EDO

Cálculo - Trascendentes tempranas

Cuarta Edición

Dennis G. Zill | Warren S.Wright

Capitulo 8: Ecuaciones Diferenciales de primer orden

Ejercicio 25 de la sección de revisión del capítulo (página 472)

Cuando la mala memoria se toma en cuenta, la razón a la que una persona puede memorizar un tema está dada por la ecuación diferencial:

$$\frac{dA}{dt} = k_1(M - A) - k_2A$$

Donde:

k_1, k_2 son constantes positivas.

$A(t)$ es la cantidad de material memorizado en el tiempo t

M es la cantidad de material por memorizar

$M - A$ es la cantidad de material que queda por memorizar

Solución Analítica

$$\frac{dA}{dt} = k_1M - k_1A - k_2A$$

$$\frac{dA}{dt} = k_1M - A(k_1 + k_2)$$

$$\frac{dA}{dt} + A(k_1 + k_2) = k_1M$$

Es una ecuación diferencial lineal en su forma estándar:

$$A' + P(t)A = Q(t)$$

Donde:

$$P(t) = k_1 + k_2 \quad y \quad Q(t) = k_1M$$

Por lo que se procede a determinar el factor integrante:

$$e^{\int P(t)dt} = e^{\int (k_1+k_2)dt} = e^{(k_1+k_2)t}$$

Y se deriva el producto $Ae^{(k_1+k_2)t}$:

$$\frac{d}{dt}(Ae^{(k_1+k_2)t}) = A' \cdot e^{(k_1+k_2)t} + A \cdot e^{(k_1+k_2)t}(k_1 + k_2)$$

$$= e^{(k_1+k_2)t}(A' + A(k_1 + k_2))$$

Ahora se multiplica la EDO por el factor integrante:

$$e^{(k_1+k_2)t}\left(\frac{dA}{dt} + A(k_1 + k_2)\right) = (k_1M)e^{(k_1+k_2)t}$$

Y por equivalencia podemos sustituir el lado izquierdo de la ecuación con la derivada del producto $Ae^{(k_1+k_2)t}$ encontrada:

$$\frac{d}{dt}(Ae^{(k_1+k_2)t}) = (k_1M)e^{(k_1+k_2)t}$$

Pasamos el diferencial dt al lado derecho e integramos ambos lados de la ecuacion:

$$d(Ae^{(k_1+k_2)t}) = (k_1M)e^{(k_1+k_2)t}dt$$

$$\int d(Ae^{(k_1+k_2)t}) = \int (k_1M)e^{(k_1+k_2)t}dt$$

$$Ae^{(k_1+k_2)t} = (k_1M)\frac{e^{(k_1+k_2)t}}{(k_1 + k_2)} + C$$

Ahora se despeja A y obtendríamos una primera versión de la solución para la EDO:

$$A = \frac{(k_1M)}{(k_1 + k_2)} + Ce^{-(k_1+k_2)t}$$

Primero verifico que esta solución cumple con la EDO original, para lo que se deriva la solución y se sustituye la derivada y la solución en la ecuación diferencial original. De ser correcta la igualdad debería cumplirse.

$$A' = -C(k_1 + k_2)e^{-(k_1+k_2)t}$$

$$-C(k_1 + k_2)e^{-(k_1+k_2)t} + (k_1 + k_2)(\frac{(k_1M)}{(k_1 + k_2)} + Ce^{-(k_1+k_2)t}) = k_1M$$

$$-C(k_1 + k_2)e^{-(k_1+k_2)t} + k_1M + C(k_1 + k_2)e^{-(k_1+k_2)t} = k_1M$$

$$k_1M = k_1M$$

Y vemos que si cumple con la igualdad de la ecuación diferencial inicial. La solución es correcta.

Ahora bien, se sabe que $A(0) = 0$ ya que en el instante $t = 0$ no se ha comenzado a memorizar la información. Sabiendo esto podemos determinar el valor de C:

$$A(0) = \frac{(k_1M)}{(k_1 + k_2)} + Ce^{-(k_1+k_2)0}$$

$$0 = \frac{(k_1M)}{(k_1 + k_2)} + C$$

$$C = -\frac{(k_1M)}{(k_1 + k_2)}$$

Si sustituimos C en la solución conseguimos una solución completa para la EDO:

$$A = \frac{(k_1M)}{(k_1 + k_2)} - e^{-(k_1+k_2)t}\frac{(k_1M)}{(k_1 + k_2)}$$

$$A(t) = \frac{k_1M}{k_1 + k_2}\left(1 - e^{-(k_1+k_2)t}\right)$$

Seleccionando estos valores para las constantes:

$k_1 = 0.4$

$k_2 = 0.1$

$M = 100$

La solución de la ecuación seria:

$$A(t) = 80\left(1 - e^{-0.5t}\right)$$

Y su grafica es: