UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN CRISTÓBAL DE HUAMANGA

FACULTAD DE INGENIERÍA DE MINAS, GEOLOGÍA Y CIVIL

Escuela de Formación Profesional Ciencias Físico Matemáticas

PROFESOR: *Romero Placencia Jackson M'coy*

ASIGNATURA: *Cálculo de Probabilidad*

TEMA: *Ejercicios Resueltos*

NOMBRE: *Quispe Huarcaya Jacinto*

AYACUCHO
2019

1 Sean A,B,C eventos aleatorios en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. Muestre que:

a) $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B$

Solución

descomponemos el evento $A\cup B$ como la siguiente unión de tres eventos disjuntos dos a dos:

$A\cup B = (A-B)\cup(A\cap B)\cup(B-A)$
$= (A-A\cap B)\cup(A\cap B)\cup(B-A\cap B)$

Entonces

$P(A\cup B) = P((A-A\cap B)\cup(A\cap B)\cup(B-A\cap B))$
$= P(A-A\cap B)+P(A\cap B)+P(B-A\cap B)$
$= P(A)-P(A\cap B)+P(A\cap B)+P(B)-P(A\cap B)$
$= P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

por lo tanto $P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B$.

b) $P(A\cup B\cup C) = P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)$

Solución

De forma similar a lo anterior

$A\cup B\cup C = (A-(B\cup C))\cup(B-(A\cup C))\cup(C-(A\cup B))\cup((A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C)-(A\cap B\cap C))$

$P(A\cup B\cup C) = P((A-(B\cup C))\cup(B-(A\cup C))\cup(C-(A\cup B))\cup((A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C)-(A\cap B\cap C)))$

$= P((A-(B\cup C)))+P((B-(A\cup C)))+P((C-(A\cup B)))+P(((A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C)-(A\cap B\cap C)))$

luego desarrolando tenemos

$= P(A)-P(B)-P(C)+P(B)-P(A)-P(C)+P(C)-P(A)-P(B)+P(A\cap B)+P(A\cap C)+P(B\cap C)-P(A\cap B\cap C)$

$P(A\cup B\cup C) = -P(A)-P(B)-P(C)+P(A\cap B)+P(A\cap C)+P(B\cap C-P(A\cap B\cap C))$

por lo tanto

$P(A\cup B\cup C) = P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C+P(A\cap B\cap C))$

c) Encuentre una generalización del item(a) para el caso de la unión de n eventos aleatorios.

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j}^{n} P(A_i \cap A_j) + \ldots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)$$

2 Sean $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espacio de probabilidad y suponga que todos siguientes conjuntos pertenecen a $\mathscr{A}$. Pruebe:

a) Si los A_n son disjuntos y $P(B \setminus A_n) \geq c$ para todo n, entonces $P(B \setminus \cup A_n) \geq c$ (puede suponer $P(A_n) \geq 0$).

Prueba

$$P(B|\cup A_n) = \frac{P(B \cap \cup_{i=1}^{n} A_n)}{P(\cup_{i=1}^{n} A_n)} = \frac{P((B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \ldots (B \cap A_n))}{P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots.. \cup A_n)}$$

como son disjuntos entonces

$$\frac{P((B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \ldots (B \cap A_n))}{P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots.. \cup A_n)} = \frac{P(B \cap A_n)}{P(A_n)} \geq c$$

por lo tanto $P(B|\cup A_n) \geq c$

b) El item (a) con " $=$ " en lugar de " $\geq$ "

Prueba

El mismo procedimiento que el anterior solo cambiar " $\geq$ " por " $=$ "

c) Si $A_n \supset A_{n+1}$ y $P(A_{n+1}|A_n) \leq \frac{1}{2}$ para todo n entonces $P(A_n) \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow 0$

Prueba

Si $A_n \supset A_{n+1}$ y $P(A_{n+1}|A_n) \leq \frac{1}{2}$

como $A_1 \supset A_2 \supset \ldots\ldots\ldots$

definimos la probabilidad condicional por:

$P(A_n) \longrightarrow 0$, cuando $n \longrightarrow \infty$

entonces $P(A_n \setminus A_1 \ldots. A_{n-1}) = P(A_n \setminus A_{n-1})$

luego $P(A_n \setminus A_1 \ldots. A_{n-1}) = \dfrac{P(A_n \cap (A_1 \ldots A_{n-1}))}{P(A_1 \ldots. A_{n-1})} = P(A_n \setminus A_{n-1})$

$$= \frac{P(A_n \cap (A_1 \ldots A_{n-1}))}{P(A_1 \ldots. A_{n-1})} = \frac{A_n \cap A_{n-1}}{P(A_{n-1})} \ldots\ldots\ldots\ldots(\text{I})$$

Definamos $P(A_n)$ por $P(A_n) = P(A_1A_2...A_n)$

por la definición de la probabilidad condicional tenemos

$$P(A_n) = P(A_1A_2...A_n) = P(A_1)P(A_2 \setminus A_1)P(A_3 \setminus A_1A_3)....P(A_n \setminus A_1A_2...A_{n-1})$$

por (I) tenemos

$$P(A_n) = P(A_1)P(A_2 \setminus A_1)...P(A_n \setminus A_{n-1})$$

por la propiedad se sabe que

$$0 \leq p(A_i) \leq 1$$
$$P(A_i/A_{i-1}) \leq \frac{1}{2}, i = 1,2,....$$
$$0 \leq P(A_n) \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$P(A_2) = P(A_1)P(A_2 \setminus A_1) = 1.\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$P(A_3) = P(A_1)P(A_2 \setminus A_1)P(A_3 \setminus A_2) = 1.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{2^2}$$

$$P(A_4) = \frac{1}{2^3}$$

Entonces $0 \leq \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} P(A_n) \leq \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \frac{1}{2^{n-1}}$

por lo tanto $P(A_n) \longrightarrow 0$

d) Si los A_n son disjuntos y $P(B|A_n) = P(C|A_n) \forall n$. entonces $P(B| \cup A_n) = P(C| \cup A_n)$

Prueba

$$P(B|A_n) = P(C|A_n)$$

$$\frac{P(B \cap A_n)}{P(A_n)} = \frac{P(C \cap A_n)}{P(A_n)}$$

entonces

$$\frac{P(B \cap A_1)}{P(A_1)} = \frac{P(C \cap A_1)}{P(A_1)}$$
$$\frac{P(B \cap A_2)}{P(A_2)} = \frac{P(C \cap A_2)}{P(A_2)}$$

y así sucesivamente llegamos

$$\frac{P(B \cap A_n)}{P(A_n)} = \frac{P(C \cap A_n)}{P(A_n)}$$

Luego $\dfrac{P(B\cap(\cup A_n))}{P(\cup A_n)}=\dfrac{P(C\cap(\cup A_n))}{P(\cup A_n)}$

$P(B|\cup A_n)=P(C|\cup A_n)$

e) Si $A_1,A_2,\ldots.$ son disjuntos y $\cup A_n=\Omega$, entonces $P(B\setminus C)=\sum_n P(A_n\setminus C)P(B\setminus A_n\cap C)$.

Prueba

como $B\cap C=(B\cap C)\cap\Omega=(B\cap C)\cap(A_1,\cup A_2,\ldots,A_n)$
$=((B\cap C)\cap A_1)\cup\ldots\cup((B\cap C)\cap A_n)$

entonces

$$P(B\cap C)=P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}((B\cap C)\cap A_n)\right)=\sum_{n=1}^{\infty}P((B\cap C)\cap A_n)\text{ ....(i)}$$

Por definición $P(B\setminus C)=\dfrac{P(B\cap C)}{P(C)}$ y $P(B\setminus(A_n\cap C))=\dfrac{P(B\cap(A_n\cap C))}{P(A_n\cap C)}$ ....(ii)

entonces

$P(B\cap C)=P(B\setminus C)P(C)$ y $P(B\cap(A\cap C))=P(B\setminus(A_n\cap C))P(A_n\cap C)$

en (i) tenemos

$$P(B\setminus C)P(C)=\sum_{n=1}^{\infty}P((B\cap C)\cap A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}P(B\cap(C\cap A_n))=\sum_{n=1}^{\infty}P((B)(A_n\cap C)).P(A_n\cap C)$$

entonces

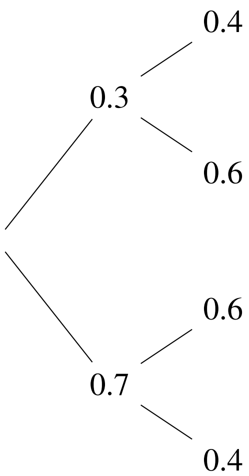
$$P(B\setminus C)=\frac{\sum_{n=1}^{\infty}P((B)(A_n\cap C)).P(A_n\cap C)}{P(C)}=\sum_{n=1}^{\infty}P(B\setminus A_n\cap C)P(A_n\setminus C)$$

por lo tanto

$$P(B\setminus C)=\sum_n P(A_n\setminus C)P(B\setminus A_n\cap C).$$

3 Durante el mes de noviembre la probabilidad de lluvia es de 0.3. El fluminense gana un partido en un día con lluvia con probabilidad 0.4; en un día sin lluvia con probabilidad 0.6. Si ganó los partidos en noviembre, ¿ cual es la probabilidad de que haya llovido ese día? .

Solución



$\longrightarrow P(LL \cap G) = 0{,}3x0{,}4 = 0{,}12$

$\longrightarrow P(LL \cap P) = 0{,}3x0{,}6 = 0{,}18$

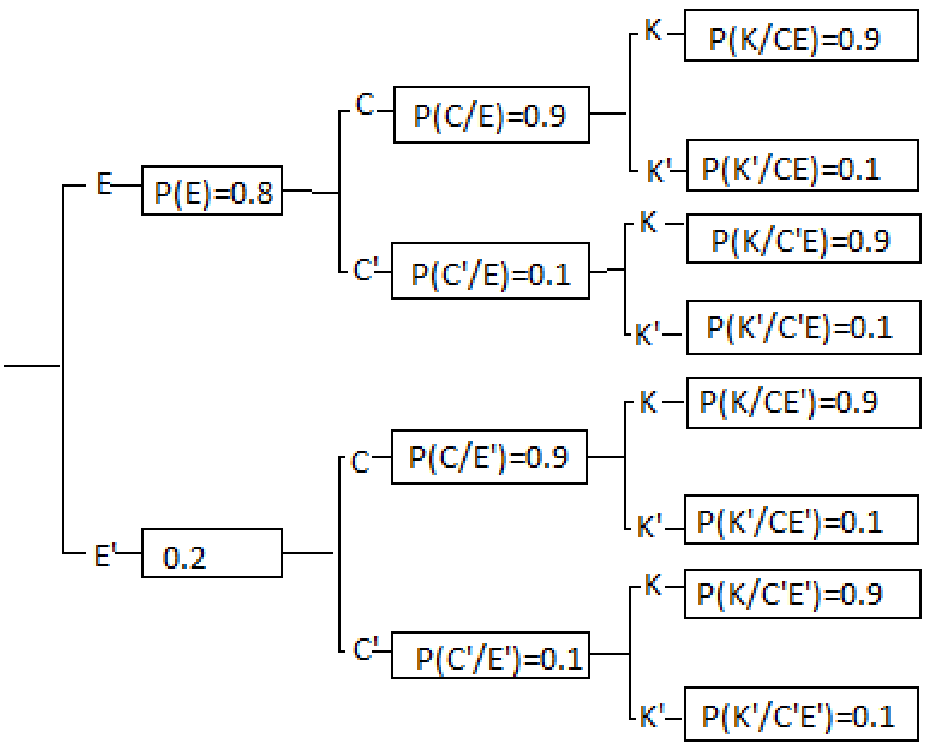
$\longrightarrow P(NLL \cap G) = 0{,}7x0{,}6 = 0{,}42$

$\longrightarrow P(NLL \cap P) = 0{,}7x0{,}4 = 0{,}28$

por lo tanto $P(G \setminus LL) = \dfrac{P(G \cap LL)}{P(LL)} = \dfrac{0{,}3x0{,}4}{0{,}3x0{,}4 + 0{,}7x0{,}6} = \dfrac{0{,}12}{0{,}54} = 0{,}222$

4. Pedro quiere enviar una carta a Marina, la probabilidad de que Pedro escriba es 0.8. La probabilidad de que el correo ni lo pierda es 0.9. La probabilidad de que el cartero le entregue es 0.9 .Puede que Marina no recibió la carta, ¿ cual es la probabilidad de que Pedro no ha escrito?.

Solución



donde

E: Escribe la carta
C: Correo no pierde
k: Cartero entrega la carta

$$P(E' \setminus K') = \frac{P(E')P(C' \setminus E')P(K' \setminus E'C')}{P(K')}$$

$$= \frac{(0{,}2)(0{,}1)(0{,}1)}{(0{,}8)(0{,}9)(0{,}1)+(0{,}8)(0{,}1)(0{,}1)+(0{,}2)(0{,}9)(0{,}1)+(0{,}2)(0{,}1)(0{,}1)}$$

$$= \frac{0{,}002}{0{,}1} = 0{,}02$$

5 Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eventos aleatorios independientes, con $P_k = P(A_k)$, con $k = 1, \ldots, n$. Obtenga la probabilidad de ocurrencia de los siguientes eventos en términos de la probabilidad P_k.

a) La ocurrencia de ninguno de los A_k.

Prueba

Sea: (al menos un A_k)’

$$\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)^c = \bigcap_{k=1}^{n} A_k^c = \bigcap_{k=1}^{n}(1 - A_k)$$

luego $\left(\bigcup_{k=1}^{n} P(A_k)\right)^c = \bigcap_{k=1}^{n} P(1 - A_k) = \bigcap_{k=1}^{n}(1 - P(A_k)) = \prod_{k=1}^{n}(1 - P_k)$

recuerde que $P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$ para todo $i \neq j$

b) La ocurrencia por lo menos uno de los A_k

Prueba

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) &= P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k^c\right)^c \\ &= 1 - P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k^c\right) \\ &= 1 - \prod_{k=1}^{n}(1 - P_k) \end{aligned}$$

c) La ocurrencia exactamente uno de los A_k

Prueba

$$B = \sum_{j=1}^{n} P(A_1^c \cap \ldots \cap A_j^c \cap A_{j+1}^c \cap \ldots \cap A_n^c)$$

entonces $P(B) = P_j \prod_{i \neq j}^{n} (1 - P_i)$

d) La ocurrencia exactamente dos de los A_k

similar (c) $P(B) = P_i P_j \prod_{j \neq k}^{n} (1 - P_k)$

e) La ocurrencia de todos los A_k

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = \prod_{k=1}^{n} P_k$$

f) La ocurrencia como máximo $n-1$ de los A_k

Tomando el complemento de (e) tenemos $1 - \prod_{k=1}^{n} P_k$