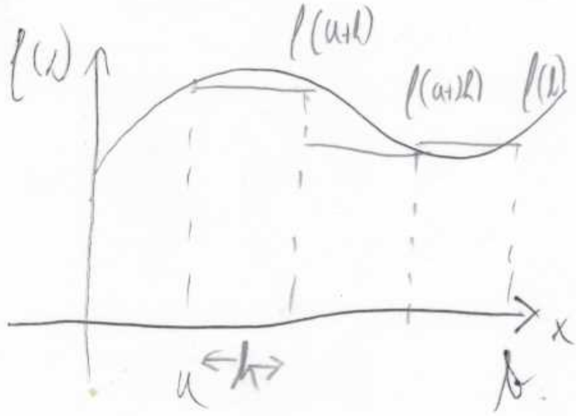
INTEGRAÇÃO NUMÉRICA - AULA 1

(FALAR COM ISRAEL SOBRE MATRÍCULA)

- UPDATE LISTAS (4 LISTAS, 4 QUESTÕES CADA, 1 PONTO CADA)
  - PROBLEMAS 4.2 e 4.3 DA ÚLTIMA AULA ESTÃO NA LISTA 1
  - PROBLEMAS 5.1 e 5.2 DE HOJE ESTÃO NA LISTA 1
  - DATA DE ENTREGA SERÁ COLOCADA NA LISTA (TIPICAMENTE 15 DIAS DA POSTAGEM) (2019: 11/03)
    (A CADA 2ª A PARTIR DESTA TEM 1 LISTA)

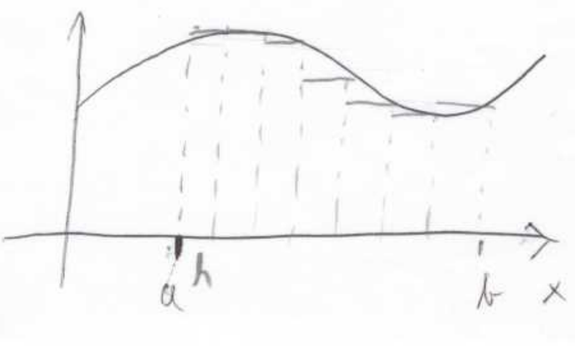
- MOTIVAÇÃO: INTEGRAIS APARECEM COM FREQUÊNCIA EM PROBLEMAS DE FÍSICA, MAS A MAIORIA DAS INTEGRAIS NÃO PODE SER CALCULADA ANALITICAMENTE. VAMOS REVER UMA MANEIRA DE SE ENSINAR INTEGRAÇÃO (DEFINIÇÃO DE RIEMANN) ANTES DE VERMOS COMO PROCEDER NUMERICAMENTE.



I = ÁREA SOBRE A CURVA

$$h = \frac{b-a}{N}$$

$$I \sim f(a+h)\cdot h + f(a+2h)\cdot h + f(b)\cdot h$$



$$I \simeq f(a+h)\cdot h + f(a+2h)\cdot h + \dots + f(b)\cdot h$$

$$I \simeq \sum_{K=1}^{N} f(a+Kh)\cdot h$$

PARA FICAR EXATO

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{N \to \infty} \sum_{K=1}^{N} f(a+Kh)\cdot h$$

$$h = \frac{b-a}{N}$$

EM INTEGRAÇÃO NUMÉRICA, NÃO FAZEMOS O ÚLTIMO PASSO. NA VERDADE, DIVIDIMOS A ÁREA EM FATIAS BEM PEQUENAS, AUMENTANDO N. / NÚMERO DE OPERAÇÕES:

$$I \sim 0 + f(a+h)\cdot h + f(a+2h)\cdot h + f(b)\cdot h \qquad \sim 2N \text{ op.}$$

MAIS INTELIGENTE: (PEQUENOS DETALHES FAZEM A DIFERENÇA)

$$I \sim h\,[0 + f(a+h) + f(a+2h) + f(b)] \qquad \sim N \text{ op.}$$

- EMBORA ESTE MÉTODO NÃO SEJA USADO NA PRÁTICA (VEREMOS LOGO UM MÉTODO COM O MESMO CUSTO SÓ QUE MAIS PRECISO), A PRIORI SE N FOR MUITO GRANDE OS RESULTADOS SÃO ACEITÁVEIS.

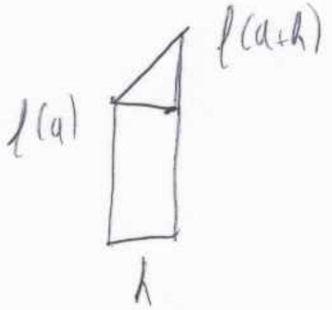
O QUE VEREMOS NESTE CAPÍTULO:

- ESTIMATIVAS DE ERRO (PRÓXIMA AULA, PARTE)
- MÉTODOS MAIS RÁPIDOS PARA UMA DADA PRECISÃO, OU MAIS PRECISOS PARA UM DADO TEMPO (PARTE DA PRÓXIMA + DUAS AULAS)
- COMO ESCOLHER MÉTODO
- COMO LIDAR COM LIMITES INFINITOS (9ª AULA)
- INTEGRAIS MÚLTIPLAS

REGRA DO TRAPÉZIO

- MOSTRA FIGURA 5.1
- UMA MANEIRA DE ESTIMAR MELHOR A ÁREA SERIA TROCAR OS RETÂNGULOS POR TRAPÉZIOS

ÁREA DE UM TRAPÉZIO:



$$A = f(a)\cdot h + h\cdot\frac{(f(a+h) - f(a))}{2}$$

$$A = \frac{h\,(f(a+h) + f(a))}{2}$$

$$A = h\cdot f(a+h) + \frac{1}{2}\left[f(a) - f(a+h)\right]\cdot h = \frac{h}{2}\left[f(a) + f(a+h)\right]$$

VAMOS CALCULAR A ÁREA TOTAL.

$$I \cong h\left[\frac{f(a) + f(a+h)}{2} + \frac{f(a+h) + f(a+2h)}{2} + \ldots + \frac{f(a+(N-2)h)}{2} + \frac{f(a+(N-1)h)}{2} + \frac{f(a+(N-1)h) + \overset{f(b)}{f(a+Nh)}}{2}\right]$$

$$I = h\left[\frac{f(a)}{2} + \frac{f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{N-1} f(a+kh)\right]$$

$\sim$ N OPERAÇÕES.
MÉTODO DO RETÂNGULO É OBSOLETO

- MOSTRA IMPLEMENTAÇÃO, EXEMPLO 5.1 (SIGAN)

(TRAPÉZIO)

EX: $f(x) = x^2+1$, $0 \leq x \leq 2$, $N=4$

$$h = \frac{b-a}{N} = \frac{2}{4} = 0.5$$

→ MOSTRA GRÁFICO.

→ MOSTRA CÁLCULO ANALÍTICO

$f(0) = 1$

$f(0.5) = 1.25$

$f(1.0) = 2$

$f(1.5) = 3.25$

$f(2.0) = 5$

$$I = \int_0^2 x^2+1 \, dx = \left(\frac{x^3}{3}\Big|_0^2\right) + \left(x\Big|_0^2\right) = \frac{8}{3} + 2 = \frac{8+6}{3} = \boxed{\frac{14}{3}} = 4,67$$

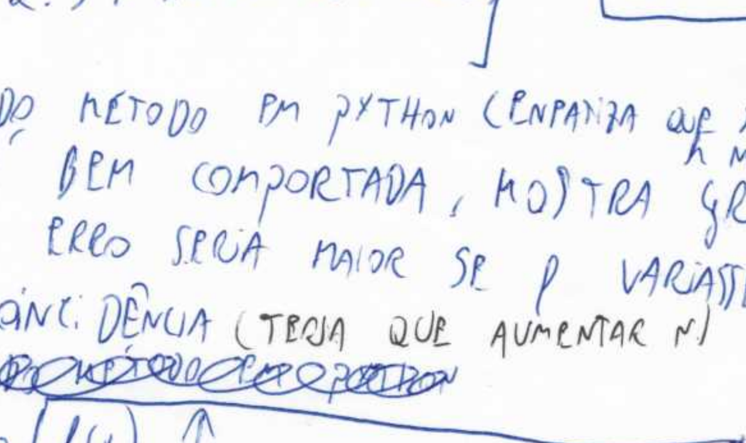
$$I(0,2) = 0.5 \left[\frac{1}{2} f(0) + \frac{1}{2} f(2) + f(0.5) + f(1.0) + f(1.5) \right]$$

$$= 0.5 \left[0.5 + 2.5 + 1.25 + 2 + 3.25 \right] = \boxed{4,75}$$

* MOSTRA IMPLEMENTAÇÃO DO MÉTODO EM PYTHON (ENFATIZA QUE SÓ MULT. POR h NO FINAL)
* ENFATIZA QUE f(x) É BEM COMPORTADA, MOSTRA GRÁFICO
* COMENTA COMO O ERRO SERIA MAIOR SE f VARIASSE MUITO
* BOM RESULTADO É COINCIDÊNCIA (TERIA QUE AUMENTAR N)

~~MOSTRA IMPLEMENTAÇÃO DO MÉTODO EM PYTHON~~

* ILUSTRA COMO O MÉTODO É LIMITADO PARA FUNÇÕES QUE VARIAM MAIS RAPIDAMENTE SE N FOR PEQUENO



REGRA DE SIMPSON

- REGRA DO TRAPÉZIO É FREQUENTEMENTE O BASTANTE PARA RESOLVER INTEGRAIS NUMÉRICAS APESAR DA SIMPLICIDADE.
- QUANDO A FUNÇÃO A SER INTEGRADA NÃO É BEM COMPORTADA (RUÍDOS / VARIAÇÕES RÁPIDAS) ↗ MOSTRA FIGURA ELA É PARTICULARMENTE RECOMENDADA
- VEREMOS TAMBÉM COMO USAR ELA COMO BASE DE MÉTODOS MAIS AVANÇADOS
- SUA PRECISÃO PORÉM NÃO É TÃO BOA. VEREMOS AGORA A REGRA DE SIMPSON, QUE É BEM FÁCIL DE IMPLEMENTAR E É BEM MAIS PRECISA

* IDEIA BÁSICA: LIGAR OS PONTOS ENTRE AS FATIAS NÃO COM RETAS. MAS SIM COM FUNÇÕES QUADRÁTICAS (FIGURA 5.2)

$\hookrightarrow y(x) = Ax^2 + Bx + C$

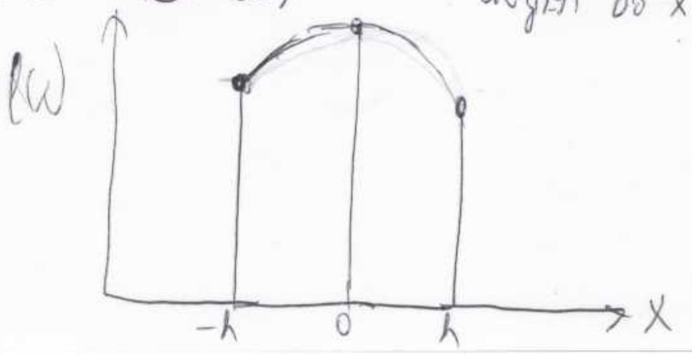
QUESTÕES PARA IMPLEMENTAÇÃO:

(I) COMO DETERMINAR OS COEFICIENTES A, B, C?

(II) QUAL A ÁREA SOBRE CADA CURVA QUADRÁTICA?

PONTO (I):

↙ MUDANDO ORIGEM DO X (DESLOCAR EIXO y)



- TRÊS PONTOS DEFINEM UM POLINÔMIO QUADRÁTICO (N TEM QUE SER PAR)
- VAMOS ENCONTRAR A, B e C PARA ESTE POL. ÚNICO

$g(x) = Ax^2 + Bx + C$

$g(-h) = f(-h)$ $\qquad Ah^2 - Bh + C = f(-h)$ ①

$g(0) = f(0)$ $\qquad \boxed{C = f(0)}$

$g(h) = f(h)$ $\qquad Ah^2 + Bh + C = f(h)$ ②

② − ①:

$2Bh = f(h) - f(-h)$

$$\boxed{B = \frac{f(h) - f(-h)}{2h}}$$

① + ②:

$2Ah^2 + \underset{f(0)}{\underset{\parallel}{2C}} = f(h) + f(-h)$

$$\boxed{A = \frac{f(h) + f(-h) - 2f(0)}{2h^2}}$$

PONTO (II)

$S = \int_{-h}^{h} Ax^2 + Bx + C \, dx$

← POSSO NÃO SABER INTEGRAR $f(x)$, MAS SEI INTEGRAR POLINÓMIOS

$S = A\left(\frac{x^3}{3}\right|_{-h}^{h} + B\underbrace{\left(\frac{x^2}{2}\right|_{-h}^{h}}_{}{}^{0} + C\left(x\right|_{-h}^{h}$

$S = A \cdot \frac{2}{3} h^3 + 2Ch$

USANDO OS VALORES DE A E C JÁ ENCONTRADOS,

$$S = \frac{2}{3}h^3\left[\frac{f(h)+f(-h)-2f(0)}{2h^2}\right] + 2\cdot f(0)\,h$$

$S \sim 3.6$

0.5 3.5 2 4.0

$$= \frac{h}{3}\Big[f(h)+f(-h)-2f(0)+6f(0)\Big] = \frac{h}{3}\Big[f(h)+f(-h)+4f(0)\Big]$$

DESLOCANDO $\rightarrow \frac{h}{3}\Big[f(a)+4f(a+h)+f(a+2h)\Big]$

NOTE QUE A ÁREA NÃO MUDOU QUANDO MOVEMOS A ORIGEM DO X.

LOGO, VOLTANDO PARA OS EIXOS ORIGINAIS,

$$S = \frac{h}{3}\Big[f(a)+4f(a+h)+f(a+2h)\Big]$$

NA PRÓXIMA

$$S_2 = \frac{h}{3}\Big[f(a+2h)+4f(a+3h)+f(a+4h)\Big]$$

A ÁREA TOTAL VALE:

$$I \cong \frac{h}{3}\Big[f(a)+4f(a+h)+f(a+2h)+f(a+2h)+4f(a+3h)+f(a+4h) + \dots + f(a+(N-2)h)+4f(a+(N-1)h)+f(\underbrace{a+Nh}_{=b})\Big]$$

OU,

$$I \cong \frac{h}{3}\left[f(a)+f(b)+4\sum_{k\ \text{ÍMPAR}=1}^{N-1} f(a+kh)+2\sum_{k\ \text{PAR}=2}^{N-2} f(a+kh)\right]$$

~N OPERAÇÕES TAMBÉM

FOR K IN RANGE(1,N,2)

FOR K IN RANGE(2,N,2)

- EMBORA A DEDUÇÃO SEJA UM POUCO MAIS TRABALHOSA, A IMPLEMENTAÇÃO DA REGRA DE SIMPSON É TÃO FÁCIL QUANTO A DA REGRA DO TRAPÉZIO

- COMO VEREMOS, A REGRA DE SIMPSON É CONSIDERAVELMENTE MAIS PRECISA

- PODERÍAMOS USAR POLINÔMIOS DE ORDEM SUPERIOR? (CÚBICO, QUÁRTICO, ETC.) SIM, VEREMOS ISTO EM UMA AULA FUTURA.

- MÉTODOS DESTE TIPO SÃO CONHECIDOS CONJUNTAMENTE COMO "FÓRMULAS DE NEWTON-COTES".

*DISCUSSÃO DA MUDANÇA DOS EIXOS:

$$S_1 = \overset{0.5}{\frac{h}{3}} \left[\overset{3.5}{f(h)} + \overset{2}{f(-h)} + 4\overset{4}{f(0)} \right] \sim 1.6$$

VOLTANDO P/ → EIXO ORIGINAL

$$S_1' = \frac{h}{3} \left[f(a) + 4f(a+h) + f(a+2h) \right]$$

→ DISCUTE QUE $f(a)$ AINDA VALE 2, $f(a+h)$ VALE 3.5 E $f(a+2h) = 4$. LOGO, $S_1' = S_1$

→ ~~[illegible]~~ FAZ O MESMO PARA O SEGUNDO TRECHO, $S_2 = \frac{h}{3} \left[f(a+2h) + 4f(a+3h) + f(a+4h) \right]$

→ SOMA $S_1, S_2, \ldots, S_N$; NÃO PRECISA ESCREVER S_K

EX: (SIMPSON)

$$f(x) = x^2+1, \qquad 0 \leq x \leq 2 \quad , N = 4$$

$$h = 0.5$$

$$I(0,2) = \frac{1}{3} \cdot 0{,}5 \left[\overset{f(0)}{1} + \overset{f(2)}{5} + 4\left(f(0{,}5) + f(1{,}5) \right) + 2 f(1{,}0) \right]$$

$$= \frac{0{,}5}{3} \left[1 + 5 + 4 \left[1{,}25 + 3{,}25 \right] + 2 \cdot 2 \right]$$

$$= \frac{0.5}{3} \left[28 \right] = \boxed{\frac{14}{3}}$$

(EXATO PARA FUNÇÕES QUADRÁTICAS)