SÉRIE DE TAYLOR

(EM TORNO DE UM PONTO)

IDEIA: APROXIMAR FUNÇÃO POR UMA SÉRIE DE POTÊNCIAS (POLINÔMIO) (VAMOS USAR $a=0$)

DERIVADA

TEMOS: $$\int_0^x f'(x')\,dx' = f(x) - f(0)$$

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(x')\,dx' \quad (A)$$

APROXIMAÇÃO 1: $f'(x') = f'(0)$ ← DERIVADA CONSTANTE

$$f(x) = f(0) + f'(0)\,x$$

NOTE QUE PARA UM $g(x)$,

$$g(x) = g(0) + g'(0)\,x$$

SE $g(x) = f'(x)$,

$$f'(x) = f'(0) + f''(0)\,x$$

APROXIMAÇÃO 2:

$$f(x) = f(0) + \int_0^x \left[f'(0) + f''(0)\,x'\right]dx'$$

$$f(x) = f(0) + f'(0)\,x + f''(0)\cdot x^2/2$$

PARA CONTINUAR: $f \to g \to f'$:

$$f'(x) = f'(0) + f''(0)\,x + f'''(0)\cdot x^2/2$$ → USA EM (A)

2) INTEGRO PARA N_1 (VAMOS USAR REGRA DO TRAPÉZIO NA EXPLICAÇÃO), ENCONTRO I_1

3) $N_2 = 2N_1$

$$I = h\left[\frac{f(a)}{2} + \frac{f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{N-1} f(a+hk)\right]$$

4) ENCONTRO I_2

5) $\varepsilon_2 = \dfrac{I_2 - I_1}{3}$. $abs(\varepsilon_2) < \varepsilon$?

SIM: $I = I_2$, ERRO $= \varepsilon_2$

NÃO: $N_3 = 2N_2$ ← ADAPTATIVO: MÉTODO VARIA SEUS PARÂMETROS PARA CHEGAR AO RESULTADO

I_3

$\varepsilon_3 = \dfrac{I_3 - I_2}{3}$, $abs(\varepsilon_3) < \varepsilon$?

⋮

A PRIORI, ESTE MÉTODO PARECE POUCO PRÁTICO, PORQUE O TRABALHO PARA CALCULAR I_1, I_2, ... FOI DESPERDIÇADO. MAS PODEMOS ALTERAR O MÉTODO PARA EVITAR ISTO!

- MOSTRA FIGURA 5.3

- QUANDO DOBRO O NÚMERO DE PONTOS, O CONJUNTO ANTIGO DE PONTOS REAPARECE NO NOVO CONJUNTO

- O PRIMEIRO CONJUNTO DE PONTOS ESTÁ "ANINHADO" NO SEGUNDO. VAMOS ANALISAR A REGRA DO TRAPÉZIO PARA ESTE SEGUNDO CONJUNTO: (11)

* CONJUNTO ANTERIOR: $i-1$, $h_{i-1} = 2h_i$, $N_{i-1} = N_i/2$
* " ATUAL : i , h_i, N_i

$$I_i = h_i \left[\frac{f(a)}{2} + \frac{f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{N_i-1} f(a+h_i k) \right]$$

$$I_i = h_i \left[\frac{f(a)}{2} + \frac{f(b)}{2} + \sum_{k\ \text{PAR}=2}^{N_i-2} f(a+h_i k) + \sum_{k\ \text{ÍMPAR}=1}^{N_i-1} f(a+h_i k) \right]$$

SEJA $j = \frac{k}{2}$

$$I_i = \overbrace{\frac{2h_i}{2}}^{h_{i-1}} \left[\frac{f(a)}{2} + \frac{f(b)}{2} + \sum_{j=1}^{\overbrace{\frac{N_i}{2}-1}^{N_{i-1}}} f(a + \overbrace{2h_i}^{h_{i-1}} j) \right] + h_i \sum_{k\ \text{ÍMPAR}=1}^{N_i-1} f(a+h_i k)$$

$$I_i = \frac{h_{i-1}}{2}\left[\frac{f(a)}{2} + \frac{f(b)}{2} + \sum_{j=1}^{N_i-1} f(a + h_{i-1} j)\right] \leftarrow \frac{I_{i-1}}{2}$$

$$+ h_i \sum_{K\ \text{ÍMPAR}=1}^{N_i-1} f(a + h_i K)$$

$$\boxed{I_i = \frac{I_{i-1}}{2} + h_i \sum_{K\ \text{ÍMPAR}=1}^{N_i-1} f(a + h_i K)}$$

LOGO, O MÉTODO FICA APÓS MODIFICAÇÃO:

1) $N_1 = 10$

2) I_1 (REGRA DO TRAPÉZIO)

3) $N_2 = 2N_1$

4) I_2 (REGRA DO TRAPÉZIO

5) $\epsilon_2 = \frac{I_2 - I_1}{3}$, $abs(\epsilon_2) < \epsilon \xrightarrow{\text{SIM}}$ OUTPUT

$\downarrow$ NÃO

6) $N_3 = 2N_2$

$$I_3 = \frac{I_2}{2} + h_i \sum_{K\ \text{ÍMPAR}=1}^{N_i-1} f(a + h_i K)$$

$$\epsilon_3 = \frac{I_3 - I_2}{3}$$

$\vdots$

NENHUM TRABALHO DESPERDIÇADO, MÉTODO EFICIENTE

(MOSTRAR VIA SLIDE)

RECAP

- COMENTA Q2 DA LISTA 2 (VALE PARA LISTA 3)
- COLOCA REGRA DO TRAPÉZIO
- MOSTRAMOS VIA EXPANSÃO DE $f(x)$ EM SÉRIE DE TAYLOR QUE

$x_k = x + hk$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underbrace{\frac{h}{2}\sum_{k=1}^{N}\left[f(x_k)+f(x_{k-1})\right]}_{\text{REGRA DO TRAPÉZIO}} + \frac{h^2}{12}\left[f'(a)-f'(b)\right] + O(h^4) + \ldots$$

APENAS TERMOS PARES

TERMO DE ORDEM MAIS BAIXA DO ERRO DE APROXIMAÇÃO

- MOSTRA PÁG. 13 - RESULTADO PARA REGRA DE SIMPSON

- MOSTRAMOS TAMBÉM UM MÉTODO PRÁTICO PARA DETERMINAR O ERRO. (NESTA FÓRMULA, $N_2 = 2N_1$)

$$\epsilon_2 = ch_2^2 = \frac{1}{3}(I_2 - I_1)$$

ANOTAR NO QUADRO

- COMENTEI QUE USARÍAMOS O ERRO PARA DEFINIR UM CRITÉRIO DE CONVERGÊNCIA E PARA REDUZIR A ORDEM DO ERRO TOTAL, ADICIONANDO A ESTIMATIVA AO RESULTADO ENCONTRADO NUMERICAMENTE. VEREMOS ESTES DOIS PONTOS HOJE.
- O QUE QUERO DIZER COM ESTIMATIVA: COMO DESPREZAMOS TERMOS DE ORDEM ALTA, O VALOR CALCULADO DO ERRO NÃO É EXATO.