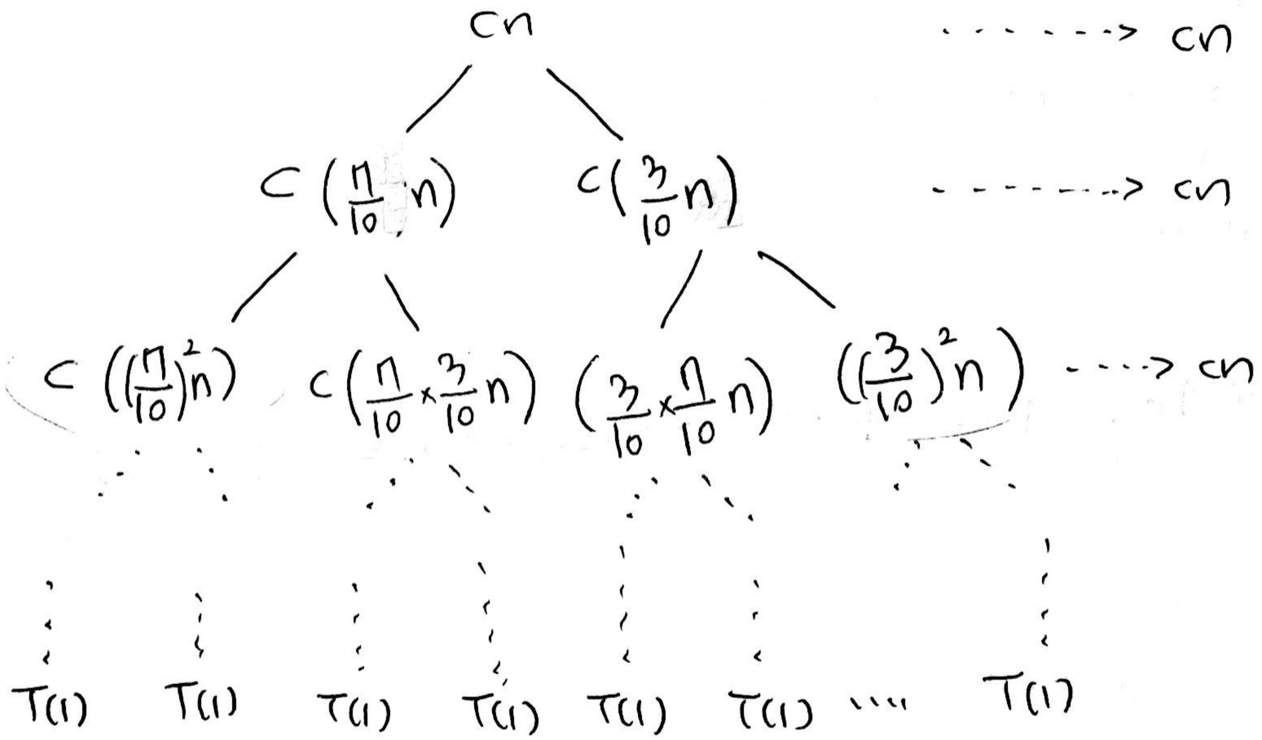
1. (a)

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & (n \le 1) \\ T(0.7n) + T(0.3n) + \Theta(n) & (n > 1) \end{cases}$$

(b) $\Theta(n)$을 임의의 상수 $c \times n$으로 작성하면,



이 트리의 경우 uneven 하기 때문에 T(1)에 도달하는 속도가 균일하지 않다.
따라서 upper bound, lower bound를 구해서 대략적인 T(n)의 크기를 구하였다.

$\left(\frac{7}{10}n\right)^i = 1$ $\qquad$ $\left(\frac{3}{10}n\right)^i = 1$

$\left(\frac{n}{10/7}\right)^i = 1$ $\qquad$ $\left(\frac{n}{10/3}\right)^i = 1$

$i = \log_{10/7} n$ $\qquad$ $i = \log_{10/3} n$

(c) worst case : $\log_{10/3} n \times cn$.

best case : $\log_{10/n} n \times cn$

$$\log_{10/n} n \times cn \leq T(n) \leq \log_{10/3} n \times cn$$

$\therefore T(n) = \Theta(N \log N)$.

2. (a) $T(n) = 9T(n/3) + n^2$

$a=9, b=3, f(n)=n^2$

$n^{\log_b a} = n^2$

case2) $f(n) = \Theta(n^2)$

$\therefore T(n) = \Theta(n^2 \cdot \lg n)$

(b) $T(n) = 3T(n/9) + n$

$a=3, b=9, f(n)=n$

$n^{\log_b a} = n^{\frac{1}{2}}$

case3) $f(n) = \Omega(n^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$ $\varepsilon = \frac{1}{3}$ 일때 만족.

$af(n/b) \leq c \cdot f(n)$

$\cancel{3} \times \frac{n}{\cancel{9}_{3}} \leq c \times n$

$\frac{1}{3} \leq c < 1$ 을 만족하는 상수 c 존재.

$\therefore T(n) = \Theta(n)$