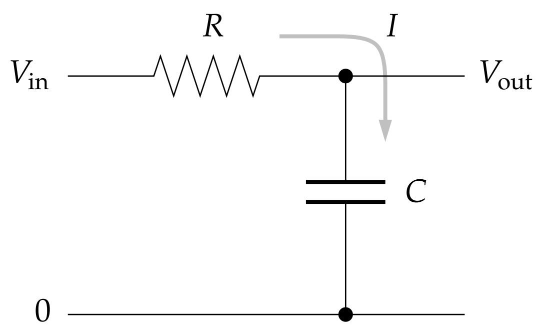
Física Computacional I

Lista de Exercícios IX - Data para entrega: 07/06/2019

Problema 1: Filtro passa-baixo

Abaixo está mostrado um circuito eletrônico simples com um resistor e um capacitor:



Este circuito atua como um filtro passa-baixo: você manda um sinal da esquerda e ele sai filtrado da direita.

Usando a lei de Ohm e a lei do capacitor e assumindo que uma quantidade desprezível de corrente segue para V_{out}, nós podemos escrever as equações que governam o circuito da maneira que segue. Seja I a corrente que flui através de R e no capacitor, e seja Q a carga no capacitor. Então:

$$IR = V_{\text{in}} - V_{\text{out}}\,, \qquad Q = CV_{\text{out}}\,, \qquad I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}.$$

Substituindo a segunda equação na terceira, e substituindo o resultado na primeira equação, nós encontramos que $V_{\text{in}} - V_{\text{out}} = RC\,(\mathrm{d}V_{\text{out}}/\mathrm{d}t)$, ou equivalentemente

$$\frac{\mathrm{d}V_{\text{out}}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{RC}\big(V_{\text{in}} - V_{\text{out}}\big).$$

a) Escreva um programa (ou modifique um anterior) para resolver esta equação para $V_{\text{out}}(t)$ usando o método de Runge–Kutta de quarta ordem, quando o sinal de entrada é uma onda quadrada com frequência 1 e amplitude 1:

$$V_{\text{in}}(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } \lfloor 2t \rfloor \text{ é par,} \\ -1 & \text{se } \lfloor 2t \rfloor \text{ é ímpar,} \end{cases} \tag{1}$$

onde $\lfloor x \rfloor$ significa x arredondado para baixo para o inteiro mais próximo. Use o programa para obter gráficos da saída do circuito filtro de $t = 0$ a $t = 10$ quando $RC = 0.01$, 0.1 e 1, com condição inicial $V_{\text{out}}(0) = 0$. Você vai ter que decidir qual valor de h deve ser usado no cálculo. Pequenos valores fornecem resultados mais precisos, mas aumentam o tempo necessário para rodar o programa. Tente uma variedade de valores e escolha um para seu cálculo final que te parece razoável.

b) Baseado nos gráficos produzidos pelo seu programa, descreva o que você observa e explique o que o circuito está fazendo.

Um programa similar ao que você escreveu está rodando dentro da maioria dos aparelhos de som, para criar o efeito do controle de “grave”. Antigamente, o controle do grave em um aparelho de som seria conectado a um filtro passa-baixo real no circuito do amplificador, mas atualmente há um processador de computador que simula o comportamento do filtro de maneira similar ao seu programa.

Problema 2: As equações de Lotka–Volterra

As equações de Lotka–Volterra são um modelo matemático de interações presa–predador entre espécies biológicas. Sejam duas variáveis x e y proporcionais ao tamanho da população de duas espécies, tradicionalmente chamadas de ‘coelhos” (as presas) e de “rapozas” (os predadores). Você pode pensar em x e y como sendo a população em milhares, de modo que $x = 2$ significa que existem 2000 coelhos. Estritamente os únicos valores de x e y seriam então múltiplos de 0.001, uma vez que só existem números inteiros de coelhos e rapozas. Como 0.001 é um espaçamento de valores estreito, é uma aproximação decente tratar x e y como números reais contínuos, desde que nenhum dos dois se aproximem muito de zero.

No modelo de Lotka–Volterra, os coelhos se reproduzem a uma taxa proporcional as suas populações, mas são comidos por rapozas a uma taxa proporcional a sua própria população e à população de rapozas:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \alpha x - \beta xy,$$

onde α e β são constantes. Ao mesmo tempo as rapozas se reproduzem com uma taxa proporcional a taxa com que eles comem coelhos — porque eles precisam de comida para crescer e se reproduzir — mas também morrem de velhice com uma taxa proporcional a sua própria população:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \gamma xy - \delta y,$$

onde γ e δ também são constantes.

a) Escreva um programa que resolver estas equações usando o método de Runge–Kutta de quarta ordem para o caso com $\alpha = 1$, $\beta = \gamma = 0.5$ e $\delta = 2$, com condição inicial $x = y = 2$. Faça o programa gerar um gráfico mostrando x e y em função do tempo nos mesmos eixos de $t = 0$ até $t = 30$. (Dica: Note que as equações diferenciais neste caso não dependem explicitamente do tempo t — em notação de vetor, o lado direito de cada equação é uma função $f(\mathbf{r})$ sem dependência com t. Você pode, apesar disto, achar conveniente definir uma função no Python `f(r,t)` incluindo a variável tempo, de modo que seu programa tenha a forma dos programas discutidos anteriormente. Outros dos exercícios que seguem também não tem uma dependência temporal explícita.)

b) Descreva em palavras o que está ocorrendo no sistema, em termos de coelhos e rapozas.

Problema 3: As equações de Lorenz

Um dos conjuntos de equações diferenciais mais celebrados em física são as equações de Lorenz:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \sigma(y - x), \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = rx - y - xz, \qquad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = xy - bz,$$

onde σ, r e b são constantes. (os nomes σ, r e b são unusuais, mas tradicionais — eles sempre são usados nestas equações por razões históricas.)

Estas equações foram primeiro estudadas por Edward Lorenz em 1963, que derivou elas de um modelo simplificado de padrões de clima. A razão para sua fama é que elas foram um dos primeiros exemplos incontrovertíveis de *caos determinístico*, a ocorrência de movimento aparentemente aleatório apesar de não haver nenhuma aleatoriedade incluída nas equações.

a) Escreva um programa para resolver as equações de Lorenz para o caso $\sigma = 10$, $r = 28$ e $b = \frac{8}{3}$, em um intervalo de $t = 0$ até $t = 50$ com condições iniciais $(x, y, z) = (0, 1, 0)$. Faça seu programa gerar um gráfico de y em função do tempo. Note a natureza imprevisível do movimento. (Dica: Se você baseou o seu programa em outros anteriores, tenha cuidado. Este programa tem parâmetros r e b com os mesmos nomes de variáveis de programas anteriores — se certifique que você deu a suas variáveis novos nomes, ou use nomes diferentes para os parâmetros, para evitar introduzir erros no seu código.)

b) Modifique seu programa para produzir um gráfico de z versus x. Você deve ver uma figura do famoso "atrator estranho" das equações de Lorenz, um gráfico assimétrico com forma de borboleta que nunca se repete.

Problema 4: Trabalhando em cima dos resultados do exemplo 8.6 do Newman, determine o movimento de um pêndulo não-linear da maneira que segue.

Escreva um programa para resolver as duas equações de primeira ordem, Eqs. (8.45) e (8.46), usando o método de Runge–Kutta de quarta ordem para um pêndulo com braço de 10 cm. Use seu programa para calcular o ângulo θ do deslocamento para diversos períodos do pêndulo, quando ele é solto do repouso com um ângulo de $\theta = 179^\circ$ com a vertical. Faça um gráfico de θ em função do tempo.