INTEGRAÇÃO DE ROMBERG:

- VAMOS VER AGORA COMO USAR ESTIMATIVAS DE ERRO PARA SISTEMATICAMENTE MELHORAR A PRECISÃO DE NOSSA INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

- MÉTODO MAIS COMPLEXO DO QUE OS VISTOS ATÉ AQUI

- VAMOS ~~RELEMBRA~~ RELEMBRAR COMO ACHAMOS A REGRA PRÁTICA PARA CALCULAR O ERRO

TEMOS: $\underset{\text{EXATO}}{I} = I_i + C_1 h_i^2 + C_2 h_i^4 + C_3 h_i^6 + \ldots$ ← NÃO HÁ TERMOS ÍMPARES

PARA ACHAR A REGRA PRÁTICA, CALCULAMOS I PARA N_1 e $N_2 = 2N_1$ $\left(h_2 = \frac{h_1}{2} \right)$

$$I = I_1 + C_1 h_1^2 + \cancelto{0}{C_2 h_1^4} + \ldots$$

$$I = I_2 + C_1 h_2^2 + \cancelto{0}{C_2 h_2^4} + \ldots$$

DESPREZAMOS TERMOS DE ORDEM MAIS ALTA, E IGUALAMOS AS DUAS EXPRESSÕES,

$$I_1 + 4C_1 h_2^2 = I_2 + C_1 h_2^2 \quad , \quad I_2 - I_1 = 3C_1 h_2^2 \; , \quad C_1 h_2^2 = \frac{I_2 - I_1}{3}$$

LOGO, UMA APROXIMAÇÃO MELHOR É ← COLOCA NOS SLIDES

$$I = I_2 + \frac{I_2 - I_1}{3} + C_2 h_2^4 + C_3 h_2^6 + \ldots$$

VAMOS USAR ISTO EM UM EXEMPLO: ⑥

$a=0$, ANALÍTICO: 4,4

$I = \int_0^2 x^4 - 2x + 1 \, dx$ $b=2$

$N_1 = 1$, $h_1 = 2$

$N_2 = 2$, $h_2 = 1$

OLHANDO O RESULTADO DO PROGRAMA,

$I_1 = 14.0$

$I_2 = 7.0$

$$c h_2^2 = \frac{7.0 - 14}{3} = -2.33333$$

LOGO, $I_2 + c_1 h_2^2 = 7.0 - 2.33333 = 4.66667$ (MOSTRA ONDE FICA NO OUTPUT)

REPARE QUE, $I_1 + 4 c_1 h_2^2 = 14.0 - 4 \times 2.33333 = 4.66667$

IGUAL AO VALOR DE CIMA, COMO TEM QUE SER. COM OS DADOS ATUAIS, NÃO TEMOS COMO ESTIMAR OS TERMOS DE ORDEM MAIS ALTA NO ERRO.

INTRODUZ NOTAÇÃO
PULA P/ ÚLTIMO SLIDE

- VAMOS AGORA ACHAR I_3. $N_3 = 2N_2$, $h_3 = h_2/2$
- APLICANDO A REGRA DO TRAPÉZIO COM $N_3 = 4$,

$I_3 = 5.0625$

- PODEMOS ACHAR AGORA $$c_1 h_3^2 = \frac{I_3 - I_2}{3} = \frac{5.0625 - 7.0}{3}$$

$$= -0.64583$$

E AGORA A MELHOR ESTIMATIVA É,

$$I = I_3 + c_1 h_3^2 = 5.0625 - 0.64583 = 4.41667$$

← MOSTRA POSIÇÃO NO OUTPUT

NOTE QUE $I_2 + c_1 h_2^2$ E $I_3 + c_1 h_3^2$ SÃO DIFERENTES. PODEMOS USAR ESTA INFORMAÇÃO PARA ESTIMAR $c_2 h_3^4$:

$$I = I_2 + c_1 h_2^2 + c_2 h_2^4 + \cancel{c_3 h_2^6} + \ldots$$

$$I = I_3 + c_1 h_3^2 + c_2 h_3^4 + \cancel{c_3 h_3^6} + \ldots$$

DESPREZANDO TERMOS DE ORDEM 6 OU SUPERIOR,

$$I_2 + c_1 h_2^2 + \underbrace{c_2 h_2^4}_{+16 c_2 h_3^4} = I_3 + c_1 h_3^2 + c_2 h_3^4$$

NOVA NOTAÇÃO: $I_1 = R_{1,1}$

$I_2 = R_{2,1}$; $I_2 + c_1 h_2^2 = R_{2,2}$

← MOSTRA TABELA DO NEWMAN

$$R_{2,2} + c_2 h_2^4 = R_{3,2} + c_2 h_3^4$$

COMO $h_2 = 2h_3$,

$$R_{2,2} + 16 c_2 h_3^4 = R_{3,2} + c_2 h_3^4$$

$$\boxed{c_2 h_3^4 = \frac{R_{3,2} - R_{2,2}}{15}}$$

← ANOTA NOS SLIDES

PARA NOSSO EXEMPLO,

$$C_2 h_j^4 = \frac{4.41667 - 4.66667}{15} = -0.016667$$

E PORTANTO,

$$R_{j,j} = 4.416667 - 0.016667 = 4.4$$ (NO PC: 4.4)

- PRIMEIRO PONTO: CONVERGE COM MUITO POUCAS FATIAS
- NO MEU PROGRAMA, DEFINI UM CRITÉRIO DE CONVERGÊNCIA $= 10^{-6}$. OLHANDO O OUTPUT, DÁ PARA VER QUE JÁ NESTE ELEMENTO CONVERGÊNCIA HAVIA SIDO ATINGIDA.. PORÉM NÃO HÁ COMO ESTIMAR O ERRO DESTE ELEMENTO. A CORREÇÃO $C_2 h_j^4$ É A MELHOR ESTIMATIVA DE ERRO. ~~TIPICAMENTE O ÚLTIMO ELEMENTO~~ CALCULADO COMO QUANDO HOUVER CONVERGÊNCIA. ESTA OCORRERÁ ANTES DO CÁLCULO DO ELEMENTO MAIS PRECISO. TIPICAMENTE O ERRO DESTE ELEMENTO SERÁ BEM MENOR DO QUE O EXIGIDO.

- UMA VEZ QUE A IDEIA BÁSICA FOI APRESENTADA, FORNECE- ~~APRESENTA-~~ REMOS A FÓRMULA GERAL SEM PROVAR. (VER NO NEWMAN, RELATIVAMENTE DIRETO):
- APRESENTA FÓRMULA GERAL DO ERRO

$$R_{i,m+1} = R_{i,m} + \frac{1}{4^m - 1}(R_{i,m} - R_{i-1,m})$$

← QUANDO APRESENTAR, CALCULA CASOS PARTICULARES PARA $m=1,2,3$

$$(R_{i,m+1} = R_{i,m} + C_m h_i^{2m})$$

↑ FUNCIONA COMO ESTIMATIVA DO ERRO

FLUXO DO CÁLCULO:

(DEFINE UM CRITÉRIO DE CONVERGÊNCIA, $EPS = 10^{-6}$)

1 - USA REGRA DO TRAPÉZIO PARA CALCULAR $R_{1,1}$, $R_{2,1}$

2 - CALCULA $R_{2,2}$. $\cancel{\varepsilon_2 = \frac{1}{3}(I_2 - I_1)}$

$$\left[R_{2,2} = R_{2,1} + \frac{1}{3}(R_{2,1} - R_{1,1}) \right]$$

↳ COMPARA COM SLIDES

↳ MOSTRA QUEM É ε_2

3 - USA REGRA DO TRAPÉZIO, ENCONTRA $R_{3,1}$.

~~CALCULA~~ $\cancel{R_{3,2} = R_{3,1} + \frac{1}{15}(R_{3,1} - R}$

CALCULA $R_{3,2} = R_{3,1} + \frac{1}{3}(R_{3,1} - R_{2,1})$.

CALCULA $R_{3,3} = R_{3,2} + \underbrace{\frac{1}{15}(R_{3,2} - R_{2,2})}_{\varepsilon_3 \text{ (MELHOR ESTIMATIVA DO ERRO)}}$ ← COMPARA COM SLIDES

4 - CALCULA $R_{4,1}$. CALCULA $R_{4,2}, R_{4,3}, R_{4,4}$.

$$\varepsilon_4 = \frac{1}{63}(R_{4,3} - R_{3,3})$$

5 - CONTINUA ATÉ $|\varepsilon_k| < EPS$

⋮

* CUIDADO QUANDO USAR COM FUNÇÕES QUE OSCILAM RÁPIDO. POR EXEMPLO, $c_1 = \frac{h^2}{12}\left[f'(a) - f'(b)\right]$. COEFICIENTES DEPENDEM DE DERIVADAS, E PODEM SER GRANDES QUANDO f OSCILA MUITO. NESTE CASO TERMOS COM POTÊNCIAS ALTAS EM h PODEM SER GRANDES.
* EXEMPLO DE EXTRAPOLAÇÃO DE RICHARDSON. ESTIMATIVAS DE ORDEM ALTA SÃO OBTIDAS DE ESTIMATIVAS DE ORDEM BAIXA.