$x = \tan z$, $z = \tan^{-1} x$ $\rightarrow$ $x \rightarrow -\infty$, $z \rightarrow -\pi/2$

$x \rightarrow \infty$, $z \rightarrow \pi/2$

$$dx = \frac{dz}{\cos^2 z}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{f(\tan z)}{\cos^2 z}\,dz$$

INTEGRAIS MÚLTIPLAS

- ATÉ AGORA VIMOS INTEGRAIS SIMPLES. COMO TRABALHAR COM INTEGRAIS MÚLTIPLAS?

EX. $I = \int_0^1 \underbrace{\int_0^1 f(x,y)\,dx}_{F(y)}\,dy$ EX: $f(x,y) = x^2 y^3$

- QUANDO INTEGRAR A FUNÇÃO EM x, A DEPENDÊNCIA EM x DESAPARECE, E FICO APENAS COM UM $F(y)$ - QUE NÃO CONHEÇO. LOGO,

$$I = \int_0^1 F(y)\,dy \quad ; \quad F(y) = \int_0^1 f(x,y)\,dx$$

INTEGRAL 1D: SEI RESOLVER!

$$I = \sum_{j=1}^{N} w_j F(y_j)$$

MAS, $F(y_j) = \int_0^1 f(x, y_j)\,dx$

↳ PARA CADA VALOR DE y DO SOMATÓRIO, TENHO QUE RESOLVER UMA INTEGRAL

LOGO,

$$I = \sum_{j=1}^{N} w_j \int_0^1 f(x, y_j)\,dx$$

↳ INTEGRAL 1D: SEI RESOLVER!

$$I = \sum_{j=1}^{N} w_j \sum_{i=1}^{N} w_i \, f(x_i, y_j)$$

$$I = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} w_i w_j \, f(x_i, y_j)$$

← POSSO USAR O MÉTODO DE MINHA PREFERÊNCIA ~~(FÓRMULA DO PRODUTO DE GAUSS-LEGENDRE)~~

← x_i E y_j FORMAM UM (y NÃO AQUI) GRID RETANGULAR DE PONTOS SE USARMOS SIMPSON OU TRAPÉZIO.

EX: $I = \int_1^5 \int_0^2 x^2 y^3 \, dx \, dy$

RESULTADO ANALÍTICO:

$$I = \int_1^5 y^3 \, dy \int_0^2 x^2 \, dx$$

$$I = \left(\frac{y^4}{4} \Big|_1^5 \right) \times \left(\frac{x^3}{3} \Big|_0^2 \right) = \frac{625 - 1}{4} \times \frac{8}{3} = \boxed{416}$$

- MOSTRA PROGRAMA SIMP2D.PY

- 1D : LOOP SIMPLES

  2D: " DUPLO

  3D: " TRIPLO

  ⋮

- MÉTODOS USUAIS SÃO MUITO CUSTOSOS PARA INTEGRAIS DE DIMENSÃO ALTA. NESTES CASOS, O MÉTODO IDEAL É O MÉTODO DE MONTE CARLO. DISCUTIREMOS ESTE MÉTODO EM FÍSICA COMPUTACIONAL II.
- DISCUTE AQUI QUE x_i E y_j FORMAM UM DOMÍNIO RETANGULAR.
- SE TIVERMOS UM DOMÍNIO DE INTEGRAÇÃO COMPLICADO, ESCOLHER OS PONTOS PODE NÃO SER TRIVIAL. MONTE CARLO TAMBÉM É BOM EM CASOS DESTE TIPO.

$$I = \int_0^2 x^4 - 2x + 1 \, dx \qquad a = 0, \; b = 2, \quad \text{ANALÍTICO} = 4.4$$

4

(ROMBERG)

$N_1 = 1$, $h_1 = \frac{b-a}{N_1} = 2$, REGRA DO TRAPÉZIO: $I_1 = 14.0$

$N_2 = 2$, $h_2 = 1$, REGRA DO TRAPÉZIO: $I_2 = 7.0$

COM DUAS ESTIMATIVAS, POSSO CALCULAR ERRO:

$$\varepsilon_2 = \frac{I_2 - I_1}{3} = \frac{7.0 - 14.0}{3} = -2.33333$$

CORREÇÃO DE ORDEM MAIS ALTA

$$\begin{tikzcd}
\text{AUMENTA N} & & +h^2 & +h^4 \\
(R_{1,1}) & I_1 \arrow[dr] & & \\
(R_{2,1}) & I_2 \arrow[r] \arrow[dr] & R_{2,2} \arrow[dr] & \text{(QUAL O ERRO?)} \\
(R_{3,1}) & I_3 \arrow[r] & R_{3,2} \arrow[r] & R_{3,3}
\end{tikzcd}$$

$R_{2,2} = I_2 + \varepsilon_2 = 7 - 2.333 = 4.66667$

$R_{3,2} = I_3 + \varepsilon_3 = 5.0625 - 0.64583 = 4.41667$

$N_3 = 4$, $h_3 = 0.5$, REGRA DO TRAPÉZIO: $I_3 = 5.0625$

$$\varepsilon_3 = \frac{I_3 - I_2}{3} = \frac{5.0625 - 7.0}{3} = -0.64583$$

* IDEIA BÁSICA: CALCULAR INTEGRAIS VIA R.T., ADICIONAR ERRO, MELHORA PRECISÃO

ALGORITMO:

$N_1 = 1$, como $m = 1$, $I_1 =$ TRAPÉZIO

$N_2 = 2$, COMO $m = 1$, $I_2 =$ TRAPÉZIO

$$m = 2, \quad R_{2,2} = R_{2,1} + \frac{1}{3}\left(R_{2,1} - R_{1,1}\right)$$

OU $R_{2,2} = I_2 + \frac{1}{3}\left(I_2 - I_1\right)$ ← COMO VIMOS ANTES

$N_3 = 3$, $m = 1$, $I_3 =$ TRAPÉZIO

$$m = 2, \quad R_{3,2} = R_{3,1} + \frac{1}{3}\left(R_{3,1} - R_{2,1}\right)$$

$$m = 3, \quad R_{3,3} = R_{3,2} + \frac{1}{15}\left(R_{3,2} - R_{2,2}\right)$$

$N_4 = 4$, $m = 1$, $I_4 =$ TRAPÉZIO

$\vdots$

E O ERRO? → É O QUE ADICIONAMOS A $R_{i,m+1}$

$$\varepsilon_i = \frac{1}{4^m - 1}\left(R_{i,m} - R_{i-1,m}\right)$$