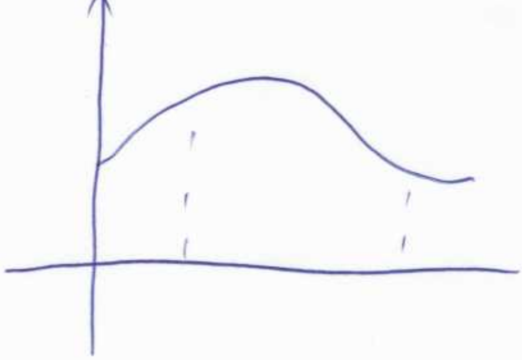
RECAP:

- FÓRMULAS DE NEWTON-COTES



- DIVIDE A REGIÃO EM FATIAS
- LIGA OS PONTOS NOS LIMITES DAS FATIAS POR POLINÔMIOS
  - 1º GRAU → REGRA DO TRAPÉZIO
  - 2º " → " DE SIMPSON
- CALCULA A ÁREA SOB OS POLINÔMIOS E SOMA ELAS

R.T: $$I(a,b) \simeq \frac{1}{2} h \sum_{k=1}^{N} \left[ f(a+(k-1)h) + f(a+kh) \right]$$

SÓ MOSTRAR NO PROJETOR

$$= h \left[ \frac{1}{2} f(a) + \frac{1}{2} f(b) + \sum_{k=1}^{N-1} f(a+kh) \right]$$

(COLOCA NOS SLIDES A FÓRMULA P/ 1 FATIA) (COLOCA QUE $h = \frac{b-a}{N}$)

R.S: $$I(a,b) \simeq \frac{1}{3} \left[ f(a) + f(b) + 4 \sum_{k \text{ ÍMPAR}=1}^{N-1} f(a+kh) + 2 \sum_{k \text{ PAR}=2}^{N-2} f(a+kh) \right]$$

(COLOCA COM NOVA NOTAÇÃO)

(TALVEZ NÃO COLOCAR NOS SLIDES)

## ERROS EM INTEGRAIS



- JÁ VIMOS ANTERIORMENTE O ERRO DE ARREDONDAMENTO
- EM INTEGRAÇÃO NUMÉRICA ELE NÃO É TÃO IMPORTANTE (NÃO ENVOLVE SUBTRAÇÃO DE NÚMEROS PRÓXIMOS)
- $\mathcal{E}_T = \mathcal{E}_{AR} + \mathcal{E}_{AP}$
- O PRINCIPAL ERRO É O ERRO DE APROXIMAÇÃO. ESTE ERRO OCORRE PORQUE A ÁREA SOB O POLINÔMIO QUE ESTAMOS INTEGRANDO NÃO É IGUAL A ÁREA VERDADEIRA

VAMOS NESTA SEÇÃO ESTIMAR ESTE ERRO.

_VAMOS USAR $x_k = a + kh$. NESTA NOTAÇÃO A REGRA DO TRAPÉZIO É, $\hookrightarrow x_0 = a \,;\, x_N = a + Nh = b$

$$I(a,b) = \frac{1}{2} h \sum_{k=1}^{N} \left[ f(x_{k-1}) + f(x_k) \right]$$

- O PROCESSO PARA DETERMINAR O ERRO TEM 7 ETAPAS

1) VAMOS PRIMEIRO EXPANDIR $f(x)$ EM TORNO DE $x_{k-1}$:

$$f(x) = f(x_{k-1}) + f'(x_{k-1}) \cdot (x - x_{k-1}) + \frac{1}{2} f''(x_{k-1}) (x - x_{k-1})^2 + \dots$$

2) VAMOS INTEGRAR $f(x)$ ENTRE $x_{k-1}$ E $x_k$.

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\, dx = f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) + f'(x_{k-1}) \cdot \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x - x_{k-1})\, dx$$

$$+\frac{1}{2} f''(x_{k-1}) \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x-x_{k-1})^2\, dx$$ (3)

SEJA $u = x - x_{k-1}$, $du = dx$, $x_k - x_{k-1} = h$

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx = f(x_{k-1}) \overbrace{(x_k - x_{k-1})}^{h} + f'(x_{k-1}) \int_0^h u\, du$$

$$+ \frac{f''(x_{k-1})}{2} \int_0^h u^2\, du + \dots$$

$$= f(x_{k-1})\cdot h + f'(x_{k-1}) \frac{h^2}{2} + \frac{f''(x_{k-1})h^3}{6} + \dots$$ (1)

3) VAMOS EXPANDIR $f(x)$ EM TORNO DE $x_k$: ← COLOCA RESULTADO

$$f(x) = f(x_k) + f'(x_k)\cdot(x - x_k) + \frac{1}{2} f''(x_k)(x-x_k)^2 + \dots$$

4) E INTEGRAR ENTRE $x_{k-1}$ E $x_k$ ← COLOCA RESULTADO

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx = f(x_k)\cdot(x_k - x_{k-1}) + f'(x_k)\int_{x_{k-1}}^{x_k} (x - x_k)\,dx$$

$$+ \frac{f''(x_k)}{2} \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x-x_k)^2\, dx + \dots$$

$u = x - x_k$, $du = dx$,

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx = f(x_k)\cdot h + f'(x_k)\int_{-h}^{0} u\, du + \frac{f''(x_k)}{2}\int_{-h}^{0} h^2 du$$

$+ \dots$

$$\int_{x_{K-1}}^{x_K} f(x)\,dx = h\, f(x_K) - \frac{h^2}{2} f'(x_K) + \frac{h^3}{6} f''(x_K) + \dots \quad (4)$$

(2)

(5)

FAZENDO (1) + (2):

$$\int_{x_{K-1}}^{x_K} f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left( f(x_K) + f(x_{K-1})\right) + \frac{h^2}{2\cdot 2}\left( f'(x_{K-1}) - f'(x_K)\right)$$

$$+ \frac{h^3}{2\cdot 6}\left( f''(x_{K-1}) + f''(x_K)\right) + \dots$$

(6) ESTA É A ÁREA SOB UM PEDAÇO. VAMOS SOMAR SOBRE TODOS PEDAÇOS:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}\sum_{K=1}^{N}\left( f(x_K) + f(x_{K-1})\right) + \frac{h^2}{4}\sum_{K=1}^{N}\left( f'(x_{K-1}) - f'(x_K)\right)$$

$$+ \frac{h^3}{12}\sum_{K=1}^{N}\left( f''(x_{K-1}) + f''(x_K)\right) + O(h^4)$$

REGRA DE TRAPÉZIO

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}\sum_{K=1}^{N}\left( f(x_K) + f(x_{K-1})\right) + \frac{h^2}{4}\Big[ f'(a) - \cancel{f'(x_1)}$$

$$+ \cancel{f'(x_1)} - \cancel{f'(x_2)} + \dots + \cancel{f'(x_{N-1})} - f'(b)\Big] + \frac{h^3}{12}\sum_{K=1}^{N}\left( f''(x_{K-1}) + f''(x_K)\right) + O(h^4)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}\sum_{k=1}^{N}\left[f(x_k)+f(x_{k-1})\right] + \frac{h^2}{4}\left[f'(a)-f'(b)\right]$$

$$+\frac{h^3}{12}\sum_{k=1}^{N}\left[f''(x_{k-1})+f''(x_k)\right] + O(h^4)$$

7) O TERCEIRO TERMO PARECE DE ORDEM 3, MAS TEM UMA SOMATÓRIA. COMO ~~[illegible]~~ CALCULAR ELE?

$$\int_a^b g(x)\,dx = \frac{h}{2}\sum_{k=1}^{N} g(x_k) + g(x_{k-1}) + \dots$$

SE $g(x) = f''(x)$,

$$\int_a^b f''(x)\,dx = \frac{h}{2}\sum_{k=1}^{N} f''(x_k) + f''(x_{k-1})$$

$$\sum_{k=1}^{N} f''(x_k) + f''(x_{k-1}) = \left(f'(b) - f'(a)\right)\frac{2}{h}$$

LOGO

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}\sum_{k=1}^{N}\left[f(x_k)+f(x_{k-1})\right] + \frac{h^2}{4}\left[f'(a)-f'(b)\right]$$

$$-\frac{h^2}{6}\left[f'(a)-f'(b)\right] + O(h^4)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}\sum_{k=1}^{N}\left[f(x_k)+f(x_{k-1})\right]+\frac{h^2}{12}\left[f'(a)-f'(b)\right] + O(h^4)$$ ⑥

↗ NA SÉRIE SÓ EXISTEM TERMOS DE ORDEM PAR

FÓRMULA DE EULER-MACLAURIN (SE TIVER TERMOS DE TODAS AS ORDENS).

O ERRO ~~[illegible]~~ DE APROXIMAÇÃO, DE MAIOR ORDEM EM $h$, É,

$$\varepsilon = \frac{h^2}{12}\left[f'(a)-f'(b)\right]$$

* COMENTA "REGRA DE EULER-MACLAURIN"
* EX. 5.8 (NÃO ESTÁ NA LISTA)

→ MÉTODO DO TRAPÉZIO

- PRECISÃO DA ORDEM DE $h$ (PRECISO EM PRIMEIRA ORDEM EM $h$)
- ERRO DA " " $h^2$

EMBORA A PRECISÃO AUMENTE LENTAMENTE COM N, ~~[illegible]~~ PODEMOS REDUZIR O ERRO AUMENTANDO SEU VALOR. MAS HÁ UM LIMITE DE PRECISÃO, QUE OCORRE QUANDO O ERRO ~~[illegible]~~ DE APROXIMAÇÃO É DA ORDEM DO ERRO DE ARREDONDAMENTO. ISTO OCORRE QUANDO,

DEPOIS → $$\frac{h^2}{12}\left[f'(a)-f'(b)\right] \approx \int_a^b f(x)\,dx \cdot C$$ ← $10^{-16}$

ANTES → $$\varepsilon_T = \varepsilon_{AP} + \varepsilon_{AR} \cong \frac{h^2}{12}\left[f'(a)-f'(b)\right] + C\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\frac{(b-a)^2}{12N^2}\left[f'(a)-f'(b)\right] \approx \int_a^b f(x)\,dx \cdot C,$$

$$N \approx (b-a)\sqrt{\frac{f'(a)-f'(b)}{12\cdot\int_a^b f(x)\,dx}}\cdot C^{-1/2}$$

$$\boxed{N \approx 10^8}$$

SÓ COLOCA RESULTADO

PARA A REGRA DE SIMPSON, PRECISO EM 3ª ORDEM EM $h$

$$\varepsilon = \frac{1}{90}h^4\left[f'''(a)-f'''(b)\right] \propto N^{-4}$$

CAI RAPIDAMENTE COM N

$N \approx 10000$ ← ATINGE PRECISÃO ~~MÁX~~ POSSÍVEL

(LIMITADA PELOS ERROS DE ARREDONDAMENTO)

## ESTIMATIVA PRÁTICA DE ERROS

- NEM SEMPRE SABEMOS A FORMA ANALÍTICA DA FUNÇÃO QUE QUEREMOS INTEGRAR. POR EXEMPLO, ÀS VEZES O INTEGRANDO É UM CONJUNTO DE DADOS (PROVENIENTE DE UM EXPERIMENTO OU SIMULAÇÃO), COMO VIMOS EM UM EXERCÍCIO DA LISTA. COMO PODEMOS CALCULAR O ERRO NESTE CASO?

1) PRIMEIRO, CALCULE A INTEGRAL PARA UM NÚMERO DE FATIAS $N_1$, $h_1 = \frac{b-a}{N_1}$ (8)

$$I = I_1 + \varepsilon_1$$

$$= I_1 + c h_1^2 + O(h^4)$$

$$c \frac{f'(a) - f'(b)}{12}$$, MAS $f'(a)$ E $f(b)$ NÃO SÃO CONHECIDOS

$c$ NÃO DEPENDE DE $h$

2) CALCULE A INTEGRAL PARA UM NÚMERO DE FATIAS $N_2 = 2N_1$, $(h_1 = 2h_2)$ $h_2 = \frac{b-a}{2N_1} = \frac{h_1}{2}$; $h_1 = 2h_2$

$$I = I_2 + \varepsilon_2$$

$$= I_2 + c h_2^2 + O(h^4)$$

$$\hat{c}\, \frac{f'(a) - f'(b)}{12}$$, A CONSTANTE DESCONHECIDA É A MESMA NOS DOIS CASOS

DESPREZANDO TERMOS DE ORDEM $h^4$ ENTÃO,

$$I_1 + c h_1^2 = I_2 + c h_2^2$$

$$I_2 - I_1 = c h_1^2 - c h_2^2$$

$$= 4 c h_2^2 - c h_2^2 = 3 c h_2^2 = 3 \varepsilon_2$$

LOGO,

$$\boxed{\varepsilon_2 = \frac{I_2 - I_1}{3}}$$

← GERALMENTE É USADO MESMO QUANDO $f(x)$ É CONHECIDA, POR SER FÁCIL DE PROGRAMAR E CONFIÁVEL

PARA SIMPSON,

$$\boxed{\varepsilon_2 = \frac{1}{15}(I_2 - I_1)}$$

→ POSSO USAR COMO CRITÉRIO DE PARADA

→ SE EU CONHEÇO O ERRO, NÃO POSSO SOMAR ELE AO MEU RESULTADO E AUMENTAR A PRECISÃO?

- SIM! VEREMOS UM MÉTODO QUE FAZ ISTO NA PRÓXIMA AULA

<u>INTEGRANDO ATÉ UMA PRECISÃO DESEJADA</u> (INTEGRAÇÃO ADAPTATIVA)

- VAMOS SUPOR QUE QUEREMOS INTEGRAR NOSSA FUNÇÃO ATÉ QUE O ERRO SEJA $< \varepsilon$ (EX: $10^{-6}$). COMO FAZER ISTO?

1) ESCOLHO $N_1$ ARBITRÁRIO ($N_1 = 10$, POR EXEMPLO)