Física Computacional I

Lista de Exercícios V - Data para entrega: 15/04/2019

Problema 1: Considere a equação $x = 1 - \mathrm{e}^{-cx}$, onde c é um parâmetro conhecido e x desconhecido. Esta equação aparece em várias situações, incluindo processos de contato em Física, modelo matemáticos de epidemias e em teoria de grafos aleatórios.

a) Escreva um programa que resolve a equação para x usando o método iterativo para o caso $c = 2$. Calcule sua solução com uma precisão de pelo menos 10^{-6}.

b) Modifique seu programa para calcular a solução para valores de c de 0 até 3 em passos de 0.01 e faça um gráfico de x em função de c. Você deve observar uma transição clara de um regime onde $x = 0$ para um regime onde x é diferente de zero.

Problema 2: O processo bioquímico de *glicólise*, a quebra de glicose no corpo para liberar energia, pode ser modelado usando as equações

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -x + ay + x^2 y, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = b - ay - x^2 y.$$

Aqui x e y representam concentrações de duas substâncias químicas, ADP e F6P, e a e b são constantes positivas. Uma característica importante de equações não-lineares como estas são os seus *pontos estacionários*, valores de x e y nos quais as derivadas das duas variáveis se tornam zero simultaneamente, de modo que as variáveis param de mudar e se tornam constantes no tempo. Igualando as derivadas acima a zero, os pontos estacionários de nossas equações de glicólise são soluções de

$$-x + ay + x^2 y = 0, \qquad b - ay - x^2 y = 0.$$

a) Demonstre analiticamente que a solução destas equações é

$$x = b, \qquad y = \frac{b}{a + b^2}.$$

b) Mostre que estas equações podem ser reescritas na seguinte forma

$$x = y(a + x^2), \qquad y = \frac{b}{a + x^2}$$

e escreva um programa para encontrar pontos estacionários usando o método da relaxação com $a = 1$ e $b = 2$. Você deve encontrar que o método não converge para uma solução neste caso.

c) Ache uma maneira diferente de rearranjar as equações de modo que quando você aplica o método da relaxação de novo ele converge para um ponto fixo e retorna uma solução. Verfique que a solução encontrada concorda com a que foi obtida no item (a).

Problema 3: Constante de deslocamento de Wien

A lei da Radiação de Corpo Negro de Planck nos diz que a intensidade de radiação por unidade de área e por unidade de comprimento de onda λ de um corpo negro a temperatura T é

$$I(\lambda) = \frac{2\pi hc^2\lambda^{-5}}{e^{hc/\lambda k_B T} - 1},$$

Onde h é a constante de Planck, c é a velocidade da luz e k_B a constante de Boltzmann.

a) Mostre, por diferenciação, que o comprimento de onda λ no qual a radiação emitida é mais forte é solução da equação

$$5e^{-hc/\lambda k_B T} + \frac{hc}{\lambda k_B T} - 5 = 0.$$

Faça a substituição $x = hc/\lambda k_B T$ e mostre que o comprimento de onda da radiação máxima obedece a lei de deslocamento de Wien:

$$\lambda = \frac{b}{T},$$

onde a chamada constante de deslocamento de Wien é $b = hc/k_B x$, e x é solução da equação não linear

$$5e^{-x} + x - 5 = 0.$$

b) Escreva um programa para resolver essa equação com uma precisão de $\epsilon = 10^{-6}$ usando o método de busca binária e então determine o valor da constante de deslocamento.

c) A lei de deslocamento é a base para o método *pirometria óptica*, um método usado para medir as temperaturas de objetos a partir da observação da cor da radiação emitida por eles. Esse método é comumente usado para medir a temperatura de corpos celestes, como o Sol. O pico no comprimento de onda da radiação emitida pelo Sol é em torno de $\lambda = 502\,\text{nm}$. A partir da equação acima e o seu valor da constante de deslocamento, estime a temperatura da superfície do Sol.