

# Análisis de salidas de experimentos de simulación

Carlos Domingo<sup>1</sup>

11 de noviembre de 2010

<sup>1</sup>Carlos Domingo es miembro del Honor del CeSiMo y Profesor de la Facultad de Ciencias Económicas y Sociales de la Universidad de Los Andes, Venezuela. Este capítulo ha sido producido a partir de un original en inglés gentilmente cedido por él. Traducido y adaptado a Galatea por Jacinto Dávila.



# Capítulo 1

## Análisis de salida

La salida, los resultados reportados, de una corrida de simulación sobre ciertos datos dados (como valores iniciales de variables y como parámetros) debe ser analizada para tomar decisiones o para compararla con los resultados producidos con datos diferentes, con otros modelos o con datos tomados en algún sistema real.

Los resultados de la simulación normalmente aparecen como una serie de tiempo de una o varias variables, como valores numéricos que representan resúmenes estadísticos o, simplemente, listados de los valores finales o críticos de ciertas variables. Por supuesto, también pueden aparecer reportados como textos, imágenes o sonidos.

En los llamados **modelos determinísticos**, los resultados de una corrida de simulación son únicos dado el conjunto de datos de entrada. Así que tales resultados pueden ser usados directamente para tomar decisiones o hacer comparaciones.

Por otro lado, si el modelo tiene **variables aleatorias**, el mismo modelo con la misma data puede producir resultados diferentes en las diferentes corridas, debido a que valores diferentes de las semillas de los números aleatorios usados en las diversas corridas producirán valores diferentes para las variables aleatorias. Las semillas corresponde a los “valores iniciales” de los generadores de números aleatorios y esas funciones suelen ser muy sensibles a los valores iniciales.

En un modelo de simulación procesado por un computador digital, que es una máquina determinística, el resultado es, hablando estrictamente, determinístico. Sin embargo, un modelo de simulación de un sistema con **procesos estocásticos** tiene 2 partes: Una parte imita la estructura del sistema usando, para ellos, ciertas variables y relaciones entre ellas. La otra parte imita la característicase estocásticas del sistema, asignando valores a las variables de acuerdo a un caudal bien definido de números que imita, a su vez, una secuencia aleatoria (pero que no es realmente aleatoria, sino pseudo-aleatoria, pues es generada por la máquina determinística). Ese caudal es generado a partir de una **semilla** que es su primer número.

En cada repetición o “replicación” de la corrida, los datos pueden ser los

mismos que en la corrida anterior, pero la semilla es diferente. Por lo tanto, la salida es el producto de un proceso aleatorio. La secuencia de valores asociados a una variable es diferente con cada repetición.

Es posible, inclusive, que se usen varios caudales de números aleatorios para las diferentes variables. Todos o algunos son cambiados en las repeticiones de las corridas.

De esta forma, los resultados de las corridas corresponden a valores de variables aleatorias y, para poder entenderlos, es preciso realizar un análisis con métodos estadísticos.

En este capítulo tratamos el problema especial de los **modelos estocásticos** (modelos con variables aleatorias). Los procesos que describen esos modelos son **procesos estocásticos**.

**modelos estocásticos**  
**procesos estocásticos**

## 1.1. Definiciones relativas a procesos estocásticos

Antes de la discusión sobre análisis de salida es conveniente recordar algunos conceptos básicos en procesos estocásticos. En un proceso estocástico, los valores de las variables son valores aleatorios dados por una serie de tiempo. Los valores  $y_1, y_2, \dots, y_m$  corresponden a los tiempos  $t_1, t_2, \dots, t_m$ . Esa última serie es una secuencia creciente valores reales.

Cada valor  $y_i$  es obtenido como resultado de un experimento aleatorio. En un experimento aleatorio, el resultado puede variar respecto a otro experimento, incluso si la repetición replica las mismas condiciones del otro experimento. Por lo tanto, si repetimos el proceso estocástico, la secuencia de valores  $y_i$  es, en general, diferente.

Note que el valor de la variable puede ser un número, un valor lógico o el miembro de un conjunto bien definido. Cuando no es un número, puede ser más conveniente usar como resultado el valor de una función numérica aplicada al valor no numérico original. Así, el resultado de lanzar un dado puede ser representado por el número de puntos en la cara que queda hacia arriba. En el caso de la moneda, esa función podría asignar un 1 a cara y un 0 a sello.

**Example 1.** Se lanza un dado 20 veces. En número de puntos en la cara arriba es una variable estocástica. Esta es una serie posible:

6, 3, 2, 3, 6, 4, 3, 5, 5, 1, 3, 6, 3, 5, 2, 6, 3, 5, 4, 1.

El siguiente código puede ser usado para simular esas series de 20 lanzamientos de un dado de 6 caras. Noten como funciona Galatea en este contexto. La primer serie es generada por una misma semilla. Siempre es la misma serie, si se mantiene la misma semilla. La segunda serie es producida con la misma plataforma, pero escogiendo una semilla “al azar”<sup>1</sup> con el reloj del sistema como intermediario. La tercer serie es producida con la plataforma matemática de Java.

<sup>1</sup>El azar participa de esta acción gracias al simulista, quien escoge el momento de echar a andar su programa. El registro del reloj en ese instante será usado para escoger la semilla. Lo curioso es cómo el azar surge de una decisión perfectamente controlable.

**Algorithm 1.1** GArzarHola: Comparando Generadores Pseudo-aleatorios

---

```

1  /** GArzarHola.java * * Created on April 17, 2004, 12:57 PM */
2
3  package contrib.gazar;
4  import galatea.glider.*;
5  import java.util.Random;
6
7  /** * * @author El simulista desconocido * @version 1.5 */
8
9  public class GArzarHola {
10     /* @param argumentos, los argumentos de linea de comandos */
11     public static void main(String args[]) {
12         int puntos, i = 0;
13         // Inicializador de la semilla de GRnd
14         GRnd.setRn();
15         System.out.println("..la misma semilla:");
16         // Realiza los experimentos con la misma semilla
17         for (i = 0; i < 20; i++) {
18             // genera un numero entre 1 y 6
19             puntos = (int) GRnd.unif(1.0, 6.0);
20             System.out.print(puntos);
21             if (i == 19) {
22                 System.out.println(".");
23             } else {
24                 System.out.print(",");
25             }
26         }
27
28         System.out.println(".. una de las 10 semillas tomada al azar:");
29         // Realiza los experimentos con una semilla tomada al azar?
30         for (i = 0; i < 20; i++) {
31             int clock = (int) Math.abs(System.currentTimeMillis());
32             //System.out.println(" - "+clock%10);
33             // genera un numero entre 1 y 6
34             puntos = (int) GRnd.unif(1, 6, ((clock%10)+1));
35             System.out.print(puntos);
36             if (i == 19) {
37                 System.out.println(".");
38             } else {
39                 System.out.print(",");
40             }
41         }
42
43         System.out.println(".. con java.util.Random:");
44         Random r = new Random();
45         // Realiza los experimentos con las herramientas Java de Knuth
46         for (i = 0; i < 20; i++) {
47             // genera un numero entre 1 y 6
48             puntos = r.nextInt(5) + 1;
49             System.out.print(puntos);
50             if (i == 19) {
51                 System.out.println(".");
52             } else {
53                 System.out.print(",");
54             }
55         }
56     }
57 }
58 }

```

---

**estacionario**

Un proceso estocástico se llama **estacionario** si la distribución de probabilidad conjunta de sus variables es la misma a lo largo del tiempo.

**Example 2.** Un proceso estocástico produce pares de resultados para el siguiente experimento: Se extrae una etiqueta de una bolsa A que contiene 12 etiquetas con el color rojo y 8 azules.

Si el resultado es rojo, una etiqueta se retira de una segunda bolsa B que tiene 6 etiquetas con el número 1, 30 con el número 2 y 24 con el número 3.

Si el resultado es azul, una etiqueta se retira de una tercera bolsa C con 28 etiquetas con el número 1, 40 con el número 2 y 12 con el número 4.

Así, una salida de este proceso puede ser:

$$(rojo, 1), (azul, 3), (azul, 2), (rojo, 1), \dots$$

En un cajero simple en el cual, por ejemplo, el tiempo medio entre llegadas cambia al pasar el tiempo, los valores de la longitud de la cola tienen una distribución de probabilidad variable. El proceso no es estacionario. El proceso del primer ejemplo 2 es estacionario. En un proceso estacionario, la distribución de probabilidad de cada variable también es constante. Pero el inverso puede no ser verdad: La distribución de cada variable puede ser constante y el proceso no estacionario.

En el proceso de lanzar 2 monedas separadas, hay dos variables aleatorias, una para cada una. Los resultados posibles pueden ser descritos por los valores 0 y 1. La distribución de probabilidad conjunta es:

$$f(0, 0) = 1/4, \quad f(0, 1) = 1/4, \quad f(1, 0) = 1/4, \quad f(1, 1) = 1/4. \quad (1.1)$$

La función de probabilidad de la primer moneda es

$$f_1(0) = 1/2, \quad f_1(1) = 1/2$$

y la de segunda moneda es

$$f_2(0) = 1/2, \quad f_2(1) = 1/2.$$

Suponga un proceso en el que las monedas, antes de ser lanzadas, son sol-dadas la una a la otra por un punto en el borde con los lados opuestos. Es decir, cuando una de las monedas muestre cara, la otra mostrará sello.

En ese caso, las funciones de probabilidad  $f_1$  y  $f_2$  son las mismas, pero la distribución conjunta será diferente. La nueva distribución será:

$$f(0, 0) = 0, \quad f(0, 1) = 1/2, \quad f(1, 0) = 1/2, \quad f(1, 1) = 0. \quad (1.2)$$

Considere ahora un proceso en el cual las monedas algunas veces están pegadas y otras veces no. Por ejemplo: pegadas, libres, pegadas, libres, libres, pegadas, libres, libres, libres, pegadas, libres, libres, libres...

En esta última versión del ejemplo, la distribución conjunta es variable y tiende asintóticamente a la de la primera versión. El proceso no es estacionario.

### 1.1.1. Estadísticos, estadígrafos y correlaciones

Los valores de una serie de tiempo con  $m$  elementos pueden ser resumidos con la media  $\mu$  y la desviación estándar,  $\sigma$  definidas así:

$$\mu = \frac{\sum_{j=1}^m x_j}{m}$$

y

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^m (y_j - a)^2}{m}}$$

Para dos series de valores que corresponden a dos variables aleatorias diferentes:

$$y_1, y_2, \dots, y_m \quad \text{con media} \quad a \quad (1.3)$$

$$x_1, x_2, \dots, x_m \quad \text{con media} \quad b \quad (1.4)$$

$$(1.5)$$

es, normalmente, muy importante establecer su **correlación**. La idea intuitiva en el concepto de correlación es que dos series de valores están correlacionadas si son aproximadamente proporcionales. Es decir, sus valores crecen y decrecen más o menos al mismo tiempo. Si se oponen, es decir, cuando una crece la otra decrece, se dice que están negativamente correlacionadas. Si no hay ninguna de esas dos tendencias, se dice que no están correlacionadas.

La medida de correlación es el **coeficiente de correlación** :

**coeficiente de correlación**

$$\rho = \frac{\sum_{j=1}^m (x_j - a)(y_j - b)}{\sqrt{(\sum_{j=1}^m (x_j - a))(\sum_{j=1}^m (y_j - b))}} \quad (1.6)$$

$$= \frac{m \sum_{j=1}^m x_j y_j - \sum_{j=1}^m x_j \sum_{j=1}^m y_j}{\sqrt{(\sum_{j=1}^m x_j^2 - (\sum_{j=1}^m x_j)^2)(\sum_{j=1}^m y_j^2 - (\sum_{j=1}^m y_j)^2)}} \quad (1.7)$$

la cual varía entre -1 (anti-correlación perfecta), pasando por 0 (sin correlación) y hasta +1 (correlación perfecta).

**Example 3.** Las dos series:

4, 5, 2, 2, 1, 1, 2, 0, 1, 3, 6, 6, 9, 8, 9, 7, 5, 4, 2, 3

con media: 4, y

8, 3, 6, 4, 3, 4, 4, 5, 4, 7, 9, 10, 13, 10, 11, 13, 10, 5, 6, 5

con media: 7 están correlacionadas positivamente.

Centrando los valores de cada una en torno a cada una, obtenemos:

0, 1, -2, -2, -3, -3, -2, -4, -3, -1, 2, 2, 5, 4, 5, 3, 2, 0, -2, -1

y

$$1, -4, -1, -3, -4, -3, -3, -2, -3, 0, 2, 3, 6, 3, 4, 3, -3, -2, -1, -2$$

Las series:

$$4, 5, 2, 2, 1, 1, 2, 0, 1, 3, 6, 6, 9, 8, 9, 7, 5, 4, 2, 3$$

con media: 4, y

$$6, 7, 7, 8, 10, 8, 9, 12, 9, 7, 4, 3, 1, 3, 1, 2, 4, 7, 8, 4$$

con media: 6, están negativamente correlacionadas.

Los valores centrados en la media son:

$$0, 1, -2, -2, -3, -3, -2, -4, -3, -1, 2, 2, 5, 4, 5, 3, 2, 0, -2, -1$$

$$0, 1, 1, 2, 4, 2, 3, 6, 3, 1, -2, -3, -5, -3, -5, -4, -2, 1, 2, -2$$

Las series:

$$4, 5, 2, 2, 1, 1, 2, 0, 1, 3, 6, 6, 9, 8, 9, 7, 5, 4, 2, 3$$

con media: 4, y

$$10, 7, 5, 10, 6, 5, 11, 9, 6, 3, 4, 6, 8, 9, 6, 5, 8, 5, 9, 8$$

con media: 7, tienen una correlación muy baja. Los valores centrados en torno a la media son:

$$0, 1, -2, -2, -3, -3, -2, -4, -3, -1, 2, 2, 5, 4, 5, 3, 2, 0, -2, -1$$

$$3, 0, -2, 3, -1, -2, 4, 2, -1, -4, -3, -1, 1, 2, -1, -2, 1, -2, 2, 1$$

Note que, en el caso de los valores centrados en la media, cuando los pares  $(x_i, y_i)$  con signo igual predominan, la correlación es positiva. Cuando predomina los pares con signos diferente, la correlación es negativa.

## autocorrelación

Otra característica importante de una serie es la **autocorrelación** de valores. La autocorrelación es la correlación de valores de la serie con valores de la misma serie desplazados, digamos,  $k$  lugares a la izquierda y luego de eliminar los primeros  $k$  valores en la serie original. A  $k$  se le llama el **orden de la autocorrelación**.

## orden de la autocorrelación

**Example 4.** En los casos anteriores tenemos los siguientes estadísticos:

Para el caso de dado: media  $m = 3.8$   $d = 1.6$

Para el caso de la cola  $m = 3.4$   $d = 1.743$

Hay una autocorrelación de primer orden entre las series

$$6, 3, 2, 3, 6, 4, 3, 5, 5, 1, 3, 6, 3, 5, 2, 6, 3, 5, 4.$$

$$3, 2, 3, 6, 4, 3, 5, 5, 1, 3, 6, 3, 5, 2, 6, 3, 5, 4, 1$$

Hay una autocorrelación de tercer orden entre las series:

$$6, 3, 2, 3, 6, 4, 3, 5, 5, 1, 3, 6, 3, 5, 2, 6, 3.$$

$$3, 6, 4, 3, 5, 5, 1, 3, 6, 3, 5, 2, 6, 3, 5, 4, 1.$$



La medida de autocorrelación es el coeficiente de autocorrelación. Para el orden  $k$ , se le define así:

$$\rho_k = \frac{m \sum_{j=1}^{m-k} y_j y_{j+k} - \sum_{j=1}^{m-k} y_j \sum_{j=1}^{m-k} y_{j+k}}{\sqrt{(\sum_{j=1}^{m-k} y_j^2 - (\sum_{j=1}^{m-k} y_j)^2)(\sum_{j=1}^{m-k} y_{j+k}^2 - (\sum_{j=1}^{m-k} y_{j+k})^2)}} \quad (1.8)$$

**Example 5.** En el ejemplo del dado obtenemos:

$$\rho_1 = -0.3217, \quad \rho_2 = -0.2774, \quad \rho_3 = -0.0321$$

En el ejemplo de las colas tenemos:

$$\rho_1 = 0.7066, \quad \rho_2 = 0.3890, \quad \rho_3 = -0.011$$

En general, los valores de las colas están correlacionados positivamente para valores pequeños de  $k$ , puesto que las colas fluctúan suavemente: a valores grandes le siguen valores grandes, a valores pequeños le siguen valores pequeños.

La autocorrelación de orden 0 es la misma varianza de la serie:  $\sigma^2$ .

Los resultados de la simulación son series que normalmente está correlacionadas (positiva o negativamente) entre ellas y que también suelen estar correlacionadas.

### 1.1.2. Covarianza y procesos estacionarios débiles

La estacionariedad fuerte, que se explicó en las secciones anteriores, es difícil de evaluar. Un proceso estocástico es débilmente estacionario si, para sus variables aleatorias, la media es constante y las autocorrelaciones dependen solamente del orden  $k$  (es decir, no dependen, por ejemplo, de instante en que comiencen las observaciones de la serie correspondiente). Esto significa que, en los procesos estacionarios débiles, **la media y las autocorrelaciones permanecen constantes en el tiempo**. En particular, la varianza permanece constante.

Si, además de lo anterior, la correlación entre las variables  $y_i$  y  $y_j$  depende exclusivamente de la separación  $j - i$  (lag) y no de los valores  $i$  y  $j$ , entonces el proceso es de **covarianza estacionaria**. En lo que resta, solamente consideramos proceso de covarianza estacionaria.

## 1.2. Sistemas terminantes

En algunos sistemas, el tiempo de un proceso depende de propiedades varias del sistema simulado. Se les llama, sistemas terminantes. En la simulación de sistemas terminantes, el tiempo de simulación es normalmente establecido en el periodo natural de duración del proceso. Este puede estar definido por un punto particular en el tiempo o por la ocurrencia de un evento determinado.

**Example 6.** En un banco, la duración de la operación (y la corrida del modelo correspondiente) viene dada por el tiempo de apertura y el de clausura del banco. O, para ser más precisos, el tiempo entre el arribo del primer cliente y la culminación del servicio al último cliente (que puede ocurrir antes o después del cierre del banco).

En la simulación de un juego entre 2 jugadores, la corrida termina cuando uno de ellos se retira o se queda sin dinero o agota su crédito.

En algunos casos (como en el del banco), el proceso, desde el principio al fin, puede ser replicado exactamente. Pero también es posible asumir que, en la simulación, las repeticiones son procesos independientes.

Algunos sistemas trabajan sin parar. Esos sistemas que no terminan pueden tener entradas o parámetros constantes, periódicos o estocásticos (o incluso, caóticos).

**Example 7.** En un puerto con mucho tráfico, la tasa de entrada de las naves cambia muy poco de tiempo en tiempo. En un semáforo, la llegada de los vehículos tiene algunas fluctuaciones a lo largo del día. Ambos sistemas trabajan sin parar.

En los sistemas económicos y ecológicos se suele considerar un ciclo de producción anual. En estos casos, aún cuando las interacciones puedan ser las mismas cada año (lo que significa que el mismo algoritmo puede ser usado en el modelo de cada año), las condiciones iniciales son diferentes (algunas veces, claro, son las condiciones finales del período anterior).

La simulación de estos últimos sistemas, por otro lado, debe comenzar y terminar en ciertos instantes. Así que surge el problema de qué cuanto tiempo debe correr la simulación para que produzca una representación útil de la conducta del sistema modelado. A continuación analizamos este problema en sistemas terminantes. Los sistemas no terminantes son analizados más adelante.

### 1.2.1. Valores medios e intervalos de confianza para una variable de salida

Las  $n$  replicaciones que se hagan de una simulación deberían hacerse con distintos números aleatorios. Es conveniente, para usarlas en las comparaciones, que las secciones independientes del modelo usen caudales diferentes de números aleatorios, pero no es esencial en la discusión sobre el cómo extraer resultados de las corridas de un modelo fijo solamente.

En la práctica, repeticiones con semillas distantes pueden ser hechas repitiendo la corrida sin reinicializar las semillas. Es decir, cada corrida usa como semilla, el valor final del número aleatorio del caudal correspondiente.

Otro método es inicializar expresamente las semillas con valores diferentes en cada repetición. Es prácticamente imposible (en las corridas sin reinicializar) que en una corrida las semillas iniciales sean las mismas que aquellas en otra repetición, por lo que la correlación es altamente improbable. En estas condiciones,

las distintas repeticiones pueden ser consideradas, con seguridad, procesos estocásticos independientes.

Consideremos alguna variable de interés en el sistema real. En una corrida, obtenemos un valor esta variable. En  $n$  repeticiones de la corrida, con distintas semillas, obtenemos los valores  $x_i, i = 1, 2, \dots, n$ . Estos  $x_i$  son, entonces, independientes y, puesto que son obtenidos del mismo proceso estocástico, tiene la misma distribución de probabilidades.

El valor medio de las  $n$  repeticiones es:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (1.9)$$

y puede ser considerado una buena aproximación, o un estimador no sesgado, de la media  $\mu$  de la población de **todas las corridas posibles**.

Por su parte, la desviación estandar calculada así:

$$d = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{(n-1)}} \quad (1.10)$$

es una estimador de la desviación,  $\sigma$ , de todas las corridas de tamaño  $n$ , suponiendo que las corridas son independientes y, por tanto, que las secuencias de las  $x_i$  no tienen autocorrelación.

Si se tomaran todas las muestras posibles de tamaño  $n$ , se puede mostrar (dado que las  $x_i$  son independientes y tienen la misma distribución) que los valores  $\frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{\frac{d^2}{n}}}$  tienen una distribución  $t - Student$  con  $n - 1$  grados de libertad, donde  $\mu$  es la media de la población de todas las posibles muestras de tamaño  $n$ .

Este resultado matemático permite evaluar hipótesis acerca de las medias en una aplicación de lo que se conoce como docimasia de hipótesis.

Para una muestra de  $n$  repeticiones (o repeticiones como también se denominan), el intervalo con un nivel de confianza de  $1 - \alpha$  para  $\bar{x}$  viene dado por:

$$\bar{x} = t_{n-1}(1 - \alpha/2) \sqrt{\frac{d^2}{n}} \quad (1.11)$$

donde  $t_{n-1}(1 - \alpha/2)$  es el valor para el cual la probabilidad computada con la distribución  $t - Student$  con  $n - 1$  grados de libertad, es de  $1 - \alpha/2$

El **significado de este intervalo de confianza** se explica así: Si la población **intervalo de confianza** de todos los intervalos estimados de esta manera (a partir de todas las muestras posibles de tamaño  $n$ ) es la considerada, la probabilidad de que ellos contengan a  $\mu$  es mayor que  $1 - \alpha$ . Es decir, una fracción de  $1 - \alpha$  o más de esos intervalos, contienen a la media real.

El tamaño de este intervalo de confianza nos da una estimación del error estadístico en esa  $\bar{x}$  obtenida de las  $n$  repeticiones con un nivel de confianza predefinido en  $\alpha$ .

Note que el tamaño del intervalo crece en proporción a  $d$  e inversamente proporcional a  $\sqrt{n}$ . Si se multiplica el número de repeticiones por 4, el tamaño del intervalo decrece apenas en la mitad (un poco más, puesto que  $t_{n-1}$  decrece con  $n$ ). Mientras más confianza se procure, los intervalos crecerán, puesto que  $t_{n-1}(1 - \alpha/2)$  aumenta con aumentos en  $1 - \alpha/2$ .

**Example 8.** Un modelo de cola simple, con tiempo entre llegadas de 4.0 y tiempo de servicio de 3.8, ambos con distribuciones exponenciales, fue simulado por un tiempo total de 10000, usando diferentes números aleatorios. Los resultados en 10 repeticiones del tiempo medio de permanencia en la cola fueron:

171.892, 77.520, 39.394, 51.034, 51.500, 43.597, 81.950, 23.987, 142.382, 59.092

La media es  $\bar{x} = 74.2352$  y la desviación  $d = 47.3919$ .

De la tabla de los valores de  $t(z)$  para  $\alpha = 0.05$ ,  $1 - \alpha = 0.95$  y con  $10 - 1 = 9$  grados de libertad, obtenemos:

$$t_{n-1}(1 - \alpha/2) = 1.833;$$

y:

$$\bar{x} \pm t_{n-1}(1 - \alpha/2)\sqrt{\frac{d^2}{n}} = 74.2352 \pm 27.4705$$

Esto significa que  $\mu$  está en el intervalo (46.7647, 101.7057) con probabilidad 0.95.

Noten que el error es más bien alto.

### 1.2.2. Número de corridas para obtener un error dado con un cierto nivel de confianza

Un método aproximado para estimar ese número es comenzar a partir de un intervalo de confianza con un  $n$  tentativo (normalmente pequeño) y usar:

$$n_\alpha(e) = \text{MIN}(i : t_{i-1}(1 - \alpha/2) \leq e) \quad (1.12)$$

comenzando con  $i = n + 1$  y suponiendo que  $d$  no cambia con  $i$ . El valor mínimo  $i$  para el cual se cumple la desigualdad se alcanza aumentando  $i$  uno por uno y chequeando, es decir, por ensayo y error.

**Example 9.** Para obtener un intervalo de  $2 \times 10$  (en lugar del intervalo de  $2 \times 27.4705$  que mostramos antes), con este método el tamaño  $i$  de la muestra debe ser tal que:

$$t_{n-1}(1 - 0.05)\sqrt{\frac{47.3919^2}{i}} < 10$$

Por ensayo y error podemos ver que  $i$  debe ser menor que 75, así que el valor de  $t_{75}(1 - 0.05/2) = 1.665$  puede ser usado sin riesgo. Entonces:

$$i \geq \frac{1.665^2 * 47.3919^2}{10^2} = 62.26$$

de tal forma que 63 replicaciones serán suficientes.

El método asume que  $d$  no cambia con  $n$  lo cual es una suposición cuestionable. Un poco más exacto es el siguiente experimento: en cada paso, comenzando con la muestra original, se obtiene una nueva muestra y se estima un nuevo  $d$ . Con este  $d$  se chequea la ecuación anterior, repitiendo hasta que se cumpla con la desigualdad. Note que, ahora,  $i$  depende de los resultados de estas repeticiones adicionales. Con distintos números aleatorios, se obtiene un  $i$  diferente.

### 1.3. Experimentos que no terminan. Estado estable

Algunos sistemas no terminantes trabajan en una suerte de estado estable. La simulación de esos sistemas suele comenzar de condiciones que no corresponden a ese estado estable, porque, en general, las condiciones de estabilidad son desconocidas. Si el modelo contiene las retroalimentaciones apropiadas, el estado estable se alcanzará luego de transcurrir un tiempo de conducta transitoria, valga la redundancia.

La conducta estable es la que, normalmente, interesa al simulista. Así que el primer problema a enfrentar con este tipo de sistemas es cómo precisar cuando termina el periodo transitorio y comienza el estable, pues sólo las estadísticas para el estado estable serían las que se considerarían.

**Example 10.** En una cola, la gente llega con tiempos tomados de una distribución exponencial con media de 4 minutos. Son servidos con tiempos tomados de una distribución gamma con media de 7 minutos y desviación de 2 minutos. Si la cola es mayor de 15, el 90 % de la gente no puede entrar y debe irse del sistema.

Para una corrida de 700 minutos obtenemos estos estadísticos:

Longitud de la cola, media: 14.940 desviación: 3.392.

Tiempo de espera en la cola, media: 80.632 desviación: 44.520

La enorme desviación estándar es causada por un régimen transitorio desde el estado inicial vacío y hasta un régimen estable. A partir del gráfico de la series de tiempo de la cola, se estima que ese transitorio es de alrededor de 120 minutos.

Si se toman las estadísticas desde el tiempo 120 y hasta el 700, se obtienen los siguiente valores:

Longitud de la cola, media: 15.281 desviación: 1.166

Tiempo de espera en la cola, media: 105.289 desviación: 11.687

Estos valores tienen desviaciones menores y representan con más precisión el estado estable del sistema. Corridas más largas no parecen este resultado. Una corrida desde 120 hasta 10000 produce estos valores:

Longitud de la cola, media: 15.320 desviación: 0.978

Tiempo de espera en la cola, media: 108.537. desviación: 10.470

Por otro lado, en las corridas largas sin la eliminación del transitorio, los efectos de este perduran por mucho tiempo. Por ejemplo, en una corrida desde 0 hasta 2000, los valores fueron:

Longitud de la cola, media: 14.281 desviación: 2.189

Tiempo de espera en la cola, media: 95.217. desviación: 30.338

que son peores que los números de la corrida corta entre 120 y 700.

La primera idea es comenzar la simulación con las condiciones del estado estable. De esta forma, en un sistema con colas y recursos, en lugar de comenzar con un sistema vacío, comenzar con la longitud de las colas y la ocupación de los recursos que correspondería con el estado estable. Estos valores son, desde luego, desconocidos en general (ellos son mayormente el objetivo al construir un modelo) así que, probablemente, tendremos que comenzar adivinando.

### 1.3.1. Métodos para encontrar cuando comienza el estado estable

No siempre es claro en que momento comienza el estado estable. El acercamiento al estado estable puede ser gradual y, en procesos estocásticos, puede estar camuflado por fuerte fluctuaciones. La inspección del gráfico de salidas es, por supuesto, el método más fácil y funciona bien en muchos casos. Para los otros casos, hay muchos métodos propuestos.

#### Valores por arriba y por debajo de la media

Considere la secuencia de valores  $x_1, x_2, \dots, x_n$  de una corrida. Se dice que hay un estado estable desde el  $k$ -ésimo resultado en adelante si la media  $\bar{x}$  de  $x_1, x_2, \dots, x_n$  divide los términos de la secuencia en dos grupos de, más o menos, el mismo tamaño.

**Example 11.** Los siguientes valores son producidos por un modelo de crecimiento estocástico:

0.701 1.153 1.614 1.987 2.257 2.495 2.687 2.813 2.913 2.95 3.910 3.202 3.225  
3.345 3.331 3.344 3.415 3.398 3.415 3.452 3.441 3.434 3.389 3.539 3.448 3.517  
3.543 3.44.3 3.568 3.461 3.452 3.56.3 3.509 3.461 3.508 3.420 3.427 3.461 3.444  
3.513

A partir de ellos se obtienen los siguientes estadísticos:

$\bar{x}_0 = 3.170$  puntos por encima: 10 puntos por abajo: 29

$\bar{x}_{10} = 3.425$  puntos por debajo: 11 puntos por encima: 19

$\bar{x}_{15} = 3.463$  puntos por debajo: 8 puntos por encima: 17

$\bar{x}_{20} = 3.477$  puntos por debajo: 12 puntos por encima: 8

$\overline{x_{24}} = 3.493$  puntos por debajo: 7 puntos por encima: 9

Luego de los primeros 24 valores, la diferencia entre los números de puntos por arriba y por abajo parece obedecer a fluctuaciones estadísticas. Así que el 3.448 en adelante, los resultados parecen estabilizarse con media de 3.493.

La media teórica exacta es de 3.5

Aunque este método es muy simple y se le pueden identificar contra-ejemplos, funciona en muchos casos y es un buen complemento del método de mirar al gráfico.

### Método del promedio móvil

Un promedio móvil es una serie de promedios de  $k$  valores sucesivos comenzando por el primero de la serie estocástica, luego por el segundo, luego por el tercero, y así sucesivamente. Es decir, se computan las siguientes medias:

$$\frac{(x_1 + x_2 \dots x_k)}{k}, \quad \frac{(x_2 + x_3 \dots x_{k+1})}{k}, \quad \frac{(x_3 + x_4 \dots x_{k+2})}{k}, \dots, \frac{(x_{n-k} + x_{n-k+1} \dots x_n)}{k}.$$

Cuando estos valores no cambian significativamente, se supone que se alcanzó el estado estable.

**Example 12.** En el ejemplo anterior, luego de tomar promedios de tamaño 5, es decir, las medias sucesivas de:

0.7011.1531.6141.9872.257;

...

2.4952.6872.8132.9132.957;

...

3.4203.4273.4613.4443.513

se obtienen los siguientes promedios móviles:

1.542 1.901 2.208 2.448 2.633 2.773 2.892 2.995 3.077 3.164 3.239 3.289 3.332  
3.367 3.381 3.405 3.424 3.428 3.426 3.451 3.450 3.465 3.487 3.498 3.504 3.507  
3.494 3.498 3.511 3.489 3.499 3.492 3.465 3.456 3.452 3.453

Se puede notar que después del valor 3.451, ocurren valores mayores y menores de estos promedios móviles. Ese valor es la media del grupo  $x_{20}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}$ . Así que luego de  $x_{24}$ , los valores caen en una serie estable. Queda el problema de estimar el paso  $k$ . Mientras más fluctuante es la serie, mayor debe ser el tamaño de  $k$  para suavizar esas fluctuaciones.

### 1.3.2. Estimación de la media para el estado estable

Una vez que se define el estado estable, el problema es estimar el valor medio de la serie de la cual se ha excluido el estado transitorio. La manera de estimar

la media depende del tipo de valores de tiempo considerados. Si es un conjunto discreto  $t_1, t_2, \dots, t_n$  como en los modelos de tiempo discreto, el valor medio se calcula con:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n} \quad (1.13)$$

Si el tiempo es una variable continua, entonces:

$$\bar{x} = \frac{1}{t_{sim} - t_0} \int_{t_0}^{t_{sim}} x dt \quad (1.14)$$

$t_0$  es el tiempo en el cual comienza el estado estable y  $t_{sim}$  es el tiempo de la simulación (o el tiempo máximo para el cuál se considerarán los valores de  $x$ ).

**Example 13.** En una cola se observan los siguientes cambios luego del transitorio.

Tiempos 23 27 28 32 45 47 56 61 66 70 77 79 81  
Longitudes 9 10 11 12 11 10 11 10 9 8 7 8 9

La cola debe tener valores en todos los instantes de tiempo (por ejemplo, en 25 es 9. Así que aplicamos la fórmula integral para encontrar la media exacta:

$$\bar{x} = ((27-23)*9 + (28-27)*10 + (32-28)*11 + \dots + (81-79)*8) / (81-23) = 10.0862$$

Si la única data son observaciones de la cola cada 5 segundos, comenzando en 23, tenemos:

Longitudes 9 10 12 12 12 10 10 11 10 9 8 7 con una media de  $(9 + 10 + 12 + 12 + 12 + 10 + 10 + 11 + 10 + 9 + 8 + 7) / 12 = 10.0000$

que es un valor aproximado a la verdadera media.

La varianza (cuadrado de la desviación estándar) de un conjunto de datos se estima con:

$$d^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n} \quad (1.15)$$

en el caso discreto. En el continuo es:

$$d^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n} \quad (1.16)$$

En los textos de Estadística se advierte que la mejor estimación de la varianza  $\sigma^2$  de la población no es la recién calculada varianza de la muestra, sino:

$$d^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n-1} \quad (1.17)$$



Esta estimación no es sesgada si la serie de datos no tiene autocorrelación. Es decir, cada ninguno de los valores de la serie depende de sus predecesores. Pero esto no es normalmente cierto en los resultados de la simulación. En una cola, como dijimos antes, a un gran valor le sigue uno grande también.

**Example 14.** Tenemos data de un modelo de un cola, tomada en cada unidad de tiempo. El modelo es una cola simple, con tiempos exponenciales para las llegadas (de media 2.0) y los servicios (media 1.9), tal que la longitud promedio de la cola es  $1.9/(2 - 1.9) = 19$ . Una sucesión 200 resultados tomados cada segundo en el estado estable es esta:

7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 9, 8, 8, 9, 10, 9, 6, 6, 6, 7, 6, 9, 8, 8, 8, 8, 8, 6, 3, 4, 5, 6, 7, 7, 6, 5, 3, 3, 0, 0, 0, 0, 1, 2, 3, 6, 6, 8, 9, 9, 10, 10, 10, 11, 12, 14, 13, 14, 15, 16, 15, 15, 14, 15, 16, 17, 16, 17, 17, 18, 18, 19, 18, 17, 18, 17, 18, 18, 19, 20, 21, 21, 22, 22, 23, 22, 21, 22, 24, 24, 26, 25, 25, 27, 29, 25, 22, 20, 20, 19, 17, 15, 14, 13, 13, 12, 12, 13, 13, 11, 10, 10, 9, 8, 8, 8, 9, 8, 7, 6, 6, 6, 6, 5, 6, 6, 7, 7, 7, 6, 5, 5, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 0, 0, 0, 2, 3, 2, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 3, 3, 4, 5, 5, 5, 4, 1, 5, 5, 7, 6, 6, 6, 7, 7, 1, 0, 1, 6, 11, 12, 32, 11, 12, 14, 14, 16, 18, 19, 21, 19, 17, 17, 15, 13, 11, 9, 7, 9, 9, 10, 10, 7, 7, 7, 5, 6, 6, 7, 8, 8, 8, 9, 10, 9, 6, 6, 6, 7, 6

Su media es 10.15 que, como sabemos, es la mejor estimación no sesgada de la media de la población. La estimación de la desviación en la población, calculada con la fórmula habitual, es  $d = 6.466$ . Así que una estimación de la desviación de la media es  $2.58 * 6.466 / \sqrt{200} = 1.179615331$

Al comparar con el valor teórico de la media (19), podemos establecer que esta estimación de la desviación no puede ser correcta. Debe ser mayor.

Se puede mostrar que un estimador no sesgado de la desviación  $d_n$ s es:

$$d_{ns}^2 = \frac{d^2}{n} \left( 1 + 2 \sum_{k=1}^m \left( 1 - \frac{k}{m+1} \right) \rho_k \right) \quad (1.18)$$

donde  $\rho_k$  es la autocorrelación de orden  $k$  de la serie. La suma podría ser extendida indefinida. Obviamente, el tamaño de la muestra es finito y, así,  $m$  está limitado por ese valor. Normalmente, los coeficientes de correlación disminuyen en la medida en que  $k$  crece y para grandes valores de  $k$  los signos se alternan y los términos se pueden cancelar entre sí. Como regla heurística,  $m$  puede fijarse en un 10 por ciento del tamaño de la muestra.

## 1.4. Comparación de modelos y validación

Normalmente se construyen modelos para comparar los resultados de las diferentes situaciones y políticas en el sistema simulado. Esto implica que se realizarán corridas con diferentes parámetros y estructuras.

**Example 15.** En un modelo de la producción, inventario y despacho, es interesante evaluar la influencia de la política de inventario, en particular la consideración de la demanda acumulada, sobre la ganancia y sobre el retardo promedio

en atender a los clientes. Para ellos habría que cambiar los valores de ciertos parámetros que sirven de coeficientes a las fórmulas que relacionan el inventario deseado con la ganancia y al tiempo de retardo en atender.

también

**Example 16.** En un banco hay dos cajeros. Se están estudiando dos formas de acceso para los clientes:

Los clientes que llegan forman una sola cola. El primero de la cola va al primer cajero que se desocupa.

Se forman dos colas, una frente a cada cajero. El cliente que llega va a la cola más corta.

Se construye un modelo para decidir cual de las dos estructuras de cola produce el menor retardo en el servicio. El modelo deber ser corrido con ambas estructuras. En cada caso, se computa el tiempo de retardo promedio que sirve para estimar el tiempo de retardo total. Esos valores, de cada modelo, se comparan.

**factores**  
**niveles**

Las variables o modalidades que se cambian son usualmente llamadas **factores** y los diferentes valores que adoptan son los **niveles**. Los resultados sobre los cuáles se fija la atención del simulista durante los experimentos son las **respuestas**. Así, en el primer ejemplo, el coeficiente es el factor y las ganancia y el retardo son las respuestas. En el segundo ejemplo, la disciplina de la cola es el factor y el retardo total de los clientes es la respuesta.

Si el modelo es determinístico, como en el primer ejemplo, la comparación de valores de las respuestas para las diversas corridas es directa. En los modelos probabilísticos, como en el segundo ejemplo, se realizan muchos experimentos para cada nivel o valor de cada factor y se debe realizar una comparación de entre las estadísticas o distribuciones de los dos o más conjuntos de valores respuesta.

En lo que sigue, consideramos el caso de modelos probabilísticos en los que un solo factor es considerado.

### 1.4.1. Comparación de dos medias

Se conoce como Inferencia Estadística a un conjunto de métodos para comparar dos medias (o cualquier par de estadísticos) de sendas muestras tomadas de una gran población de individuos y decidir (con un cierto nivel de confianza) si las muestras pertenecen o nó a la misma población. Esos métodos se usan para comparar el resultado de dos experimentos.

En los experimentos de simulación, las dos muestras se obtienen repitiendo la simulación con dos valores diferentes del factor. Las dos medias son los valores promedios de los resultados (respuestas) de los dos conjuntos. Si el test estadístico indica que no hay diferencia significativa entre las medias (con el nivel de confianza preestablecido), la conclusión es que el cambio en el factor no afecta la respuesta.

Note que la población corresponde, en la simulación, a todos los experimentos que se pueden hacer usando todos los posibles conjuntos de números aleatorios. Esta población es, desde luego, imposible de representar explícitamente. Sólo podemos trabajar con muestras tomadas de esa población.

Digamos que las respuestas obtenidas de la primera muestra son:  $x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n_1}$  y los de la segunda son  $x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n_2}$  y decimos que 1)  $n_1, n_2$  son los tamaños de las muestras, 2)  $\bar{x}_1$  y  $\bar{x}_2$ , las estimaciones de cada una de las medias y 3)  $d_1$  y  $d_2$  las estimaciones no sesgadas de cada de las desviaciones estandar.

Se puede mostrar que los valores de  $z$ , definida más adelante, cuando se toman muestras del mismo tamaño de una población con distribución normal, tienen una distribución  $t - Student$  con  $n - 1$  donde  $n$  es el mínimo entre  $n_1$  y  $n_2$ .

En lo que sigue, se asume que los valores de los variables de la población del cual tomamos las muestras tienen una distribución normal (más adelante se explican los test para verificar esto).

Las fórmulas usadas para evaluar las diferencias entre medias son las siguientes:

#### Muestras pequeñas, varianzas iguales y mismo tamaño muestral

$$z = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{d_1^2 + d_2^2}{n-1}}} \quad (1.19)$$

Este estadístico tiene una distribución  $t - Student$  con  $n - 1$  grados de libertad.

**Example 17.** Considere el experimento de los dos tipos de colas mencionados en el ejemplo anterior. Los resultados de muestrear 10 veces (10 experimentos) dan los siguientes resultados de la suma del retardo en el sistema para todos los clientes en el banco durante 1000 unidades de tiempo.

Cola única: estimación de la media: 14217.90 estimación de la desviación: 6436.36

Colas múltiples: estimación de la media: 11432.55 estimación de la desviación: 6747.39

$$z = \frac{14217.90 - 11432.55}{\sqrt{\frac{6436.36^2 + 6747.39^2}{10-1}}}, \quad z = \frac{2785.35}{3108.324} = 0.8961$$

Si adoptamos un nivel de confianza de 0.95, necesitamos ver cuáles son los valores de  $\pm e$  de la variable que tiene una distribución  $t - Student$  con 9 grados de libertad, tales que el valor de la variable caiga en el intervalo  $(-e, +e)$  con probabilidad 0.95 (o que caiga fuera con probabilidad 0.05).

Como la función  $t$  es simétrica, esto significa que estamos hablando de la probabilidad de los valores que son mayores a 0.025 y menores que -0.025. Las

tablas de percentiles de la  $t - Student$  dicen que los valores  $\pm e$  que incluyen 0.95 del área son  $\pm 2.262$

**Si ambas muestras pertenecieran a la misma población**, la probabilidad de obtener un valor  $z$  mayor que 2.262 (o menor que -2.262) sería menor que 0.05 y, entonces, sería probable (salvo en 5 % de los casos) que las muestras pertenecieran a poblaciones diferentes. Pero nuestro valor, 0.8961, está dentro del intervalo. Así que podemos decir (con un 95 % de confianza) que las muestras no son diferentes o, en términos de los experimentos, que los modelos no producen valores de poblaciones diferentes.

De haber obtenido un valor, por ejemplo, de 3.2 (que es mayor de 2.262), la probabilidad de que las dos muestras sean de la misma población sería menor que 0.05.

### Contingente al tamaño muestral

En un gran número de experimentos, el estadístico calculado se evalúa con una distribución  $t - Student$ . Si el tamaño muestral es grande, se usa la distribución normal. Ambos métodos asumen que la distribución de la población (la infinidad de valores de la variable de salida que podrían ser obtenidos con todas las repeticiones posibles) es la normal. Para validar esto, se puede usar los tests de la Chi-cuadrado,  $\chi^2$ , o de Kolmogorov-Smirnov, KS.

En esos casos, estas son las formulaciones empleadas:

**Misma** varianza y grandes muestras Si el número de experimentos es tal que  $n_1 + n_2 > 30$  y  $\sigma_1 = \sigma_2$ , calcule:

$$z = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{d_1^2 + d_2^2}{n-1}}} \quad (1.20)$$

y compare  $z$  con la distribución normal.

**Misma** varianza y muestras pequeñas Si el número de experimentos es tal que  $n_1 + n_2 \leq 30$  y  $\sigma_1 = \sigma_2$ , calcule:

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{n_1 d_1^2 + n_2 d_2^2}{n_1 + n_2 - 2}} \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \quad (1.21)$$

y compare  $t$  con la distribución  $t - Student$  con  $n_1 + n_2 - 2$  grados de libertad.

**Varianzas** distintas y grandes muestras Si el número de experimentos es tal que  $n_1 + n_2 > 30$  y  $\sigma_1 \neq \sigma_2$ , calcule:

$$z = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{d_2^2}{n_1 - 1} + \frac{d_1^2}{n_2 - 1}}} \quad (1.22)$$

y compare  $z$  con la distribución normal.

**Varianzas** distintas y muestras pequeñas Si el número de experimentos es tal que  $n_1 + n_2 \leq 30$  y  $\sigma_1 \neq \sigma_2$ , se consideran dos casos:

- Muestras de mismo tamaño  $n_1 = n_2$  calcule

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{n(d_1 + d_2)^2}{2(n-1)}}} \quad (1.23)$$

y compare  $t$  con la distribución  $t - Student$  con  $n - 1$  grados de libertad.

- Muestras de tamaño diferente  $n_1 \neq n_2$  calcule:

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{d_2^2}{n_1 - 1} + \frac{d_1^2}{n_2 - 1}}} \quad (1.24)$$

y compare el valor especial  $t_w$  con la distribución  $t - Student$  con  $w$  grados de libertad.  $t_w$  se calcula a partir de  $t_1 = t(\alpha/2, n_1 - 1)$  y  $t_2 = t(\alpha/2, n_2 - 1)$  por medio de:

$$t_w = \frac{\frac{t_1 d_1^2}{n_1} + \frac{t_2 d_2^2}{n_2}}{\frac{d_1^2}{n_1} + \frac{d_2^2}{n_2}} \quad (1.25)$$

- La estimación de los grados de libertad  $w$  se obtendría, de ser necesario, a través de la fórmula de Welch-Satterthwaite que se escribe a continuación. Considere, sin embargo, que la distribución de  $t_w$  depende, en forma aún por definir, de las dos varianzas (ver problema de Behrens-Fisher):

$$w = \frac{\left(\frac{d_1^2}{n_1} + \frac{d_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\frac{d_1^2}{n_1}}{\frac{n_1}{n_1 - 1}} + \frac{\frac{d_2^2}{n_2}}{\frac{n_2}{n_2 - 1}}} \quad (1.26)$$

**Example 18.** Un modelo de un puerto de carga de tanqueros de petróleo es simulado 10 veces, con un tiempo fijo de 365 para cada simulación. Las multas que el puerto debe pagar por demoras son:

335, 432, 175, 330, 810, 117, 100, 583, 399, 713.

Estos valores deben ser comparados con 5 otros valores tomados del sistema real:

121, 173, 212, 158, 233.

Decida si la hipótesis de varianzas diferentes debe ser rechazada con un nivel de significancia de 0.05.

Los valores medios son respectivamente 399.4 y 199.4 179.4

Las desviaciones son  $d_m^2 = 242.766$  para el modelo y  $d_r^2 = 81.49444.2871$

Asumiendo varianzas distintas, obtenemos de las tablas de las  $t - Student$ :

$$t_1 = t(0.025, 9) = 2.228; \quad t_2 = t(0.025, 4) = 2.776$$

$$t_w = \frac{(2.262 * 242.766/9 + 2.776 * 44.287/4)}{242.766/9 + 44.287/4} = 2.412$$

El valor obtenido a partir de la data es:

$$t = \frac{399.4 - 179.4}{\sqrt{\frac{242.766^2}{9} + \frac{44.287^2}{4}}}, \quad t = 2.622 > 2.412$$

Es decir, los valores no pertenecen a la misma población. Por lo tanto, el modelo difiere de los valores medidos en forma significativa (95 %). El modelo debería ser revisado.

#### 1.4.2. Intervalos de confianza

Las fórmulas anteriores pueden ser aprovechadas para el cálculo de los intervalos de confianza para la diferencia entre las medias. Esto es útil para apreciar el valor de la diferencia. En caso general, con distintos experimentos y varianzas, se tiene:

$$\bar{x}_2 - \bar{x}_1 + -t(f, 1 - \frac{\alpha}{2}) \sqrt{\frac{d_1^2}{n_1} + \frac{d_2^2}{n_2}}$$

donde el grado de libertad,  $f$ , puede ser estimado con:

$$f = \frac{\left(\frac{d_1^2}{n_1} + \frac{d_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{(\frac{d_1^2}{n_1})^2}{n_1-1} + \frac{(\frac{d_2^2}{n_2})^2}{n_2-1}} \quad (1.27)$$

Como este valor puede no ser entero, se puede hacer interpolación en la tabla. Este intervalo, llamado el intervalo de confianza de Welch, se usa frecuentemente para evaluar la diferencia entre los resultados del modelo y medidas tomadas en el sistema real.

**Example 19.** Encuentre el intervalo de confianza para la diferencia de las dos medias del ejemplo anterior.

Los grados de libertad son:

$$f = \frac{(242.766^2/10 + 44.287^2/5)^2}{\frac{(242.766^2/10)^2}{9} + \frac{(44.287^2/5)^2}{4}}$$

$$f = 10.13$$

El valor final se obtiene por interpolación. Para 10 es 2.228, para 11 es 2.201. Para 10.13 es 2.225.

El intervalo es [43.6, 396.4]. El 95 % de estos intervalos incluye la verdadera diferencia de las medias.

### 1.4.3. Test de igualdad de varianzas

La igualdad se evalúa con el test de  $F$ . Como se muestra en textos de Estadística, la razón de las varianzas de dos muestras de tamaño  $n_1 + 1$  y  $n_2 + 1$ , tomadas de la misma población con distribución normal, tienen una distribución  $F$  dada por:

$$f(x, n_1, n_2) = \frac{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}}}{B\left(\frac{n_1}{2}, \frac{n_2}{2}\right)} x^{\frac{n_1}{2}-1} \left(1 + \frac{n_1}{n_2}x\right)^{-\frac{n_1+n_2}{2}} \quad (1.28)$$

donde  $x > 0$  y  $n_1$  y  $n_2$  son llamados grados de libertad de la distribución.

**Example 20.** Trabajando sobre el mismo ejemplo anterior, tenemos:

$$F = \frac{242.766^2}{81.494^2} = 8.874$$

Si la data se obtuviera de la misma población (i.e, si los resultados del modelo fueran los mismos que los del sistema real) entonces, de acuerdo a la tabla de  $F$  con grados de libertad 9 y 4, el valor de  $F$  sería 6.00 o más con una probabilidad de 0.05. Puesto que el valor que obtuvimos es 8.874 y es mayor que 6.00, la hipótesis de la misma desviación debe ser rechazada.

### 1.4.4. Test de normalidad

Los test que han sido discutidos sólo pueden ser aplicados si en las poblaciones originales, los valores considerados tienen una distribución normal. Es necesario evaluar esta condición, antes de aplicar los test discutidos.

Dados los valores  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  de una muestra aleatoria, los siguientes tests indican si provienen esos valores de una población con una distribución dada  $f(x)$ .

#### Test de la $\chi^2$

Se construye una tabla de los valores. Sean  $f_1, f_2, f_3, \dots, f_k$  con que aparecen los valores  $v_1, v_2, v_3, \dots, v_k$  en esos  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ . El valor

$$u = \sum_{i=1}^k \frac{(f_i - g(v_i))^2}{g(v_i)} \quad (1.29)$$

donde  $g(v_i)$  es el valor de la supuesta función de probabilidad teórica, sobre el valor  $v_i$ .

En nuestro caso, esta es la función de probabilidad normal, con la media y la desviación de acuerdo a los datos. Si los datos tiene una distribución normal, estos valores de  $u$ , tienen una distribución  $\chi^2$  con  $k - 1$  grados de libertad.

**Test de Kolmogorov-Smirnov**

El test de la  $\chi^2$  requiere que la distribución teórica se presente en forma discreta. En el caso de la distribución normal, es más natural usar el test de Kolmogorov-Smirnov, KS. En el Test KS, se usa la función de distribución acumulada, en lugar de la función de probabilidades.

Sea  $O(x)$  es la distribución de los datos observados y  $F(x)$  la función de distribución teórica (asumiendo la misma distribución y desviación que en los datos observados). Sobre los datos observados  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  se estima el siguiente valor:

$$D = \text{MAX}(\text{ABS}(F(x_i) - O(x_i))) \quad (1.30)$$

Si este valor es mayor que los valores en una tabla del test KS, la hipótesis de normalidad es rechazada.

La utilidad de estos dos tests adquiere todavía más sentido en el contexto de la docima de hipótesis que apenas se ha sugerido en este capítulo.

Nota de los traductores: La intención de este capítulo es motivar, con rigor matemático, el tratamiento apropiado de los modelos estocástico y el análisis de sus salidas. Confiamos en seguir elaborando estas herramientas, integrándolas a los servicios que presta Galatea, quizás con el apoyo de otros desarrollos estadísticos en Java como el Statistical Resource Centre, SRC, de la Universidad de Calgary <sup>2</sup> o en otras plataformas, como el conocido sistema estadístico R<sup>3</sup>.

---

<sup>2</sup><http://people.ucalgary.ca/~nosaj/src/>

<sup>3</sup><http://www.r-project.org/> <http://cran.r-project.org/doc/manuals/R-intro.pdf>