EDO

Cálculo - Trascendentes tempranas

Cuarta Edición

Dennis G. Zill | Warren S.Wright

Capitulo 8: Ecuaciones Diferenciales de primer orden

Ejercicio 24 de la sección de revisión del capítulo (página 472)

Una barra metálica se saca de un horno cuya temperatura es 150°C y se coloca en un tanque de agua cuya temperatura se mantiene a 30°C constantes. Después de 0.25 h en el tanque, la temperatura de la barra es 90°C. ¿Cuál es la temperatura de la barra en 0.5 h y en 1 h?

Este ejercicio no da una EDO explicita, pero trata de cambios de temperatura y se da la temperatura del ambiente, por lo que se puede aplicar la Ley de enfriamiento de Newton.

Ley de enfriamiento de Newton:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a)$$

Donde:

Temperatura del ambiente $T_a = 30^\circ C$

Temperatura inicial de la barra $T(0) = 150^\circ C$

Temperatura de la barra luego de 0.25 horas $T(0.25) = 90^\circ C$

Temperatura de la barra luego de 0.5 horas $T(0.5) = \ ?$

Temperatura de la barra luego de 1 hora $T(1) = \ ?$

Solución Analítica

La ecuación diferencial ordinaria es Lineal y de primer orden, así que se resolverá por medio del método de Variables Separables:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - 30)$$

Se dejan los términos con T de un lado y los términos con t del otro lado con la constante k:

$$\frac{dT}{(T - 30)} = -kdt$$

Se procede a integrar ambos lados de la ecuación:

$$\int \frac{dT}{T - 30} = -k \int dt$$

$$\ln|T-30| = -kt + C$$

Se despeja T y se organiza un poco el componente exponencial:

$$T - 30 = e^{-kt+C}$$

$$T(t) = 30 + C'e^{-kt}$$

Ahora bien, el problema indica una temperatura inicial en la barra de $150^{\circ}C$, y gracias a esto se puede determinar el valor de la constante de integración:

$$T(0) = 150 = 30 + C'e^{0}$$

$$C' = 150 - 30 = 120$$

Por lo que la ecuación diferencial queda de la siguiente forma:

$$T(t) = 30 + 120e^{-kt}$$

Ahora para conseguir el valor de la constante de enfriamiento k se puede hacer uso del otro dato que se proporciona. La temperatura de la barra en un momento especifico $T(0.25) = 90^{\circ}C$. Sustituyendo en la EDO:

$$T(0.25) = 90 = 30 + 120e^{-k(0.25)}$$

Y se despeja k:

$$e^{-0.25k} = \frac{90-30}{120} = 0.5$$

$$-0.25k = \ln(0.5)$$

$$k = 2.7726$$

Finalmente la Ecuación Diferencial que describe la dinámica del sistema dado es:

$$T(t) = 30 + 120e^{-2.7726t}$$

Ahora para responder las preguntas solo es cuestión de sustituir los tiempos dados en la EDO para conocer la temperatura de la barra en eso momentos:

$$T(0.5) = 30 + 120e^{-2.7726(0.5)}$$

$$T(0.5) = 60^{\circ}C$$

$$T(1) = 30 + 120e^{-2.7726(1)}$$

$$T(1) = 37.5^{\circ}C$$