

# Obyčejné diferenciální rovnice

Zápisky z přednášek

Zimní semestr 2025/26

# Obsah

I.	Motivace .....	3
II.	Lineární rovnice prvního řádu .....	3
1	Metody řešení .....	3
1.i	Metoda separace proměnných .....	3
1.ii	Bernoulliova rovnice .....	3
1.iii	Metoda variace konstant .....	4
1.iv	Metoda integračního faktoru .....	4
2	Věta o existenci a jednoznačnosti .....	4
III.	Soustava lineárních diferenciálních rovnic .....	5
1	Systémy s diagonální maticí $A$ .....	6
2	Diagonalizace .....	6
3	Princip superpozice řešení pro homogenní soustavy .....	6
3.i	Fundamentální systém .....	7
4	Exponenciální matice .....	7
5	Metody řešení soustav lineárních rovnic .....	7
5.i	1. Eulerova metoda (pro matici s konstantními koeficienty) .....	7
6	Rovinné systémy .....	8
6.i	Body rovnováhy .....	8
7	Obecné řešení nehomogenního problému .....	8
8	Tok lineárního systému .....	9
IV.	Nelineární diferenciální rovnice .....	9
V.	Soustava nelineárních diferenciálních rovnic - lokální chování .....	10
1	Existence a jednoznačnost .....	11
2	Maximální interval existence .....	11
3	Tok definovaný diferenciální rovnicí .....	11
4	Linearizace .....	11
5	Stabilní a nestabilní varieta .....	12
6	Věta Hartman-Grobman .....	12
7	Stabilita .....	12
8	Body rovnováhy .....	12
9	Body rovnováhy nelineárního systému .....	12
10	Složené body rovnováhy .....	13
VI.	Soustava nelineárních diferenciálních rovnic - globální chování .....	13
1	Dynamické systémy .....	13
2	Limitní množiny, atraktory .....	14
3	Periodické orbity .....	15
4	Poincarého zobrazení .....	15
4.i	Poincarého zobrazení pro rovinný systém .....	16
4.ii	Zobecnění pro systémy vyšších dimenzí .....	16
5	Stabilní varieta periodických orbit .....	16
6	Poincarého-Bendixsonova teorie .....	16
VII.	Bifurkace .....	16

# I. Motivace

Motivací pro studium obyčejných diferenciálních rovnic (ODR) může být například rovnice  $y' = x(y - 1)$ , kterou lze jednoduše řešit analyticky, pokud se ji ale pokusíme vyřešit pomocí nějaké numerické metody, narazíme na spoustu problémů. Je tedy dobré znát a umět analyzovat chování různých systémů obyčejných diferenciálních rovnic, abychom se těmto problémům mohli vyhýbat nebo aspoň věděli, že mohou nastat.

## II. Lineární rovnice prvního řádu

### 1 Metody řešení

#### 1.i Metoda separace proměnných

Rovnice se separovatelnými proměnnými je rovnice typu

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y), \quad \langle x, y \rangle \in \mathbb{R}$$

Použití separační metody je korektní za těchto předpokladů:

- $g(x)$  je spojitá
- $h(x)$  je spojitá

Metoda má tři kroky:

#### 1. Separace

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= g(x)h(y) \\ \frac{dy}{h(y)} &= g(x) dx\end{aligned}$$

**Pozorování** Tato rovnice je speciálním tvarem rovnice v diferenciálech  $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$

#### 2. Integrace

$$\begin{aligned}\int \frac{dy}{h(y)} &= \int g(x) dx \\ H(y) &= G(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Existence těchto funkcí je zaručena předpoklady.

#### 3. Inverze

$$y = H^{-1}(G(x) + C)$$

Existence inverzní funkce k funkci  $H$  je také zaručena předpoklady.

#### 1.ii Bernoulliiova rovnice

Kanonický tvar Bernoulliiovy rovnice je

$$y' + a(x)y = g(x)y^p,$$

kde  $a(x), g(x)$  jsou spojitě na  $J$  a  $p \in \mathbb{R}$ . Jedná se tedy o nelineární rovnici pro  $p$  různé od jedničky a nuly. Je-li  $p = 0 \vee p = 1$  je rovnice lineární a separovatelná respektive separovatelná, Řešíme tedy případ  $p \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ . Za hledanou funkci dosadíme součin funkcí  $y = uv$ .

$$\begin{aligned}(uv)' + auv &= g \cdot (uv)^p \\ u'v + uv' + auv &= g \cdot (uv)^p \\ u'v + u(v' + av) &= g \cdot (uv)^p\end{aligned}$$

Zde bychom se chtěli zbavit závorky  $v' + av$  nalezením vhodné funkce  $v$ . Položíme tedy

$$v' + av = 0$$

Tuto rovnici řešíme separací. Stačí nalézt jakoukoliv funkci která této rovnici vyhovuje, můžeme tedy konstantu uvažovat nulovou, nebo jakoukoliv jinou která nám vyhovuje. Dalším krokem je dosazení  $v$  do rovnice

$$u'v = g \cdot (uv)^p$$

$$\frac{du}{u^p} = gv^{p-1}$$

Rovnici pro  $u$  lze znovu řešit separací. Hledanou funkci teď dostaneme prostou desubstitucí  $y = uv$ . Můžeme si všimnout, že Bernoulliho metoda se skládá ze dvou metod separace proměnných.

### 1.iii Metoda variace konstant

Prvně navržena Lagrangem. Znovu řešíme rovnici typu

$$y' + a(x)y = g(x)$$

Při metodě variace konstant nejdříve určíme řešení homogenní rovnice (znovu separací)

$$y_h' + a(x)y_h = 0$$

$$y_h = Ce^{-\int a \, dx}$$

Nyní uvažujeme  $C = C(x)$  a dosadíme  $y_h$  do původní rovnice. Tím dostaneme rovnici pro  $C(x)$  a neznámá funkce je potom  $y = C(x)e^{-\int a \, dx}$ .

### 1.iv Metoda integračního faktoru

Navržena Eulerem. Řešíme rovnici typu

$$y' + a(x)y = g(x)$$

Metoda integračního faktoru spočívá v tom přenásobit obě strany nějakou vhodnou funkcí abychom levou stranu dostali pod společnou derivaci. Pro naši rovnici je vhodným integračním faktorem funkce  $e^{\int a \, dx}$

$$y' + a(x)y = g(x) \quad \cdot e^{A(x)},$$

kde  $A(x) = \int a \, dx$ . Zde použijeme znalosti že

$$\frac{d}{dx}(e^A y) = Ae^A y \frac{dA}{dx} + e^A \frac{dy}{dx},$$

potom

$$\frac{d}{dx}(e^A y) = ge^A$$

$$\int \frac{d}{dx}(e^A y) \, dx = \int ge^A \, dx$$

$$e^A y = \int ge^A \, dx$$

$$y = e^{-A} \int ge^A \, dx$$

## 2 Věta o existenci a jednoznačnosti

Chtěli bychom vědět za jakých podmínek má smysl ODR řešit, s tím nám pomůže následující věta.

**Věta** Mějme obyčejnou diferenciální rovnici prvního řádu

$$y' = f(x, y).$$

Necht'  $f$  a  $\frac{\partial f}{\partial y}$  jsou spojité na  $G \subseteq \mathbb{R}^2$  a nechteť  $[x_0, y_0] \in G$ , pak existuje právě jedno maximální řešení Cauchyovy úlohy

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

Důležité je si v praxi uvědomit co věta říká a co neříká, to se pokusíme ilustrovat na následujících příkladech.

**Příklad 2.1** Mějme následující Cauchyho úlohu

$$y' = y, \quad y(0) = 0$$

Funkce  $f$  a  $\frac{\partial f}{\partial y}$  jsou určitě spojité na  $G = \mathbb{R}^2$  a bod  $[0, 0] \in G$ . Rovnice tedy splňuje podmínky existence jednoznačného maximálního řešení. To dostaneme třeba separací proměnných.

$$y' = y$$

$$\frac{dy}{y} = dx, \quad y \neq 0$$

$$\ln(|y|) = x + C$$

$$y = \pm K e^x \quad K \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}$$

To je tedy obecné řešení, vidíme ale že pro danou počáteční podmínku řešení neexistuje, přitom ale splňujeme požadavky věty o existenci a jednoznačnosti. Věta nám ale neříká, že pro každou počáteční podmínku řešení existuje, říká jen že pro nějakou počáteční podmínku řešení existovat bude a že bude jednoznačné.

**Příklad 2.2** Mějme následující Cauchyho úlohu

$$y' = \sqrt{|y|}, \quad y(0) = 0$$

Funkce  $f$  je spojitá na  $\mathbb{R}$  ale její derivace už jen na  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  množinou na které hledáme řešení je  $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Pro jednoduchost vyřešíme rovnici pouze pro  $y > 0$ .

$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = dx$$

$$2\sqrt{y} = x + C$$

$$y = \frac{1}{4}(x + C)^2$$

$$0 = \frac{1}{4}(0 + C)^2 \Rightarrow C = 0$$

$$y = \frac{x^2}{4} \quad x \in \mathbb{R}$$

To je ale v podstatě neočekávaný výsledek, vždyť přece počáteční podmínka neleží v oblasti  $G$ . To je ale právě ono, tím že PP neleží v oblasti  $G$ , pak větu nelze užít a neříká nám o řešení nic. Věta **neříká** právě tehdy když  $[x_0, y_0] \in G$  pak řešení existuje a je jednoznačné, to je důležité si uvědomit.

### III. Soustava lineárních diferenciálních rovnic

Máme homogenní soustavu ODR ve tvaru

$$X' = AX. \tag{1}$$

**Pozorování** Každá homogenní soustava má triviální řešení  $X = 0$ .

## 1 Systémy s diagonální maticí $A$

Tedy systémy bez vzájemného propojení (uncoupled systems) jsou rovnice typu

$$X' = AX, \quad (2)$$

kde matice  $A$  je diagonální. Pro takové systémy lze jednoduše najít řešení, při přidání počáteční podmínky, pomocí separace proměnných

$$x'_i = a_{ii}x_i \longrightarrow x_i = c_i e^{a_{ii}t}.$$

nebo ekvivalentní maticový zápis

$$X(t) = \text{diag}(e^{a_{ii}t}) \cdot C,$$

kde  $C = X(0)$ .

## 2 Diagonalizace

Je technika, která nám pomůže převést obecný homogenní lineární systém (1) na systém s diagonální maticí.

**Definice** (*homeomorfismus*) O zobrazení říkáme, že je homeomorfní pokud je bijektivní, spojitě a inverzní zobrazení je též spojitě.

**Věta** Mějme matici  $A$  typu  $n \times n$ , jež má  $n$  různých reálných vlastních čísel  $\lambda_i$ . Pak  $\{V_i\}$  (množina vlastních vektorů) tvoří bázi v  $\mathbb{R}^n$ . Matice  $P = (V_1 \mid \dots \mid V_n)$  je invertibilní a

$$P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

**Věta** (*Obecněji*) Lineární transformace  $T$   $n$ -tého řádu, která vektoru  $Y \in \mathbb{R}^n$  přiřadí stavový vektor  $X = TY$  systému (2), zobrazuje systém (2) na opět lineární systém

$$Y' = BY, \quad (3)$$

kde matice  $B = T^{-1}AT$  a systémy (2) a (3) jsou homeomorfní v  $\mathbb{R}^n$ . Zachovávali-li zobrazení i orientaci pohybu, říkáme že jsou systémy navzájem topologicky ekvivalentní.

Proces diagonalizace provedeme následovně: definujeme lineární transformaci souřadnic

$$Y = P^{-1}X$$

kde  $P$  je invertibilní matice definovaná v předchozí větě. Potom

$$X = PY$$

$$Y' = P^{-1}X' = P^{-1}AX = P^{-1}APY$$

a tím dostaneme diagonalizovaný systém

$$Y' = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)Y,$$

který má řešení

$$Y(t) = \text{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t})Y(0)$$

A potom, protože  $Y(0) = P^{-1}X(0)$  a  $X(t) = PY(t)$ , lze jednoduše odvodit že (1) má řešení

$$X(t) = PE(t)P^{-1}X(0),$$

kde  $E(t)$  je diagonální matice

$$E(t) = \text{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}).$$

## 3 Princip superpozice řešení pro homogenní soustavy

Jestliže  $X_1, \dots, X_n$  jsou řešení homogenní soustavy ODR na intervalu  $J$  a  $C_1, \dots, C_n$  jsou libovolné konstanty, pak lineární kombinace  $C_1X_1 + \dots + C_nX_n$  je opět řešením soustavy na  $J$ .

### 3.i Fundamentální systém

## 4 Exponenciální matice

O lineární rovnici víme, že obecné řešení má tvar  $x = ce^{at}$ , chtěli bychom najít nějakou paralelu k systémům rovnic, přece jenom je jejich zápis velice podobný. K tomu se nám bude hodit exponenciální matice.

**Věta** Je-li  $A$  typu  $n \times n$  reálná či komplexní matice, tak maticová řada  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}$  konverguje k matici  $e^{At}$  třídy  $n \times n$ , která má vlastnosti:

1.  $\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At} = e^{At}A$
2.  $e^{(t+s)A} = e^{At}e^{As}$
3.  $e^{A0} = \mathbb{I} \wedge e^{At}$  je invertibilní  $\wedge e^{At}e^{-At} = \mathbb{I}$ , kde  $\mathbb{I}$  je jednotková matice.

Bude-li  $X(0) = u_j$  pak

$$X = e^{At} = e^{\lambda_j t} e^{At} e^{-\lambda_j t} u_j = e^{\lambda_j t} e^{(A - \lambda_j I)t} = e^{\lambda_j t} (I + (A - \lambda_j I)t + \dots) u_j = e^{\lambda_j t} u_j.$$

**Věta (Základní věta pro lineární systémy)** Necht'  $A$  je typu  $n \times n$ . Potom pro dané  $X_0 \in \mathbb{R}^n$ , má Cauchyho problém

$$\begin{aligned} X' &= AX \\ X(0) &= X_0 \end{aligned}$$

jednoznačné řešení

$$X(t) = e^{At} X_0.$$

**Věta (Cayley-Hamilton)** Necht' ... je charakteristický polynom matice typu .... Pak maticový polynom získaný zaměněním ... za ... do ... splňuje ....

## 5 Metody řešení soustav lineárních rovnic

### 5.i 1. Eulerova metoda (pro matici s konstantními koeficienty)

Řešení odhadujeme ve tvaru  $x_i = u_i e^{\{\lambda_i\}t}$ , kde  $(u_i, \lambda_i)$  je vlastní pár matice  $A$ . Může nastat několik případů

#### 5.i.i $n$ lineárně nezávislých vektorů

**Věta** Necht' matice  $A$  má  $n$  lineárně nezávislých vektorů  $V^1, \dots, V^n$ , které jsou příslušné k (ne nutně různým!) vlastním číslům. Potom

$$V^1 e^{\{\lambda_1\}t}, V^2 e^{\{\lambda_2\}t}, \dots, V^n e^{\{\lambda_n\}t},$$

je fundamentální systém řešení soustavy na  $\mathbb{R}$ .

To může nastat má-li matice  $A$   $n$  různých vlastních čísel, matice  $A$  je symetrická, ...

#### 5.i.ii komplexní vlastní číslo

Dostaneme-li komplexní vlastní číslo  $\lambda_i = \alpha + \beta i$ , výsledkem by mělo být

$$X_1 = V^1 e^{(\alpha + \beta i)t}$$

to je ale komplexní funkce a taková nás moc nezajímá, protože jsme řešili reálný problém, chtěli bychom tedy reálné výsledky. Zkusíme zda by soustavu neřešila pouze reálná část výsledku.

$$\operatorname{Re}(x') = (\operatorname{Re}(x))' = \operatorname{Re}(Ax) = A \cdot \operatorname{Re}(x) \setminus (\operatorname{Re}(x))' = A \cdot \operatorname{Re}(x) \setminus X' = A \cdot X$$

to znamená, že reálná část je řešením, to samé platí pro imaginární část. Mějme tedy komplexní vlastní číslo  $\lambda = \alpha + \beta i$  a odpovídající vlastní vektor  $U = V + Wi$ .

$$\begin{aligned} X &= Ue^{\lambda t} = (V + Wi)e^{\alpha + \beta i} = (V + Wi)e^{\alpha t}e^{\beta it} = \\ &= (V + Wi)e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i \sin(\beta t)) = e^{\alpha t}(V \cos(\beta t) - W \sin(\beta t)) + \\ &\quad + ie^{\alpha t}(W \cos(\beta t) + V \sin(\beta t)) \end{aligned}$$

$$\operatorname{Re}(X) = e^{\alpha t}(V \cos(\beta t) - W \sin(\beta t))$$

$$\operatorname{Im}(X) = e^{\alpha t}(W \cos(\beta t) + V \sin(\beta t))$$

$$X = C_1 \operatorname{Re}(X) + C_2 \operatorname{Im}(X)$$

### 5.i.iii méně než $n$ lineárně nezávislých vlastních vektorů

## 6 Rovinné systémy

Jsme-li v  $\mathbb{R}^2$  označujeme systém (1) jako rovinný. Diagonalizujeme-li systém

$$X' = AX$$

$$X' = BX, \quad B = PAP^{-1},$$

kde  $P = (V_1 \mid V_2)$ , pak nastává právě jedna z možností

1.  $B = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$  má-li  $A$  2 různá vlastní čísla  $\lambda_{1,2}$ ,
2.  $B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$  je-li  $\lambda$  dvonásobné reálné vlastní číslo,
3.  $B = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$  je-li  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$  sdružené komplexní vlastní číslo.

Potom lze určit řešení jako

1.  $X(t) = \operatorname{diag}(e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t})X(0)$
2.  $X(t) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X(0)$
3.  $X(t) = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos(\beta t) & -\sin(\beta t) \\ \sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{pmatrix} X(0)$

### 6.i Body rovnováhy

Bod pro nějž platí  $F(X^*) = 0$  nazýváme bod rovnováhy. Pro lineární systém  $F(X) = AX + B$ . Pro lineární homogenní systém je bodem rovnováhy počátek. Rozlišujeme následující body rovnováhy pro rovinný homogenní systém

- Uzel:  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \quad \wedge \quad \lambda_1 \neq \lambda_2$
- Sedlo:  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \quad \wedge \quad \lambda_1 \lambda_2 < 0$
- Ohnisko:  $\lambda_{1,2} \in \mathbb{C}$
- Střed:  $\lambda_{1,2} = \pm i\beta$

## 7 Obecné řešení nehomogenního problému

Mějme soustavu ve tvaru

$$X' = AX + F(t), \tag{4}$$

kde  $A$  je matice typu  $n \times n$  a  $F(t)$  je spojitá vektorová funkce.

**Definice** (*Fundamentální matice*) Libovolné řešení rovnice

$$X' = AX.$$

značíme  $\Phi(t)$  a nazýváme ho fundamentální systém nebo fundamentální matice.  $\Phi(t)$  je  $n \times n$  a splňuje

$$\Phi'(t) = A\Phi(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$



**Věta** Je-li  $\Phi(t)$  fundamentální systém rovnice (1), potom řešení nehomogenní rovnice (4) s počáteční podmínkou  $X(0) = X_0$  je jednoznačné a ve tvaru

$$X(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(0)X_0 + \int_0^t \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)F(\tau) d\tau.$$

## Pozorování

**Definice** (*Princip superpozice*) Necht'  $X_C = C_1X_1 + \dots + C_nX_n$  je obecné řešení homogenního problému a necht'  $X_P$  je řešení .... Pak obecné řešení má tvar

$$X = X_C + X_P$$

## 7.n.i Metoda variace konstant

## 8 Tok lineárního systému

Uvažujme systém

$$X' = AX.$$

**Definice** (*Tok lineárního systému*) Množina zobrazení  $e^{At} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$  se nazývá tokem lineárního systému. (Popisuje pohyb bodů ... po trajektoriích systém ...)

**Definice** (*Hyperbolický lineární systém ODR*) Mají-li všechna vlastní čísla matice  $A$  nenulovou reálnou část, říkáme o lineárním systému ODR že je hyperbolický

**Definice** (*Invariantní množina*) Podmnožina  $E \subset \mathbb{R}^n$  se nazývá invariantní k toku  $e^{At}$ , jestliže platí  $e^{At}E \in E$  pro  $\forall t \in \mathbb{R}$

**Definice** Mějme lineární systém  $\dot{X} = AX$  a necht'  $w_j = u_j + iv_j$  je zobecněný vlastní vektor matice  $A$  odpovídající vlastnímu číslu  $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$  a necht'  $\{u_1, \dots, u_r, v_{k+1}, \dots, v_r\}$  je báze  $\mathbb{R}^n$ , ( $n = 2r - k$ ).

- Pak podprostor vytvořený zobecněnými vlastními vektory jimž odpovídají vlastní čísla se zápornou reálnou částí se nazývá **stabilní podprostor** a značíme ho  $E^s = \text{span}\{u_j, v_j : \alpha_j < 0\}$
- Podprostor vytvořený zobecněnými vlastními vektory jimž odpovídají vlastní čísla s kladnou reálnou částí se nazývá **nestabilní podprostor** a značíme ho  $E^u = \text{span}\{u_j, v_j : \alpha_j > 0\}$
- Podprostor vytvořený zobecněnými vlastními vektory jimž odpovídají vlastní čísla s nulovou reálnou částí se nazývá **centrální podprostor** a značíme ho  $E^c = \text{span}\{u_j, v_j : \alpha_j = 0\}$

**Věta** Vlastnosti řešení lineárního systému v invariantních podprostorech

- Je-li  $X_0 \in E^s$  pak pro  $\forall t \in \mathbb{R}$  je  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{At}X_0 = 0$ . Bod rovnováhy je asymptoticky stabilní.
- Je-li  $X_0 \in E^u$  pak pro  $\forall t \in \mathbb{R}$  je  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{At}X_0 = \pm\infty$ . Bod rovnováhy je asymptoticky nestabilní.

## IV. Nelineární diferenciální rovnice

Nelineární ODR v normálním tvaru nazýváme rovnici

$$y^n = f(t, y^{n-1}, y^{n-2}, \dots, y),$$

zde  $y^n$  značí  $n$ -tou derivaci. Tato rovnice má několik jednoduchých řešení ve speciálních případech.

1.  $\ddot{y} = f(\dot{y}, t)$

Zde provedeme redukci řádu vhodnou substitucí.

$$z(t) = \dot{y}(t), \quad \dot{z}(t) = \ddot{y}(t)$$

Tím dostaneme systém rovnic, který už je jednoduché vyřešit.

$$\dot{y} = z$$

$$\dot{z} = f(t, z)$$

2.  $\ddot{y} = f(\dot{y}, y)$

Zde znovu zavedeme vhodnou substituci

$$z = \dot{y} \rightarrow \dot{z} = \ddot{y}$$

Tady si uvědomíme, že

$$\dot{z} = \ddot{y} = f(y, z) = \frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dy} z$$

Našli jsme tedy obyčejnou diferenciální rovnici  $\frac{dz}{dy} = \frac{1}{z} f(y, z)$ , jejímž řešením je funkce  $z$ , potom pro hledanou funkci víme že  $y = \int z dt$

## V. Soustava nelineárních diferenciálních rovnic - lokální chování

Soustavou nelineárních diferenciálních rovnic nazýváme

$$X' = F(t, X), \quad X(0) = X_0. \quad (5)$$

Nechť  $E$  je otevřená podmnožina  $\mathbb{R}^n$ ,  $X_0 \in E$  a nechť  $F \in \mathcal{C}^1(E)$  pak

$$\dot{X} = F(X), \quad X(0) = X_0, \quad (6)$$

nazýváme nelineárním autonomním systémem obyčejných diferenciálních rovnic. Poznamenejme, že jakýkoliv neautonomní systém lze autonomizovat přidáním jedné proměnné.

Oproti lineárním systémům může u nelineárních systémů nastat tzv. blow up. To znamená, že řešení utíká do nekonečna v nějakém konečném čase, to je samozřejmě nefyzikální. Ilustrujeme to na příkladě.

### Příklad V.1

$$\dot{x} = x^2, \quad x(0) = 1$$

$$\frac{dx}{x^2} = dt$$

$$-\frac{1}{x} = t + C$$

$$x = -\frac{1}{t-1}, \quad t \in (-\infty, 1)$$

Je vidět, že

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} x(t) = \infty,$$

tomu říkáme blow up řešení.

## 1 Existence a jednoznačnost

**Věta** Necht'  $E$  je otevřená podmnožina  $\mathbb{R}^n$ ,  $X_0 \in E$  a necht'  $F \in \mathcal{C}^1(E)$ . Pak existuje  $a > 0$  takové, že počáteční problém  $\dot{X} = F(X)$ ,  $X(0) = X_0$  má jediné řešení na  $\langle -a, a \rangle$

**Věta (Barrowův vzorec)** Je-li řešení  $x(t)$  rovnice  $\dot{X} = F(X)$  na intervalu  $I = (t_0, t_1)$ ,  $F \in \mathcal{C}^1(I)$  a  $F(X) \neq 0$  na  $I$ . Označme  $a = \lim_{t \rightarrow t_0^+} x(t)$ ,  $b = \lim_{t \rightarrow t_1^-} x(t)$ . Pak

$$t_1 - t_0 = \int_a^b \frac{1}{F(z)} dz$$

To nám říká pár věcí:

- Vzorec udává čas, který potřebuje řešení k tomu, aby vystoupalo (resp. zklesalo) z hodnoty  $a$  do hodnoty  $b$
- Řešení konvergující k  $b$  zleva (resp. zprava) pro  $t \rightarrow T$  ( $T$  je krajní bod intervalu, na kterém je řešení definováno) se napojí v konečném čase na stacionární řešení  $x = b$ , právě tehdy když následující integrál konverguje (pro malé  $\delta$ )

$$\int_{b-\delta}^b \frac{1}{F(z)} dz$$
$$\left( \text{resp. } \int_b^{b-\delta} \frac{1}{F(z)} dz \right)$$

**Věta** Necht'  $E$  je otevřená podmnožina  $\mathbb{R}^n$  obsahující  $X_0$  a necht'  $F \in \mathcal{C}^1(E)$ . Necht'  $u_1(t)$  a  $u_2(t)$  je řešení nelineární soustavy na  $I_1$  respektive na  $I_2$ . Pak  $0 \in I_1 \cap I_2$  a je-li  $I$  libovolný otevřený interval obsahující  $0$ , který je zároveň podintervalem  $I_1 \cap I_2$  pak  $u_1(t) = u_2(t)$  pro  $\forall t \in I$ .

**Věta** Necht'  $E$  je otevřená podmnožina  $\mathbb{R}^n$  a  $F \in \mathcal{C}^1$ . Pak pro  $\forall X_0 \in E$  existuje největší otevřený interval  $(\alpha, \beta)$  na němž má počáteční problém (6) jediné řešení  $X(t)$ . Tzn. má-li (6) řešení  $Y(t)$  na  $I \subset (\alpha, \beta)$ . Pak  $X(t) = Y(t)$  pro  $\forall t \in I$ .

## 2 Maximální interval existence

## 3 Tok definovaný diferenciální rovnicí

## 4 Linearizace

Mějme nelineární autonomní systém:

$$\dot{X} = F(X), \quad F(0) = 0$$

Provedeme Taylorův rozvoj prvního řádu okolo nuly:

$$f_i(X) = f_{i(0)} + \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(0) \cdot x_1 + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(0) \cdot x_n + \omega_i,$$

kde  $\omega_i$  je chyba způsobená zanedbáním členů vyšších řádů a  $f_{i(0)} = 0$ . Jako  $A$  označíme Jacobiho matici funkce  $F(x)|_0$  (tedy v bodě 0). Potom soustava

$$\dot{X} = A \cdot X,$$

je linearizovaný systém k původnímu systému.

**Věta** Jestliže všechna vlastní čísla Jacobiho matice  $A$  mají záporné reálné části. Pak bod 0 je asymptoticky stabilní bod rovnováhy nelinearizované soustavy. Jestliže je alespoň jedna reálná část kladná, pak je bod 0 nestabilní bod rovnováhy nelinearizované soustavy.

Tato věta nám dává informaci o stabilitě počátku pouze ze znalosti Jacobiho matice soustavy. Nedává nám ale informaci o žádném jiném bodě mimo počátek, chtěli bychom ji proto zobecnit. Mějme tedy:

$$\dot{X} = F(X), \quad F(H) = 0$$

Bodem rovnováhy je tedy nějaký bod  $H$  a ne počátek. Provedeme-li znovu Taylorův rozvoj dostaneme

$$f_i(X) = f_i(H) + \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(H) \cdot x_1 + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(H) \cdot x_n + \omega_i.$$

Provedeme transformaci soustavy tak, aby bod  $H$  byl počátkem soustavy nové.

$$u_1 = x_1 - h_1$$

$$u_2 = x_2 - h_2$$

$$\vdots$$

$$u_i = x_i - h_i$$

Tím dostaneme soustavu  $\dot{U} = G(U)$ , ve které je bod  $H$  počátkem. Sestavíme-li Jacobiho matici této soustavy, zjistíme že je stejná jako kdybychom vyhodnotili Jacobiho matici původního systému v bodě  $H$ . To znamená, že pro vyhodnocení stability obecného bodu rovnováhy nemusíme provádět transformaci, ale stačí jen vyhodnotit Jacobiho matici v daném bodě.

## 5 Stabilní a nestabilní varieta

## 6 Věta Hartman-Grobman

## 7 Stabilita

## 8 Body rovnováhy

**Definice** (*Bod rovnováhy*) Body rovnováhy jsou body pro něž platí

$$F(X_0) = 0.$$

Rozlišujeme několik druhů bodů rovnováhy:

- stabilní (Lyapunovsky) jestliže pro  $\forall \varepsilon \exists \delta > 0$  tak, že  $\|X^0\| < \delta \Rightarrow \|X(t, X^0)\| < \varepsilon$   
tzn. řešení neuteče z nějaké oblasti dané  $\varepsilon$ .
- atraktor existuje-li  $\delta > 0$  tak, že  $\|X^0\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} X(t, X^0) = 0$   
(je-li bod rovnováhy v nule)
- asymptoticky stabilní  $\Leftrightarrow$  je stabilní a atraktor
- nestabilní není-li stabilní

**Definice** (*Oblast atraktivity*)

**Věta** (*Hurwitzovo kritérium*)

## 9 Body rovnováhy nelineárního systému

Mějme nelineární systém ve tvaru:

$$\dot{x} = P(x, y)$$

$$\dot{y} = Q(x, y)$$

**Definice (Topologické sedlo)** Jestliže existují trajektorie  $\Gamma_i = \{x \in E; x = \varphi(t, x_i), t \in \mathbb{R}\}$  takové, že  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t, x_i) = x_0, i = 1, 2$  a dále existují trajektorie  $\Gamma_i = \{x \in E; x = \varphi(t, x_i), t \in \mathbb{R}\}$  takové, že  $\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t, x) = x_0, i = 3, 4$ .

A existuje-li  $\delta$ -okolí bodu  $x_0$  takové, že ostatní trajektorie systému @system vycházející z bodu  $X \in N_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$  opustí  $N_\delta(x_0)$  při  $t \rightarrow +\infty$  či  $t \rightarrow -\infty$ . Pak se  $x_0$  nazývá topologické sedlo a trajektorie  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$ , se nazývají separatisy.

Topologické sedlo má variety:

- Stabilní varieta  $S$  v bodě  $x_0 : S = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \{x_0\}$
- Nestabilní varieta  $U$  v bodě  $x_0 : U = \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \cup \{x_0\}$

**Lemma 9.1** Bud'  $E \subset \mathbb{R}^n$ ,  $E$  je otevřená množina,  $F \in \mathcal{C}^1(E)$ ,  $x_0 \in E$ ,  $F(x_0) = 0$ .

- Je-li  $x_0$  hyperbolický bod rovnováhy systému @system je  $x_0$  topologické sedlo  $\Leftrightarrow x_0$  je sedlo linearizace  $\dot{X} = \mathcal{D}F(x_0)$
- $F \in \mathcal{C}^2(E)$ 
  - ▶ Bod rovnováhy je stabilní (nestabilní) uzel  $\Leftrightarrow x_0$  je stabilní respektive nestabilní uzel linearizace  $\dot{X} = \mathcal{D}F(x_0)$
  - ▶ Bod rovnováhy je stabilní (nestabilní) ohnisko  $\Leftrightarrow x_0$  je stabilní respektive nestabilní ohnisko linearizace  $\dot{X} = \mathcal{D}F(x_0)$
- Nehyperbolický bod rovnováhy  $x_0$  je střed linearizace. Pak  $x_0$  je je buď
  1. Střed
  2. Ohnisko
  3. Střed-ohnisko

**Definice (Sektor)** Sektor je oblast ohraničená separatisami

Sektorů máme tři typy, budeme je rozlišovat pouze dle obrázků

- Hyperbolický sektor
- Parabolický sektor
- Eliptický sektor

## 10 Složené body rovnováhy

# VI. Soustava nelineárních diferenciálních rovnic - globální chování

## 1 Dynamické systémy

**Definice (Dynamický systém)** Dynamický systém na  $E$  je zobrazení

$$\varphi : \mathbb{R} \times E \mapsto E,$$

kde  $E$  je otevřená podmnožina  $\mathbb{R}^n$  a pokud  $\varphi_t(x) = \varphi(t, x)$ , potom  $\varphi_t$  splňuje

1.  $\varphi_0(x) = x$  pro  $\forall x \in E$
2.  $\varphi_t \circ \varphi_s(x) = \varphi_{t+s}$  pro  $\forall t, s \in \mathbb{R}$  and  $x \in E$

**Pozorování** Je-li matice  $A$  typu  $n \times n$  potom funkce  $\varphi(t, x) = e^{At}x$  definuje dynamický systém na  $\mathbb{R}^n$  a také platí, že pro libovolné  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  je funkce  $\varphi(t, x_0)$  řešení počáteční úlohy

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax \\ x(0) &= x_0. \end{aligned}$$

Obecně, je-li  $\varphi(t, x)$  dynamický systém na  $E \subset \mathbb{R}^n$ , pak funkce

$$f(x) = \frac{d}{dt}\varphi(t, x) \big|_{t=0}$$

definuje vektorové pole na  $E$  a pro libovolné  $x_0 \in E$ , je  $\varphi(t, x_0)$  řešením počáteční úlohy

$$\dot{x} = f(x)$$

$$x(0) = x_0.$$

**Věta** (*O globální existenci*) Pro  $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$  a pro  $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$ , má počáteční problém

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{F(x)}{1 + |F(x)|} \\ x(0) &= x_0, \end{aligned} \tag{7}$$

jednoznačné řešení  $x(t)$  definované pro  $\forall t \in \mathbb{R}$ , tedy (7) definuje dynamický systém na  $\mathbb{R}^n$ , dále platí že (7) je topologicky ekvivalentní k  $\dot{x} = F(x)$  na  $\mathbb{R}^n$ .

## 2 Limitní množiny, atraktory

Uvažme autonomní systém (6) s  $F \in \mathcal{C}^1(E)$ , kde  $E$  je otevřená podmnožina  $\mathbb{R}^n$ . Uvedli jsme že tato rovnice definuje dynamický systém  $\varphi(t, x)$  na  $E$ . Pro  $x \in E$  funkce  $\varphi(\cdot, x) : \mathbb{R} \mapsto E$  definuje křivku řešení, trajektorii a orbitu systému (6) procházející bodem  $x_0 \in E$ .

**Definice** (*Trajektorie*) Trajektorií bodem  $x_0$  nazýváme množinu

$$\Gamma_{x_0} = \{x \in E : x = \varphi(t, x_0), \forall t \in \mathbb{R}\},$$

speciálně množiny

$$\Gamma_{x_0}^+ = \{x \in E : x = \varphi(t, x_0), \forall t > 0\}$$

$$\Gamma_{x_0}^- = \{x \in E : x = \varphi(t, x_0), \forall t < 0\}$$

nazýváme pozitivní respektive negativní polotrajektorie.

**Definice** (*Limitní body*) Necht'  $\Gamma$  jsou trajektorie (6). Existuje-li posloupnost  $\{t_n\} \rightarrow \infty$  s  $n \rightarrow \infty$  tak, že  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t_n, x_0) = P$ . Pak  $P$  se nazývá  $\omega$ -limitní bod trajektorie  $\Gamma$ .

Obobně existuje-li posloupnost  $\{t_n\} \rightarrow -\infty$  s  $n \rightarrow \infty$  tak, že  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t_n, x_0) = P$ . Pak  $P$  se nazývá  $\alpha$ -limitní bod trajektorie  $\Gamma$ .

**Definice** (*Limitní trajektorie*) Množina všech  $\omega$ -limitních (respektive  $\alpha$ ) bodů se nazývá  $\omega$ -limitní (respektive  $\alpha$ ) trajektorie a značí se  $\omega(\Gamma)$  (respektive  $\alpha(\Gamma)$ ).

**Věta** Množiny  $\omega(\Gamma)$ ,  $\alpha(\Gamma)$  a trajektorie  $\Gamma$  systému (6) jsou uzavřené podmnožiny  $E$  a jsou-li kompaktní v  $\mathbb{R}^n$  pak jsou i souvislé a neprázdné.

**Věta** (*Atraktující množina*) Necht' množina  $A \subset E$ ,  $A$  je uzavřená. Pak  $A$  se nazývá atraktující množina systému (6), existuje-li okolí  $\mathcal{U}$  množiny  $A$  takové, že pro  $\forall x \in \mathcal{U}$  je  $\varphi(t, x) \in \mathcal{U}$  pro  $t > 0$  a  $\varphi(t, x) \rightarrow A$  pro  $t \rightarrow \infty$ . Obsahuje-li  $A$  hustou orbitu, pak se nazývá atraktorem.

Z toho vyplývá pár věcí:

- Každý bod rovnováhy  $x_0$  systému (6) je vlastní  $\omega$  i  $\alpha$  limitní množina. ( $\varphi(t, x_0) = x_0 \forall t \in \mathbb{R}$ )
- Má-li trajektorie  $\Gamma$  systému (6) jediný  $\omega$ -limitní bod  $x_0$ , pak je to bod rovnováhy systému.
- Stabilní uzel, nebo ohnisko jsou  $\omega$ -limitní množiny každé trajektorie (u nelineárních systémů pouze v nějakém okolí).
- Ne každý  $\omega$ -limitní bod je atraktor, viz sedlo

### 3 Periodické orbity

**Definice** (*Periodická orbita*) Periodickou orbitou systému (6) nazýváme každou uzavřenou trajektorii systému (6), která není bodem rovnováhy systému (6).

**Definice** (*Stabilní periodická orbita*) Periodická orbita  $\Gamma$  se nazývá stabilní, jestliže pro  $\forall \varepsilon > 0$  existuje okolí  $\mathcal{N}_\varepsilon(\Gamma)$  křivky  $\Gamma$  takové, že pro  $\forall x \in \mathcal{N}_\varepsilon(\Gamma)$  je  $d(\Gamma_x^+, \Gamma) < \varepsilon$  tzn.  $\forall x \in \mathcal{N}_\varepsilon(\Gamma)$  a  $t \geq 0 \Rightarrow d(\varphi(t, x), \Gamma) < \varepsilon$ .

**Definice** (*Nestabilní periodická orbita*) Nestabilní orbita je orbita, která není stabilní.

**Definice** (*Asymptoticky stabilní periodická orbita*) Asymptoticky stabilní orbita je orbita, která je stabilní a platí pro ni  $\forall x \in \mathcal{N}_\varepsilon(\Gamma)$  je  $\lim_{t \rightarrow \infty} d(\varphi_t(x), \Gamma) = 0$ .

#### Pozorování

- Periodická orbita odpovídá periodickému řešení systému (6)

$$\varphi(t + T, x) = \varphi(t, x), \text{ kde } \min(T) \text{ je perioda.}$$

- Periodické orbity mají též stabilní a nestabilní variety

$$S(\Gamma) = \{x \in \mathcal{N} : d(\varphi_t(x), \Gamma) \rightarrow 0 \text{ pro } t \rightarrow +\infty\}$$

$$U(\Gamma) = \{x \in \mathcal{N} : d(\varphi_t(x), \Gamma) \rightarrow 0 \text{ pro } t \rightarrow -\infty\}$$

**Věta** Máme-li periodickou orbitu  $\Gamma$  rovinného systému (6) a existuje-li trajektorie mající  $\Gamma$  jako svoji  $\omega$ -limitní množinu. Pak každá trajektorie v nějakém *vnějším* okolí má  $\Gamma$  jako  $\omega$ -limitní množinu.

Této věty existují permutace pro vnější/vnitřní okolí a  $\alpha / \omega$  limitní množiny.

**Definice** (*Homoklinická orbita*) Je-li  $x^*$  bod rovnováhy systému (6)  $\omega$ -limitní a zároveň  $\alpha$ -limitní množinou nějaké orbity  $\Gamma$  systému (6), pak se  $\Gamma$  nazývá homoklinickou orbitou systému (6).

**Definice** (*Heteroklinická orbita*) Existují-li v systému (6) dva body rovnováhy  $x_1^*, x_2^*$  a je-li  $x_1^*$   $\omega$ -limitní množinou nějaké orbity  $\Gamma$  a současně  $x_2^*$  je  $\alpha$ -limitní množina této orbity. Pak  $\Gamma$  se nazývá heteroklinická orbita.

### 4 Poincarého zobrazení

**Definice** (*Poincarého zobrazení*) Necht'  $\Gamma$  je periodickou orbitou systému (6) procházející bodem  $x_0$  a necht'  $\Sigma$  je nadrovina kolmá na  $\Gamma$  v bodě  $x_0$ . Pro  $\forall x \in \Sigma$  dostatečně blízko  $x_0$  tak, že řešení (6) procházející bodem  $x_0$  v čase  $t = 0$  prochází znovu plochou  $\Sigma$  v bodě  $P(x)$  blízko  $x_0$ . Pak  $x \mapsto P(x)$  je Poincarého zobrazení.

**Věta** Necht' ... je otevřená množina, ... Předpokládejme, že ... je periodické řešení (6) s periodou ... a že cyklus ... je obsažen v .... Necht' ... je ortogonální nadrovina k ... v ... . Pak existuje okolí ... a jediná funkce ... definovaná a spojitě diferencovatelná pro ... tak, že ... a ... pro ... .

#### Pozorování

#### 4.i Poincarého zobrazení pro rovinný systém

Definice

Věta

Definice

#### 4.ii Zobecnění pro systémy vyšších dimenzí

### 5 Stabilní varieta periodických orbit

Věta (*O stabilní varietě periodické orbity*)

### 6 Poincarého-Bendixsonova teorie

Věta

Věta

Věta

Důkaz

□

## VII. Bifurkace

Definice

Věta

Věta