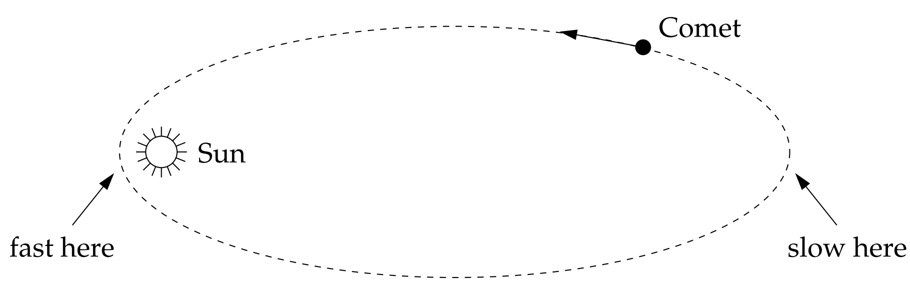
Física Computacional I

Lista de Exercícios XI - Data para entrega: 24/06/2019

Problema 1: Órbita de cometas

Muitos cometas viajam em órbitas altamente alongadas em torno do Sol. Por boa parte de suas vidas eles estão bem longe no sistema solar, se movendo muito devagar, mas em raras ocasiões suas órbitas trazem eles perto do Sol, e por um curto período de tempo eles se movem muito rápido:



Este é um clássico exemplo de um sistema para o qual o método do passo de tempo adaptativo é útil, porque durante os longos períodos de tempo em que o cometa está se movendo devagar nós podemos usar passos de tempo largos, para que o programa rode rapidamente, mas passos de tempo curtos são cruciais no breve período de tempo em que o cometa está se movendo rapidamente perto do Sol.

A equação diferencial obedecida por um cometa é de fácil derivação. A força entre o Sol, com massa M na origem, e um cometa de massa m com vetor de posição $\mathbf{r}$ é GMm/r^2 na direção $-\mathbf{r}/r$ (ou seja, na direção voltada para o Sol) e, portanto, a segunda lei de Newton nos diz que

$$m\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2} = -\left(\frac{GMm}{r^2}\right)\frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Cancelando m e pegando a componente x obtemos

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -GM\frac{x}{r^3},$$

e similarmente para as outras duas coordenadas. Nós podemos, entretanto, descartar uma das coordenadas, porque o cometa permanece em um único plano a medida que orbita. Se nós orientarmos nossos eixos para que este plano seja perpendicular ao eixo z, nós podemos esquecer a coordenada z e ficar com apenas duas equações diferenciais de segunda ordem para resolver:

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -GM\frac{x}{r^3}, \qquad \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = -GM\frac{y}{r^3},$$

onde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

a) Torne estas duas equações de segunda ordem em quatro equações de primeira ordem, usando os métodos que aprendeu.

b) Escreva um programa para resolver suas equações usando o método de Runge–Kutta de quarta ordem com um passo de tempo *fixo*. Você deve procurar a massa do Sol e a constante de gravitação de Newton G em uma tabela (ou usar os valores dados no problema 3 desta lista). Como condição inicial, pegue um cometa com coordenadas $x =$ 4 bilhões de quilômetros e $y = 0$ (o que fica em algum lugar em torno da órbita de Netuno) com velocidade inicial $v_x = 0$ e $v_y = 500\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Faça um gráfico mostrando a trajetória do cometa (ou seja, um gráfico de y versus x).

   Escolha um passo de tempo fixo h que permita a você calcular de maneira precisa ao menos duas órbitas inteiras do cometa. Como as órbitas são periódicas, um bom indicador de um cálculo preciso é que órbitas sucessivas do cometa se localizam uma em cima da outra em seu gráfico. Se elas não ficam, então você precisa de valor menor de h. Dê uma breve descrição dos seus achados. Qual o valor de h que você usou? O que você observou na simulação? Seu cálculo demorou quanto tempo?

c) Faça uma cópia de seu programa e modifique a cópia para realizar o cálculo usando um passo de tempo adaptativo. Defina uma precisão alvo de $\delta = 1$ quilômetro por ano na posição do cometa e novamente faça um gráfico da trajetória. O que você vê? Como a velocidade, precisão e tamanho de passo deste cálculo se comparam com aqueles da parte (b)?

d) Modifique seu programa para que ele coloque pontos no seu gráfico mostrando a posição do cometa em cada passo de Runge–Kutta ao redor de uma única órbita. Você deve ver os passos se aproximando quando o cometa está próximo do Sol e se afastando quando o cometa está bem longe no sistema solar.

Cálculos como este podem ser extendidos para casos onde nós temos mais de um corpo orbitando. Nós podemos incluir planetas, luas, asteróides e outros. Cálculos analíticos são impossíveis para sistemas tão complexos, mas com soluções numéricas cuidadosas de equações diferenciais nós podemos calcular o movimento de objetos por todo o sistema solar.

Problema 2: Escreva um programa para resolver a equação diferencial

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} - \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + x + 5 = 0$$

usando o método leapfrog. Resolva de $t = 0$ a $t = 50$ com passos de $h = 0.001$ e condições iniciais $x = 1$ e $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = 0$. Faça um gráfico de sua solução mostrando x em função de t.

Problema 3: Órbita da Terra

Use o método de Verlet para calcular a órbita da Terra em torno do Sol. As equações do movimento para a posição $\mathbf{r} = (x, y)$ do planeta no plano orbital são as mesmas que foram derivadas para um cometa no Problema 1 desta lista. Em forma vetorial, elas são

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2} = -GM\frac{\mathbf{r}}{r^3},$$

onde $G = 6.6738 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$ é constante gravitacional de Newton e $M = 1.9891 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}$ é a massa do Sol.

A órbita da Terra não é perfeitamente circular, com o planeta estando as vezes mais perto e as vezes mais distante do Sol. Quando ela está no seu ponto mais próximo, ou *perihélio*, ela está se movendo tangencialmente (ou seja, perpendicular a linha entre a Terra e o Sol) e está a uma distância $1.4710 \times 10^{11}\,\mathrm{m}$ do Sol e com uma velocidade linear de $3.0287 \times 10^4\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

a) Escreva um programa para calcular a órbita da Terra usando o método de Verlet, com um passo de tempo de $h = 1$ hora. Faça um gráfico da órbita, mostrando várias revoluções completas em torno do Sol. A órbita deve ser levemente, mas visivelmente, não circular.

b) A energia potencial gravitacional da Terra é $-GMm/r$, onde $m = 5.9722 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$ é a massa do planeta, e sua energia cinética é $\frac{1}{2}mv^2$, como usual. Modifique seu programa para calcular ambas quantidades em cada passo, em conjunto com sua soma (que é a energia total), e faça um gráfico mostrando todas as três em função do tempo nos mesmos eixos. Você deve achar que as energias potencial e cinética variam visivelmente durante uma órbita, mas que a energia total permanece constante.

c) Agora faça um gráfico da energia total sozinha sem as outras, e você deve ser capaz de perceber uma leve variação ao longo de uma órbita. Entretanto, porque você está usando o método de Verlet, que conserva energia no longo prazo, a energia deve sempre estar retornando ao seu valor inicial ao fim de cada órbita completa.

Problema 4:

Um oficial de artilharia deseja atingir um alvo localizado a 200 m de sua posição atual usando seu canhão. Para que seu disparo seja preciso, ele precisa necessariamente considerar a resistência do ar. Vimos anteriormente que a resistência do ar sobre uma esfera que se move é uma força com sentido oposto ao do movimento e com magnitude

$$F = \tfrac{1}{2}\pi R^2 \rho C v^2,$$

onde R é o raio da esfera, ρ é a densidade do ar, v é a velocidade, e C é o chamado *coeficiente de arrasto* (uma propriedade da forma do objeto que se move, neste caso uma esfera). Também vimos anteriormente que as equações do movimento para as posições (x, y) da bala de canhão são

$$\ddot{x} = -\frac{\pi R^2 \rho C}{2m}\,\dot{x}\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}, \qquad \ddot{y} = -g - \frac{\pi R^2 \rho C}{2m}\,\dot{y}\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2},$$

onde m é a massa da bala de canhão, g é a aceleração devido a gravidade, e $\dot{x}$ e $\ddot{x}$ são a primeira e segunda derivadas de x com respeito ao tempo (não é necessário demonstrar este resultado).

O canhão dispara balas com massa 1 kg, raio 8 cm e com velocidade inicial de $100\,\mathrm{ms^{-1}}$, mas o ângulo de disparo pode ser variado continuamente. Encontre o ângulo θ que deve ser usado para que o alvo a 200 m de distância seja atingido, com precisão de 0.1 m. A densidade do ar é $\rho = 1.22\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$ e o coeficiente de arrasto para a esfera é $C = 0.47$. (Dica: utilize o método do tiro).