Lista 10 - Física Computacional I

Discente: Luanna Karen de Souza

1 Lançamento de bola de canhão

Antes de utilizarmos a segunda lei de Newton, vamos definir os vetores posição e velocidade, além das condições iniciais. Como o movimento da bola de canhão pode ser confinado no plano, escrevemos:

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y}$$

se convenientemente escolhermos a origem do sistema de coordenadas na posição inicial da bola, temos:

$$\vec{r}(0) = \vec{0} \tag{1}$$

Para a velocidade, basta derivarmos o vetor posição:

$$\vec{v}(t) = \dot{x}(t)\hat{x} + \dot{y}(t)\hat{y}$$

sendo assim, a velocidade inicial é escrita como:

$$\vec{v}(0) = \dot{x}(0)\hat{x} + \dot{y}(0)\hat{y} = v_0\cos(\theta)\hat{x} + v_0\sin(\theta)\hat{y} \tag{2}$$

onde θ é o ângulo medido a partir do eixo x positivo e $v_0 = ||\vec{v_0}||$. Com essas definições, a segunda lei de Newton é escrita como:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\left(\ddot{x}\hat{x} + \ddot{y}\hat{y}\right) \tag{3}$$

Vejamos agora a forma da força resultante. Como a bola de canhão está sobre atuação da força peso, certamente uma das componentes será $\vec{P} = -mg\hat{y}$. Além disso, temos uma força resistiva que é proporcional ao quadrado da velocidade da bola, escrita compactamente na forma $\vec{F_r} = -kv^2\hat{v}$, onde $\hat{v}$ é um versor na direção do vetor velocidade, ou seja, $\hat{v} = \vec{v}/||\vec{v}||$ e k é a constante $\pi R^2\rho C/2$. Manipulando a expressão da força de arraste:

$$\vec{F_r} = -kv^2\ \vec{v}/v = -kv\ \vec{v} = -k\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\ \left(\dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y}\right) \tag{4}$$

A força resultante será $\vec{F} = \vec{P} + \vec{F_r}$. Portanto, a Equação 3 torna-se, quando substituímos 4:

$$-mg\ \hat{y} - k\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\ \left(\dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y}\right) = m\left(\ddot{x}\hat{x} + \ddot{y}\hat{y}\right)$$

Ou,

$$\left(-\frac{k}{m}\dot{x}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\right)\hat{x}+\left(-g-\frac{k}{m}\dot{y}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\right)\hat{y}=\ddot{x}\hat{x}+\ddot{y}\hat{y}$$

Separando em componentes e restaurando o valor da constante k, temos:

$$\ddot{x}=-\frac{1}{2m}\pi R^2\rho C\ \dot{x}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2} \tag{5}$$

e

$$\ddot{y}=-g-\frac{1}{2m}\pi R^2\rho C\ \dot{y}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2} \tag{6}$$

Para transformarmos as EDOs 5 e 6 em quatro EDOs acopladas de primeira ordem, definiremos as novas variáveis v_x e v_y da forma:

$$\dot{x}=v_x \tag{7}$$

$$\dot{y}=v_y \tag{8}$$

E portanto, 5 e 6 se tornam:

$$\dot{v_x}=-\frac{1}{2m}\pi R^2\rho C\ v_x\sqrt{v_x^2+v_y^2} \tag{9}$$

$$\dot{v_y}=-g-\frac{1}{2m}\pi R^2\rho C\ v_y\sqrt{v_x^2+v_y^2} \tag{10}$$

As Equações 7, 8, 9 e 10, e as condições iniciais 1 e 2 formam o conjunto utilizado para resolver o problema. Note que, diferente do caso do lançamento oblíquo sem resistência do ar, as equações de movimento dependem da massa da bola de canhão. Perceba também que no limite $m\to\infty$, as equações 9 e 10 recuperam o problema sem atrito:

$$\dot{v_x}=0$$

$$\dot{v_y}=-g$$

2 Lixo Espacial

Vamos definir o sistema de coordenadas e o vetor posição para este problema. Primeiramente, façamos o eixo da haste coincidir com o eixo z, para facilitar os cálculos. Além disso, ponha a origem do referencial no centro da haste. Para simplificar a notação, temos que a posição do rolamento é dada por $\vec{r}=x\hat{x}+y\hat{y}$ e a posição de um elemento arbitrário de massa dm é dada por $\vec{r}_{dm}=z\hat{z}$. Sendo assim, definimos um vetor posição $\vec{d}$ do rolamento de esferas em relação a dm, portanto, $\vec{d}=\vec{r}-\vec{r}_{dm}$, ou, em termos de coordenadas, $\vec{d}=x\hat{x}+y\hat{y}-z\hat{z}$. A norma de $\vec{d}$ será $d=(x^2+y^2+z^2)^{1/2}$, ou, de forma mais compacta, $d = (r^2 + z^2)^{1/2}$, com $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Nesses termos, a Gravitação Universal para um elemento de massa é escrita:

$$d\vec{F} = -G\,\frac{m\,dm}{d^2}\hat{d}$$

com $\hat{d} = \vec{d}/d$. Ou, de uma forma mais conveniente,

$$d\vec{F} = -G\,\frac{m\,dm}{d^3}\vec{d} \tag{11}$$

Se quisermos a componente x de $d\vec{F}$, deveremos efetuar o produto escalar de 11 com o versor $\hat{x}$:

$$d\vec{F} \cdot \hat{x} = -G\,\frac{m\,dm}{d^3}\vec{d} \cdot \hat{x} = -G\,\frac{m\,dm}{d^3}\,x \equiv dF_x \tag{12}$$

Trabalhando mais com 12, podemos escrever $dm = \mu dz$, onde $\mu = M/L$ é a densidade linear de massa da haste. Substituindo,

$$dF_x = -G\,\frac{m\,dm}{d^3}\,x = -\frac{GMm\,x}{L}\frac{dz}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \tag{13}$$

Portanto, a força total na direção x será:

$$F_x = -\frac{GMm\,x}{L}\int_{-L/2}^{L/2}\frac{dz}{(r^2 + z^2)^{3/2}}$$

Mas,

$$\int_{-L/2}^{L/2}\frac{dz}{(r^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{L}{r^2\sqrt{r^2 + L^2/4}}$$

Portanto,

$$F_x = -\frac{GMm\,x}{r^2\sqrt{r^2 + L^2/4}} \tag{14}$$

Um procedimento similar pode ser feito para a componente y, mas via produto escalar da Equação 11 com o versor $\hat{y}$, resultando em:

$$F_y = -\frac{GMm\,y}{r^2\sqrt{r^2 + L^2/4}} \tag{15}$$

Antes de escrevermos a segunda lei de Newton para as expressões encontradas, vejamos antes como é a expressão da força gravitacional na direção radial. Para tanto, deveríamos fazer o produto escalar de $d\vec{F}$ com o versor na direção radial, $\hat{r}$, dado em coordenadas cartesianas por $\hat{r} = (x\hat{x}+y\hat{y})/r$, e depois, integraríamos sobre toda a haste (este procedimento fornece a expressão do enunciado da questão). Mas para não termos esse trabalho, voltemos à Equação 11:

$$d\vec{F} = -\frac{GMm}{L}\frac{dz}{d^3}\,\vec{d} = -\frac{GMm}{L}\frac{dz}{(r^2+z^2)^{3/2}}(x\hat{x}+y\hat{y}-z\hat{z})$$

Se formos comparar com a Equação 13, podemos reescrever a força gravitacional para um elemento de massa:

$$d\vec{F} = dF_x\;\hat{x} + dF_y\;\hat{y} + dF_z\;\hat{z} \tag{16}$$

Com

$$dF_z \equiv \frac{GMm}{L}\frac{zdz}{(r^2+z^2)^{3/2}} \tag{17}$$

Note que se fizermos a integral da Equação 17 sobre toda a haste, ela resultará em $F_z = 0$. O que era esperado, já que as forças gravitacionais na direção z dos elementos de massa diametralmente opostos da haste vão se cancelar. Logo, se integrarmos a expressão 16, ficará comparável com as Equações 14 e 15. Portanto, a força gravitacional total está atuante somente no plano xy:

$$\vec{F}|_{xy} = F_x\;\hat{x} + F_y\;\hat{y} \equiv \vec{F}$$

como $F^2 = F_x^2 + F_y^2$, o módulo será:

$$F^2 = \frac{G^2M^2m^2x^2}{r^4(r^2+L^2/4)} + \frac{G^2M^2m^2y^2}{r^4(r^2+L^2/4)} = \frac{G^2M^2m^2(x^2+y^2)}{r^4(r^2+L^2/4)} = \frac{G^2M^2m^2}{r^2(r^2+L^2/4)}$$

Ou,

$$F = \frac{GMm}{r\sqrt{r^2+L^2/4}} = \frac{GMm}{\sqrt{(x^2+y^2)(x^2+y^2+L^2/4)}} \tag{18}$$

Por fim, podemos escrever as equações do movimento. Voltando às Equações 14 e 15, temos:

$$m\ddot{x} = F_x$$
$$m\ddot{y} = F_y$$

Cancelando a massa do rolamento nas duas equações, finalizamos com:

$$\ddot{x} = -\frac{GM\;x}{r^2\sqrt{r^2+L^2/4}}$$
$$\ddot{y} = -\frac{GM\;y}{r^2\sqrt{r^2+L^2/4}}$$

Q.E.D.

Comentário: se não quisermos aproveitar o trabalho feito para calcular F_x e F_y, e desejamos encontrar a expressão para a força radial diretamente, F_r, façamos o produto escalar da Equação 11 pelo versor $\hat{r}$:

$$d\vec{F} \cdot \hat{r} = -\frac{GMm}{L} \frac{dz}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \; \vec{d} \cdot \hat{r}$$

Mas, $\vec{d} \cdot \hat{r} = (x\hat{x} + y\hat{y} - z\hat{z}) \cdot (x\hat{x} + y\hat{y})/r = (x^2 + y^2)/r = r$. Portanto,

$$d\vec{F} \cdot \hat{r} = -\frac{GMm \; r}{L} \frac{dz}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \equiv dF_r$$

Integrando,

$$F_r = -\frac{GMm \; r}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dz}{(r^2 + z^2)^{3/2}}$$

ou, em coordenadas cartesianas,

$$F_r = -\frac{GMm}{L} \sqrt{x^2 + y^2} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

Quando substituímos o valor da integral e manipulamos, chegamos a uma expressão final idêntica à Equação 18, mas com um sinal de menos. A diferença aparece porque anteriormente partimos do módulo da expressão que é positivo definido, e, aqui, estamos encontrando a projeção do vetor de força gravitacional sobre o versor $\hat{r}$.