Obyčejné diferenciální rovnice

Zápisky z přednášek

Jáchym Šmíd

Last changed: 2025-12-10

Obsah

I. Motivace

Motivací pro studium obyčejných diferenciálních rovnic (ODR) může být například rovnice $y' = x(y-1)$, kterou lze jednoduše řešit analyticky, pokud se ji ale pokusíme vyřešit pomocí nějaké numerické metody, narazíme na spoustu problémů. Je tedy dobré znát a umět analyzovat chování různých systémů obyčejných diferenciálních rovnic, abychom se těmto problémům mohli vyhýbat nebo aspoň věděli, že mohou nastat.

II. Lineární rovnice prvního řádu

1 Metody řešení

1.i Metoda separace proměnných

Rovnice se separovatelnými proměnnými je rovnice typu

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = g(x)h(y), \quad [x,y] \in \mathbb{R}$$

Použití separační metody je korektní za těchto předpokladů:
- $g(x)$ je spojitá
- $h(x)$ je spojitá

Metoda má tři kroky:
1. **Separace**

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = g(x)h(y)$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{h(y)} = g(x)\,\mathrm{d}x$$

   Pozorování Tato rovnice je speciálním tvarem rovnice v diferenciálech $M(x,y)\,\mathrm{d}x + N(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$
2. **Integrace**

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{h(y)} = \int g(x)\,\mathrm{d}x$$
$$H(y) = G(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

   Existence těchto funkcí je zaručena předpoklady.
3. **Inverze**

$$y = H^{-}1(G(x) + C)$$

   Existence inverzní funkce k funkci H je také zaručena předpoklady.

1.ii Bernoulliova rovnice

Kanonický tvar Bernoulliovy rovnice je

$$y' + a(x)y = g(x)y^p,$$

kde $a(x), g(x)$ jsou spojité na J a $p \in \mathbb{R}$. Jedná se tedy o nelineární rovnici pro p různé od jedničky a nuly. Je-li $p = 0 \vee p = 1$ je rovnice lineární a separovatelná respektive separovatelná, Řešíme tedy případ $p \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Za hledanou funkci dosadíme součin funkcí $y = uv$.

$$(uv)' + auv = g \cdot (uv)^p$$
$$u'v + uv' + auv = g \cdot (uv)^p$$
$$u'v + u(v' + av) = g \cdot (uv)^p$$

Zde bychom se chtěli zbavit závorky $v' + av$ nalezením vhodné funkce v . Položíme tedy

$$v' + av = 0$$

Tuto rovnici řešíme separací. Stačí nalézt jakokoliv funkci která této rovnici vyhovuje, můžeme tedy konstantu uvažovat nulovou, nebo jakoukoliv jinou která nám vyhovuje. Dalším krokem je dosazení v do rovinice

$$u'v = g \cdot (uv)^p$$
$$\frac{\mathrm{d}u}{u^p} = gv^{p-1}$$

Rovnici pro u lze znovu řešit separací. Hledanou funkci teď dostaneme prostou desubstitucí $y = uv$. Můžeme si všimnout, že Bernoulliova metoda se skládá ze dvou metod separace proměnných.

1.iii Metoda variace konstant

Prvně navržena Lagrangem. Znovu řešíme rovnici typu

$$y' + a(x)y = g(x)$$

Při metodě variace konstant nejdříve určíme řešní homogenní rovnice (znovu separací)

$$y_{h'} + a(x)y_h = 0$$
$$y_h = Ce^{\{-\int a\,\mathrm{d}x\}}$$

Nyní uvažujeme $C = C(x)$ a dosadíme y_h do původní rovnice. Tím dostaneme rovnici pro $C(x)$ a neznámá funkce je potom $y = C(x)e^{-\int a\,\mathrm{d}x}$.

1.iv Metoda integračního faktoru

Navržena Eulerem. Řešíme rovnici typu

$$y' + a(x)y = g(x)$$

Metoda integračního faktoru spočívá v tom přenásobit obě strany nějakou vhodnou funkcí abychom levou stranu dostali pod společnou derivaci. Pro naši rovnici je vhodným integračním faktorem funkce $e^{\int a\,\mathrm{d}x}$

$$y' + a(x)y = g(x) \quad \backslash \cdot e^{A(x)},\ \text{kde}\ \ A(x) = \int a\,\mathrm{d}x$$

Zde použijeme znalosti že

$$\frac{d}{\mathrm{d}x}\left(e^A y\right) = Ae^A y\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x} + e^A\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},$$

potom

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^A y\right) = ge^A$$
$$\int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^A y\right)\mathrm{d}x = \int ge^A\,\mathrm{d}x$$
$$e^A y = \int ge^A\,\mathrm{d}x$$
$$y = e^{-A}\int ge^A\,\mathrm{d}x$$

2 Věta o existenci a jednoznačnosti

Chtěli bychom vědět za jakých podmínek má smysl ODR řešit, s tím nám pomůže následující věta.

Věta Mějme obyčejnou diferenciální rovnici prvního řádu

$$y' = f(x, y).$$

Nechť f a $\frac{\partial f}{\partial y}$ jsou spojité na $G \subseteq \mathbb{R}^2$ a ngjechť $[x_0, y_0] \in G$, pak existuje právě jedno maximální řešení Cauchyovy úlohy

$$y' = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0$$

Důležité je si v praxi uvědomit co věta říká a co neříká, to se pokusíme ilustrovat na následujících příkladech.

Příklad 2.1 Mějme náldedující Cauchyho úlohu

$$y' = y, \quad y(0) = 0$$

Funkce f a $\frac{\partial f}{\partial y}$ jsou určítě spojité na $G = \mathbb{R}^2$ a bod $[0,0] \in G$. Rovnice tedy splňuje podmínky existence jednoznačného maximálního řešení. To dostaneme třeba separací proměnných.

$$\begin{aligned} y' &= y \\ \frac{\mathrm{d}y}{y} &= \mathrm{d}x, \quad y \neq 0 \\ \ln(|y|) &= x + C \\ y &= \pm K e^x \quad K \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

To je tedy obecné řešení, vidíme ale že pro danou počáteční podmínku řešení neexistuje, přitom ale splňujeme požadavky věty o existenci a jednoznačnosti. Věta nám ale neříká, že pro každou počáteční podmínku řešení existuje, říká jen že pro nějakou počáteční podmínku rešení existovat bude a že bude jednoznačné.

Příklad 2.2 Mějme následující Cauchyho úlohu

$$y' = \sqrt{|y|}, \quad y(0) = 0$$

Funkce f je spojitá na $\mathbb{R}$ ale její derivace už jen na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ množinou na které hledáme řešení je $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Pro jednoduchost vyřešíme rovnici pouze pro $y > 0$.

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y}} &= \mathrm{d}x \\ 2\sqrt{y} &= x + C \\ y &= \frac{1}{2}(x+C)^2 \\ 0 &= \frac{1}{2}(0+C)^2 \Rightarrow C = 0 \\ y &= \frac{x^2}{2} \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

To je ale v podstatě neočekávaný výsledek, vždyť přece počáteční podmínka neleží v oblasti G . To je ale právě ono, tím že PP neleží v oblasti G , pak větu nelze užít a neříká nám o řešení nic. Věta **neříká** právě tehdy když $[x_0, y_0] \in G$ pak rešení existuje a je jednoznačné, to je důležité si uvědomit.

III. Soustava lineárních diferenciálních rovnic

Máme homogenní soustavu ODR ve tvaru

$$X' = AX. \tag{1}$$

Pozorování Každá homogenní soustava má triviální řešení $X = 0$.

1 Systémy s diagonální maticí A

Tedy systémy bez vzájemného propojení (uncoupled systems) jsou rovnice typu

$$X' = AX, \tag{2}$$

kde matice A je diagonální. Pro takové systémy lze jednoduše najít řešení pomocí separace proměnných

$$x_i' = a_{ii}x_i \quad \longrightarrow \quad x_i = c_i e^{a_{ii}}.$$

nebo ekvivalentní maticový zápis

$$X(t) = \mathrm{diag}(a_{ii}) \cdot C,$$

kde $C = X(0)$.

2 Diagonalizace

Je technika, která nám pomůže převést obecný hommogenní lineární systém (1) na systém s diagonální maticí.

Definice *(homeomorfismus)* O zobrazení říkáme, že je homeomorfní pokud je bijektivní, spojité a inverzní zobrazení je též spojité.

Věta Mějme matici A typu $n \times n$, jež má n různých reálných vlastních čísel λ_i . Pak $\{V_i\}$ tvoří bázi v $\mathbb{R}^n$. Matice $P = (V_1 \mid ... \mid V_n)$ je invertibiliní a $P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$.

Věta *(Obecněji)* Lineární transformace T n -tého řádu, která vektoru $Y \in \mathbb{R}^n$ přiřadí stavový vektor $X = TY$ systému (2), zobrazuje systém (2) na opět lineární systém

$$Y' = BY, \tag{3}$$

kde matice $B = T^{-1}AT$ a systémy (2) a (3) jsou homeomorfní v $\mathbb{R}^n$. Zachovává-li zobrazení i orientaci pohybu, říkáme že jsou systémy navzájem topologicky ekvivalentní.

Jsme-li v $\mathbb{R}^2$ a $T = (V_1 \mid V_2)$ pak nastává právě jedna z možností
1. $B = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ má-li A 2 různá vlastní čísla,
2. $B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ je-li $\lambda_{1,2}$ dvonásobné reálné vlastní číslo,
3. $B = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ je-li $\lambda_{1,2}$ sdružené komplexní vlastní číslo.

Proces diagonalizace provedeme následovně: definujeme lineární transformaci souřadnic

$$Y = P^{-1}X$$

kde P je invertibilní matice definovaná v předchozí větě. Potom

$$X = PY$$

$$Y' = P^{-1}X' = P^{-1}AX = P^{-1}APY$$

a tím dostaneme diagnoalizovaný systém.

$$Y' = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)Y$$

3 Princip superpozice řešení pro homogenní soustavy

Jestliže $X_1, ..., X_n$ jsou řešení homogenní soustvay ODR na intervalu J a $C_1, ..., C_n$ jsou libovolné konstanty, pak lineární kombinace $C_1X_1 + ... + C_nX_n$ je opět řešením soustvay na J .

3.i Fundamentální systém

4 Exponenciální matice

O lineární rovnici víme, že obecné řešení má tvar $x = ce^{at}$, chtěli bychom najít nějakou paralelu k systémům rovnic, přece jenom je jejich zápis velice podobný. K tomu se nám bude hodit exponenciální matice.

Věta Je-li A typu $n \times n$ reálná či komplexní matice, tak maticová řada $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}$ konverguje k matici e^{At} třídy $n \times n$, která má valstnosti:
1. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e^{At} = Ae^{At} = e^{At}A$
2. $e^{(t+s)A} = e^{At}e^{As}$
3. $e^{A0} = \mathbb{I} \wedge e^{At}$ je invertibilní $\wedge\, e^{At}e^{-At} = \mathbb{I}$, kde $\mathbb{I}$ je jednotková matice.

Bude-li $X(0) = u_j$ pak

$$X = e^{At} = e^{\lambda_j t} e^{At} e^{-\lambda_j t} u_j = e^{\lambda_j t} e^{(A - \lambda_j I)t} = e^{\lambda_j t} \big(I + \big(A - \lambda_j I\big)t + ...\big) u_j = e^{\lambda_j t} u_j.$$

Věta *(Cayley-Hamilton)* Nechť ... je charakteristický polynom matice typu .... Pak maticový polynom získaný zaměněním ... za ... do ... splňuje ....

5 Metody řešení soustav lineárních rovnic

5.i 1. Eulerova metoda (pro matici s konstantními koeficienty)

Řešení odhadujeme ve tvaru $x_i = u_i e^{\{\lambda_i\}}$, kde (u_i, λ_i) je vlastní pár matice A . Může nastat několik případů

5.i.i n lineárně nezávislých vektorů

Věta Nechť matice A má n lineárně nezávislých vektorů $V^1, ..., V^n$, které jsou příslušné k (ne nutně různým!) vlastním číslům. Potom

$$V^1 e^{\{\lambda_1 t\}}, V^2 e^{\{\lambda_2 t\}}, ..., V^n e^{\{\lambda_n t\}},$$

je fundamentální systém řešení soustavy na $\mathbb{R}$.

To může nastat má-li matice A n různých vlastních čísel, matice A je symetrická, ...

5.i.ii komplexní vlastní číslo

Dostaneme-li komplexní vlastní číslo $\lambda_i = \alpha + \beta i$, výsledkem by mělo být

$$X_1 = V^1 e^{(\alpha + \beta i)t}$$

to je ale komplexní funkce a taková nás moc nezajímá, protože jsme řešili reálný problém, chtěli bychom tedy reálné výsledky. Zkusíme zda by soustavu neřešila pouze reálná část výsledku.

$$\mathrm{Re}(x') = (\mathrm{Re}(x))' = \mathrm{Re}(Ax) = A \cdot \mathrm{Re}(x) \setminus (\mathrm{Re}(x))' = A \cdot \mathrm{Re}(x) \setminus X' = A \cdot X$$

to znamená, že reálná část je řešením, to samé platí pro imaginární část. Mějme tedy komplexní vlastní číslo $\lambda = \alpha + \beta i$ a odpovídající vlastní vektor $U = V + Wi$.

$$\begin{aligned} X &= Ue^{\{\lambda t\}} = (V+Wi)e^{\alpha+\beta i} = (V+Wi)e^{\alpha t}e^{\beta i t} = \\ &= (V+Wi)e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i\sin(\beta t)) = e^{\alpha t}(V\cos(\beta t) - W\sin(\beta t)) + \\ &+ ie^{\alpha t}(W\cos(\beta t) + V\sin(\beta t)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(X) &= e^{\alpha t}(V\cos(\beta t) - W\sin(\beta t)) \\ \mathrm{Im}(X) &= e^{\alpha t}(W\cos(\beta t) + V\sin(\beta t)) \end{aligned}$$

$$X = C_1 \ \mathrm{Re}(X) + C_2 \ \mathrm{Im}(X)$$

5.i.iii méně než n lineárně nezávislých vlastních vektorů

6 Obcné řešení nehomogenního problému

Mějme soustavu ve tvaru

$$X' = AX + F(t)$$

Definice *(Princip superpozice)* Nechť $X_C = C_1X_1 + ... + C_nX_n$ je obecné řešení homogenního problému a nechť X_P je řešení …. Pak obecné řešení má tvar

$$X = X_C + X_P$$

6.n.i Metoda variace konstant

7 Tok lineárního systému

Uvažujme systém

$$X' = AX.$$

Definice *(Tok lineárního systému)* Množina zobrazení $e^{At} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ se nazývá tokem lineárního systému. (Popisuje pohyb bodů … po trajektoriích systém …)

Definice *(Hyperbolický lineární systém ODR)* Mají-li všechna valstní čísla matice A nenulovou reálnou část, říkáme o lineárním systému ODR že je hyperbolický

Definice *(Invariantní množina)* Podnožina $E \subset \mathbb{R}^n$ se nazývá invariantní k toku e^{At} , jestliže platí $e^{At}E \in E$ pro $\forall t \in \mathbb{R}$

Definice Mějme lineární systém $\dot{X} = AX$ a nechť $w_j = u_j + iv_j$ je zobecněný vlastní vektor matice A odpovídající vlastnímu číslu $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$ a nechť $\{u_1, ..., u_r, v_{k+1}, ..., v_r\}$ je báze $\mathbb{R}^n, (n = 2r - k)$.

- Pak podprostor vytvořený zobecněnými vlastními vektory jimž odpovídají vlastní čísla se zápornou reálnou částí se nazývá **stabilní podprostor** a značíme ho $E^s = \mathrm{span}\{u_j, v_j : \alpha_j < 0\}$
- Podprostor vytvořený zobecněnými vlastními vektory jimž odpovídají vlastní čísla s kladnou reálnou částí se nazývá **nestabilní podprostor** a značíme ho $E^u = \mathrm{span}\{u_j, v_j : \alpha_j > 0\}$
- Podprostor vytvořený zobecněnými vlastními vektory jimž odpovídají vlastní čísla s nulovou reálnou částí se nazývá **centrální podprostor** a značíme ho $E^c = \mathrm{span}\{u_j, v_j : \alpha_j = 0\}$

Věta Vlastnosti řešení lineárního systému v invariantních podprostorech

- Je-li $X_0 \in E^s$ pak pro $\forall t \in \mathbb{R}$ je $\lim_{t\to\infty} e^{At} X_0 = 0$. Bod rovnováhy je asymptoticky stabilní.
- Je-li $X_0 \in E^u$ pak pro $\forall t \in \mathbb{R}$ je $\lim_{t\to\infty} e^{At} X_0 = \pm\infty$. Bod rovnováhy je asymptoticky nestabilní.

IV. Nelineární diferenciální rovnice

Nelinární ODR v normálním tvaru nazýváme rovnici

$$y^n = f(t, y^{n-1}, y^{n-2}, ..., y),$$

zde y^n značí n -tou derivaci. Tato rovnice má několik jednoduchých řešení ve speciálních případech.

1. $\boldsymbol{\ddot{y} = f(\dot{y}, t)}$

   Zde provedeme redukci řádu vhodnou substitucí.

$$z(t) = \dot{y}(t), \quad \dot{z}(t) = \ddot{y}(t)$$

   Tím dostaneme systém rovnic, který už je jednoduché vyřešit.

$$\begin{aligned} \dot{y} &= z \\ \dot{z} &= f(t, z) \end{aligned}$$

2. $\boldsymbol{\ddot{y} = f(\dot{y}, y)}$

   Zde znovu zavedeme vhodnou substituci

$$z = \dot{y} \to \dot{z} = \ddot{y}$$

   Tady si uvědomíme, že

$$\dot{z} = \ddot{y} = f(y, z) = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} z$$

   Našli jsme tedy obyčejnou diferenciální rovnici $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{z} f(y, z)$, jejímž řešením je funkce z , potom pro hledanou funkci víme že $y = \int z \, \mathrm{d}t$

V. Soustava nelineárních diferenciálních rovnic - lokální chování

Soustavou nelineárních diferenciálních rovnic nazýváme

$$X' = F(t, X), \quad X(0) = X_0. \tag{4}$$

Nechť E je otevřená podmonožina $\mathbb{R}^n$, $X_0 \in E$ a nechť $F \in \mathcal{C}^1(E)$ pak

$$\dot{X} = F(X), \quad X(0) = X_0, \tag{5}$$

nazýváme nelineárním autonomním systémem obyčejných diferenciálních rovnic. Poznamenejme, že jakýkoliv neautonomní systém lze autonomizovat přidáním jedné proměnné.

Oproti lineárním systémům může u nelineárních systémů nastat tzv. blow up. To znamená, že řešení utíká do nekonečna v nějakém konečném čase, to je samozřejmě nefyzikální. Ilustrujeme to na příkladě.

Příklad V.1

$$\begin{aligned} \dot{x} = x^2, &\quad x(0) = 1 \\ \frac{\mathrm{d}x}{x^2} &= \mathrm{d}t \\ -\frac{1}{x} &= t + C \\ x = -\frac{1}{t-1}, &\quad t \in (-\infty, 1) \end{aligned}$$

Je vidět, že

$$\lim_{t\to 1^-} x(t) = \infty,$$

tomu říkáme blow up řešení.

1 Existence a jednoznačnost

Věta Nechť E je otevřená podmnožina $\mathbb{R}^n, X_0 \in E$ a nechť $F \in \mathcal{C}^1(E)$. Pak existuje $a > 0$ takové, že počáteční problém $\dot{X} = F(X), X(0) = X_0$ má jediné řešení na $\langle -a, a\rangle$

Věta *(Barrowův vzorec)* Je-li řešení $x(t)$ rovnice $\dot{X} = F(X)$ na intervalu $I = (t_0, t_1), F \in \mathcal{C}^1(I)$ a $F(X) \neq 0$ na I . Označme $a = \lim_{t\to t_0^+} x(t), b = \lim_{t\to t_1^-} x(t)$. Pak

$$t_1 - t_0 = \int_a^b \frac{1}{F(z)}\,\mathrm{d}z$$

To nám říká pár věcí:
- Vzorec udává čas, který potřebuje řešení k tomu, aby vystoupalo
(resp. zklesalo) z hodnoty a do hodnoty b
- Řešení konvergující k b zleva (resp. zprava) pro $t \to T$ (T je krajní bod
intervalu, na kterém je řešení definováno) se napojí v konečném čase na stacionární řešení $x = b$, právě tehdy když následující integrál konverguje (pro malé δ)

$$\int_{b-\delta}^b \frac{1}{F(z)}\,\mathrm{d}z$$

$$\left(\text{resp. } \int_b^{b-\delta} \frac{1}{F(z)}\,\mathrm{d}z\right)$$

Věta Nechť E je otevřená podmnožina $\mathbb{R}^n$ obsahující X_0 a nechť $F \in \mathcal{C}^1(E)$. Nechť $u_1(t)$ a $u_2(t)$ je řešení nelineární soustavy na I_1 respektive na I_2 . Pak $0 \in I_1 \cap I_2$ a je-li I libovolný otevřený interval obsahující 0 , který je zároveň podintervalem $I_1 \cap I_2$ pak $u_1(t) = u_2(t)$ pro $\forall t \in I$.
Věta Nechť E je otevřená podmnožina $\mathbb{R}^n$ a $F \in \mathcal{C}^1$. Pak pro $\forall X_0 \in E$ existuje největší otevřený interval (α, β) na němž má počáteční problém (5) jediné řešení $X(t)$. Tzn. má-li (5) řešení $Y(t)$ na $I \subset (\alpha, \beta)$. Pak $X(t) = Y(t)$ pro $\forall t \in I$.

2 Maximální interval existence

3 Tok definovaný diferenciální rovnicí

4 Linearizace

Mějme nelineární autonomní systém:

$$\dot{X} = F(X), \quad F(0) = 0$$

Provedeme Taylorův rozvoj prvního řádu okolo nuly:

$$f_i(X) = f_{i(0)} + \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(0)\cdot x_1 + \ldots + \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(0)\cdot x_n + \omega_i,$$

kde ω_i je chyba způsobená zanedbáním členů vyšších řádů a $f_{i(0)} = 0$. Jako A označíme Jacobiho matici funkce $F(x)|_0$ (tedy v bodě 0). Potom soustava

$$\dot{X} = A \cdot X,$$

je linearizovaný systém k původnímu systému.

Věta Jestliže všechna vlastní čísla Jacobiho matice A mají záporné reálné části. Pak bod 0 je asymptoticky stabilní bod rovnováhy nelinearizované soustavy. Jestliže je alespoň jedna reálná část kladná, pak je bod 0 nestabilní bod rovnováhy nelinearizované soustavy.

Tato věta nám dává informaci o stabilitě počátku pouze ze znalosti Jacobiho matice soustavy. Nedavá nám ale informaci o žádném jiném bodě mimo počátek, chtěli bychom ji proto zobecnit. Mějme tedy:

$$\dot{X} = F(X), \quad F(H) = 0$$

Bodem rovnováhy je tady nějaký bod H a ne počátek. Provedeme-li znovu Taylorův rozvoj dostaneme

$$f_i(X) = f_i(H) + \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(H) \cdot x_1 + ... + \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(H) \cdot x_n + \omega_i.$$

Provedeme transformaci soustavy tak, aby bod H byl počátkem soustavy nové.

$$\begin{aligned} u_1 &= x_1 - h_1 \\ u_2 &= x_2 - h_2 \\ &\vdots \\ u_i &= x_i - h_i \end{aligned}$$

Tím dostaneme soustavu $\dot{U} = G(U)$, ve které je bod H počátkem. Sestavíme-li Jacobiho matici této soustavy, zjistíme že je stejná jako kdybychom vyhodnotili Jacobiho matici původního systému v bodě H . To znamená, že pro vyhodnocení stability obecného bodu rovnováhy nemusíme provádět transformaci, ale stačí jen vyhodnotit Jacobiho matici v daném bodě.

5 Stabilní a nestabilní varieta

6 Věta Hartman-Grobman

7 Stabilita

8 Body rovnováhy

Definice *(Bod rovnováhy)* Body rovnováhy jsou body pro něž platí

$$F(X_0) = 0.$$

Rozlišujeme několik druhů bodů rovnováhy:

- stabilní (Lyapunovsky) jestliže pro
  $\forall \varepsilon\ \exists \delta > 0$ tak, že $\left\|X^0\right\| < \delta \Rightarrow \left\|X(t, X^0)\right\| < \varepsilon$
  tzn. řešení neuteče z nějaké oblasti dané ε .
- atraktor existuje-li
  $\delta > 0$ tak, že $\left\|X^0\right\| < \delta \Rightarrow \lim_{t\to\infty} X(t, X^0) = 0$
  (je-li bod rovnováhy v nule)
- asymptoticky stabilní $\Longleftrightarrow$ je stabilní a atraktor
- nestabilní není-li stabilní

Definice *(Oblast atraktivity)*

Věta *(Hurwitzovo kriterium)*

9 Body rovnováhy nelineárního systému

Mějme nelineární systém ve tvaru:

$$\dot{x} = P(x, y)$$
$$\dot{y} = Q(x, y)$$

Definice *(Topologické sedlo)* Jestliže existují trajektorie $\Gamma_i = \{x \in E; x = \varphi(t, x_i), t \in \mathbb{R}\}$ takové, že $\lim_{t \to +\infty} \varphi(t, x_i) = x_0, i = 1, 2$ a dále existují trajektorie $\Gamma_i = \{x \in E; x = \varphi(t, x_i), t \in \mathbb{R}\}$ takové, že $\lim_{t \to -\infty} \varphi(t, x) = x_0, i = 3, 4$.

A existuje-li δ -okolí bodu x_0 takové, že ostatní trajektorie systému @system vycházející z bodu $X \in N_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$ opustí $N_\delta(x_0)$ při $t \to +\infty$ či $t \to -\infty$. Pak se x_0 nazývá topologické sedlo a trajektorie Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4, se nazývají separatisy.

Topologické sedlo má varietey:

- Stabilní varieta S v bodě x_0 : $S = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \{x_0\}$
- Nestabilní varieta U v bodě x_0 : $U = \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \cup \{x_0\}$

Lemma 9.1 Buď $E \subset \mathbb{R}^n$, E je otevřená množina, $F \in \mathcal{C}^1(E)$, $x_0 \in E$, $F(x_0) = 0$.

- Je-li x_0 hyperbolický bod rovnoováhy systému @system je x_0 topologické sedlo $\Leftrightarrow$ x_0 je sedlo linearizace $\dot{X} = \mathcal{D}F(x_0)$
- $F \in \mathcal{C}^2(E)$
  - Bod rovnováhy je stabilní (nestabilní) uzel $\Leftrightarrow$ x_0 je stabilní respektive nestabilní uzel linearizace $\dot{X} = \mathcal{D}F(x_0)$
  - Bod rovnováhy je stabilní (nestabilní) ohnisko $\Leftrightarrow$ x_0 je stabilní respektive nestabilní ohnisko linearizace $\dot{X} = \mathcal{D}F(x_0)$
- Nehyperbolický bod rovnováhy x_0 je střed linearizace. Pak x_0 je je buď
  1. Střed
  2. Ohnisko
  3. Střed-ohnisko

Definice *(Sektor)* Sektor je oblast ohraničená separatisami

Sektorů máme tři typy, budeme je rozlišovat pouze dle obrázků

- Hyperbolický sektor
- Parabolický sektor
- Eliptický sektor

10 Složené body rovnováhy

VI. Soustava nelineárních diferenciálních rovnic - globální chování

1 Dynamické systemy

2 Limitní množiny, atraktory

3 Periodické orbity

4 Poincarého zobrazeni

5 Stabilní varieta periodických orbit