Obyčejné diferenciální rovnice

Zápisky z přednášek

Zimní semestr 2025/26

Last changed: 2025-12-14

Obsah

I. Motivace

Motivací pro studium obyčejných diferenciálních rovnic (ODR) může být například rovnice $y' = x(y-1)$, kterou lze jednoduše řešit analyticky, pokud se ji ale pokusíme vyřešit pomocí nějaké numerické metody, narazíme na spoustu problémů. Je tedy dobré znát a umět analyzovat chování různých systémů obyčejných diferenciálních rovnic, abychom se těmto problémům mohli vyhýbat nebo aspoň věděli, že mohou nastat.

II. Lineární rovnice prvního řádu

1 Metody řešení

1.i Metoda separace proměnných

Rovnice se separovatelnými proměnnými je rovnice typu

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = g(x)h(y), \quad \langle x, y\rangle \in \mathbb{R}$$

Použití separační metody je korektní za těchto předpokladů:

- $g(x)$ je spojitá
- $h(x)$ je spojitá

Metoda má tři kroky:

1. **Separace**

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = g(x)h(y)$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{h(y)} = g(x)\,\mathrm{d}x$$

   Pozorování Tato rovnice je speciálním tvarem rovnice v diferenciálech $M(x,y)\,\mathrm{d}x + N(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$

2. **Integrace**

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{h(y)} = \int g(x)\,\mathrm{d}x$$

$$H(y) = G(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

   Existence těchto funkcí je zaručena předpoklady.

3. **Inverze**

$$y = H^-1(G(x) + C)$$

   Existence inverzní funkce k funkci H je také zaručena předpoklady.

1.ii Bernoulliova rovnice

Kanonický tvar Bernoulliovy rovnice je

$$y' + a(x)y = g(x)y^p,$$

kde $a(x), g(x)$ jsou spojité na J a $p \in \mathbb{R}$. Jedná se tedy o nelineární rovnici pro p různé od jedničky a nuly. Je-li $p = 0 \vee p = 1$ je rovnice lineární a separovatelná respektive separovatelná, Řešíme tedy případ $p \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Za hledanou funkci dosadíme součin funkcí $y = uv$.

$$(uv)' + auv = g \cdot (uv)^p$$

$$u'v + uv' + auv = g \cdot (uv)^p$$

$$u'v + u(v' + av) = g \cdot (uv)^p$$

Zde bychom se chtěli zbavit závorky $v' + av$ nalezením vhodné funkce v . Položíme tedy

$$v' + av = 0$$

Tuto rovnici řešíme separací. Stačí nalézt jakokoliv funkci která této rovnici vyhovuje, můžeme tedy konstantu uvažovat nulovou, nebo jakoukoliv jinou která nám vyhovuje. Dalším krokem je dosazení v do rovinice

$$u'v = g \cdot (uv)^p$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{u^p} = gv^{p-1}$$

Rovnici pro u lze znovu řešit separací. Hledanou funkci teď dostaneme prostou desubstitucí $y = uv$. Můžeme si všimnout, že Bernoulliova metoda se skládá ze dvou metod separace proměnných.

1.iii Metoda variace konstant

Prvně navržena Lagrangem. Znovu řešíme rovnici typu

$$y' + a(x)y = g(x)$$

Při metodě variace konstant nejdříve určíme řešní homogenní rovnice (znovu separací)

$$y_{h'} + a(x)y_h = 0$$

$$y_h = Ce^{-\int a\,\mathrm{d}x}$$

Nyní uvažujeme $C = C(x)$ a dosadíme y_h do původní rovnice. Tím dostaneme rovnici pro $C(x)$ a neznámá funkce je potom $y = C(x)e^{-\int a\,\mathrm{d}x}$.

1.iv Metoda integračního faktoru

Navržena Eulerem. Řešíme rovnici typu

$$y' + a(x)y = g(x)$$

Metoda integračního faktoru spočívá v tom přenásobit obě strany nějakou vhodnou funkcí abychom levou stranu dostali pod společnou derivaci. Pro naši rovnici je vhodným integračním faktorem funkce $e^{\int a\,\mathrm{d}x}$

$$y' + a(x)y = g(x) \quad \backslash \cdot e^{A(x)},$$

kde $A(x) = \int a\,\mathrm{d}x$. Zde použijeme znalosti že

$$\frac{d}{\mathrm{d}x}\left(e^A y\right) = Ae^A y\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x} + e^A\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},$$

potom

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^A y\right) = ge^A$$

$$\int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^A y\right)\mathrm{d}x = \int ge^A\,\mathrm{d}x$$

$$e^A y = \int ge^A\,\mathrm{d}x$$

$$y = e^{-A}\int ge^A\,\mathrm{d}x$$

2 Věta o existenci a jednoznačnosti

Chtěli bychom vědět za jakých podmínek má smysl ODR řešit, s tím nám pomůže následující věta.

Věta Mějme obyčejnou diferenciální rovnici prvního řádu

$$y' = f(x,y).$$

Nechť f a $\frac{\partial f}{\partial y}$ jsou spojité na $G \subseteq \mathbb{R}^2$ a ngjechť $[x_0, y_0] \in G$, pak existuje právě jedno maximální řešení Cauchyovy úlohy

$$y' = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0$$

Důležité je si v praxi uvědomit co věta říká a co neříká, to se pokusíme ilustrovat na následujících příkladech.

Příklad 2.1 Mějme náldedující Cauchyho úlohu

$$y' = y, \quad y(0) = 0$$

Funkce f a $\frac{\partial f}{\partial y}$ jsou určítě spojité na $G = \mathbb{R}^2$ a bod $[0,0] \in G$. Rovnice tedy splňuje podmínky existence jednoznačného maximálního řešení. To dostaneme třeba separací proměnných.

$$\begin{aligned} y' &= y \\ \frac{\mathrm{d}y}{y} &= \mathrm{d}x, \quad y \neq 0 \\ \ln(|y|) &= x + C \\ y &= \pm K e^x \quad K \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

To je tedy obecné řešení, vidíme ale že pro danou počáteční podmínku řešení neexistuje, přitom ale splňujeme požadavky věty o existenci a jednoznačnosti. Věta nám ale neříká, že pro každou počáteční podmínku řešení existuje, říká jen že pro nějakou počáteční podmínku rešení existovat bude a že bude jednoznačné.

Příklad 2.2 Mějme následující Cauchyho úlohu

$$y' = \sqrt{|y|}, \quad y(0) = 0$$

Funkce f je spojitá na $\mathbb{R}$ ale její derivace už jen na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ množinou na které hledáme řešení je $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Pro jednoduchost vyřešíme rovnici pouze pro $y > 0$.

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y}} &= \mathrm{d}x \\ 2\sqrt{y} &= x + C \\ y &= \frac{1}{2}(x+C)^2 \\ 0 &= \frac{1}{2}(0+C)^2 \Rightarrow C = 0 \\ y &= \frac{x^2}{2} \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

To je ale v podstatě neočekávaný výsledek, vždyť přece počáteční podmínka neleží v oblasti G . To je ale právě ono, tím že PP neleží v oblasti G , pak větu nelze užít a neříká nám o řešení nic. Věta **neříká** právě tehdy když $[x_0, y_0] \in G$ pak rešení existuje a je jednoznačné, to je důležité si uvědomit.

III. Soustava lineárních diferenciálních rovnic

Máme homogenní soustavu ODR ve tvaru

$$X' = AX. \tag{1}$$

Pozorování Každá homogenní soustava má triviální řešení $X = 0$.

1 Systémy s diagonální maticí A

Tedy systémy bez vzájemného propojení (uncoupled systems) jsou rovnice typu

$$X' = AX, \tag{2}$$

kde matice A je diagonální. Pro takové systémy lze jednoduše najít řešení, při pridání počáteční podmínky, pomocí separace proměnných

$$x_i' = a_{ii}x_i \quad \longrightarrow \quad x_i = c_i e^{a_{ii}t}.$$

nebo ekvivalentní maticový zápis

$$X(t) = \mathrm{diag}\big(e^{a_{ii}t}\big) \cdot C,$$

kde $C = X(0)$.

2 Diagonalizace

Je technika, která nám pomůže převést obecný hommogenní lineární systém (1) na systém s diagonální maticí.

Definice *(homeomorfismus)* O zobrazení říkáme, že je homeomorfní pokud je bijektivní, spojité a inverzní zobrazení je též spojité.

Věta Mějme matici A typu $n \times n$, jež má n různých reálných vlastních čísel λ_i. Pak $\{V_i\}$ (množina vlastních vektorů) tvoří bázi v $\mathbb{R}^n$. Matice $P = (V_1 \mid ... \mid V_n)$ je invertibiliní a

$$P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n).$$

Věta *(Obecněji)* Lineární transformace T n -tého řádu, která vektoru $Y \in \mathbb{R}^n$ přiřadí stavový vektor $X = TY$ systému (2), zobrazuje systém (2) na opět lineární systém

$$Y' = BY, \tag{3}$$

kde matice $B = T^{-1}AT$ a systémy (2) a (3) jsou homeomorfní v $\mathbb{R}^n$. Zachovává-li zobrazení i orientaci pohybu, říkáme že jsou systémy navzájem topologicky ekvivalentní.

Proces diagonalizace provedeme následovně: definujeme lineární transformaci souřadnic

$$Y = P^{-1}X$$

kde P je invertibilní matice definovaná v předchozí větě. Potom

$$X = PY$$

$$Y' = P^{-1}X' = P^{-1}AX = P^{-1}APY$$

a tím dostaneme diagnoalizovaný systém

$$Y' = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)Y,$$

který má řešení

$$Y(t) = \mathrm{diag}\big(e^{\lambda_1 t}, ..., e^{\lambda_n t}\big)Y(0)$$

A potom, protože $Y(0) = P^{-1}X(0)$ a $X(t) = PY(t)$, lze jednoduše odvodit že (1) má řešení

$$X(t) = PE(t)P^{-1}X(0),$$

kde $E(t)$ je diagonální matice

$$E(t) = \mathrm{diag}\big(e^{\lambda_1 t}, ..., e^{\lambda_n t}\big).$$

3 Princip superpozice řešení pro homogenní soustavy

Jestliže $X_1, ..., X_n$ jsou řešení homogenní soustvay ODR na intervalu J a $C_1, ..., C_n$ jsou libovolné konstanty, pak lineární kombinace $C_1X_1 + ... + C_nX_n$ je opět řešením soustvay na J .

3.i Fundamentální systém

4 Exponenciální matice

O lineární rovnici víme, že obecné řešení má tvar $x = ce^{at}$, chtěli bychom najít nějakou paralelu k systémům rovnic, přece jenom je jejich zápis velice podobný. K tomu se nám bude hodit exponenciální matice.

Věta Je-li A typu $n \times n$ reálná či komplexní matice, tak maticová řada $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}$ konverguje k matici e^{At} třídy $n \times n$, která má valstnosti:
1. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e^{At} = Ae^{At} = e^{At}A$
2. $e^{(t+s)A} = e^{At}e^{As}$
3. $e^{A0} = \mathbb{I} \wedge e^{At}$ je invertibilní $\wedge\, e^{At}e^{-At} = \mathbb{I}$, kde $\mathbb{I}$ je jednotková matice.

Bude-li $X(0) = u_j$ pak

$$X = e^{At} = e^{\lambda_j t}e^{At}e^{-\lambda_j t}u_j = e^{\lambda_j t}e^{(A-\lambda_j I)t} = e^{\lambda_j t}\big(I + \big(A - \lambda_j I\big)t + ...\big)u_j = e^{\lambda_j t}u_j.$$

Věta *(Základní věta pro lineární systémy)* Nechť A je typu $n \times n$. Potom pro dané $X_0 \in \mathbb{R}^n$, má Cauchyho problém

$$X' = AX$$
$$X(0) = X_0$$

jednoznačné řešení

$$X(t) = e^{At}X_0.$$

Věta *(Cayley-Hamilton)* Nechť ... je charakteristický polynom matice typu .... Pak maticový polynom získaný zaměněním ... za ... do ... splňuje ....

5 Metody řešení soustav lineárních rovnic

5.i 1. Eulerova metoda (pro matici s konstantními koeficienty)

Řešení odhadujeme ve tvaru $x_i = u_i e^{\{\lambda_i\}}$, kde (u_i, λ_i) je vlastní pár matice A . Může nastat několik případů

5.i.i n lineárně nezávislých vektorů

Věta Nechť matice A má n lineárně nezávislých vektorů $V^1, ..., V^n$, které jsou příslušné k (ne nutně různým!) vlastním číslům. Potom

$$V^1 e^{\{\lambda_1 t\}}, V^2 e^{\{\lambda_2 t\}}, ..., V^n e^{\{\lambda_n t\}},$$

je fundamentální systém řešení soustavy na $\mathbb{R}$.

To může nastat má-li matice A n různých vlastních čísel, matice A je symetrická, ...

5.i.ii komplexní vlastní číslo

Dostaneme-li komplexní vlastní číslo $\lambda_i = \alpha + \beta i$, výsledkem by mělo být

$$X_1 = V^1 e^{(\alpha+\beta i)t}$$

to je ale komplexní funkce a taková nás moc nezajímá, protože jsme řešili reálný problém, chtěli bychom tedy reálné výsledky. Zkusíme zda by soustavu neřešila pouze reálná část výsledku.

$$\mathrm{Re}(x') = (\mathrm{Re}(x))' = \mathrm{Re}(Ax) = A \cdot \mathrm{Re}(x) \setminus (\mathrm{Re}(x))' = A \cdot \mathrm{Re}(x) \setminus X' = A \cdot X$$

to znamená, že reálná část je řešením, to samé platí pro imaginární část. Mějme tedy komplexní vlastní číslo $\lambda = \alpha + \beta i$ a odpovídající vlastní vektor $U = V + Wi$.

$$
\begin{aligned}
X = Ue^{\{\lambda t\}} &= (V + Wi)e^{\alpha+\beta i} = (V + Wi)e^{\alpha t}e^{\beta i t} = \\
&= (V + Wi)e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i\sin(\beta t)) = e^{\alpha t}(V\cos(\beta t) - W\sin(\beta t)) + \\
&+ ie^{\alpha t}(W\cos(\beta t) + V\sin(\beta t))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Re}(X) &= e^{\alpha t}(V\cos(\beta t) - W\sin(\beta t)) \\
\mathrm{Im}(X) &= e^{\alpha t}(W\cos(\beta t) + V\sin(\beta t))
\end{aligned}
$$

$$X = C_1\ \mathrm{Re}(X) + C_2\ \mathrm{Im}(X)$$

5.i.iii méně než n lineárně nezávislých vlastních vektorů

6 Rovinné systémy

Jsme-li v $\mathbb{R}^2$ označujeme systém (1) jako rovinný. Diagonalizujeme-li systém

$$X' = AX$$

$$X' = BX, \quad B = PAP^{-1},$$

kde $P = (V_1 \mid V_2)$, pak nastává právě jedna z možností

1. $B = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ má-li A 2 různá vlastní čísla $\lambda_{1,2}$,
2. $B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ je-li λ dvonásobné reálné vlastní číslo,
3. $B = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ je-li $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ sdružené komplexní vlastní číslo.

Potom lze určit řešení jako

1. $X(t) = \mathrm{diag}\big(e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}\big)X(0)$
2. $X(t) = e^{\lambda t}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}X(0)$
3. $X(t) = e^{\alpha t}\begin{pmatrix} \cos(\beta t) & -\sin(\beta t) \\ \sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{pmatrix}X(0)$

6.i Body rovnováhy

Bod pro nějž platí $F(X^*) = 0$ nazýváme bod rovnováhy. Pro lineární systém $F(X) = AX + B$. Pro lineární homogenní systém je bodem rovnováhy počátek. Rozlišujeme následující body rovnováhy pro rovinný homogenní systém

- Uzel: $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \quad \wedge \quad \lambda_1 \neq \lambda_2$
- Sedlo: $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \quad \wedge \quad \lambda_1\lambda_2 < 0$
- Ohnisko: $\lambda_{1,2} \in \mathbb{C}$
- Střed: $\lambda_{1,2} = \pm i\beta$

7 Obcné řešení nehomogenního problému

Mějme soustavu ve tvaru

$$X' = AX + F(t), \tag{4}$$

kde A je matice typu $n \times n$ a $F(t)$ je spojitá vektorová funkce.

Definice *(Fundamentální matice)* Libovolné řešení rovnice

$$X' = AX.$$

značíme $\Phi(t)$ a nazýváme ho fundamentální systém nebo fundamentální matice. $\Phi(t)$ je $n \times n$ a splňuje

$$\Phi'(t) = A\Phi(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Věta Je-li $\Phi(t)$ fundamentální systém rovnice (1), potom řešení nehomogenní rovnice (4) s počáteční podmínkou $X(0) = X_0$ je jednoznačné a ve tvaru
$$X(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(0)X_0 + \int_0^t \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)F(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Pozorování

Definice *(Princip superpozice)* Nechť $X_C = C_1X_1 + ... + C_nX_n$ je obecné řešení homogenního problému a nechť X_P je řešení .... Pak obecné řešení má tvar
$$X = X_C + X_P$$

7.n.i Metoda variace konstant

8 Tok lineárního systému

Uvažujme systém
$$X' = AX.$$

Definice *(Tok lineárního systému)* Množina zobrazení $e^{At} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ se nazývá tokem lineárního systému. (Popisuje pohyb bodů ... po trajektoriích systém ...)

Definice *(Hyperbolický lineární systém ODR)* Mají-li všechna valstní čísla matice A nenulovou reálnou část, říkáme o lineárním systému ODR že je hyperbolický

Definice *(Invariantní množina)* Podnožina $E \subset \mathbb{R}^n$ se nazývá invariantní k toku e^{At} , jestliže platí $e^{At}E \in E$ pro $\forall t \in \mathbb{R}$

Definice Mějme lineární systém $\dot{X} = AX$ a nechť $w_j = u_j + iv_j$ je zobecněný vlastní vektor matice A odpovídající vlastnímu číslu $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$ a nechť $\{u_1, ..., u_r, v_{k+1}, ..., v_r\}$ je báze $\mathbb{R}^n, (n = 2r - k)$.

- Pak podprostor vytvořený zobecněnými vlastními vektory jimž odpovídají vlastní čísla se zápornou reálnou částí se nazývá **stabilní podprostor** a značíme ho $E^s = \mathrm{span}\{u_j, v_j : \alpha_j < 0\}$
- Podprostor vytvořený zobecněnými vlastními vektory jimž odpovídají vlastní čísla s kladnou reálnou částí se nazývá **nestabilní podprostor** a značíme ho $E^u = \mathrm{span}\{u_j, v_j : \alpha_j > 0\}$
- Podprostor vytvořený zobecněnými vlastními vektory jimž odpovídají vlastní čísla s nulovou reálnou částí se nazývá **centrální podprostor** a značíme ho $E^c = \mathrm{span}\{u_j, v_j : \alpha_j = 0\}$

Věta Vlastnosti řešení lineárního systému v invariantních podprostorech

- Je-li $X_0 \in E^s$ pak pro $\forall t \in \mathbb{R}$ je $\lim_{t\to\infty} e^{At}X_0 = 0$. Bod rovnováhy je asymptoticky stabilní.
- Je-li $X_0 \in E^u$ pak pro $\forall t \in \mathbb{R}$ je $\lim_{t\to\infty} e^{At}X_0 = \pm\infty$. Bod rovnováhy je asymptoticky nestabilní.

IV. Nelineární diferenciální rovnice

Nelinární ODR v normálním tvaru nazýváme rovnici
$$y^n = f(t, y^{n-1}, y^{n-2}, ..., y),$$

zde y^n značí n -tou derivaci. Tato rovnice má několik jednoduchých řešení ve speciálních případech.

1. $\ddot{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{f}(\dot{\boldsymbol{y}}, \boldsymbol{t})$

   Zde provedeme redukci řádu vhodnou substitucí.
$$z(t) = \dot{y}(t), \quad \dot{z}(t) = \ddot{y}(t)$$
   Tím dostaneme systém rovnic, který už je jednoduché vyřešit.
$$\dot{y} = z$$
$$\dot{z} = f(t, z)$$
2. $\ddot{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{f}(\dot{\boldsymbol{y}}, \boldsymbol{y})$

   Zde znovu zavedeme vhodnou substituci
$$z = \dot{y} \to \dot{z} = \ddot{y}$$
   Tady si uvědomíme, že
$$\dot{z} = \ddot{y} = f(y, z) = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}z$$
   Našli jsme tedy obyčejnou diferenciální rovnici $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{z}f(y, z)$, jejímž řešením je funkce z , potom pro hledanou funkci víme že $y = \int z\,\mathrm{d}t$

V. Soustava nelineárních diferenciálních rovnic - lokální chování

Soustavou nelineárních diferenciálních rovnic nazýváme
$$X' = F(t, X), \quad X(0) = X_0. \tag{5}$$
Nechť E je otevřená podmonožina $\mathbb{R}^n$, $X_0 \in E$ a nechť $F \in \mathcal{C}^1(E)$ pak
$$\dot{X} = F(X), \quad X(0) = X_0, \tag{6}$$
nazýváme nelineárním autonomním systémem obyčejných diferenciálních rovnic. Poznamenejme, že jakýkoliv neautonomní systém lze autonomizovat přidáním jedné proměnné.

Oproti lineárním systémům může u nelineárních systémů nastat tzv. blow up. To znamená, že řešení utíká do nekonečna v nějakém konečném čase, to je samozřejmě nefyzikální. Ilustrujeme to na příkladě.

Příklad V.1
$$\dot{x} = x^2, \quad x(0) = 1$$
$$\frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \mathrm{d}t$$
$$-\frac{1}{x} = t + C$$
$$x = -\frac{1}{t-1}, \quad t \in (-\infty, 1)$$
Je vidět, že
$$\lim_{t \to 1^-} x(t) = \infty,$$
tomu říkáme blow up řešení.

1 Existence a jednoznačnost

Věta Nechť E je otevřená podmnožina $\mathbb{R}^n, X_0 \in E$ a nechť $F \in \mathcal{C}^1(E)$. Pak existuje $a > 0$ takové, že počáteční problém $\dot{X} = F(X), X(0) = X_0$ má jediné řešení na $\langle -a, a\rangle$

Věta *(Barrowův vzorec)* Je-li řešení $x(t)$ rovnice $\dot{X} = F(X)$ na intervalu $I = (t_0, t_1), F \in \mathcal{C}^1(I)$ a $F(X) \neq 0$ na I . Označme $a = \lim_{t \to t_0^+} x(t), b = \lim_{t \to t_1^-} x(t)$. Pak

$$t_1 - t_0 = \int_a^b \frac{1}{F(z)}\,\mathrm{d}z$$

To nám říká pár věcí:

- Vzorec udává čas, který potřebuje řešení k tomu, aby vystoupalo
(resp. zklesalo) z hodnoty a do hodnoty b
- Řešení konvergující k b zleva (resp. zprava) pro $t \to T$ (T je krajní bod
intervalu, na kterém je řešení definováno) se napojí v konečném čase na stacionární řešení $x = b$, právě tehdy když následující integrál konverguje (pro malé δ)

$$\int_{b-\delta}^b \frac{1}{F(z)}\,\mathrm{d}z$$

$$\left(\text{resp. } \int_b^{b-\delta} \frac{1}{F(z)}\,\mathrm{d}z\right)$$

Věta Nechť E je otevřená podmnožina $\mathbb{R}^n$ obsahující X_0 a nechť $F \in \mathcal{C}^1(E)$. Nechť $u_1(t)$ a $u_2(t)$ je řešení nelineární soustavy na I_1 respektive na I_2 . Pak $0 \in I_1 \cap I_2$ a je- -li I libovolný otevřený interval obsahující 0 , který je zároveň podintervalem $I_1 \cap I_2$ pak $u_1(t) = u_2(t)$ pro $\forall t \in I$.
Věta Nechť E je otevřená podmnožina $\mathbb{R}^n$ a $F \in \mathcal{C}^1$. Pak pro $\forall X_0 \in E$ existuje největší otevřený interval (α, β) na němž má počáteční problém (6) jediné řešení $X(t)$. Tzn. má-li (6) řešení $Y(t)$ na $I \subset (\alpha, \beta)$. Pak $X(t) = Y(t)$ pro $\forall t \in I$.

2 Maximální interval existence

3 Tok definovaný diferenciální rovnicí

4 Linearizace

Mějme nelineární autonomní systém:

$$\dot{X} = F(X), \quad F(0) = 0$$

Provedeme Taylorův rozvoj prvního řádu okolo nuly:

$$f_i(X) = f_{i(0)} + \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(0) \cdot x_1 + ... + \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(0) \cdot x_n + \omega_i,$$

kde ω_i je chyba způsobená zanedbáním členů vyšších řádů a $f_{i(0)} = 0$. Jako A označíme Jacobiho matici funkce $F(x)|_0$ (tedy v bodě 0). Potom soustava

$$\dot{X} = A \cdot X,$$

je linearizovaný systém k původnímu systému.

Věta Jestliže všechna vlastní čísla Jacobiho matice A mají záporné reálné části. Pak bod 0 je asymptoticky stabilní bod rovnováhy nelinearizované soustavy. Jestliže je alespoň jedna reálná část kladná, pak je bod 0 nestabilní bod rovnováhy nelinearizované soustavy.

Tato věta nám dává informaci o stabilitě počátku pouze ze znalosti Jacobiho matice soustavy. Nedavá nám ale informaci o žádném jiném bodě mimo počátek, chtěli bychom ji proto zobecnit. Mějme tedy:

$$\dot{X} = F(X), \quad F(H) = 0$$

Bodem rovnováhy je tady nějaký bod H a ne počátek. Provedeme-li znovu Taylorův rozvoj dostaneme

$$f_i(X) = f_i(H) + \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(H) \cdot x_1 + ... + \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(H) \cdot x_n + \omega_i.$$

Provedeme transformaci soustavy tak, aby bod H byl počátkem soustavy nové.

$$\begin{aligned} u_1 &= x_1 - h_1 \\ u_2 &= x_2 - h_2 \\ &\vdots \\ u_i &= x_i - h_i \end{aligned}$$

Tím dostaneme soustavu $\dot{U} = G(U)$, ve které je bod H počátkem. Sestavíme-li Jacobiho matici této soustavy, zjistíme že je stejná jako kdybychom vyhodnotili Jacobiho matici původního systému v bodě H . To znamená, že pro vyhodnocení stability obecného bodu rovnováhy nemusíme provádět transformaci, ale stačí jen vyhodnotit Jacobiho matici v daném bodě.

5 Stabilní a nestabilní varieta

6 Věta Hartman-Grobman

7 Stabilita

8 Body rovnováhy

Definice *(Bod rovnováhy)* Body rovnováhy jsou body pro něž platí

$$F(X_0) = 0.$$

Rozlišujeme několik druhů bodů rovnováhy:

- stabilní (Lyapunovsky) jestliže pro
  $$\forall \varepsilon\ \exists \delta > 0 \ \text{ tak, že } \ \left\|X^0\right\| < \delta \Rightarrow \left\|X(t, X^0)\right\| < \varepsilon$$
  tzn. řešení neuteče z nějaké oblasti dané ε .
- atraktor existuje-li
  $$\delta > 0 \ \text{ tak, že } \ \left\|X^0\right\| < \delta \Rightarrow \lim_{t\to\infty} X(t, X^0) = 0$$
  (je-li bod rovnováhy v nule)
- asymptoticky stabilní $\iff$ je stabilní a atraktor
- nestabilní není-li stabilní

Definice *(Oblast atraktivity)*

Věta *(Hurwitzovo kriterium)*

9 Body rovnováhy nelineárního systému

Mějme nelineární systém ve tvaru:

$$\dot{x} = P(x,y)$$
$$\dot{y} = Q(x,y)$$

Definice *(Topologické sedlo)* Jestliže existují trajektorie $\Gamma_i = \{x \in E; x = \varphi(t, x_i), t \in \mathbb{R}\}$ takové, že $\lim_{t \to +\infty} \varphi(t, x_i) = x_0, i = 1, 2$ a dále existují trajektorie $\Gamma_i = \{x \in E; x = \varphi(t, x_i), t \in \mathbb{R}\}$ takové, že $\lim_{t \to -\infty} \varphi(t, x) = x_0, i = 3, 4$.

A existuje-li δ -okolí bodu x_0 takové, že ostatní trajektorie systému @system vycházející z bodu $X \in N_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$ opustí $N_\delta(x_0)$ při $t \to +\infty$ či $t \to -\infty$. Pak se x_0 nazývá topologické sedlo a trajektorie Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4, se nazývají separatisy.

Topologické sedlo má varietey:

- Stabilní varieta S v bodě x_0 : $S = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \{x_0\}$
- Nestabilní varieta U v bodě x_0 : $U = \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \cup \{x_0\}$

Lemma 9.1 Buď $E \subset \mathbb{R}^n$, E je otevřená množina, $F \in \mathcal{C}^1(E)$, $x_0 \in E$, $F(x_0) = 0$.

- Je-li x_0 hyperbolický bod rovnoováhy systému @system je x_0 topologické sedlo $\Leftrightarrow$ x_0 je sedlo linearizace $\dot{X} = \mathcal{D}F(x_0)$
- $F \in \mathcal{C}^2(E)$
  - Bod rovnováhy je stabilní (nestabilní) uzel $\Leftrightarrow$ x_0 je stabilní respektive nestabilní uzel linearizace $\dot{X} = \mathcal{D}F(x_0)$
  - Bod rovnováhy je stabilní (nestabilní) ohnisko $\Leftrightarrow$ x_0 je stabilní respektive nestabilní ohnisko linearizace $\dot{X} = \mathcal{D}F(x_0)$
- Nehyperbolický bod rovnováhy x_0 je střed linearizace. Pak x_0 je je buď
  1. Střed
  2. Ohnisko
  3. Střed-ohnisko

Definice *(Sektor)* Sektor je oblast ohraničená separatisami

Sektorů máme tři typy, budeme je rozlišovat pouze dle obrázků

- Hyperbolický sektor
- Parabolický sektor
- Eliptický sektor

10 Složené body rovnováhy

VI. Soustava nelineárních diferenciálních rovnic - globální chování

1 Dynamické systémy

Definice *(Dynamický systém)* Dynamický systém na E je zobrazení

$$\varphi : \mathbb{R} \times E \mapsto E,$$

kde E je otevřená podmnožina $\mathbb{R}^n$ a pokud $\varphi_t(x) = \varphi(t, x)$, potom φ_t splňuje

1. $\varphi_0(x) = x \quad \text{pro} \quad \forall x \in E$
2. $\varphi_t \circ \varphi_s(x) = \varphi_{t+s} \quad \text{pro} \quad \forall t, s \in \mathbb{R} \quad \text{and} \quad x \in E$

Pozorování Je-li matice A typu $n \times n$ potom funkce $\varphi(t, x) = e^{At}x$ definuje dynamický systém na $\mathbb{R}^n$ a také platí, že pro libovolné $x_0 \in \mathbb{R}^n$ je funkce $\varphi(t, x_0)$ řešení počáteční úlohy

$$\dot{x} = Ax$$
$$x(0) = x_0.$$

Obecně, je-li $\varphi(t,x)$ dynamický systém na $E \subset \mathbb{R}^n$, pak funkce

$$f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(t,x) \mid_{t=0}$$

definuje vektorové pole na E a pro libovolné $x_0 \in E$, je $\varphi(t,x_0)$ řešením počáteční úlohy

$$\dot{x} = f(x)$$
$$x(0) = x_0.$$

Věta *(O globální existenci)* Pro $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$ a pro $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$, má počáteční problém

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{F(x)}{1+|F(x)|} \\ x(0) &= x_0, \end{aligned} \tag{7}$$

jednoznačné řešení $x(t)$ definované pro $\forall t \in \mathbb{R}$, tedy (7) definuje dynamický systém na $\mathbb{R}^n$, dále platí že (7) je topologicky ekvivalentní k $\dot{x} = F(x)$ na $\mathbb{R}^n$.

2 Limitní množiny, atraktory

Uvažjme autonomní systém (6) s $F \in \mathcal{C}^1(E)$, kde E je otevřená podmnožina $\mathbb{R}^n$. Uvedli jsme že tato rovnice definuje dynamický systém $\varphi(t,x)$ na E . Pro $x \in E$ funkce $\varphi(\cdot,x) : \mathbb{R} \mapsto E$ definuje křivku řešení, trajektorii a orbitu systému (6) procházející bodem $x_0 \in E$.
Definice *(Trajektorie)* Trajektorí bodem x_0 nazýváme množinu

$$\Gamma_{x_0} = \{x \in E : x = \varphi(t,x_0), \forall t \in R\},$$

speciálně množiny

$$\Gamma^+_{x_0} = \{x \in E : x = \varphi(t,x_0), \forall t > 0\}$$
$$\Gamma^-_{x_0} = \{x \in E : x = \varphi(t,x_0), \forall t < 0\}$$

nazýváme pozitivní respektive negativní polotrajektorie.

Definice *(Limitní body)* Nechť Γ jsou trajektorie (6). Existuje-li posloupnost $\{t_n\} \to \infty$ s $n \to \infty$ tak, že $\lim_{n\to\infty} \varphi(t_n,x_0) = P$. Pak P se nazývá ω -limitní bod trajektorie Γ.

Obobně existuje-li posloupnost $\{t_n\} \to -\infty$ s $n \to \infty$ tak, že $\lim_{n\to\infty} \varphi(t_n,x_0) = P$. Pak P se nazývá α -limitní bod trajektorie Γ.

Definice *(Limitní trajektorie)* Množina všech ω -limitních (respektive α) bodů se nazývá ω -limitní (respektive α) trajektorie a značí se $\omega(\Gamma)$ (respektive $\alpha(\Gamma)$).

Věta Množiny $\omega(\Gamma)$, $\alpha(\Gamma)$ a trajektorie Γ systému (6) jsou uzavřené podmnožiny E a jsou-li kompaktní v $\mathbb{R}^n$ pak jsou i souvislé a neprázdné.

Věta *(Atraktující množina)* Nechť množina $A \subset E$, A je uzavřená. Pak A se nazývá atraktující množina systému (6), existuje-li okolí $\mathcal{U}$ množiny A takové, že pro $\forall x \in \mathcal{U}$ je $\varphi(t,x) \in \mathcal{U}$ pro $t > 0$ a $\varphi(t,x) \to A$ pro $t \to \infty$. Obsahuje-li A hustou orbitu, pak se nazývá atraktorem.

Z toho vyplývá pár věcí:

- Každý bod rovnováhy x_0 systému (6) je vlastní ω i α limitní množina. ($\varphi(t,x_0) = x_0$ $\forall t \in \mathbb{R}$)
- Má-li trajektorie Γ systému (6) jediný ω -limitní bod x_0 , pak je to bod rovnováhy systému.
- Stabilní uzel, nebo ohnisko jsou ω -limitní množiny každé trajektorie (u nelineárních systémů pouze v nějakém okolí).
- Ne každý ω -limitní bod je atrkator, viz sedlo

3 Periodické orbity

Definice *(Periodická orbita)* Peridodickou orbitou systému (6) nazýváme každou uzavřenou trajektorii systému (6), která není bodem rovnováhy systému (6).

Definice *(Stabilní periodická orbita)* Periodická orbita Γ se nazývá stabilní, jestliže pro $\forall \varepsilon > 0$ existuje okolí $\mathcal{N}_\varepsilon(\Gamma)$ křivky Γ takové, že pro $\forall x \in \mathcal{N}_\varepsilon(\Gamma)$ je $d(\Gamma_x^+, \Gamma) < \varepsilon$ tzn. $\forall x \in \mathcal{N}_\varepsilon(\Gamma)$ a $t \geq 0 \quad \Rightarrow \quad d(\varphi(t,x), \Gamma) < \varepsilon$.

Definice *(Nestabilní periodická orbita)* Nestabilní orbita je orbita, která není stabilní.

Definice *(Asymptoticky stabilní periodická orbita)* Asymptoticky stabilní orbita je orbita, která je stabilní a platí pro ni $\forall x \in \mathcal{N}_\varepsilon(\Gamma)$ je $\lim\limits_{t\to\infty} d\Big(\varphi_{t(x)}, \Gamma\Big) = 0$.

Pozorování

- Periodická orbita odpovídá periodickému řešení systému (6)
$$\varphi(t+T,x) = \varphi(t,x), \text{kde } \min(T) \text{ je perioda.}$$
- Periodické orbity mají též stabilní a nestabilní variety
$$S(\Gamma) = \{x \in \mathcal{N} : d(\varphi_t(x), \Gamma) \to 0 \text{ pro } t \to +\infty\}$$
$$U(\Gamma) = \{x \in \mathcal{N} : d(\varphi_t(x), \Gamma) \to 0 \text{ pro } t \to -\infty\}$$

Věta Máme-li periodickou orbitu Γ rovinného systému (6) a existuje-li trajektorie mající Γ jako svoji ω -limitní množinu. Pak každá trajektorie v nějakém *vnějším* okolí má Γ jako ω -limitní množinu.

Této věty existují permutace pro vnější/vnitřní okolí a α /ω limitní množiny.

Definice *(Homoklinická orbita)* Je-li x^* bod rovnováhy systému (6) ω -limitní a zároveň α -limitní množinou nějaké orbity Γ systému (6), pak se Γ nazývá homoklinickou orbitou systému (6).

Definice *(Heteroklinická orbita)* Existují-li v systému (6) dva body rovnováhy x_1^*, x_2^* a je-li x_1^* ω -limitní množinou nějaké orbity Γ a současně x_2^* je α -limitní množina této orbity. Pak Γ se nazývá heteroklinická orbita.

4 Poincarého zobrazení

Definice *(Poincarého zobrazení)* Nechť Γ je periodickou orbitou systému (6) procházející bodem x_0 a nechť Σ je nadrovina kolmá na Γ v bodě x_0 . Pro $\forall x \in \Sigma$ dostatečně blízko x_0 tak, že řešení (6) procházející bodem x_0 v čase $t = 0$ prochází znovu plochou Σ v bodě $P(x)$ blízko x_0 . Pak $x \mapsto P(x)$ je Poincarého zobrazení.

Věta Nechť ... je otveřená množina, ... Předpokládejme, že ... je periodické řešení (6) s periodou ... a že cyklus ... je obsažen v .... Nechť ... je ortogonální nadrovina k ... v ... ... Pak existuje okolí ... a jediná funkce ... definovaná a spojitě diferencovatelná pro ... tak, že ... a ... pro ... .

Pozorování

4.i Poincarého zobrazní pro rovinný systém

Definice

Věta

Definice

4.ii Zobecnění pro systémy vyšších dimenzí

5 Stabilní varieta periodických orbit

Věta *(O stabilní varietě periodické orbity)*

6 Poincarého-Bendixsonova teorie

Věta

Věta

Věta

Důkaz □

VII. Bifurkace