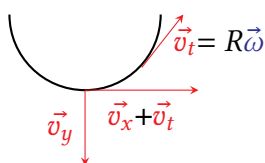
Rozdělení  $e$  na jeho vertikální a tečnou komponentu můžeme vidět na rovnicích 1.2 a 1.3. Na rozdíl od  $e_y$  není definice  $e_x$  intuitivní. Aby byla tato definice logicky motivovaná je třeba vrátit se k obecné definici z předchozího odstavce.

$$e_y = \frac{v_{y2}}{v_{y1}} \quad (1.2)$$

$$e_x = -\frac{(v_{x2} - R\omega_2)}{(v_{x1} - R\omega_1)} \quad (1.3)$$

## Lineární a úhlová rychlost

Obecně by koeficient restituce měl být poměr lineární rychlosti před a po odrazu. V našem případě musíme vzít v potaz, že míček má úhlovou rychlost, která se s tou lineární sčítá.[6, 10] Proto ji musíme odečíst abychom získali jen lineární složku rychlosti.



Obrázek 1.3: Tečná, horizontální a vertikální komponenta rychlosti

Jak můžeme vidět na obrázku 1.3, tečná a horizontální složka míří stejným směrem,<sup>4</sup> tedy horizontální získáme jako  $v_x - R\omega$ . Tento výraz můžeme vidět v rovnici 1.3.

### 1.2.2 Moment hybnosti

Moment hybnosti je rotační ekvivalent hybnosti a udává se k nějaké ose. V našem případě tato osa prochází středem míčku a v obrázku ?? si ji můžeme představit jako kolmou na celý obrázek. Úhlová rychlost také je udávána k této ose.

<sup>4</sup>Rovnoběžné jsou tyto složky jen pro póly míčku, ale mají stejné znaménko, pro všechny body na obvodu (pro  $v_x > 0$  a  $\omega < 0$ ). My koeficient restituce počítáme pro bod v kontaktu s odrazovou plochou tedy zmíněné výpočty platí.[1, 3] Jinak by bylo zapotřebí započítat odchylku  $\vec{v}_x$  a  $\vec{v}_t$ .

Moment hybnosti definujeme jako[9]:

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

Kde pro náš případ se moment setrvačnosti ( $I$ ) rovná  $\alpha mR^2$ . Koeficient momentu hybnosti ( $\alpha$ ) závisí na tom jaký míček si vybereme. Jestli zbude čas rád bych napsal apendix o tom jak integrovat v kouli jakoukoliv funkci hustoty a podle toho získal koeficient momentu hybnosti. Pro pevný plný míček =  $2/5$ , pro dutou kouli  $\alpha = 2/3$ [2, 9]. Míček na stolní tenis je natolik tenký, že jeho koeficient momentu hybnosti aproximujeme na  $2/3$ .

### Moment hybnosti během odrazu

V průběhu odrazu se mění úhlová rychlost a s ní i moment hybnosti. Kromě  $\alpha$  může mít na změnu  $L$  vliv  $\vec{F}$ , a  $\vec{N}$ .

U normálové síly ( $\vec{N}$ ) je jednoduché nahlédnout, v jakém případě ovlivňuje moment hybnosti. Z obrázku 1.2 je zřejmé, že když normálová síla působí přímo pod geometrickým středem míčku<sup>5</sup> tak nikterak nepřispívá do úhlového momentu.

U síly třecí je to poněkud složitější. Ta když směřuje proti směru rotace tak zmenšuje úhlovou rychlost a s ní i moment hybnosti. Jak bude popsáno v podsekcí 1.2.3 tření může směřovat i ve směru úhlové rychlosti. Proto záleží na orientaci  $\vec{F}$ .

Horizontální vzdálenost normálové síly a geometrického středu máme již zavedenou a to jako  $D$ . Proto  $D\vec{N}$  je moment hybnosti během odrazu s nulovým třením.[1] Když doplníme vliv tření získáme:  $D\vec{N} \pm R\vec{F} = I\vec{\omega}$ . Kde samozřejmě znaménko záleží na směru tření.[Cross\_2018, 2]

### 1.2.3 Tření po dobu odrazu

Abychom mohli opodstatnit myšlenky v této podsekcí musíme si zavést dynamické tření obecně. Poté bude jednoduché nahlédnout do tření po dobu odrazu.

#### Dynamické tření

Směr dynamického tření je vždy opačný k relativní rychlosti dvou těles, které mezi sebou tření tvoří. Matematicky dynamické tření vyjádříme jako[1, 12]:

$$\vec{F} = \mu\vec{N}$$

Kde důležitou konstantou je koeficient dynamického tření ( $\mu$ ), které je empiricky měřeno.  $\mu$  je materiálová konstanta pro oba z povrchů přítomných při tření. Dále budou materiály vybírány tak aby jejich  $\mu$  bylo již naměřeno.

#### Směr tření při odrazu

Pro popsání tření při odrazu předpokládejme, že  $\omega_1 = 0$ . Tento předpoklad platí také pro obrázek 1.4. Jakmile míček přichází do kontaktu s odrazovou plochou začíná na něj působit tření. To směřuje proti směru  $v_x$  a tedy se  $v_x$  zmenšuje. Druhý méně jasný efekt je změna momentu hybnosti. Tření zpomaluje jen tu část míčku v kontaktu

---

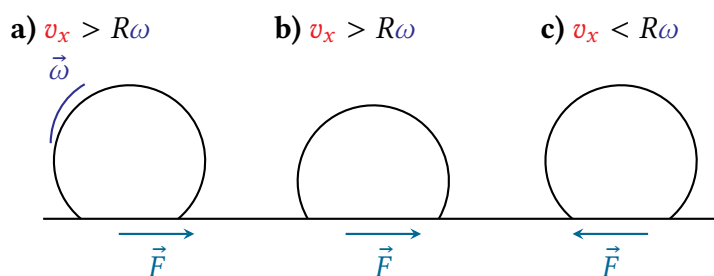
<sup>5</sup>Neboli  $D = 0$

s druhým povrchem, horní polovina se ovšem pohybuje stále stejně rychle tedy dochází k přeměně lineární rychlosti na tu úhlovou.[1, 3] Tento efekt je znázorněn v části **a)** obrázku 1.4.

Zmenšování  $v_x$  a zvětšování  $\omega$  probíhá jen do chvíle kdy  $v_x = R\omega$ . Poté ještě chvíli pokračuje v takzvaném „gripu“ (ten můžeme vidět v části **b)**). V „gripu“ je míček pouze díky statickému tření. Jakmile moment hybnosti přeroste statické tření míček přechází do „rolování“.[1, 2]

Rolování, které můžeme vidět v části **c)**, je nejméně intuitivní ze všech částí odrazu. Směr tření se v něm totiž otočí a působí po směru  $v_x$ . Jak již bylo řečeno tření působí proti směru relativního pohybu dvou povrchů. Ve chvíli kdy  $v_x < R\omega$  tak spodek míčku po povrchu podkluzuje. Tedy relativní pohyb dvou povrchů je ve směru rotace. Tření v tomto případě působí proti směru  $\omega$  a po směru  $v_x$ . [2]

Když se míček při rolování neodrazí od podložky může se stát, že díky tření se přes „grip“ zase míček dostane do „slidování“, které již bylo popsáno a je znázorněno v sekci **a)** obrázku 1.4, a tedy že  $v_x > R\omega$ . Jestliže odraz trvá dostatečně dlouho, cyklů 1. sliding 2. grip 3. roling 4. grip se stihne vystřídat hned několik.[2]



Obrázek 1.4: Směr tření po dobu odrazu

#### 1.2.4 Triviální případy

## **Část II**

### **Praktická část**



## **Kapitola 2**

### **Další zajímavá kapitola**

kapitola moment





# **Závěr**

závěr



# Literatura

- [1] J Hierrezuelo a C Carnero. „Sliding and Rolling: The Physics of a Rolling Ball“. In: *Phys. Educ.* 30.3 (květ. 1995), s. 177–182. ISSN: 0031-9120, 1361-6552. DOI: [10.1088/0031-9120/30/3/009](https://doi.org/10.1088/0031-9120/30/3/009). URL: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0031-9120/30/3/009> (cit. 07. 07. 2023).
- [2] Rod Cross. „Grip-Slip Behavior of a Bouncing Ball“. In: *American Journal of Physics* 70.11 (lis. 2002), s. 1093–1102. ISSN: 0002-9505, 1943-2909. DOI: [10.1119/1.1507792](https://doi.org/10.1119/1.1507792). URL: <https://pubs.aip.org/aapt/ajp/article/70/11/1093-1102/1045550> (cit. 14. 07. 2023).
- [3] Rod Cross. „Bounce of a Spinning Ball near Normal Incidence“. In: *American Journal of Physics* 73.10 (říj. 2005), s. 914–920. ISSN: 0002-9505, 1943-2909. DOI: [10.1119/1.2008299](https://doi.org/10.1119/1.2008299). URL: <https://pubs.aip.org/aapt/ajp/article/73/10/914-920/1042412> (cit. 08. 07. 2023).
- [4] Jaroslav Reichl a Martin Všeticka. *Encyklopedie fyziky*. 2006. URL: <http://fyzika.jreichl.com/main/article/view/60-gravitacni-a-tihova-sila-resp-zrychleni> (cit. 13. 03. 2024).
- [5] Masniezam Ahmad, Khairul Ismail a Fauziah Mat. „Impact Models and Coefficient of Restitution: A Review“. In: 11 (20. květ. 2016), s. 6549–6555.
- [6] *Why People At The Edge Of A Merry Go Round Fly Off At Greater Speeds Than The Ones Inside?* Science ABC. 6. zář. 2017. URL: <https://www.scienceabc.com/nature/universe/what-is-tangential-velocity.html> (cit. 07. 07. 2023).
- [7] *Aerospace Micro-Lesson #22*. www. URL: <https://www.aiaa.org/detail/lesson/Aerospace-Micro-Lesson-22> (cit. 13. 03. 2024).
- [8] *Coefficient of Restitution | Formula & Equation - Video & Lesson Transcript*. study.com. URL: <https://study.com/learn/lesson/coefficient-restitution-overview-equation.html> (cit. 11. 07. 2023).
- [9] *Moment of Inertia*. URL: <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/mi.html> (cit. 18. 03. 2024).
- [10] *Tangential Velocity Formula & Units | How to Find Tangential Velocity - Video & Lesson Transcript*. study.com. URL: <https://study.com/learn/lesson/tangential-velocity-formula-units.html> (cit. 07. 07. 2023).
- [11] Seattle University. *Magnus Effect | Thermodynamics | Physics Demos | Physics | College of Science and Engineering*. Seattle University. URL: <https://www.seattleu.edu/scieng/physics/physics-demos/thermodynamics/magnus-effect/> (cit. 13. 03. 2024).

- [12] *What Is Dynamic Friction in Physics - Friction, Class 11 - eSaral*. URL: <https://www.esaral.com/what-is-dynamic-friction-in-physics/> (cit. 19.03.2024).