Obyčejné diferenciální rovnice

rovnici $y'=x(y-1)$ lze jednodušše řešit analyticky, pokud ji ale budeme řešit numericky vyvstane spousta problémů

Metoda separace proměnných

$$y'=h(y)g(x)$$

I. SEPARACE

$$\frac{1}{h(y)}dy = g(x)\,dx$$

II. INTEGRACE

$$\int \frac{1}{h(y)}dy = \int g(x)\,dx$$

$$H(y) = G(x) + C$$

III. INVERZE

$$y = H^{-1}(G(x)+C)$$

Ex.: $y'=xy^3$ $\quad y(0)=1$

$$\frac{1}{y^3}dy = x\,dx$$

$$\int y^{-3}dy = \int x\,dx$$

$$-\frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}y^{-2} = \frac{x^2}{\cancel{2}} + C$$

$$y^2 = -(x^2+C)^{-1}$$

$$|y| = \sqrt{-(x^2+C)^{-1}} = \sqrt{\frac{1}{-x^2+K}}$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{1}{-x^2+k}} \qquad x\in(-\sqrt{k},\sqrt{k})$$

$$1 = \pm\sqrt{\frac{1}{k}} \;\rightarrow\; k=1$$

okolo $[0,1]$ se řešení chová parabolicky, následně nastane blow-up

Bernoulliho metoda

$$y'+a(x)y = g(x) \quad ; \quad a(x), g(x) \in C^1(J)$$

$$y = u\cdot v$$

$$y' = u'v + uv'$$

v podstatě homogenní rovnice

$$u'v + uv' + auv = g$$
$$u'v + u(v' + av) = g$$
$$\hookrightarrow v' + av = 0$$
$$v = \dots$$

$$u'v = g$$
$$u' = \frac{g}{v}$$
$$u = \dots \qquad \rightarrow y = uv$$

Ex.: $y' - \frac{y}{x} = 2x^3$ $\quad y(2)=\frac{2}{3}$

$$v' - \frac{v}{x} = 0$$
$$\frac{1}{v}dv = \frac{1}{x}dx$$
$$v = x$$
$$u' = \frac{2x^3}{x} = 2x^2$$
$$u = \frac{2}{3}x^3 + C$$
$$y = \frac{2}{3}x^4 + Cx$$

$x\in(-\infty,0)\cup(0,\infty)$

$$\frac{2}{3} = \frac{2}{3}2^4 + C\cdot 2$$
$$C = -5$$
$$y = \frac{2}{3}x^4 - 5x \qquad x\in(0,\infty)$$

Ex. 2.: $y' + y\,\mathrm{TAN}(x) = \frac{1}{\cos x} y^2$; $y(0) = \frac{1}{2}$

$v' + v\,\mathrm{TAN}(x) = 0$

$\frac{1}{v} dv = \mathrm{TAN}(x)\,dx$

$\int \frac{1}{v} dv = \int \mathrm{TAN}(x)\,dx$

$\ln|v| = -\ln|\cos(x)| + K$

$v = \cos(x) \quad x \in \langle 0, \frac{\pi}{2}) + 2k\pi$

$v \cdot u' = \frac{(uv)^2}{\cos x}$

$\frac{u'}{u^2} = 1$

$u = -\frac{1}{x+C}$

$y = -\frac{\cos(x)}{x+C}$

$\frac{1}{2} = -\frac{1}{C} \Rightarrow C = -2$

$y = -\frac{\cos(x)}{x-2} \quad x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

Variace konstant (Lagrange)

$y' + a(x)\,y = g(x)$

I. HOMOGENNÍ ROVNICE

$y' + a(x)\,y = 0$

$y_H = C e^{-\int a(x)\,dx}$

II. OBECNÉ ŘEŠENÍ

$y = C(x)\, e^{-\int a\,dx}$

Ex.: $xy' + 3y = x^2$

$xy' + 3y = 0$

$\ln|y| = -3\ln|x| + C$

$y_H = \frac{C}{x^3}$

$y(x) = C(x)\frac{1}{x^3}$

$x\left(C'\frac{1}{x^3} - \cancel{C\frac{3}{x^4}}\right) + \cancel{3\frac{C}{x^3}} = x^2$

$C'\frac{1}{x^2} = x^2 \to C = \frac{x^5}{5} + K$

$y(x) = \frac{x^5 + K}{5x^3}$

tato metoda je nejsnáze zobecnitelná, proto ji nejčastější

Ex. 2.: $y' + \frac{1}{x} y = \frac{1}{x^2}$; $y(-1) = 2$

$y' + \frac{1}{x} y = 0$

$\ln|y| = -\ln|Cx| \quad x \neq 0 \quad x < 0$

$y_H = \frac{C}{x}$

$\frac{C'}{x} - \cancel{\frac{C}{x^2}} + \cancel{\frac{C}{x^2}} = \frac{1}{x^2} \to C' = \frac{1}{x} \to C = \ln|x| + K$

$\to y = \frac{\ln(-x) + K}{x} \quad x \in (-\infty, 0)$

$K = -2$

Metoda integračního faktoru (Euler)

$$y' + ay = g \quad / \cdot e^{A(x)} \qquad A(x) = \int a(x)\,dx$$

$$(y' + ay)\, e^{A(x)} = g\, e^{A(x)}$$

$$(e^{A(x)} y)' = \overset{a}{\overset{\shortparallel}{A'}} e^{A} y + e^{A} y'$$

$$\frac{d}{dx}(e^{A} y) = g e^{A}$$

$$\int \frac{d}{dx}(e^{A} y)\, dx = \int g e^{A}\, dx$$

$$e^{A} y = \int g e^{A}\, dx$$

$$y = e^{-A} \int g\, e^{A}\, dx$$

Ex.: $y' + \frac{1}{x} y = \frac{1}{x^2} \qquad A = \int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x|$

$$y = e^{-\ln|x|} \int \frac{1}{x^2} e^{\ln|x|}\, dx$$

$$y = \frac{1}{x} \int \frac{1}{x}\, dx = \frac{\ln|x| + C}{x}$$

Ex. 2.: $y' + y \tan(x) = \sin(2x)$

$$A = \int \tan(x)\, dx = -\ln|\cos(x)|$$

$$y = e^{\ln|\cos(x)|} \int \sin(2x)\, e^{-\ln|\cos(x)|}\, dx$$

$$y = \cos(x) \int \frac{2 \sin x \cos x}{\cos x}\, dx$$

$$y = \cos x \int 2 \sin x\, dx = \dots$$

Pozor na znaménka!

$$y' + y \tan x = \sin 2x$$

$$v' + v \tan x = 0$$

$$\ln|v| = +\ln|\cos x|$$

$$v = \cos x$$

$$u'v = \sin 2x$$

$$u' = \frac{\sin 2x}{\cos x}$$

¿?? dopočítat!

Ex. 2: $y' + \frac{2}{x} y = \frac{1}{x} y^2 \qquad y(1) = 3$

dopočítat!

Věta o existenci a jednoznačnosti

$G \subseteq \mathbb{R}^2$, $y' = f(x,y)$

f spojitá v G, $\frac{\partial f}{\partial y}$ spojitá v G.

Nechť $[x_0, y_0] \in G$. Pak existuje právě jedno max. řešení $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$

Ex.: $y' = y$ $\quad y(0) = 0$

$\frac{dy}{dx} = y$

⋮

$\ln|y| = x + C$

$y = Ke^x \quad x \in \mathbb{R}$, $K = 0$

$y' = y^2 \quad y(2) = 3$

⋮

$-\frac{1}{y} = x + C$

$y = \frac{-1}{x+C} \quad x \in (-\infty, -c) \cup (c, \infty)$

$y = \frac{-1}{x - \frac{7}{3}}$, $x \in (-\infty, 7/3) \cup$

splňuje podmínky, jakto že je výsledek omezený? Protože věta neříká, že pro každou počáteční podmínku bude existovat řešení na $\mathbb{R}$

Ex. 3: $y' = \sqrt{|y|}$ $\quad y(0) = 0$

$\frac{dy}{\sqrt{|y|}} = dx$

jakto že řešení $\exists$ na $\mathbb{R}$ i když $0 \notin G$ (kvůli derivaci)

1. $y > 0$

$2\sqrt{y} = x + C$

$y = \frac{1}{2}(x+c)^2$

$y = \frac{x^2}{4}$, $x \in \mathbb{R}$

Problém je, že PP $\notin G$, potom nám věta neříká nic

Ex. 4: $y = |y|$ $\quad y = 0$ je konst. řešení

I. $y > 0$

$\int \frac{1}{y} = \int 1$

$\ln|y| = x + C$

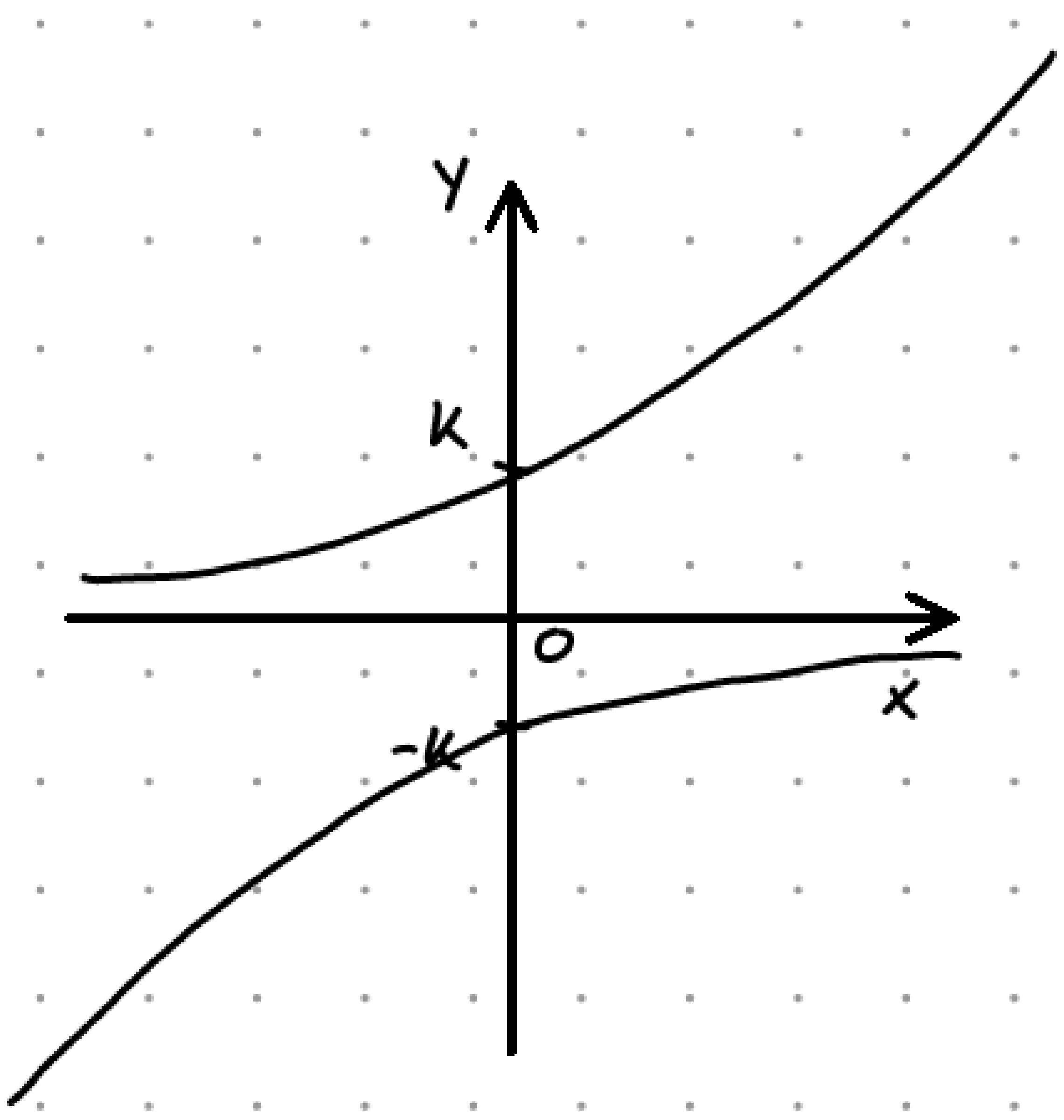
$y = Ke^x \quad x \in \mathbb{R}$

věta platí, i když není splněna

II. $y < 0$

⋮

$y = -Ke^x \quad x \in \mathbb{R}$



Ex. 5: $y' = \sqrt{1-y^2}$ $\quad y(0) = 0$

$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = dx$ $\qquad y < \pm 1$ $\qquad y=1$ a $y=-1$ jsou konstantní řešení

$\arcsin(y) = x + C$ $\qquad x+C \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$

$y = \sin(x)$ $\quad x \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$

Ex. 6: $xy' = y + 3x^2$ $\qquad y(0) = 1$

$y' = \frac{y+3x^2}{x}$ $\qquad f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R} \setminus \{0\})$ $\frac{\partial f}{\partial y} \in C^1(\mathbb{R}^2)$

$\Downarrow$

$y' - \frac{y}{x} = 3x$ $\qquad G = \{\mathbb{R}, \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$

$v' - \frac{v}{x} = 0$

$\ln|v| = \ln|x|$

$v = x$

$u'v = 3x$

$u' = 3$

$u = 3x + C$

$y = 3x^2 + Cx$

pro PP neexistuje řešení

Ex. 7:

odporová síla: $r(v) = -kv$ $\quad , v(0) = v_0 > 0$

$F = m \cdot a$

$t + C$

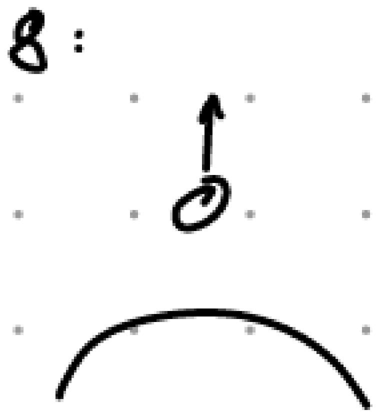
$m\frac{dv}{dt} = -kv$ $\qquad t \geq 0$

$\vdots$

$\ln|v| = -\frac{k}{m}t + C$

$v = e^{-\frac{k}{m}t + C} = De^{-\frac{k}{m}t} = v_0 e^{-\frac{k}{m}t}$

Ex. 8: $\qquad F = ma$ $\quad r = -kv - mg$



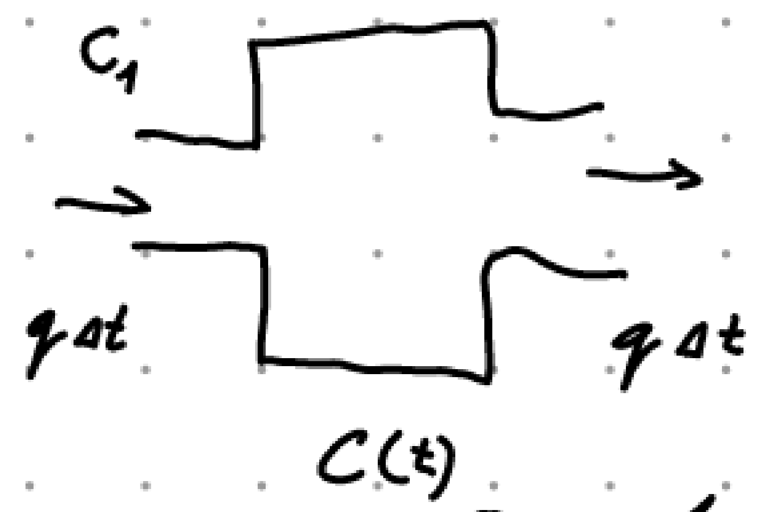
$m\frac{dv}{dt} = -kv - mg$

$v' + \frac{k}{m}v = -g$

$\vdots$

$v = -\frac{mg}{k} + ce^{-\frac{k}{m}t}$

Ex. 9:



koncentrace soli

za Δt půjde $C_1 \Delta t\, q$

$$C_1 q\Delta t - C(t) q \Delta t = [\underbrace{C(t+\Delta t) - C(t)}_{\Delta C}]\, V$$

$$q(c_1 - c) = V \frac{\Delta C(t)}{\Delta t}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta t} = \frac{dC}{dt}$$

$$C'(t) + \frac{q}{V} C(t) = \frac{q}{V} C_1$$

Ex. 10: populační modely

$$P'(t) = kP(t) \qquad P(0) = P_0 \quad k > 0$$

$$P' - kP = 0 \quad \Rightarrow P(t) = P_0 e^{kt}$$

$$y' - y = -y^2$$

$$\ln v = x$$
$$v = e^x$$

$$u' e^x = -y^2 = -(uv)^2$$

$$\frac{u'}{u^2} = \frac{-e^{2x}}{e^x} = -e^x$$

$$\frac{1}{u} = -e^x + C$$

$$u = \frac{1}{-e^x + C}$$

$$y = \frac{e^x}{-e^x + C}$$

Soustava lin. dif. rovnic

$$X' = AX \qquad X(\bar{o}) = b$$

$$x_i = u_i e^{\lambda_i t} \qquad (\lambda_i, u_i) \text{ vlastní pár matice } A$$

Princip superpozice

$$x = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n$$

Ex.: $X' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} X \qquad x'(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda+1)(\lambda-3)$$

$$\lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = 3$$

I) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$2u_1 + u_2 = 0$

$u_1 = p \qquad p \in \mathbb{R}$

$u_2 = -2p$

$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} p$

II) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \bar{o}$

$-2v_1 + v_2 = 0$

$v_1 = q$

$v_2 = 2q$

$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} q$

$$X = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \left.\begin{aligned} C_1 + C_2 &= 1 \\ -2C_1 + 2C_2 &= 1 \end{aligned}\right\} \quad C_1 = 1/4 \quad C_2 = 3/4$$

$$X = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t} + \frac{3}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t}$$

Ex. 2: $y' = ay \qquad y(0) = c$

řešení $y = ce^{at}$

Maticová exponenciála

$y' = ay$ je velice podobné $x' = Ax$, lze i řešení zapsat podobně?

$$x = \underbrace{C}_{n\times 1}\,\underbrace{e^{At}}_{n\times n}$$

$$x' = \begin{pmatrix} 10 & -6 \\ 18 & -11 \end{pmatrix} x \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(10-\lambda)(-11-\lambda) + 108 = 0$$

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda + 2) = 0$$

$$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = -2$$

I) $\lambda = 1$

$$9u_1 - 6u_2 = 0$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6/9 \\ 1 \end{pmatrix} p = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix} p \qquad p \in \mathbb{R}$$

II) $\lambda = -2$

$$12v_1 - 6v_2 = 0$$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6/12 \\ 1 \end{pmatrix} q = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix} q \qquad q \in \mathbb{R}$$

$$x = C_1 \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix} e^{t} + C_2 \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix} e^{-2t} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2C_1 e^{t} + C_2 e^{-2t} \\ 3C_1 e^{t} + 2C_2 e^{-2t} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2e^{t} & e^{-2t} \\ 3e^{t} & 2e^{-2t} \end{pmatrix}}_{\phi(t)} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

$a_{ii} = \Sigma \lambda_i$

$\det(A) = \Pi \lambda_i$

$\phi(t)$ - fundamentální matice

$$e^{At} = \phi K \qquad t=0 \Rightarrow E = \phi(0) K \qquad K = \phi^{-1}(0) E = \phi^{-1}(0) = \phi_0^{-1}$$

$$e^{At} = \phi \phi_0^{-1}$$

$$\phi_0 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \phi_0^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\phi \phi_0^{-1} = \begin{pmatrix} 2e^t & e^{-2t} \\ 3e^t & 2e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4e^t - 3e^{-2t} & -2e^t + 2e^{-2t} \\ 6e^t - 6e^{-2t} & -9e^t + 4e^{-2t} \end{pmatrix} = e^{At}$$

toto má smysl pokud řešíme jeden systém s mnoha počátečními podmínkami

exponenciální matice

$$e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = I + A + \frac{A^2}{2!} + \dots$$ lze ukázat, že tato řada konverguje

$$f = f(t) \qquad f = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} \qquad f' = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k k t^{k-1}}{k!} = \sum A \frac{A^{k-1} t^{k-1}}{(k-1)!} = A \sum \frac{A^{k-1} t^{k-1}}{(k-1)!} = Af$$

$$\phi' = A\phi$$

Věta: Je-li A typu $n \times n$ reálná či komplexní matice, tak maticová řada $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}$ konverguje k matici e^{At} třídy $n \times n$, která má vlastnosti:

I.) $\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At} = e^{At} A$

II.) $e^{(t+s)A} = e^{tA} \cdot e^{sA} = e^{sA} e^{tA}$

III.) $e^{A0} = \mathbb{E} \wedge e^{At}$ je invertibilní $\wedge\ e^{At} e^{A\cdot -t} = e^{A\cdot -t} e^{At} = \mathbb{E}$

kde $\mathbb{E}$ je jednotková matice

bude-li $x(0) = u_j \Rightarrow x = e^{At} u_j = e^{\lambda_j t} e^{At} e^{-\lambda_j t} u_j = e^{\lambda_j t} e^{(A - \lambda_j \mathbb{E})t} u_j =$

$$= e^{\lambda_j t} \left(\mathbb{E} + (A - \lambda_j \mathbb{E}) t + \dots \right) u_j = e^{\lambda_j t} u_j$$

rozvin z definice

speciální případ

$$\dot{x} = x + y \qquad \dot{y} = y$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum \frac{t^k}{k!} & \sum \frac{t^k}{(k-1)!} \\ 0 & \sum \frac{t^k}{k!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix}$$

$$x(0) = 2 \qquad y(0) = -3$$

$$x = e^{At} b = \begin{pmatrix} 2e^t & -3te^t \\ 0 & -3e^t \end{pmatrix}$$

(*často nutno používat Jordanův tvar matice*

$$e^{At} = u \Lambda(t) u^{-1}$$)

Ex:

$$\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$$

$$(-2-\lambda)(7-\lambda) + 18 = 0$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \left\langle \begin{matrix} 4 \\ 1 \end{matrix} \right.$$

I.) $\lambda = 1$

$$-3u_1 - 3u_2 = 0$$

$$u_1 = p \qquad u_2 = -p$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} p$$

II.) $\lambda = 4$

$$-6u_1 - 3u_2 = 0$$

$$u_1 = q \qquad u_2 = -2q$$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} q$$

$$e^{At} = u \Lambda u^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{4t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & +1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & e^{4t} \\ -e^t & -2e^{4t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2e^t - e^{4t} & e^t + e^{4t} \\ 2e^t + 2e^{4t} & -e^t - 2e^{4t} \end{pmatrix}$$

Věta (Cayley - Hamilton)

Nechť $P(\lambda) = \det(A - \lambda E)$ charakteristický polynom matice typu $n \times n$. Pak maticový polynom získaný zaměněním A^k za λ^k do $P(\lambda)$ splňuje $P(A) = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

$$A^2 - 2A + E = 0$$

$$A^2 = 2A - E$$

$$e^{At} = b_0(t) E + b_1(t) A$$

Je-li $A^{2\times2}$ a $\hat{\lambda}$ dvojnásobné vl. číslo

$$x = e^{At} x_0 = e^{\hat{\lambda} t}\left(E + (A - \hat{\lambda} E) t\right) x_0$$

Věta: Koeficienty b_i vyhovují rovnici

$$e^{\lambda_k t} = b_0(t) + b_1(t)\lambda_k + \dots + b_{n-1}(t)\lambda_k^{n-1} \qquad k = 1 \dots n$$

jsou-li λ_k jednoduchá vl. čísla. Pro r-násobná vl. čísla platí

$$\frac{d^s}{d\lambda^s} e^{\lambda t} = \frac{d^s}{d\lambda^s}\left(b_0(t) + b_1(t)\lambda + \dots + b_{n-1}\lambda^{n-1}\right) \qquad s = 1, \dots, r-1$$

$X' = AX$

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad x(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_{1,2} = -3$$

$$\Downarrow$$

$$e^{-3t} = b_0 - 3b_1$$

$$s=1 \quad t e^{-3t} = b_1$$

$$b_0 = e^{-3t} + 3b_1 = e^{-3t} + 3te^{-3t}$$

$$e^{\lambda t} = b_0 E + b_1 A =$$

$$= (e^{-3t} + 3te^{-3t}) E + t e^{-3t} A = \begin{pmatrix} e^{-3t} - 2te^{-3t} & 4te^{-3t} \\ -te^{-3t} & e^{-3t} + 2te^{-3t} \end{pmatrix}$$

Ex: $\dot{X} = AX$ $\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad x'(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2(-1-\lambda) = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 2 \quad \lambda_3 = -1$$

I. $\lambda_{1,2} = 2$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \bar{0} \Rightarrow u_2 = u_3 = 0 \quad u_1 = p \qquad \bar{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} p \quad p \in \mathbb{R}$$

II. $\lambda_3 = -1$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \bar{0} \qquad v_2 = 0 = v_1 \quad v_3 = q \quad \bar{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} q \quad q \in \mathbb{R}$$

Fundamentální systém

$$\varphi_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t} \qquad \varphi_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}$$

$$\bar{x} = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}$$

pro $x_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ najdeme konstanty c_1, c_2, ale pro $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (např.) řešení neexistuje. Problém vzniká v násobnosti vl. čísel (algebraická a geometrická)

algebraická → kořeny char. rovnice

geometrická → počet vl. vektorů

Ex. 2: $\quad \bar{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \bar{x} \qquad \det(A - \lambda E) = -(\lambda+1)^2(\lambda-5) = 0$

$\lambda_1 = 5 \quad \bar{v}_1 = (1\ -1\ \ 1)^T$

$\lambda_{2,3} = -1 \qquad \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \bar{v}_2 = \bar{0}$

$v_1 - v_2 + v_3 = 0$

a) $v_2 = 1 \quad v_3 = 0 \quad v_1 = 1 \qquad \bar{v}_2 = (1\ 1\ 0)^T$

b) $v_1 = 0 \quad v_2 = 1 \quad v_3 = 1 \qquad \bar{v}_3 = (0\ 1\ 1)^T$

máme tedy dost vl. vektorů aby tvořily bázi

Ex. 3:

Nechť λ_1 je vl. číslo s násobností 2 (algeb.) a existuje pouze 1 vl. vektor $\bar{v}_1$

jak další vektor doplnit?

$$X_2 = K t e^{\lambda_1 t} + P e^{\lambda_1 t}, \quad K = (k_1, \dots, k_n)^T \quad P = (p_1, \dots, p_n)^T$$

dosadím do zadání $(x' = Ax)$

$$K e^{\lambda_1 t} + K \lambda_1 t e^{\lambda_1 t} + P \lambda_1 e^{\lambda_1 t} = AKt e^{\lambda_1 t} + AP e^{\lambda_1 t}$$

$$e^{\lambda_1 t}\underbrace{(K + P\lambda_1 - AP)}_{\mathrm{I.}} + t e^{\lambda_1 t}\underbrace{(K\lambda_1 - AK)}_{\mathrm{II.}} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\mathrm{I.} = 0 \ \wedge \ \mathrm{II.} = 0$$

II. $(\lambda_1 E - A)K = 0 \quad \rightarrow \quad (A - \lambda_1 E)K = 0$ $\quad$ K je tedy už nalezený vl. vektor

I. $(\lambda_1 E - A)P = K \quad \rightarrow \quad (A - \lambda_1 E)P = K$

Ex. 3:

$$x' = \begin{pmatrix} 3 & -18 \\ 2 & -9 \end{pmatrix} x \qquad \lambda_{1,2} = -3 \qquad \bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & -18 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 6 & -18 & 3 \\ 2 & -6 & 1 \end{array}\right) \qquad P = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \bar{v}_1 e^{\lambda_1 t} \quad x_2 = \bar{v}_1 t e^{\lambda_1 t} + P e^{\lambda_1 t}$$

mějme 1 trojnásobné vl. číslo a pouze jeden vl. vektor

$$\lambda_{1,2,3} \rightarrow \quad x_1 = \bar{v}_1 e^{\lambda_1 t}$$
$$x_2 = \bar{v}_1 t e^{\lambda_1 t} + P e^{\lambda_1 t}$$
$$x_3 = K \frac{t^2}{2} e^{\lambda_1 t} + P t e^{\lambda_1 t} + Q e^{\lambda_1 t}$$

$$(A - \lambda_1 E) K = \bar{O}$$
$$(A - \lambda_1 E) P = K$$
$$(A - \lambda_1 E) Q = P$$

$$x_m = K_{m1} \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} e^{\lambda_1 t} + K_{m2} \frac{t^{m-2}}{(m-2)!} e^{\lambda_1 t} + \dots + K_{mn} \frac{t^{m-n}}{(m-n)!} e^{\lambda_1 t}$$

Komplexní vl. čísla

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$$

$x = \bar{v}_1 e^{\lambda_1 t}$ - to je ale nějaká komplexní funkce a taková nás moc nezajímá, původní rovnice je reálná, chtěli bychom tedy reálné výsledky

$Re(x), Im(x)$

$$Re(x') = (Re(x))' = Re(Ax) = A\, Re(x)$$

$$(Re(x))' = A\, Re(x)$$

$x' = Ax$ tzn. reálná část je řešení, to samé platí pro imaginární část

$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi \qquad \lambda = a + ib \qquad \bar{u} = \bar{v} + i\bar{w}$

$$\bar{x} = \bar{u} e^{\lambda t} = (\bar{v} + i\bar{w}) e^{(a+ib)t} = (\bar{v} + i\bar{w}) e^{at} e^{ibt} =$$

$$= (\bar{v} + i\bar{w}) e^{at} (\cos bt + i \sin bt) = e^{at} (\bar{v} \cos bt - \bar{w} \sin bt) +$$
$$+ i e^{at} (\bar{w} \cos bt + \bar{v} \sin bt)$$

$$\left.\begin{aligned} Re(x) &= e^{at}(\bar{v} \cos bt - \bar{w} \sin bt) \\ Im(x) &= e^{at}(\bar{w} \cos bt + \bar{v} \sin bt) \end{aligned}\right\} \quad x = c_1 Re(x) + c_2 Im(x)$$

Věta: Nechť funkce $f_1, \dots, f_n$ jsou n-1 derivovatelné a je-li

$$W = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_n \\ f_1' & f_2' & f_n' \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0$$

alespoň v jednom bodě I, pak jsou funkce lineárně nezávislé

obecné řešení nehomogenního problému

$$X' = Ax$$
$$x' = Ax + B$$
$$x' = Ax + F(t) \qquad (\Delta)$$

Definice: Nechť $x_c = C_1 x_1 + \dots + C_n x_n$ je obecné řešení homogenního problému a nechť x_p je řešení (Δ). Pak obecné řešení (Δ) má tvar

$$x = x_c + x_p$$

I. Variace konstant

$$x_c = C_1 x_1 + \dots + C_n x_n = \underbrace{\begin{pmatrix} x_1^1 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^1 & \dots & x_n^n \end{pmatrix}}_{\text{fundamentální matice } \phi} \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix} = \phi \bar{C} \qquad \phi = \left(x_1 \middle| x_2 \middle| x_n \right)$$

$\phi(t)$

nahradím $\bar{C}$ sloupcem neznámých funkcí $\bar{u}(t) \Rightarrow x_p = \phi \bar{u}$

dosadím do (Δ)

$$x_p' = \phi \bar{u}' + \phi' \bar{u} = A\phi\bar{u} + F$$
$$\phi\bar{u}' + A\phi\bar{u} = A\phi\bar{u} + F$$
$$\phi \bar{u}' = F$$
$$\bar{u}' = \phi^{-1} F$$
$$\bar{u} = \int \phi F \, dt$$
$$x_p = \phi \int \phi F \, dt$$

$$X = x_c + x_p = \phi C + \phi \int \phi F \, dt$$

Ex.: $x' = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 3t \\ 4t \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = -2 \quad \bar{v}_1 = (1,1)^T \qquad x_1 = e^{-2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = -5 \quad \bar{v}_2 = (1,-2)^T \qquad x_2 = e^{-5t}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$\phi = \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-2t} \\ e^{-5t} & -2e^{-5t} \end{pmatrix} \qquad \phi^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}e^{2t} & \frac{1}{3}e^{2t} \\ \frac{1}{3}e^{5t} & -\frac{1}{3}e^{5t} \end{pmatrix}$$

$$\bar{u}' = \phi^{-1}F = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}e^{2t} & \frac{1}{3}e^{2t} \\ \frac{1}{3}e^{5t} & -\frac{1}{3}e^{5t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3t \\ 4t \end{pmatrix} =$$

$$x_p = \phi \int \phi^{-1}F\,dt = \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-2t} \\ e^{-5t} & -2e^{-5t} \end{pmatrix} \int \begin{pmatrix} 2te^{2t} + \frac{4}{3}e^{2t}t \\ e^{5t}t - \frac{4}{3}e^{5t}t \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} \dots \end{pmatrix}$$

počítat inverzní matici je nákladné, jednodušší by bylo vyřešit soustava rovnic

$$\phi \bar{u}' = F$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} e^{-2t} & e^{-5t} & 3t \\ e^{-2t} & -2e^{-5t} & e^{-t} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} e^{-2t} & e^{-5t} & 3t \\ 0 & -3e^{-5t} & e^{-t} - 3t \end{array}\right)$$

$$u_2' = -\frac{1}{3}e^{4t} + e^{5t}t$$

$$e^{-2t}u_1' + e^{-5t}u_2' = 3t$$

$$u_1' = 3t\,e^{2t} + \frac{1}{3}e^{t} - e^{2t}$$

$$\bar{u} = \begin{pmatrix} \int u_1'\,dt \\ \int u_2'\,dt \end{pmatrix} \qquad x_p = \phi\bar{u}$$

to je o něco snazší než hledání inverzní matice

Ex.: $x' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}$

$$\phi = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{3t} \\ -2e^{-t} & 2e^{3t} \end{pmatrix} \qquad \phi\bar{u}' = F$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} e^{-t} & e^{3t} & e^{t} \\ -2e^{-t} & 2e^{3t} & e^{t} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} e^{-t} & e^{3t} & e^{t} \\ 0 & 4e^{3t} & 3e^{t} \end{array}\right)$$

$$u_2' = \frac{3e^{t}}{4e^{3t}} = \tfrac{3}{4} e^{-2t}$$

$$e^{-t}u_1' + e^{3t}u_2' = e^{t}$$

$$u_1' = e^{2t} - e^{4t}\left(\tfrac{3}{4}e^{-2t}\right) = \tfrac{1}{4}e^{2t}$$

$$\bar{u} = \begin{pmatrix} \tfrac{1}{8}e^{2t} \\ -\tfrac{3}{8}e^{-2t} \end{pmatrix} \qquad x_p = \phi\,\bar{u} = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{3t} \\ -2e^{-t} & 2e^{3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tfrac{1}{8}e^{2t} \\ -\tfrac{3}{8}e^{-2t} \end{pmatrix} = \dots$$

Uncoupled system

$$\dot{x} = AX \qquad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

dobře se řeší

VĚTA: Mějme matici A typu $n \times n$, jež má n různých reálných čísel λ_i. Pak $\{V_i\}$ tvoří bázi v $\mathbb{R}^n$. Matice $P = (V_1 | \dots | V_i)$ je invertibilní a $P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

$$y = P^{-1}x$$
$$x = Py$$
$$\dot{y} = P^{-1}\dot{x} = -P^{-1}AX = -P^{-1}APY$$

$= E(t)$

$$\dot{y} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\,Y \qquad Y = \mathrm{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t})\,Y(0)$$

$$Y(0) = P^{-1}X(0)$$

$$X = PEP^{-1}X(0)$$

Ex: $\dot{x} = AX \quad A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda_1 = -1 \ \lambda_2 = 2 \quad V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \dot{y} = P^{-1}\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} Y$$

$$y = \begin{pmatrix} c_1 e^{-t} \\ c_2 e^{2t} \end{pmatrix} \rightarrow X = PY = \begin{pmatrix} c_1 e^{-t} + c_2(e^{-t} - e^{2t}) \\ c_2 e^{2t} \end{pmatrix}$$

Ex. 2: $\dot{x} = Ax \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 5 \quad V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\dot{Y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} Y \qquad Y = \begin{pmatrix} c_1 e^{t} \\ c_2 e^{5t} \end{pmatrix}$

$X = PY = \begin{pmatrix} c_1 e^{t} + c_2 e^{5t} \\ -c_1 e^{t} + 3c_2 e^{5t} \end{pmatrix}$

$x(0) = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 \\ -c_1 + 3c_2 \end{pmatrix}$

Obecněji:

Lineární transformace T (n-tého řádu), která vektoru $Y \in \mathbb{R}^n$ přiřadí stavový vektor $X = TY$ systému (1), zobrazuje systém (1) na opět lineární systém $\dot{Y} = BY$ (2), kde matice $B = T^{-1}AT$ a systémy (1), (2) jsou homeomorfní v $\mathbb{R}^n$. Tzn. existuje vzájemně jednoznačné spojité zobrazení, které převede všechny trajektorie systému (1) na trajektorie systému (2) a naopak. Zachovává-li zobrazení i orientaci pohybu, jsou systémy (1) a (2) topologicky ekvivalentní.

Jsme-li v $\mathbb{R}^2$ a $T = (V_1 \mid V_2)$ nastává právě jedna z možností

(i) $B = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ má-li A 2 různá vlastní čísla

(ii) $B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, je-li λ dvojnásobné reálné vl. č.

(iii) $B = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$, je-li λ sdružené komplexní vl. č.

Ex. 3: $\dot{X} = AX \quad A = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = 3 \quad \lambda_2 = -5 \quad \lambda_3 = 6 \quad V_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad V_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 16 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 3 & & \\ & -5 & \\ & & 6 \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} c_1 e^{3t} \\ c_2 e^{-5t} \\ c_3 e^{6t} \end{pmatrix} \qquad X = PY = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & 6 \\ -1 & 1 & 16 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 2c_1 e^{3t} + 2c_2 e^{-5t} + c_3 e^{6t} \\ -3c_1 e^{3t} - c_2 e^{-5t} + 6c_3 e^{6t} \\ -c_1 e^{3t} + c_2 e^{-5t} + 16 c_3 e^{6t} \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_{2,3} = 2 \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Tok lineárního systému

$$\dot{x} = Ax \quad (1)$$

Množina zobrazení $e^{At}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se nazývá tokem lineárního systému

(popisuje pohyb bodů $x^0 \in \mathbb{R}^n$ po trajektoriích systému (1))

- Hyperbolický lin. systém: Mají-li všechna vlastní čísla matice A nenulovou reálnou část

DEFINICE: Podmnožina $E \subset \mathbb{R}^n$ se nazývá invariantní k toku e^{At} jestliže platí $e^{At}E \in E$ pro $\forall t \in \mathbb{R}$

- Definujeme: lin. systém (1) a nechť $w_j = u_j + i v_j$ je zobecněný vl. vektor matice A odpovídající vl. číslu $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$ a nechť $\{u_1, \dots, u_r, v_{k+1}, \dots, v_r\}$ je báze $\mathbb{R}^n$ $(n = 2r - k)$

  Pak podprostor vytvořený zobecněnými vl. vektory jimž odpovídají vl. čísla se zápornou reálnou částí se nazývá stabilní podprostor
  $E^s = \text{span}\{u_j, v_j : \alpha_j < 0\}$

  ... nestabilní podprostor $E^u = \{u_j, v_j : \alpha_j > 0\}$

  ... centrální podprostor $E^c = \{u_j, v_j : \alpha_j = 0\}$

Ex. 4:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (-2-\lambda)(-2-\lambda)(1-\lambda) + 1 = 0$$

$$(4 + 4\lambda + \lambda^2)(1-\lambda) + 1 = 0$$

$$4 + \cancel{4\lambda} + \lambda^2 - \cancel{4\lambda} - 4\lambda^2 - \lambda^3 + 1 = 0$$

$$-\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = 0$$

$$(\lambda - 1)(-\lambda^2 - 4\lambda - 4) = 0 \qquad \lambda_1 = 1 \quad \lambda_{2,3} = -2 \pm i$$

$w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ osa z $\quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ rovina xy

$E^u \qquad\qquad E^s$

Vlastnosti řešení systému (1) v invariantních podprostorech

a) je-li $x_0 \in E^s$ pak $\forall t \in \mathbb{R}$ je $\lim\limits_{t \to \infty} e^{At} x_0 = 0$. Bod rovnováhy je asymptoticky stabilní

b) je-li $x_0 \in E^u$ pak $\forall t \in \mathbb{R}$ je

Nelineární ODR

Speciální případy řešení:

1) $\ddot{y} = f(\dot{y}, t)$

provedeme redukci řádu vhodnou substitucí $z = z(t)$

$$z = \dot{y}$$
$$\dot{z} = \ddot{y}$$

dostáváme systém rovnic

$$\dot{y} = z$$
$$\dot{z} = f(t, z)$$

Ex. 1: $t\ddot{y} + \dot{y} = 0$

$$\dot{y} = z$$
$$\dot{z} = -\frac{z}{t}$$

$\hookrightarrow z = K\frac{1}{t} \rightarrow y = K \ln|t| + C$

řešíme tedy pouze pomocí dvou jednoduchých integrací

2) $\ddot{y} = f(y, \dot{y})$ (autonomní rovnice)

$z = \dot{y} \rightarrow \dot{z} = \ddot{y}$ $\qquad \dot{z} = f(y, z) = \frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dy} z$

$$\boxed{\ddot{y} = \dot{z} = \frac{dz}{dy} z = f(y, z)}$$

$\frac{dz}{dy} = \frac{1}{z} f(y, z) \rightarrow z \rightarrow y = \int z \, dt$

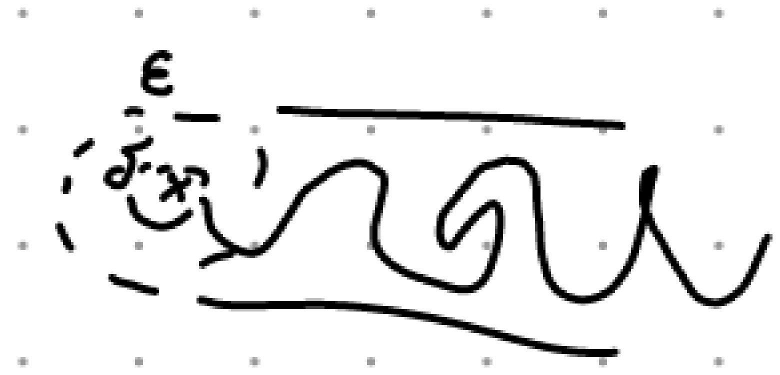
Nelineární systém

$$x = F(x)$$

body rovnováhy $F(x_k)=0$

bod rovnováhy:

a) je stabilní (Ljapunovský) jestliže pro



$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \|x^0\| < \delta \Rightarrow \|x(t,x^0)\| < \varepsilon$$

tzn. neuteče z nějaké oblasti dané ε

b) je atraktor existuje-li $\delta > 0 : \|x^0\| < \delta \Rightarrow x(t,x^0) \to 0 \wedge t \to \infty$

je-li bodem rovnováhy počátek

c) asymptoticky stabilní <=> řešení je stabilní a je atraktor

d) nestabilní

- Množina bodů x^0 pro něž $x(t,x^0) \to 0$ se nazývá oblastí atraktivity bodu rovnováhy 0

- Hurwitzovo kritérium

$$D(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

$$H = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \dots & 0 \\ & & \vdots & & & \\ \dots & & \dots & & & a_n \end{pmatrix}$$

8. Tok definovaný dif. rovnicí

- Lineární soustava

$$\dot{x} = Ax \qquad e^{At} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

- Nelineární systém

$$\dot{x} = F(x), \quad x(0) = x_0 \qquad (1)$$

max. řešení existuje na $(\alpha, \beta) = I(x_0)$

$$\varphi(t, x_0)$$

DEFINICE: Nechť $E \subset \mathbb{R}^n$ otevřená a $F : E \to \mathbb{R}^n$ $F \in C^1(E)$. Pro $x_0 \in E$ a $x = \varphi(t, x_0)$ řešení (1) definované na max. intervalu $I(x_0)$. Pak $t \in I(x_0)$ zobrazení $\varphi_t : E \to E$ definované $\varphi_t(x_0) = \varphi(t, x_0)$ se nazývá tokem diferenciální rovnice (1) nebo také tokem vektorového pole F

Vlastnosti toku

(i) $t \in I(x_0)$, $s \in I(\varphi_t(x_0))$

pak $s+t \in I(x_0)$ a $\varphi_{s+t}(x_0) = \varphi_s(\varphi_t(x_0)) \quad \forall t \in I(x_0)$

(ii) Je-li $(t, x_0) \in \Omega = \{\mathbb{R} \times E ; \ t \in I(x_0)\}$. Pak existuje okolí $U(x_0)$ a množina $N = \varphi_t(U)$ tak, že

$$\varphi_{-t}(\varphi_t(x)) = x \quad \text{pro } \forall x \in U$$

a

$$\varphi_t(\varphi_{-t}(y)) = y \quad \text{pro } \forall y \in N$$

DEFINICE: (množiny invariantní k toku)

$F \in C^1(E)$, $\varphi_t : E \to E$ tok (1), $\forall t \in \mathbb{R}$. Pak množina $S \subset E$ se nazývá invariantní k toku φ_t, je-li $\varphi_t(S) \subset S$ pro $t \in \mathbb{R}$. Množina $S \subset E$ se nazývá

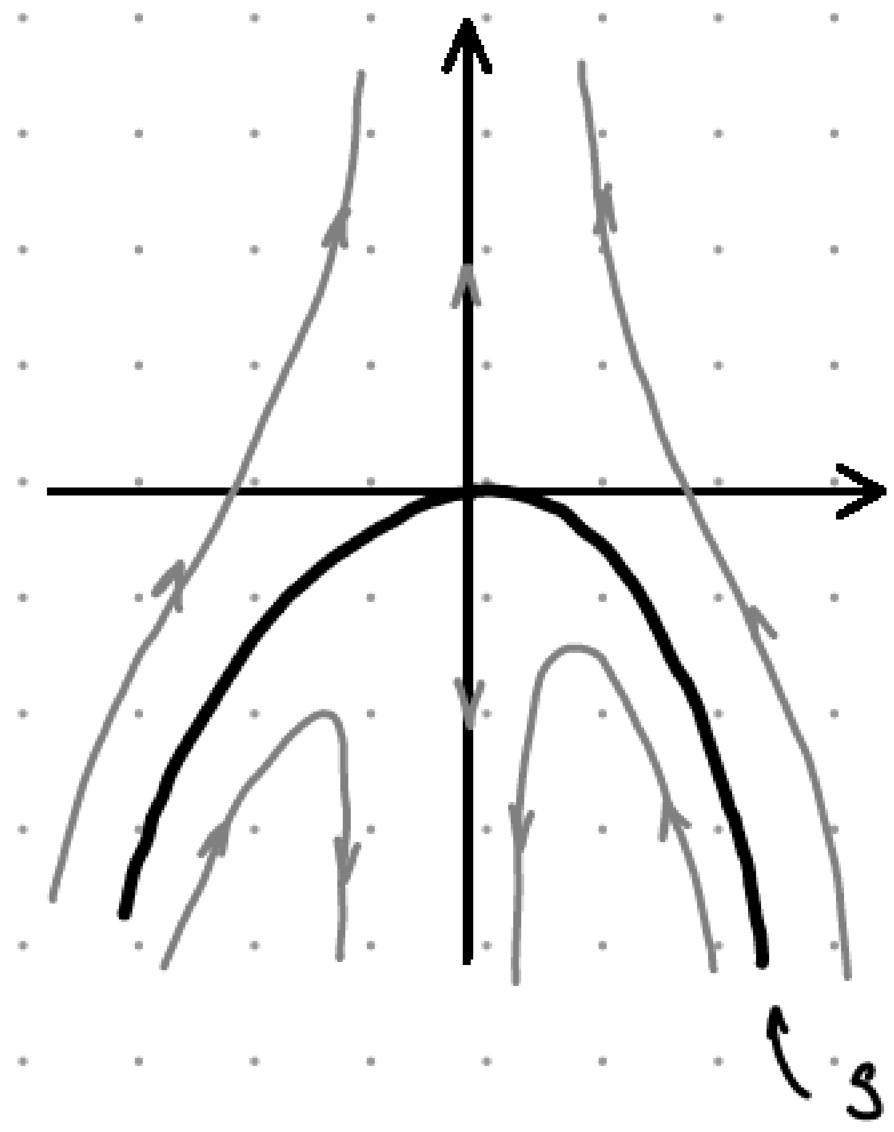
i. pozitivně invariantní $t \geq 0$
ii. negativně invariantní $t \leq 0$

Ex. 1:

$$\dot{x} = F(x) = \begin{pmatrix} -x \\ y+x^2 \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

$$\dot{x} = -x \longrightarrow x(t) = x_0 e^{-t}$$
$$\dot{y} = y + x^2$$
$$\downarrow$$
$$y(t) = y_0 e^{t} + \frac{x_0^2}{3}\left(e^{t} - e^{-2t}\right)$$

$$X = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} =$$



$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : x_2 = -\frac{x_1^2}{3} \right\}$$ to jsme tipli ?

$$x_0 \in S \quad y_0 = \frac{-x_0^2}{3} \to \bar{x} = \begin{pmatrix} x_0 e^{-t} \\ -\frac{x_0^2}{3} e^{-2t} \end{pmatrix} \in S$$

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2x & 1 \end{pmatrix} \qquad \dot{x} = Ax = J|_{x_0} x$$

chování (1) v okolí bodu rovnováhy je dáno chováním $\dot{x} = Ax$ (e) s $A = DF(x_0)$ (Jacobiho matice v x_0)

· Klasifikace hyperbolických bodů rovnováhy

(i) Zdroj $\forall \lambda : Re(\lambda) > 0$

(ii) Propad $\forall \lambda : Re(\lambda) < 0$

(iii) Sedlo $\exists \lambda : Re(\lambda) > 0 \wedge \exists \lambda : Re(\lambda) < 0$

Ex. 2:
$$\dot{x} = -x$$
$$\dot{y} = -y + x^2$$
$$\dot{z} = z + x^2$$

bod rovnováhy $[0,0,0]$

$$J|_{BR} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \left.\begin{matrix} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -1 \end{matrix}\right\} E^s \text{ plocha } xy \qquad \lambda_3 = 1 \; \} \; E^u \text{ osa } z$$

BR je sedlo

$$x(t) = c_1 e^{-t}$$
$$y(t) = c_2 e^{-t} + c_1^2 \left(e^{-t} - e^{-2t}\right)$$
$$z(t) = c_3 e^{t} + \frac{c_1^2}{3}\left(e^{t} - e^{-2t}\right)$$

Jaká je $\lim_{t \to \infty} \varphi_t(x_0) = 0$ na $c_3 + \frac{c_1^2}{3} = 0$

$$S = \left\{ x_0 \in \mathbb{R}^3 : c_3 = -\frac{c_1}{3} \right\}$$

$\lim_{t \to -\infty} \varphi_t(x_0) = 0$ na $c_1 = c_2 = 0$

$$U = \left\{ x_0 \in \mathbb{R}^3 : c_1 = c_2 = 0 \right\}$$

DEFINICE: (n-rozměrná diferencovatelná varieta)

n-rozměrná diferencovatelná varieta M je souvislý metrický prostor s otevřeným pokrytím $\{U_\alpha\}$ $(M = \bigcup_\alpha U_\alpha)$ pro něž platí:

(i) pro $\forall \alpha$ je U_α topologicky ekvivalentní s otevřenou jednotkovou koulí $K = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$

(ii) je-li $U_\alpha \cap U_\beta \neq 0$ a $h_\alpha : U_\alpha \to K$, $h_\beta : U_\beta \to K$ jsou homeomorfismy. Pak $h_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \neq 0$ a $h_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ jsou podmnožiny $\mathbb{R}^n$ a zobrazení $h = h_\alpha \circ h_\beta : h_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to h_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ jsou diferencovatelné a pro $\forall x \in h_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ je determinant matice zobrazení nenulový

VĚTA: (o stabilní varietě)

$E \subset \mathbb{R}^n$ otevřená, $0 \in E$, $F \in C^1(E)$
a φ_t je tok nelineárního systému, a nechť $F(0) = 0$ a matice linearizace systému v bodě 0 má k vlastních čísel s $Re(\lambda) < 0$ a $n-k$ vlastních čísel $Re(\lambda) > 0$.

· Pak existuje k rozměrná diferencovatelná varieta S tečná k invariantnímu prostoru E^S linearizace v bodě 0. Přičemž platí $\forall t \geq 0$ $\varphi_t(S) \subset S$ a $\lim_{t \to \infty} \varphi_t(x_0) = 0, \forall x_0 \in S$

· Pak existuje k-n rozměrná diferencovatelná varieta U tečná k invariantnímu prostoru E^U linearizace v bodě 0. Přičemž platí $\forall t \leq 0$ $\varphi_t(S) \subset S$ a $\lim_{t \to -\infty} \varphi_t(x_0) = 0, \forall x_0 \in U$

Ex. 3: $\dot{x} = -x - y^2$
$\dot{y} = y + x^2$

$$J = \begin{pmatrix} -1 & -2y \\ 2x & 1 \end{pmatrix}$$

a) $$J|_{[0,0]} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = 1$$

Bk = $[0,0]$ $[1,1]$

$u_1 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $u_2 = t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $t \in \mathbb{R}$

rovnice je exaktní

E^S osa x E^U osa y

$-Q\,dx + P\,dy = 0$

$\frac{dh}{dx} = Q$ $\frac{dh}{dy} = P$ $h = xy + \frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3} + C$

$xy + \frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3} = 0$

VĚTA: (o centrální varietě)

$E \subset \mathbb{R}^n \quad F \in C^1(E) \quad \varphi_t \quad F(0) = 0$

linearizace v bodě 0 $\rightarrow$ n vlastních čísel

- $k \quad Re(\lambda) > 0$
- $r \quad Re(\lambda) < 0$
- $m = n - k - r \quad Re(\lambda) = 0$

$W^s(0)$ stabilní varieta
$W^u(0)$ nestabilní varieta

m-rozměrná centrální varieta

$W^c(0)$ v bodě 0

VĚTA: (Hartman-Grobman)

$E \subset \mathbb{R}^n, \; x_0 \in E, \; F \in C^1(E), \; \varphi_t$

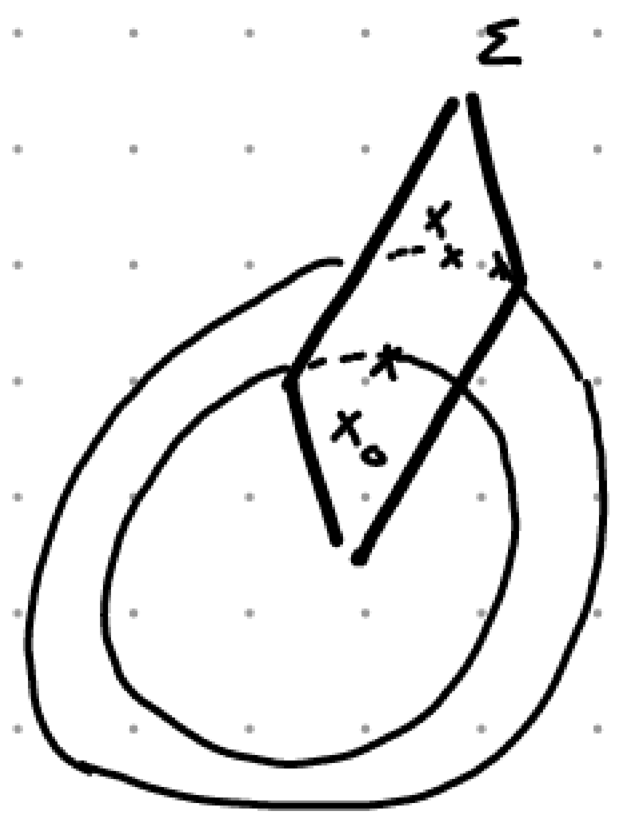
hyperbolický BR

Pak existuje homeomorfismus $h: N_1(x_0) \to N_2(x_0)$ tak, že pro $\forall x \in N_1(x_0)$ existuje otevřený interval $J \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in J$ tak, že pro $\forall x \in N_2(x_0)$ a $t \in J$ platí $h \circ \varphi_t(x) = e^{At} h(x)$, tedy systémy $\dot{x} = F(x)$ a $\dot{X} = AX$ jsou topologicky ekvivalentní v okolí bodu rovnováhy

Poincarého zobrazení

$$\dot{X} = F(X) \qquad (1)$$

Γ je periodická orbita procházející bodem x_0



Σ je nadrovina kolmá na Γ v x_0

Pro každý $x \in \Sigma$ dostatečně blízko x_0, tak že řešení (1) procházející bodem x v čase $t=0$ $\varphi_t(x)$ prochází znovu plochou Σ v bodě $P(x)$ blízko x_0

$x \mapsto P(x)$ nazýváme Poincarého zobrazení

VĚTA: Nechť $E \subset \mathbb{R}^n$ otevřená, $F \in C^1(E)$. Předpokládejme že $\varphi_t(x_0)$ je periodické řešení (1) s periodou T a že cyklus

$$\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \varphi_t(x_0),\ 0 \le t \le T\}$$

je obsažená v E. Nechť Σ je ortogonální nadrovina k Γ v x_0

$$\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^n : (x - x_0) \cdot F(x_0) = 0\}.$$

Pak existuje okolí $\delta > 0$ a jediná funkce $\tau(x)$ definovaná a spojitě diferencovatelná pro $x \in N_\delta(x_0)$ taková že $\tau(x_0) = T$ a $\varphi_\tau(x) \in \Sigma$ pro $\forall x \in N_\delta(x_0)$.

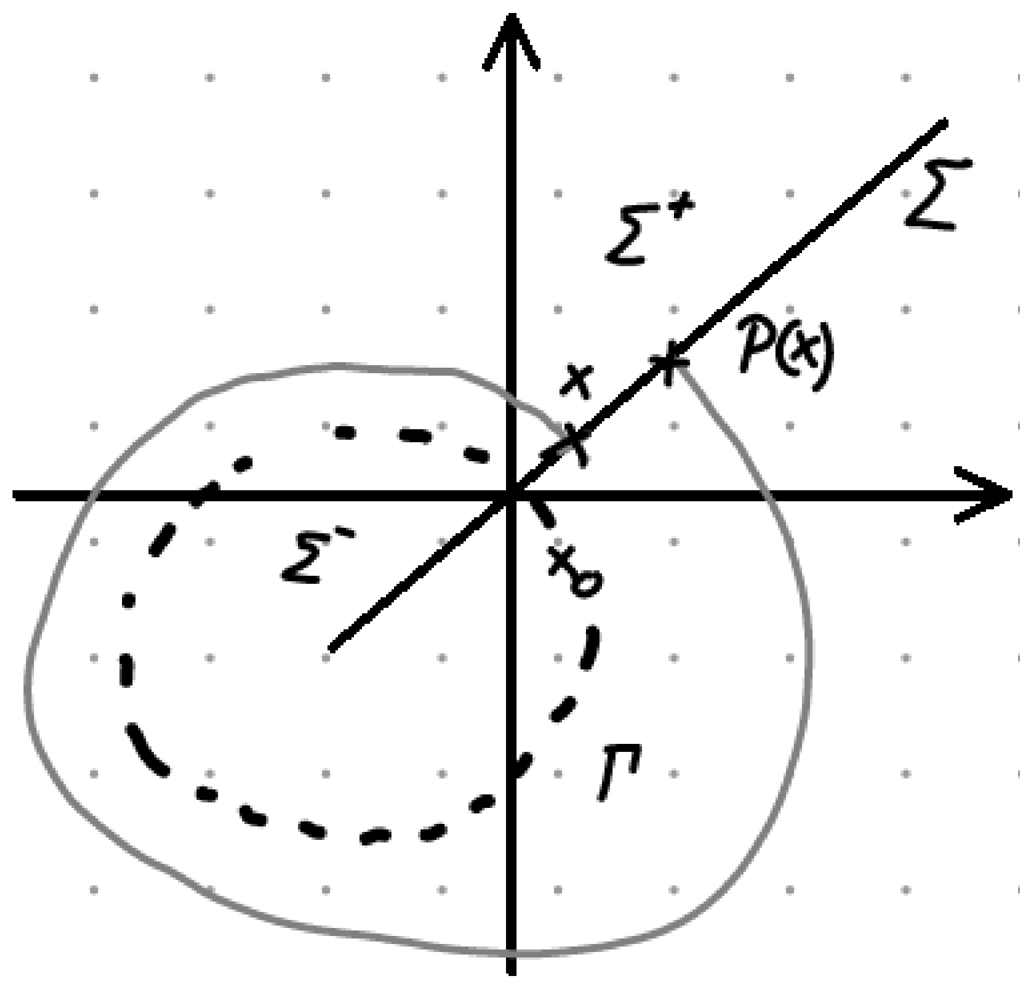
$$P(x) = \varphi_{\tau(x)}(x)$$

$P \in C^1(U)$, $U = N_\delta(x_0) \cap \Sigma$

- Pevné body P odpovídají periodickým orbitám $\varphi(\cdot, x)$ systému (1)
- K P existuje inverze $P^{-1} \in C$

· Poincaré zobrazení pro rovinný systém

Nechť x_0 je počátek souřadnicového systému a $x_0 \in \Gamma \cap \Sigma$. Σ je normálová přímka skrz $x_0 = 0$.



Bod 0 dělí přímku Σ na část Σ^+ uvnitř Γ a Σ^- vně.

Nechť s je vzdálenost od 0 na Σ pro $s>0$ na Σ^+ pro $s<0$ na Σ^-.

Dle věty o Poincarého zobrazení definované na okolí $|s|<\delta$ a platí $P(0)=0$.

Použijme $P'(0)$ k posouzení stability cyklu Γ.

Definujme posunutí na Σ

$$d(s) = P(s) - s$$

Pak $d(0)=0$, $d'(s) = P'(s) - 1$. Z věty o střední hodnotě

$$\frac{1}{s-0}\Big(d(s) - d(0)\Big) = d'(\sigma)$$

$$d(s) = s\, d'(\sigma)\ ,\quad \sigma \in (0,s)$$

$d'(s)$ spojité, $d'(0) \neq 0$ pak má $d'(s)$ stejné znaménko na nějakém okolí.

Je-li $d'(0)<0 \Rightarrow d(s)<0$ pro $s>0$
$d(s)>0$ pro $s<0$

tzn. cyklus Γ je stabilní.

Je-li $d'(0)>0 \Rightarrow d(s)>0 \ : s>0$
$d(s)<0 \ : s<0$

tzn. cyklus Γ je nestabilní limitní cyklus a α-limitní cyklus.

VĚTA: Buď $E \subset \mathbb{R}^n$ otevřená, $F \in C^1(E)$, $\varphi(t)$ periodické řešení systému (1) s periodou T. Pak derivace Poincarého zobrazení $P(s)$ podél přímky Σ kolmé na Γ, kde $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = \varphi(t) - \varphi(0), 0 \le t \le T\}$ v $x = 0$ je dáno jako $P'(0) = \exp\left(\int_0^T \nabla \cdot F(\varphi(t))\,dt\right)$. Dále je $\varphi(t)$

- stabilní limitní cyklus je-li $\int_0^T \nabla \cdot F(\varphi(t))\,dt < 0$
- nestabilní limitní cyklus je-li — " — > 0
- je-li $\int_0^T \nabla \cdot F(\varphi(t))\,dt = 0$ pak cyklus může být stabilní, nestabilní, semistabilní

Ex.:

$$\dot{x} = -4y + x\left(1 - \tfrac{x^2}{4} - y^2\right)$$
$$\dot{y} = x + y\left(1 - \tfrac{x^2}{4} - y^2\right)$$

Periodické řešení je $\varphi(t) = (2\cos 2t, \sin 2t)^T$ leží na elipse $\Gamma = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + y^2 = 1$

Ověření:

$$-4\sin(2t) = -4\sin(2t) + 2\cos(2t)\left(1 - \cos^2(2t) - \sin^2(2t)\right)$$
$$0 = 0$$

$$\nabla \cdot F = \left(1 - \tfrac{x^2}{\cancel{4}} - y^2\right) - \tfrac{x^2}{\cancel{2}} + \left(1 - \tfrac{x^2}{\cancel{4}} - y^2\right) - 2y^2 = 2 - 4y^2 - x^2$$

$$\int_0^T \nabla \cdot F(\varphi(t))\,dt = \int_0^T 2 - 4\sin^2(2t) - 4\cos^2(2t)\,dt = \int_0^T -2\,dt = -2T = -2\pi < 0$$

Γ je stabilní limitní cyklus

DEFINICE: Buď $P(s)$ Poincarého zobrazení. Pro Γ nevinný periodický cyklus systému (1) a $d(s) = P(s) - s$. Pak je-li $d(0) = d'(0) = \ldots = d^{(n-1)}(0) = 0$

$$d^{(n)}(0) \neq 0$$

Pak se Γ nazývá cyklus násobnosti n, je-li $n = 1$ je tzv. jednoduchý.

- dá se ukázat:
  - n sudé $\rightarrow$ Γ je semistabilní cyklus
  - n liché $\rightarrow$ Γ — " — $\begin{cases} \text{stabilní} : d^{n}(0) < 0 \\ \text{nestabilní} : d^{n}(0) > 0 \end{cases}$

Ex.:

$$\dot{x} = -1 + x(1-x^2-y^2)^2$$
$$\dot{y} = x + y(1-x^2-y^2)^2$$

má cyklus $\mu(t) = (\cos t, \sin t)^T$

Ukážeme, že cyklus je násobnosti větší než 1

$P(0) = 0 \qquad d(0) = P(s) - s = 0$

$\nabla \cdot F = 2(1-x^2-y^2)^2 + (1-x^2-y^2)(-4x^2-4y^2)$

$$\int_0^{2\pi} \nabla \cdot F \, dt = 0$$

$P'(0) = e^{\int_0^{2\pi} \cdots} = e^0 = 1$

Zobecnění pro systémy vyšších dimenzí

$\dot{x} = F(x) \qquad (1)$

$\Gamma: x = \mu(t), 0 \le t \le T$ je periodická orbita v E

místo P' máme Jacobiho matici

$$DP(x_0),\ x_0 \in \Gamma$$

Linearizace podél Γ

$\dot{x} = A(t)x \qquad A(t) = DF(\mu(t))$

T periodická matice

Fundamentální matice systému ϕ: $\dot{\phi} = A(t)\phi$

$\phi(0) = E \qquad \|DP(x_0)\| = \|\phi(T)\| = \|e^{Bt}\|$

B je konstantní matice vlastní matice e^{Bt} jsou $e^{\lambda_j T}$, kde λ_j jsou vlastní čísla matice B

λ_j ... charakteristické exponenty $\mu(t)$

$e^{\lambda_j T}$ ... charakteristické násobky $\mu(t)$

VĚTA (O stabilní varietě):

Buď $F \in C^1(E)$, E je otevřená $E \subset \mathbb{R}^n$. $\Gamma: x = p(t)$ je periodická orbita systému (1) s periodou T.

Buď φ_t tok systému (1) a $p(t) = \varphi_t(x_0)$. Má-li k charakteristických exponentů zápornou reálnou část ($0 \le k \le n-1$) a $n-k-1$ kladnou reálnou část pak existuje $\delta > 0$ takové že stabilní varieta

$S(\Gamma) = \{x \in N_\delta(x_0) : d(\varphi_t(x), \Gamma)$

u

$\vdots$

Poincarého-Bendixsonova teorie

$$\dot{x} = F(x) \quad (1)$$

VĚTA (P-B): Nechť $F \in C^1(E)$, $E \subset \mathbb{R}^n$ otevřená a taková, že (1) má trajektorii v nějaké kompaktní podmnožině E. Pak neobsahuje-li $\omega(\Gamma)$ žádné kritické body je $\omega(\Gamma)$ periodická orbita systému (1).

VĚTA: Uvnitř limitního cyklu planárního systému (1) ($E \subset \mathbb{R}^2$) existuje alespoň jeden bod rovnováhy

VĚTA (Bendixsonovo kritérium): Nechť $F \in C^1(E)$, $E \subset \mathbb{R}^2$ jednoduše souvislá. Jestliže divergence vektorového pole F není identicky rovný nule a nemění znaménko v E, pak systém (1) nemá periodickou orbitu v E.

DŮKAZ: (sporem) $\quad \Gamma: x = x(t),\ 0 \le t \le T; \quad S = \mathrm{Int}(\Gamma)$ parametrizace

$$\int_S \nabla \cdot F \, dS = \int_S \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \, dS = \oint_\Gamma (-Q, P) \, dS = \oint_\Gamma P\,dy - Q\,dx = \int_0^T (P\dot{y} - Q\dot{x})\,dt =$$

$$= \int_0^T PQ - QP \, dt = 0$$ to je ve sporu s předpokladem $\nabla \cdot F \neq 0$ a $\nabla \cdot F$ nemění znaménko

Ex.:

$$\dot{x} = x - y - x^3 - xy^2$$
$$\dot{y} = x + y - x^2y - y^3$$
$$\dot{z} = az$$

převedeme do polárních souřadnic

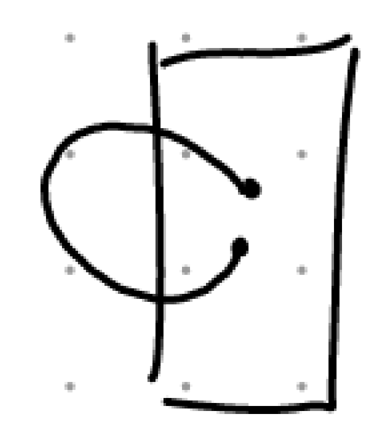
$$x = r\cos\varphi \qquad y = r\sin\varphi$$

$$F = \begin{pmatrix} r\cos\varphi - r\sin\varphi - r^3\cos^3\varphi - r^3\cos\varphi\sin^2\varphi \\ r\cos\varphi + r\sin\varphi - r^3\cos^2\varphi\sin\varphi - r^3\sin^3\varphi \\ az \end{pmatrix}$$

$$\dot{r} = \cos\varphi\left(r\cos\varphi - r\sin\varphi - r^3\cos^3\varphi - r^3\cos\varphi\sin^2\varphi\right) - \sin\varphi\left(r\cos\varphi + r\sin\varphi - r^3\cos^2\varphi\sin\varphi - r^3\sin^3\varphi\right) =$$
$$= r\cos^2\varphi - r\cos\varphi\sin\varphi - r^3\cos^4\varphi - r^3\cos^2\varphi\sin^2\varphi - r\cos\varphi\sin\varphi - r\sin^2\varphi + r^3\cos^2\sin^2\varphi + r^3\sin^4\varphi =$$
$$=$$

$$\dot{r} = r(1-r^2) \qquad x(t) = \left(\frac{r_0}{\sqrt{r_0^2 + e^{-2t}(1-r_0^2)}},\ t+\varphi_0,\ z_0 e^{at}\right)^T \qquad \varphi = t + \varphi_0$$
$$\dot{\varphi} = 1 \qquad\qquad t = \varphi_0 - \varphi$$
$$\dot{z} = az$$

$$\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^3 : r \in (0,\infty),\ \varphi = \varphi_0,\ z \in \mathbb{R}\}$$



$\Pi = ?$ $t=0$, $\forall x_0$ znovu $\varphi = \varphi_0 + 2\pi$
v bodě $t = 2\pi$

$$x_1 = \left(\frac{r_0}{\sqrt{r_0^2 + e^{-4\pi}(1-r_0^2)}},\ \varphi_0 + 2\pi,\ z_0 e^{2\pi a}\right)^T$$

$$P_{r,z}(x) = \left(\frac{r}{\sqrt{r^2 - e^{4\pi}(1-r^2)}},\ z e^{2\pi a}\right)^T$$ - Poincarého zobrazení

pevné body P? $\quad P(x^*) = x^*$

$$\Leftrightarrow \quad r = z = 0 \quad \vee \quad r = 1 \ z = 0$$

$[0,0]$ $[0,1]$

$x_1 = [0,0,0]$

$x_2 = [\cos\varphi, \sin\varphi, 0]$

$$DP(r,z) = \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & e^{2\pi a} \end{pmatrix} \qquad * = \frac{\partial}{\partial r}(1.\ sl.)$$

$$DP(0,0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{e^{-4\pi}}} & 0 \\ 0 & e^{-4\pi} \end{pmatrix}$$

$$DP(1,0) = \begin{pmatrix} e^{-4\pi} & 0 \\ 0 & e^{-4\pi} \end{pmatrix}$$

Ex.: Lišky a zajíci

Bifurkace

DEFINICE (strukturální stabilita): Systém (1) se nazývá strukturálně stabilní existuje-li $\varepsilon > 0$ tak, že pro všechny funkce $G \in C^1(E)$, pro něž je $\|F-G\| < \varepsilon$ jsou systémy (1) a $\dot{x} = G(x)$ topologicky ekvivalentní.

VĚTA: $F \in C^1(E)$, $E \subset \mathbb{R}^n$ otevřená, nechť existuje hyperbolický bod rovnováhy x^* systému (1). Pak pro libovolné $\varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tak, že pro všechny vektorové funkce $G \in C^1(E)$; $\|F-G\| < \varepsilon$ existuje kritický bod $\tilde{x}^* \in N_\delta(x^*)$ systému $\dot{x} = G(x)$. Dále platí, že matice $DF(x^*)$ $DG(\tilde{x}^*)$ mají stejný počet vl. čísel se zápornou Re a s kladnou Re

VĚTA (Peixotova) $F \in C^1(E)$, $M \subset \mathbb{R}^2$, M je kompaktní dvojrozměrná diferencovatelná varieta. Pak (1) je strukturálně stabilní na M $\Leftrightarrow$

(i) počet bodů rovnováhy a cyklů je konečný a každý je hyperbolický

(ii) neexistuje trajektorie jdoucí ze sedla do sedla

?

(iii) nebloudící množina Ω se skládá pouze z bodů rovnováhy a limitních cyklů

$\dot{x} = F(x, \mu)$ $F \in C^1(E \times \mathbb{R})$ $E \subset \mathbb{R}^n$ otevřená, μ je takové že systém je strukturálně nestabilní. (2)

VĚTA: Nechť je dán