

FÍSICA COMPUTACIONAL I

LISTA DE EXERCÍCIOS II - DATA DE ENTREGA: 18/03/2019

Problema 1: Considere a integral

$$E(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

- Escreva um programa para calcular $E(x)$ para valores de x entre 0 e 3, usando um passo de 0.1. Escolha o método de sua preferência para calcular a integral e use um número apropriado de fatias.
- Quando você estiver convencido de que seu programa está funcionando, estenda ele para que faça um gráfico de $E(x)$ em função de x .

Note que não há nenhum método para realizar esta integral analiticamente, então abordagens numéricas são o único modo possível.

Problema 2: O limite da difração em um telescópio

Nossa habilidade para ver detalhes em observações astronômicas é limitada pela difração da luz nos telescópios. As luzes vindo das estrelas podem ser tratadas efetivamente como vindas de uma fonte pontual no infinito. Quando a luz, com comprimento de onda λ , passa através da abertura circular de um telescópio (que consideraremos tendo raio unitário) e é focalizada no plano focal, produz não um ponto e sim um padrão de difração circular consistindo de um ponto central cercado por uma série de anéis concêntricos. A intensidade da luz nesse padrão de difração é dada por

$$I(r) = \left(\frac{J_1(kr)}{kr} \right)^2,$$

onde r é a distância no plano focal do centro do padrão de difração, $k = 2\pi/\lambda$, e $J_1(x)$ é a função de Bessel. As funções de Bessel $J_m(x)$ são dadas por

$$J_m(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(m\theta - x \sin \theta) d\theta,$$

onde m é um inteiro não negativo e $x \geq 0$.

- Escreva uma função $J(m, x)$ que calcula o valor de $J_m(x)$ usando a regra de Simpson com $N = 1000$ pontos. Utilize sua função para fazer um gráfico das funções de Bessel J_0 , J_1 e J_2 em função de x , de $x = 0$ até $x = 20$. Coloque todas as curvas em um mesmo gráfico.
- Escreva um segundo programa que faça um gráfico de densidade (no pylab você pode usar a função `imshow`) do padrão de difração circular de uma fonte de luz com $\lambda = 500$ nm, em uma região quadrada no plano focal usando as fórmulas acima. Sua figura deve cobrir os valores r de zero até $1 \mu\text{m}$.

Dica 1: Pode ser útil saber que $\lim_{x \rightarrow 0} J_1(x)/x = \frac{1}{2}$. Dica 2: O ponto central no padrão de difração é tão brilhante que pode ser difícil ver os anéis em torno dele na tela do computador. Se você tiver problemas com isso, uma maneira de resolver o problema é usar um gráfico de densidade com cores. O esquema “hot” funciona bem. Para uma solução mais sofisticada do problema, a função `imshow` tem um argumento adicional `vmax` que permite você especificar o valor que corresponde ao ponto mais brilhante no gráfico. Por exemplo, se você fizer `imshow(x, vmax=0.1)`, então elementos em `x` com valores maiores ou iguais a 0.1 irão produzir a cor mais brilhante na tela. Diminuindo o valor `vmax`, você pode reduzir a faixa total de valores entre os brilhos mínimos e máximos e então aumentar a sensibilidade no gráfico tornando os detalhes mais visíveis. Existe também um argumento `vmin` que pode ser usado para definir o valor que corresponde a cor menos brilhante. Para esse exercício o valor `vmax=0.01` parece funcionar bem.

Problema 3: Escreva um programa, ou modifique um anterior, para mais uma vez calcular o valor da integral $\int_0^2 (x^4 - 2x + 1) dx$, usando a regra do trapézio com 20 fatias. Porém, dessa vez faça o programa imprimir uma estimativa do erro do resultado, calculado usando o método “prático” discutido em aula. Para fazer isto, você precisa avaliar a integral duas vezes, uma vez com $N_1 = 10$ fatias e depois novamente com $N_2 = 20$ fatias. Então a equação

$$\epsilon_2 = \frac{1}{3}(I_2 - I_1),$$

te dá o erro. Como o erro calculado deste modo se compara com erro calculado através da diferença entre o valor numérico e o valor correto 4.4? Por que os dois não concordam perfeitamente?

Problema 4: Considere a integral

$$I = \int_0^1 \sin^2 \sqrt{100x} dx$$

- Escreva um programa que usa o método da regra do trapézio adaptativa da seção 5.3 e Eq. (5.34) para calcular o valor desta integral até uma precisão aproximada de $\epsilon = 10^{-6}$ (ou seja, correto até seis dígitos após o ponto decimal). Comece com uma única fatia de integração e aumente N depois para dois, quatro, oito e assim por diante. Faça seu programa escrever o número de fatias, a sua estimativa da integral e a sua estimativa do erro da integral, para cada valor do número de fatias n , até que a precisão alvo seja atingida. (Dica: Você deve encontrar que o resultado está em torno de $I = 0.45$.)
- Agora modifique seu programa para avaliar a mesma integral usando a técnica da integração de Romberg descrita na seção 5.4. Faça seu programa imprimir uma tabela triangular de valores, como na página 161, de todos seus estimadores de Romberg da integral. Calcule o erro da sua estimativa usando a Eq. (5.49) e depois continue o cálculo até você atingir a precisão de $\epsilon = 10^{-6}$. Você deve achar que o método de Romberg alcança a precisão pedida de maneira consideravelmente mais rápida do que a regra do trapézio sozinha.