QUADRATURA GAUSSIANA

- DISCUTE P1 (28/03)

RECAP:

- VIMOS NA AULA PASSADA QUE UMA INTEGRAL NUMÉRICA PODE SER ESCRITA DE MANEIRA GENÉRICA COMO,

(MOSTRA TABELA COM PESOS) ✓

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{K=1}^{N} W_K f(X_K) \quad , \quad \text{ONDE } X_K = a + Kh$$

(PARA MÉTODOS VISTOS ATÉ AQUI)

- VAMOS VER NA AULA DE HOJE O MÉTODO DA QUADRATURA GAUSSIANA, QUE É EXTREMAMENTE PRECISO.

- REPARE QUE NOS MÉTODOS VISTOS ATÉ AQUI, OS PONTOS ONDE AVALIAMOS A FUNÇÃO A SER INTEGRADA SÃO IGUALMENTE ESPAÇADOS:

0 0.2 0.4 0.6 0.8 1

$a = 1$ $\quad h = 0.2$ $\quad$ (USA UM GRÁFICO) ✓

$b = 2$

- NO CASO DA QUADRATURA GAUSSIANA, OS PONTOS <u>NÃO</u> SÃO IGUALMENTE ESPAÇADOS.

"ENTENDENDO A QUAD. GAUSSIANA"

- VEREMOS NA AULA DE HOJE

1) COMO USAR A QUADRATURA GAUSSIANA (FÁCIL)

(1) 2) ~~POR QUE O MÉTODO FUNCIONA TÃO BEM~~ COMO FUNCIONA O MÉTODO, E POR QUE O MÉTODO FUNCIONA TÃO BEM (TRABALHOSO)

(2) 3) COMO ESTIMAR O ERRO DA QUADRATURA GAUSSIANA.

(FÁCIL)

(BEM RÁPIDO)

- MÉTODO PROPOSTO POR GAUSS EM 1814!

EX: $I = \int_0^2 x^4 - 2x + 1 \, dx$ $\qquad I = 4.4$

COM $N = 3$.

$$I \approx \sum_{k=1}^{N} w_k f(x_k)$$

← ANTES, APENAS OS PESOS ERAM TABELADOS. PARA Q. G., OS PONTOS TAMBÉM SÃO.

- VAMOS USAR POR ENQUANTO UMA TABELA DA WIKIPEDIA. DEPOIS VEREMOS COMO PEGAR PESOS E PONTOS DE MODO MAIS SISTEMÁTICO.

PARA $N=3$:

$$x_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}} \; ; \quad x_2 = 0 \; ; \quad x_3 = \sqrt{\frac{3}{5}}$$

$$w_1 = 5/9 \; ; \quad w_2 = 8/9 \; ; \quad w_3 = 5/9$$

- REPARE QUE OS PONTOS ESTÃO LOCALIZADOS EM UM INTERVALO ENTRE -1 E 1. ENQUANTO ISSO, NOSSA INTEGRAL DE INTERESSE ESTÁ LOCALIZADA ENTRE 0 E 2.

- VAMOS TROCAR AS VARIÁVEIS:

~~ALTERNATIVA: ESCREVER X EM TERMOS DE Y.~~

$y = x - 1$, $\; x = y + 1$, $\; dx = dy$

COM ESTA MUDANÇA,

$$I = \int_{-1}^{1} \left[(y+1)^4 - 2(y+1) + 1 \right] dy$$

$$= \sum_{k=1}^{N} W_k \, f(y_k + 1)$$

* PESOS NÃO MUDAM (NESTE CASO PARTICULAR)

* DEVEMOS AVALIAR $f(x)$ EM:

$$-\sqrt{\frac{3}{5}} + 1 \quad ; \quad 1 \quad ; \quad \sqrt{\frac{3}{5}} + 1$$

$$I = W_1 f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}} + 1\right) + W_2 f(1) + W_3 \cdot f\left(\sqrt{\frac{3}{5}} + 1\right)$$

ONDE $f(1) = 1^4 - 2 + 1 = 0$

$$f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}} + 1\right) = 0.551774655$$

$$f\left(\sqrt{\frac{3}{5}} + 1\right) = 7.368225345$$

Logo,

$$I = \frac{5}{9} \cdot 0.551774655 + \frac{5}{9} \cdot 7.368225345 = \boxed{4.4}$$

-RESULTADO EXATO! (NÃO É COINCIDÊNCIA)

EX. NO PYTHON

$$I = \int_0^1 \operatorname{sen}^2 \sqrt{100x}\, dx$$ ← QUESTÃO DA LISTA 2

$I \approx 0.45$

- DISCUTE PROGRAMA ATÉ A LINHA EM QUE SE MUDA A VARIÁVEL

MUDANÇA DE VARIÁVEL, CASO GERAL:

$$I = \int_a^b f(x)\, dx = \int_{-1}^{1} f(y)\, dy$$

$$x = \frac{(b-a)}{2} y + \frac{(b+a)}{2} \longrightarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{QUANDO } y = -1 \\ x = -\frac{\cancel{b}+a}{2} + \frac{\cancel{b}+a}{2} = a \\ \text{QUANDO } y = 1 \\ x = \frac{b-a}{2} + \frac{b+a}{2} = b \end{array}}$$ OK

$$dx = \frac{(b-a)\, dy}{2}$$

$$I = \int_{-1}^{1} f\left(\frac{(b-a)}{2} y + \frac{(b+a)}{2}\right) \cdot \frac{(b-a)}{2}\, dy \cancel{= \int_{-1}^{1} f(x(y)) \cdot \frac{(b-a)}{2}\, dy}$$

$$= \frac{(b-a)}{2} \int_{-1}^{1} f(x(y))\, dy = \frac{(b-a)}{2} \sum_{k=1}^{N} w_k f(x(y))$$

$$= \sum_{k=1}^{N} w_k' f(x(y)) \quad , \quad \text{ONDE} \quad \boxed{\begin{array}{l} w_k' = \frac{(b-a)}{2} w_k \\ x(y) = \frac{(b-a)}{2} y + \frac{(b+a)}{2} \end{array}}$$

- PESOS E PONTOS PARA UM INTERVALO $[-1,1]$ PODEM SER CALCULADOS COM O PROGRAMA GAUSSXW.PY DISPONÍVEL NO SIGAA.

- PARA USAR NUM INTERVALO ARBITRÁRIO, DEVEMOS APLICAR AS REGRAS DE TRANSFORMAÇÃO VISTAS HÁ POUCO

- DISCUTE 'QUAD.PY'

ERROS NA QUADRATURA GAUSSIANA

- FAZENDO $N \to N+1$, ERRO CAI POR UM FATOR C/N^2

EX: $N=10 \to N=11$, ERRO CAI ~ 100 VEZES

* ISTO É VERDADE PARA FUNÇÕES ± BEM COMPORTADAS (SEM DIVERGÊNCIAS, PICOS, MUITO RUÍDO)

* DOBRANDO, $N \to 2N$

$$\epsilon_{10} \xrightarrow{11} \epsilon_{11} \sim \frac{\epsilon_{10}}{10^2} \xrightarrow{12} \epsilon_{12} \sim \frac{\epsilon_{10}}{N^2\,11^2} \to \dots \xrightarrow{20} \frac{\epsilon_{10}}{\underset{(N^2)}{N^2 (N+1)^2} \cdots \underset{(N^2)}{(2N-1)^2}}$$

$$\epsilon_{10} \xrightarrow{20} \frac{1}{N^{2\cdot 10}} \sim \frac{1}{N^{2N}} = N^{-2N}$$

$$\epsilon_{20} \sim \frac{\epsilon_{10}}{10^2 \cdot 10^2 \cdots 10^2} \sim \frac{\epsilon_{10}}{10^{20}} \qquad \epsilon_{2N} \sim \epsilon_{10}\, N^{-2N}$$

ESTIMATIVA PRÁTICA

$$I = I_N + \varepsilon_N$$

$$I = I_{2N} + \varepsilon_{2N}$$

COMO $\varepsilon_{2N} << \varepsilon_N$,

$$I_N + \varepsilon_N = I_{2N} + \cancel{\varepsilon_{2N}}^{0}$$

$$\boxed{\varepsilon_N = I_{2N} - I_N}$$

ESTIMA ERRO COM N. ERRO COM 2N É MUITO MENOR, MAS NÃO SABEMOS QUANTO

- RUIM PARA MÉTODO ADAPTATIVO
  - SÓ SE CONHECE ESTIMATIVA DO PASSO ANTERIOR
  - TRABALHO ANTERIOR É DESPERDIÇADO

    (MOSTRA FIGURA DA REGRA DO TRAPÉZIO ADAPTATIVA. NAQUELE CASO REAPROVEITÁVAMOS PONTOS, PORQUE OS ANTIGOS APARECIAM NO NOVO CÁLCULO. ISTO NÃO É VERDADE AQUI). (MOSTRA A TABELA, PASSANDO DE 2-4)

- NA PRÁTICA, SE ESCOLHE UM N RAZOÁVEL (EX: $N=100$), E COMO O MÉTODO É PRECISO SE CONFIA NO RESULTADO.
- CUIDADO COM FUNÇÕES MAL COMPORTADAS!