Física Computacional I

Lista 10

Jacinto Paulo da Silva Neto

Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Departamento de Física

14 de Junho de 2019

1. Demonstrações

Questão 3

Afim de obter as equações de movimento, devemos fazer a análise vetorial do problema. Temos que

$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\,\hat{x} + y(t)\,\hat{y}, \;\; \boldsymbol{v}(t) = \dot{x}(t)\,\hat{x} + \dot{y}(t)\,\hat{y} \;\text{ e }\; \boldsymbol{a}(t) = \ddot{x}(t)\,\hat{x} + \ddot{y}(t)\,\hat{y}. \tag{1}$$

Inicialmente, teremos que o vetor posição é nulo. Além disso, podemos dizer que a quando a bola sai do canhão, isto é, em $t = 0$, a velocidade dela é dada por

$$\boldsymbol{v}(0) = v_0 cos\theta\,\hat{x} + v_0 sin\theta\,\hat{y}, \tag{2}$$

onde v_0 é o módulo da velocidade no instante inicial, $t = 0$. Finalmente, se fizermos os diagramas de forças na bola em movimento, vamos ter que considerar a força de arrasto atuando nas duas direções do movimento mas com o mesmo módulo. Logo, quando a escrevemos com caráter vetorial vamos obter a equação (6). Sabemos que as forças resistivas, de modo geral, atuam no sentido oposto à velocidade; sendo assim, escrevemos

$$\boldsymbol{F}_{drag} = -\frac{1}{2}\pi R^2 \rho C v^2\,\hat{v}, \quad \text{com} \quad \hat{v} = \frac{\boldsymbol{v}}{v}. \tag{3}$$

Sendo assim,

$$\boldsymbol{F}_{drag} = -\frac{1}{2}\pi R^2 \rho C\, v^2\,\frac{\boldsymbol{v}}{v} = -\frac{1}{2}\pi R^2 \rho C\, v\, \boldsymbol{v}. \tag{4}$$

Usando

$$\Omega \equiv \frac{1}{2}\pi R^2 \rho C \quad \text{e} \quad v = \sqrt{\dot{x} + \dot{y}}. \tag{5}$$

a equação fica aparentemente mais simples

$$\boxed{\boldsymbol{F}_{drag} = -\Omega\, \boldsymbol{v}\, \sqrt{\dot{x} + \dot{y}}}. \tag{6}$$

Finalmente, agora podemos aplicar o diagrama de corpo livre para obtermos as relações

$$\boldsymbol{F} = \big(F_{drag}\big)\,\hat{x} + \big(P + F_{drag}\big)\,\hat{y}. \tag{7}$$

Desde que a força peso atua sempre vertical e para baixo, ela atuará no movimento contrário ao movimento da bola, assim como a força de arrasto, sendo que apenas na direção vertical $\hat{y}$. Sendo assim, escrevemos, utilizando a equação para velocidade em (1) e a Segunda Lei de Newton

$$\boldsymbol{F} = m\,\boldsymbol{a} = \Bigg(-\,\Omega\,\dot{x}\,\sqrt{\dot{x} + \dot{y}}\Bigg)\,\hat{x} + \Bigg(-\,\Omega\,\dot{y}\,\sqrt{\dot{x} + \dot{y}} - mg\Bigg)\,\hat{y}. \tag{8}$$

As acelerações, portanto, em cada direção são:

$$\boxed{\ddot{x} = -\frac{\Omega}{m}\,\dot{x}\,\sqrt{\dot{x} + \dot{y}}} \tag{9}$$

$$\boxed{\ddot{y} = -g - \frac{\Omega}{m}\,\dot{y}\,\sqrt{\dot{x} + \dot{y}}} \tag{10}$$