DERIVAÇÃO NUMÉRICA

- MENCIONA LISTA 3

NOSSA DISCUSSÃO SERÁ BREVE, POIS

1) MÉTODOS SÃO SIMPLES DE DERIVAR
2) SE CONHEÇO A FORMA ANALÍTICA DA FUNÇÃO A SER DERIVADA, SEMPRE POSSO CALCULAR SUA ~~DERIV~~ DERIVADA
3) DERIVADAS NUMÉRICAS TEM PRECISÃO REDUZIDA, DEVIDO A ERROS DE ARREDONDAMENTO (DECIMAL → BINÁRIO → DECIMAL)

↑ SLIDES

ALGUNS CONCEITOS QUE DEVEMOS RELEMBRAR:

- $\varepsilon_T = \varepsilon_{AR} + \varepsilon_{AP}$ ← SLIDES

- ERROS DE ARREDONDAMENTO SÃO GRANDES QUANDO SUBTRAÍMOS NÚMEROS PRÓXIMOS ← SLIDES

- $\varepsilon_{AR} \sim cx$ PARA x ; PARA UM $f(x)$, $\varepsilon_{AR} \sim cf(x)$

- $x_E = x \mp \varepsilon_{AR}$ (FAZ EXEMPLO: $2.2 + 1.1$)
$3.3 = 3.3000000000000003$
$- 0.0000000000000003$

DIFERENÇAS PROGRESSIVAS E REGRESSIVAS:

- QUEREMOS ENCONTRAR A TANGENTE A CURVA NO PONTO X

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad \cancel{f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h}}$$

PROGRESSIVA ↑

②

- PARA CALCULAR NO COMPUTADOR, FAZEMOS h MUITO PEQUENO (FIZEMOS ISTO NA QUESTÃO 2 DA LISTA 1)

$$f'(x) \cong \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

- PODEMOS TAMBÉM CALCULAR A DERIVADA USANDO O PONTO ANTERIOR A X, AO INVÉS DO PRÓXIMO,

$$f'(x) \cong \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \leftarrow \text{DIFERENÇAS REGRESSIVAS}$$

- TIPICAMENTE AS DUAS EXPRESSÕES DÃO RESULTADOS MUITO PRÓXIMOS.

- MOSTRA TABELA COM RESULTADOS DE L1Q2. POR QUE A APROXIMAÇÃO PIORA QUANDO REDUZIMOS MUITO h?

ERROS:

- COLOCA FÓRMULA DA SÉRIE DE TAYLOR NOS SLIDES
($x \to x+h$; $x_0 \to x$)

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)(x+h-x) + \frac{f''(x)}{2}(x+h-x)^2 + \dots$$

$$= f(x) + h f'(x) + h^2 \frac{f''(x)}{2} + \dots$$

$$h f'(x) = f(x+h) - f(x) - h^2 \frac{f''(x)}{2} + \dots$$

LOGO, (4)

AUMENTA QUANDO h DIMINUI — DIMINUI QUANDO h DIMINUI

$$\varepsilon_T = \varepsilon_{AR} + \varepsilon_{AP} = \frac{2C f(x)}{h} + \frac{h f''(x)}{2}$$

* MOSTRA TABELA OBTIDO COM Q2L7. MOSTRA A REGIÃO DOMINADO POR ε_{AP} E A REGIÃO DOMINADA POR ε_{AR}.

- QUAL VALOR DE h MINIMIZA ε_T?

$$\frac{d\varepsilon_T}{dh} = 0, \quad -\frac{2C f(x)}{h_{min}^2} + \frac{f''(x)}{2} = 0$$

$$\frac{2C f(x)}{h_{min}^2} = \frac{f''(x)}{2} \rightarrow \frac{h_{min} f''(x)}{2} = \frac{2C f(x)}{h_{min}}$$

$$h_{min}^2 = 4C \frac{f(x)}{f''(x)}$$

$$\boxed{h_{min} = 2 \left(\frac{f(x)}{f''(x)} \right)^{1/2} C^{1/2}}$$

$$\sim C^{1/2} \sim \boxed{10^{-8}}$$

COMPARA COM TABELA

$$\varepsilon_{min} = \frac{\cancel{2} C f(x) \sqrt{f''(x)}}{\cancel{2} \sqrt{f(x)}\; C^{1/2}} + \cancel{2} \frac{\sqrt{f(x)}}{\sqrt{f''(x)}} \frac{f''(x)}{\cancel{2}} C^{1/2}$$

NÃO USAR $\sim 10^{-8}$

$$= C^{1/2} f(x)^{1/2} [f''(x)]^{1/2} + f(x)^{1/2} [f''(x)]^{1/2} C^{1/2} = 2C^{1/2} f(x)^{1/2} f''(x)^{1/2}$$

$$f'(x) = \boxed{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}} - \boxed{\frac{h f''(x)}{2}} + \ldots$$

DIFERENÇAS PROGRESSIVAS

ERRO DA APROXIMAÇÃO (ORDEM h)

SE CONSIDERMOS QUE NO COMPUTADOR $f_E(x+h) = f(x+h) - \varepsilon_1$ E $f_E(x) = f(x) - \varepsilon_2$, NO COMPUTADOR TEREMOS

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - \varepsilon_1 - f(x) + \varepsilon_2}{h} - \frac{h f''(x)}{2} + \ldots$$

* NOS OUTROS TERMOS, O ERRO COMPUTACIONAL NÃO CRESCE QUANDO h DECRESCE.

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \underbrace{\boxed{\frac{-\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{h}}}_{} - \boxed{\frac{h f''(x)}{2}} + \ldots$$

ε_{AR} ε_{AP}

NOTE QUE, $\varepsilon_1 \sim C f(x+h) \sim C f(x)$, $\varepsilon_2 \sim C f(x)$. OS ERROS PODEM SE SOMAR OU CANCELAR, VAMOS ASSUMIR O PIOR CASO, EM QUE OS ERROS SE SOMAM COMPLETAMENTE,

$$\varepsilon_{AR} \sim 2 \frac{C f(x)}{h}$$

$$\varepsilon_{T_{min}} = \frac{2Cf(x)}{h_{min}} + h_{min}\frac{f''(x)}{2}$$

$$\boxed{\varepsilon_{T_{min}} = h_{min} f''(x)} \sim 10^{-8}$$

- PRECISÃO BEM INFERIOR À DA INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

- EXISTE OUTRO MÉTODO MAIS PRECISO? SIM!

DIFERENÇAS CENTRAIS

- IDEIA: AO INVÉS DE PEGAR UM PONTO NA FRENTE OU ATRÁS, DO PONTO X, PEGAMOS PONTOS EM $x+h/2$ E $x-h/2$:

$$f'(x) = \frac{f(x+h/2) - f(x-h/2)}{h}$$

- VAMOS CALCULAR O ERRO. VEREMOS QUE ESTE MÉTODO É MAIS PRECISO:

(A) $$f(x+h/2) = f(x) + f'(x)\cdot\frac{h}{2} + \frac{f''(x)}{2}\frac{h^2}{4} + \frac{f'''(x)}{6}\frac{h^3}{8} + \dots$$

(B) $$f(x-h/2) = f(x) - f'(x)\frac{h}{2} + \frac{f''(x)}{2}\frac{h^2}{4} - \frac{f'''(x)}{6}\frac{h^3}{8} + \dots$$