Diferenciabilidad

1. Derivada

Recordemos que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es diferenciable en x_0 y $f'(x_0)$ es su derivada en x_0, entonces

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

es una aproximación lineal de f cerca de x_0. Esta observación nos motiva a definir diferenciabilidad de una función en $\mathbb{R}^n$ de la siguiente manera.

Definición 3.1. Sea D abierto en $\mathbb{R}^n$ y $f : D \to \mathbb{R}^m$. Decimos que f es *diferenciable en* $x_0 \in D$ si existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $|x - x_0| < \delta$ entonces

$$|f(x) - f(x_0) - T(x - x_0)| < \varepsilon |x - x_0|. \tag{3.1}$$

En otras palabras, f es diferenciable en x_0 si

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|f(x) - f(x_0) - T(x - x_0)|}{|x - x_0|} = 0,$$

o, de forma equivalente,

$$\lim_{h \to 0} \frac{|f(x + h) - f(x) - Th|}{|h|} = 0.$$

Teorema 3.2. *Si f es diferenciable en x_0, entonces la función lineal T en* (3.1) *es única.*

Demostración. Supongamos que $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es lineal y

$$\lim_{h \to 0} \frac{|f(x_0 + h) - f(x_0) - Sh|}{|h|} = 0.$$

Demostraremos primero que

$$\frac{|Th - Sh|}{|h|} \to 0$$

cuando $h \to 0$. Ahora bien

$$\begin{aligned}\frac{|Th - Sh|}{|h|} &= \frac{|Th - (f(x_0 + h) - f(x_0)) + (f(x_0 + h) - f(x_0)) - Sh|}{|h|} \\ &\leq \frac{|Th - (f(x_0 + h) - f(x_0))|}{|h|} + \frac{|(f(x_0 + h) - f(x_0)) - Sh|}{|h|} \\ &\to 0\end{aligned}$$

cuando $h \to 0$.

Ahora, sea $x \in \mathbb{R}^n$ y $x \neq 0$. Si hacemos $h = tx$, $t \in \mathbb{R}$, entonces

$$\lim_{t \to 0} \frac{|T(tx) - S(tx)|}{|tx|} = 0.$$

Como T y S son lineales,

$$\frac{|T(tx) - S(tx)|}{|tx|} = \frac{|Tx - Sx|}{|x|},$$

así que $Tx = Sx$. □

La función lineal T es llamada *la derivada de f en x_0*, y se denota por $Df(x_0)$.

Ejemplo 3.3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = \operatorname{sen} x$ y $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Demostraremos que f es diferenciable en (x_0, y_0) y la función lineal T está dada por $T(x, y) = x \cos x_0$. Sea $(h, k) \in \mathbb{R}^2$, con $(h, k) \neq (0, 0)$. Entonces

$$\frac{|f((x_0, y_0) + (h, k)) - f(x_0, y_0) - T(h, k)|}{|(h, k)|} \leq \frac{|\operatorname{sen}(x_0 + h) - \operatorname{sen} x_0 - h \cos x_0|}{|h|} \to 0$$

porque

$$\lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x_0 + h) - \operatorname{sen} x_0}{h} = \cos x_0.$$

Como todas las transformaciones lineales se pueden expresar como multiplicación por una matriz, lo mismo sucede para la transformación $Df(x_0)$. En el ejemplo anterior,

$$Df(x_0)(x, y) = (x \cos x_0) = (\cos x_0, 0) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

así que $Df(x_0)$ induce la matriz, de 1×2, dada por $(\cos x_0, 0)$.

A la matriz inducida por la transformación $Df(x_0)$ se le llama *Jacobiano*, y se denota por $f'(x_0)$.

En el ejemplo anterior, $f'(x_0) = (\cos x_0, 0)$.

La siguiente proposición establece la diferenciabilidad de las funciones básicas.

Proposición 3.4.

1. *Si* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *es constante, entonces*
$$Df(x_0) = 0$$
para cada $x_0 \in \mathbb{R}^n$.
2. *Si* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *es lineal, entonces*
$$Df(x_0) = f$$
para cada $x_0 \in \mathbb{R}^n$.
3. *Si* $\mathrm{sum} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *está dada por* $\mathrm{sum}(x, y) = x + y$*, entonces*
$$D\,\mathrm{sum}(x_0, y_0) = \mathrm{sum}$$
para cada $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.
4. *Si* $\mathrm{mult} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *está dada por* $\mathrm{mult}(x, y) = xy$*, entonces*
$$D\,\mathrm{mult}(x_0, y_0)(x, y) = y_0 x + x_0 y$$
para cada $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

Demostración.

1. Si f es constante,
$$\frac{|f(x_0 + h) - f(x_0)|}{|h|} = 0$$
para todo $x_0, h \in \mathbb{R}^n$.
2. Si f es lineal, $f(x_0 + h) = f(x_0) + f(h)$, así que
$$\frac{|f(x_0 + h) - f(x_0) - f(h)|}{|h|} = 0$$
para todo $x_0, h \in \mathbb{R}^n$.
3. Se sigue inmediatamente de la anterior.
4. Tenemos,
$$\frac{|\,\mathrm{mult}(x_0 + h, y_0 + k) - \mathrm{mult}(x_0, y_0) - (y_0 h + x_0 k)|}{|(h, k)|} =$$
$$\frac{|(x_0 + h)(y_0 + k) - x_0 y_0 - y_0 h - x_0 k|}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \frac{|hk|}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$
$$\leq \frac{1/2(h^2 + k^2)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = |(h, k)| \to 0$$
cuando $(h, k) \to 0$.

□

Proposición 3.5. *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Entonces f es diferenciable en x_0 si y sólo si cada $f^i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, ..., m$, es diferenciable en x_0. En tal caso,*

$$Df(x_0)(x) = \big(Df^1(x_0)(x), ..., Df^m(x_0)(x)\big).$$

Demostración. Supongamos primero que f es diferenciable en x_0, y sea, para cada i, $T_i = \pi^i \circ Df(x_0)$. Entonces

$$\frac{|f^i(x_0+h) - f^i(x_0) - T_i h|}{|h|} \leq \frac{|f(x_0+h) - f(x_0) - Df(x_0)(h)|}{|h|} \to 0$$

cuando $h \to 0$, así que cada f^i es diferenciable en x_0.

Supongamos ahora que cada f^i es diferenciable en x_0 y sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ la transformación

$$Tx = (Df^1(x_0)(x), ..., Df^m(x_0)(x)).$$

Entonces

$$\frac{|f(x_0+h) - f(x_0) - Th|}{|h|} = \frac{1}{|h|}\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(f^i(x_0+h) - f^i(x_0) - Df^i(x_0)(h))^2}$$
$$\leq \sqrt{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{|f^i(x_0+h) - f^i(x_0) - Df^i(x_0)(h)|}{|h|} \to 0$$

cuando $h \to 0$. □

Ejemplo 3.6. Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ está dada por $f(x,y) = (\operatorname{sen} x, xy)$, entones

$$Df(x_0,y_0)(x,y) = (x\cos x_0, y_0 x + x_0 y),$$

es decir, el vector cuyas coordenadas son las derivadas de $\operatorname{sen} x$ y xy en (x_0, y_0), respectivamente. El Jacobiano está dado por

$$f'(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} \cos x_0 & 0 \\ y_0 & x_0 \end{pmatrix}.$$

Si queremos, sin embargo, calcular la derivada de $f(x,y) = \operatorname{sen} xy$ en algún punto (x_0, y_0), si es que existe, entonces ya sea utilizamos la definición de la derivada, u observamos que

$$\operatorname{sen} xy = \operatorname{sen}(\operatorname{mult}(x,y)) = \operatorname{sen} \circ \operatorname{mult}(x,y),$$

es decir, $(x,y) \mapsto \operatorname{sen} xy$ es la composición de sen con la multiplicación mult.

Teorema 3.7 (Regla de la cadena)**.** *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferenciable en x_0, $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ diferenciable en $f(x_0)$. Entonces $g \circ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ es diferenciable en x_0 y*

$$D(g \circ f)(x_0) = Dg(f(x_0)) \circ Df(x_0).$$

Es decir, la derivada de la composición de dos funciones está dada por la composición de las derivadas. Esto implica, desde luego, que

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0),$$

expresión familiar en el cáculo en $\mathbb{R}$.

Demostración. Definimos $y_0 = f(x_0)$, $T = Df(x_0)$ y $S = Dg(y_0)$. Sean

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= f(x) - f(x_0) - T(x - x_0), \\ \psi(y) &= g(y) - g(y_0) - S(y - y_0), \\ \rho(x) &= g \circ f(x) - g(y_0) - S \circ T(x - x_0). \end{aligned}$$

Como f y g son diferenciables en x_0 y y_0, respectivamente,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|\varphi(x)|}{|x - x_0|} = 0, \qquad \lim_{y \to y_0} \frac{|\psi(y)|}{|y - y_0|} = 0,$$

y queremos demostrar que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|\rho(x)|}{|x - x_0|} = 0.$$

Observemos primero que

$$\begin{aligned} \rho(x) &= g(f(x)) - g(y_0) - S(T(x - x_0)) \\ &= g(f(x)) - g(y_0) - S(f(x) - y_0) + S(\varphi(x)) \\ &= \psi(f(x)) + S\varphi(x). \end{aligned}$$

Por ser lineales, existen $M_1, M_2 > 0$ tales que $|Tx| \leq M_1|x|$ y $|Sy| \leq M_2|y|$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y $y \in \mathbb{R}^m$. Así que, primero,

$$\frac{|S\varphi(x)|}{|x - x_0|} \leq M_1 \frac{|\varphi(x)|}{|x - x_0|} \to 0$$

cuando $x \to x_0$. También tenemos que, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|\psi(y)| \leq \varepsilon|y - y_0|$ para $|y - y_0| < \delta$. Además, existe η tal que $|x - x_0| < \eta$ implica que $|f(x) - y_0| < \delta$. Entonces, si $|x - x_0| < \eta$,

$$|\psi(f(x))| \leq \varepsilon|f(x) - y_0| = \varepsilon|\varphi(x) + T(x - x_0)| \leq \varepsilon|\varphi(x)| + \varepsilon M_1|x - x_0|,$$

así que, para $0 < |x - x_0| < \eta$,

$$\frac{|\psi(f(x))|}{|x - x_0|} \leq \varepsilon \frac{|\varphi(x)|}{|x - x_0|} + \varepsilon M_1.$$

Por lo tanto

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|\Psi(f(x))|}{|x - x_0|} = 0.$$

$\square$

Ejemplo 3.8. Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ está dada por $f(x,y) = \operatorname{sen} xy$, entonces $f = \operatorname{sen} \circ \operatorname{mult}$, así que

$$Df(x_0,y_0)(x,y) = D\operatorname{sen}(x_0y_0)(xy_0 + yx_0) = (xy_0 + yx_0)\cos(x_0y_0).$$

El Jacobiano está dado por

$$f'(x_0,y_0) = \cos(x_0y_0)(y_0,x_0) = (y_0\cos(x_0y_0), x_0\cos(x_0y_0)).$$

Corolario 3.9. *Sean $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciables en x_0. Entonces*

1. *$f + g$ es diferenciable en x_0 y*
$$D(f+g)(x_0) = Df(x_0) + Dg(x_0).$$
2. *fg es diferenciable en x_0 y*
$$D(fg)(x_0) = f(x_0)Dg(x_0) + g(x_0)Df(x_0).$$

Demostración. 1. Si $F(x) = (f(x), g(x))$, $f+g = \operatorname{sum} \circ F$. Entonces
$$D(f+g)(x_0) = D\operatorname{sum}(F(x_0)) \circ DF(x_0).$$
Es decir, como $DF(x_0)(x) = (Df(x_0)(x), Dg(x_0)(x))$,
$$D(f+g)(x_0)(x) = Df(x_0)(x) + Dg(x_0)(x).$$
2. $fg = \operatorname{mult} \circ F$, así que
$$D(fg)(x_0)(x) = D\operatorname{mult}(f(x_0), g(x_0))(Df(x_0)(x), Dg(x_0)(x)) = \\ g(x_0)Df(x_0)(x) + f(x_0)Dg(x_0)(x).$$

$\square$

Ejemplo 3.10. Sea $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por
$$f(x,y) = x^y.$$
Entonces $f(x,y) = e^{y\log x}$. Si $F(x,y) = (\log x, y)$,
$$f = \exp \circ \operatorname{mult} \circ F$$
Entonces
$$DF(x_0,y_0)(x,y) = \left(\frac{x}{x_0}, y\right), \qquad F'(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x_0} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$D\operatorname{mult}(\log x_0, y_0) = xy_0 + ylogx_0, \qquad \operatorname{mult}'(\log x_0, y_0) = (y_0, \log x_0),$$
y
$$D\exp(y_0\log x_0)(x) = xe^{y_0\log x_0} = xx_0^{y_0}, \qquad \exp'(y_0\log x_0) = x_0^{y_0}.$$
Entonces
$$\begin{aligned} Df(x_0)(x,y) &= D\exp(y_0\log x_0) \circ D\operatorname{mult}(\log x_0, y_0)(x/x_0, y) \\ &= D\exp(y_0\log x_0)(xy_0/x_0 + y\log x_0) = x_0^{y_0}(xy_0/x_0 + y\log x_0) \\ &= xy_0x_0^{y_0-1} + yx_0^{y_0}\log x_0, \end{aligned}$$

y el Jacobiano está dado por

$$\begin{aligned} f'(x_0,y_0) &= x_0^{y_0}(y_0,\log x_0)\begin{pmatrix} \frac{1}{x_0} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= x_0^{y_0}\left(\frac{y_0}{x_0},\log x_0\right) = (y_0 x_0^{y_0-1}, x_0^{y_0}\log x_0). \end{aligned}$$

2. Derivadas parciales

Definición 3.11. Sean $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $x_0,u\in\mathbb{R}^n$. Si el límite

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+tu)-f(x_0)}{t}, \qquad t\in\mathbb{R},$$

existe, le llamamos la *derivada direccional* en la dirección u y se denota por $D_u f(x_0)$.

Si $u=e_i$, $D_{e_i}f(x_0)$ es llamada la *i-ésima derivada parcial* de f en x_0, y se denota por $D_i f(x_0)$.

Ejemplo 3.12. Si $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ está dada por $f(x,y)=\operatorname{sen} xy$, entonces

$$D_1 f(x_0,y_0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t,y_0)-f(x_0,y_0)}{t}=y_0\cos(x_0y_0).$$

Como lo muestra el ejemplo anterior, las derivadas parciales son esencialmente derivadas en $\mathbb{R}$, asumiendo las demás variables como constantes. No es sorpresa, entonces, que las derivadas parciales satisfagan las propiedades de la derivada en $\mathbb{R}$.

Decimos que $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ tiene un *mínimo local* en x_0 si existe un rectángulo abierto R que contiene a x_0 y

$$f(x_0)\le f(x) \quad \text{para todo } x\in R.$$

De manera similar, decimos que f tiene un *máximo local* en x_0 si existe un rectángulo abierto R que contiene a x_0 y

$$f(x_0)\ge f(x) \quad \text{para todo } x\in R.$$

Proposición 3.13. *Si $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ tiene un mínimo o máximo local en x_0 y sus derivadas parciales existen, entonces $D_i f(x_0)=0$, $i=1,\dots,n$.*

Proposición 3.14 (Teorema del Valor Medio)**.** *Si las derivadas parciales de $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ existen, $x_0\in\mathbb{R}^n$ y $t\in\mathbb{R}$, entonces existe c entre x_0^i y x_0^i+t tal que*

$$\begin{aligned} f(x_0^1,\dots,x_0^i+t,\dots,x_0^n)-f(x_0^1,\dots,x_0^i,\dots,x_0^n)& \\ =tD_i f(x_0^1,\dots,c,\dots,x_0^n).& \end{aligned}$$

Las demostraciones de estas proposiciones se siguen directamente de sus versiones en una variable, y las dejamos como ejercicio (ejercicios 4 y 5).

Si una función es diferenciable, entonces sus derivadas parciales existen, como lo enuncia el siguiente teorema.

Teorema 3.15. *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable en x_0. Entonces cada $D_i f(x_0)$ existe y*

$$f'(x_0) = (D_1 f(x_0), ..., D_n f(x_0)).$$

Demostración. Para demostar que $D_i f(x_0)$ existe, sea $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ dada por

$$h(t) = f(x_0^1, \ldots, x_0^i + t, \ldots, x_0^n) = x_0 + te_i.$$

Entonces $f(x_0 + te_i) = f \circ h(t)$. Como h es diferenciable en 0 y f es diferenciable en $x_0 = h(0)$, la regla de la cadena implica que $f \circ h$ es diferenciable en 0. Pero $(f \circ h)'(0)$ es $D_i f(x_0)$ y

$$(f \circ h)'(0) = f'(x_0)h'(0) = f'(x_0)e_i,$$

así que $D_i f(x_0)$ es la i-ésima componente de $f'(x_0)$. □

Nota que la inversa de este teorema es falsa, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.16. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < y < x^2; \\ 0 & \text{de otra forma.} \end{cases}$$

Entonces $f(x, 0) = f(0, y) = 0$ para todo x, y, por lo que $D_1 f(0, 0) = D_2 f(0, 0) = 0$. Sin embargo, f ni siquiera es continua en $(0, 0)$.

De hecho, para cualquier $u \in \mathbb{R}^2$, $f(tu) = 0$ para un intervalo alrededor de 0, así que $D_u f(0, 0) = 0$.

Corolario 3.17. *Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es diferenciable en x_0, entonces cada $D_j f^i(x_0)$ existe y $f'(x_0)$ es la matriz de $m \times n$ con entradas $D_j f^i(x_0)$.*

Ejemplo 3.18. Consideremos de nuevo $f(x, y) = (\operatorname{sen} xy, x^y)$. Del corolario se obtiene inmediatamente

$$f'(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} y_0 \cos(x_0 y_0) & x_0 \cos(x_0 y_0) \\ y_0 x_0^{y_0 - 1} & x_0^{y_0} \log x_0 \end{pmatrix}.$$

Teorema 3.19. *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que cada una de las $D_i f(x)$ existen en un rectángulo abierto que contiene a x_0 y son continuas en x_0. Entonces f es diferenciable en x_0 y*

$$f'(x_0) = (D_1 f(x_0), ..., D_n f(x_0)).$$

Si las derivadas parciales de f existen un rectángulo alrededor de x_0 y son continuas en x_0, se dice que f es *continuamente diferenciable* en x_0.

Demostración. Supongamos que las derivadas parciales $D_i f(x)$ existen para $x \in \mathbb{R}$, donde R es un recatángulo abierto que contiene a x_0. Si h es tal que $x_0 + h \in R$, por la proposición 3.14,

$$\begin{aligned}
&f(x_0^1 + h^1, x_0^2 + h^2, \ldots, x_0^n + h^n) - f(x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^n) = \\
&\qquad f(x_0^1 + h^1, x_0^2 + h^2, \ldots, x_0^n + h^n) - f(x_0^1, x_0^2 + h^2, \ldots, x_0^n + h^n) \\
&\qquad + f(x_0^1, x_0^2 + h^2, \ldots, x_0^n + h^n) - f(x_0^1, x_0^2, x_0^3 + h^3, \ldots, x_0^n + h^n) \\
&\qquad\qquad + \ldots + f(x_0^1, x_0^2, ..., x_0^n + h^n) - f(x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^n) \\
&\qquad\qquad\qquad = D_1 f(c_1) h^1 + \ldots + D_n f(c_n) h^n,
\end{aligned}$$

donde cada uno de los $c_i \in \mathbb{R}$ están entre x_0^i y h^i, por lo que $c_i \to x_0^i$ cuando $|h| \to 0$. Entonces

$$\begin{aligned}
\frac{|f(x_0 + h) - f(x_0) - \sum_i D_i f(x_0) h^i|}{|h|} &\leq \sum_{i=1}^n |D_i f(c_i) - D_i f(x_0)| \frac{|h^i|}{|h|} \\
&\leq \sum_{i=1}^n |D_i f(c_i) - D_i f(x_0)|,
\end{aligned}$$

y

$$\lim_{h \to 0} \frac{|f(x_0 + h) - f(x_0) - \sum_i D_i f(x_0) h^i|}{|h|} = 0,$$

porque las $D_i f$ son continuas en x_0. □

Definición 3.20. Decimos que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es *continuamente diferenciable* en x_0 si cada una de las derivadas parciales $D_j f^i(x)$ existe en un rectángulo abierto alrededor de x_0 y es continua en x_0.

Corolario 3.21. *Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es continuamente diferenciable en x_0, entonces es diferenciable en x_0.*

La inversa a este corolario es falsa, como lo muestra el siguiente y bien conocido ejemplo.

Ejemplo 3.22. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0; \\ x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} & x \neq 0. \end{cases}$$

Entonces f es diferenciable en $\mathbb{R}$, pero $D_1 f(x)$ no es continua en 0.

Para terminar esta sección, establecemos la siguiente versión, clásica, de la regla de la cadena.

Corolario 3.23. *Sea $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ continuamente diferenciable en x_0, y $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ diferenciable en $g(x_0)$. Entonces*

$$D_i(f \circ g)(x_0) = \sum_{j=1}^{m} D_j f(g(x_0)) D_i g^j(x_0). \tag{3.2}$$

Demostración. Como g es continuamente diferenciables en x_0, g es diferenciable en x_0 y por la regla de la cadena $f \circ g$ es diferenciable en x_0. Además

$$\begin{aligned}(f \circ g)'(x_0) &= f'(g(x_0))g'(x_0)\\ &= \begin{pmatrix} D_1 f(g(x_0)) & \dots & D_m f(g(x_0)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 g^1(x_0) & \dots & D_n g^1(x_0) \\ D_1 g^2(x_0) & \dots & D_n g^2(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1 g^m(x_0) & \dots & D_n g^m(x_0) \end{pmatrix},\end{aligned}$$

de donde la ecuación (3.2) se sigue inmediatamente. □

3. Teorema de la función inversa

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continuamente diferenciable en una vecindad de $x_0 \in \mathbb{R}$ y $f'(x_0) \neq 0$, sabemos que existe una vecindad de x_0, digamos U, tal que f es invertible en U, f^{-1} es diferenciable en $f(U)$ y

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}.$$

A continuación estableceremos la versión de este resultado para funciones en $\mathbb{R}^n$.

Teorema 3.24 (Función Inversa)**.** *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continuamente diferenciable en una vecindad de $x_0 \in \mathbb{R}^n$, tal que* $\det(f'(x_0)) \neq 0$. *Entonces existe una vecindad V de x_0 y una vecindad W de $f(x_0)$ tales que $f : V \to W$ tiene inversa $f^{-1} : W \to V$, es diferenciable y, para cada $y \in W$,*

$$(f^{-1})'(y) = [f'(f^{-1}(y))]^{-1}.$$

Es decir, la inversa f^{-1} es diferenciable y su matriz Jacobiana es la inversa la matriz Jacobiana de f. Para la demostración del Teorema de la Función Inversa haremos uso del siguiente lema, el cual se sigue del Teorema del Valor Medio.

Lema 3.25. *Sea $R \subset \mathbb{R}^n$ un rectángulo, $f : R \to \mathbb{R}^n$ continuamente diferenciable y $M > 0$ tal que $|D_j f^i(x)| \leq M$ para $i, j = 1, \dots, n$, $x \in R$. Entonces*

$$|f(x) - f(y)| \leq n^2 M |x - y|, \qquad x, y \in R.$$

Demostración. Por el Teorema del Valor Medio, existen $z_1, \ldots, z_n \in R$ tal que

$$\begin{aligned}
&f^i(x^1, x^2, ..., x^n) - f^i(y^1, y^2, ..., y^n) = \\
&f^i(x^1, x^2, ..., x^n) - f^i(y^1, x^2, ..., x^n) + f^i(y^1, x^2, ..., x^n) - f^i(y^1, y^2, ..., x^n) \\
&\qquad + ... + f^i(y^1, y^2, ...y^{n-1}, x^n) - f^i(y^1, y^2, ..., y^n) \\
&\quad = D_1 f^i(z_1)(x^1 - y^1) + D_2 f^i(z_2)(x^2 - y^2) + ... + D_n f^i(z_n)(x^n - y^n),
\end{aligned}$$

así que

$$|f^i(x) - f^i(y)| \leq \sum_{j=1}^{n} |D_j f^i(z_j)||x^j - y^j| \leq nM|x - y|.$$

Por lo tanto $|f(x) - f(y)| \neq n^2 M|x - y|$. □

Demostración del Teorema de la Función Inversa. Sea $T = Df(x_0)$. Para la demostración empezaremos por observar que podemos asumir que T es la identidad. Como $\det(f'(x_0)) \neq 0$, T es invertible. Por la regla de la cadena,

$$D(T^{-1} \circ f)(x_0) = DT^{-1}(f(x_0))Df(x_0) = T^{-1} \circ T = \text{Id}.$$

Es claro que, si el teorema es cierto para $T^{-1} \circ f$, entonces será cierto para f. De ahora en adelante, asumimos que T es la transformación identidad.

Dividiremos la demostración en una serie de pasos.

Paso 1. Existe un rectángulo cerrado R tal que $x_0 \in R^0$ y, para todo $x \in R$, $x \neq x_0$,

$$f(x) \neq f(x_0).$$

Esto es cierto porque, si $f(x) = f(x_0)$,

$$\frac{|f(x) - f(x_0) - T(x - x_0)|}{|x - x_0|} = \frac{|x - x_0|}{|x - x_0|} = 1.$$

Pero el límite cuando $x \to x_0$ es cero, lo cual inmediatamente implica el paso 1.

De hecho, podemos escoger R tal que

1. $\det(f'(x)) \neq 0$ para $x \in R$; y
2. $$|D_j f^i(x_1) - D_j f^i(x_2)| \leq \frac{1}{2n^2}$$
   para $x_1, x_2 \in R$,

porque f es continuamente diferenciable en una vecindad de x_0.

Paso 2. Para $x_1, x_2 \in R$, $|x_1 - x_2| \leq 2|f(x_1) - f(x_2)|$.

Sea $g : R \to \mathbb{R}^n$ dada por $g(x) = f(x) - x$. Entonces g es continuamente diferenciable y $D_j g^i(x_0) = 0$, porque

$$D_j f^i(x_0) = \begin{cases} 1 & i = j, \\ 0 & i \neq j. \end{cases}$$

Entonces

$$|D_j g^i(x)| = |D_j g^i(x) - D_j g^i(x_0)| = |D_j f^i(x) - D_j f^i(x_0)| \leq \frac{1}{2n^2}$$

para todo $x \in R$. Entonces, por el lema 3.25,

$$|g(x_1) - g(x_2)| =\leq n^2 \frac{1}{2n^2}|x_1 - x_2| = \frac{1}{2}|x_1 - x_2|.$$

Ahora bien, si $x_1, x_2 \in R$,

$$|x_1 - x_2| - |f(x_1) - f(x_2)| \leq |x_1 - x_2 - (f(x_1) - f(x_2))| \leq \frac{1}{2}|x_1 - x_2|,$$

y por lo tanto $\frac{1}{2}|x_1 - x_2| \leq |f(x_1) - f(x_2)|$.

Paso 3. Existe un abierto $W \subset \mathbb{R}^n$, $f(x_0) \in W$, tal que, si $x \in \partial R$, entonces

$$|y - f(x_0)| < |y - f(x)|$$

para todo $y \in W$.

Como $x_0 \in R^0$, entonces $f(x) \neq f(x_0)$ para $x \in \partial R$. Como ∂R es compacto, $f(\partial R)$ es compacto, por lo que existe $r > 0$ tal que

$$|f(x_0) - f(x)| \geq r$$

para todo $x \in \partial R$. Sea $W = B^0_{r/2}(f(x_0))$. Entonces, si $y \in W$ y $x \in \partial R$,

$$|y - f(x)| \geq |f(x) - f(x_0)| - |f(x_0) - y| > r - r/2 > |f(x_0) - y|.$$

Paso 4. Para cada $y \in W$ existe un único $x \in R$ tal que $f(x) = y$.

Dado $y \in W$, sea $h : R \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = |y - f(x)|^2$. Mostraremos que h toma un mínimo y que este mínimo es 0. Como R es compacto, h tiene un mínimo y, digamos, lo toma en $\bar{x}$. Por el paso 3, $\bar{x} \notin \partial R$, ya que

$$h(x_0) < h(x) \qquad \text{para } x \in \partial R.$$

Así que $\bar{x} \in R^0$, y entonces, por la proposición 3.13,

$$D_j(h(\bar{x})) = 0$$

para todo j. Esto significa que

$$\sum_{i=1}^{n} 2(y^i - f^i(\bar{x}))D_j f^i(\bar{x}) = 0$$

para cada $j = 1, \ldots, n$. Pero, como la matriz $(D_j f^i(\bar{x}))$ es no singular, $y^i - f^i(\bar{x}) = 0$ para todo i. Por lo tanto, $f(\bar{x}) = y$. La unicidad se sigue del paso 2.

Paso 5. Para $y_1, y_2 \in W$, $|f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y_2)| \leq 2|y_1 - y_2|$.

Se sigue fácilmente del paso 2.

Además, cuando restringimos f a $V = f^{-1}(W) \cap R^0$, $f^{-1} : W \to V$. Llegamos entonces al final de la demostración.

Paso 6. $f^{-1} : W \to V$ es diferenciable y, para $y \in W$,

$$D(f^{-1})(y) = Df(f^{-1}(y))^{-1}.$$

Sean $y \in W$, $x = f^{-1}(y)$ y $S = Df(x)$. Queremos demostrar que f^{-1} es diferenciable en y y que $Df^{-1}(y) = S^{-1}$, es decir

$$\lim_{z \to y} \frac{|f^{-1}(z) - f^{-1}(y) - S^{-1}(z - y)|}{|z - y|} = 0.$$

Sea $u = f^{-1}(z)$, y definimos

$$\varphi(u) = f(u) - f(x) - S(u - x).$$

Entonces

$$\lim_{u \to x} \frac{|\varphi(u)|}{|u - x|} = 0.$$

Pero

$$S^{-1}\varphi(u) = S^{-1}(z - y) - (f^{-1}(z) - f^{-1}(y)),$$

es decir,

$$f^{-1}(z) - f^{-1}(y) - S^{-1}(z - y) = -S^{-1}\varphi(u).$$

Lo que queremos mostrar entonces es que

$$\lim_{z \to y} \frac{|S^{-1}\varphi(f^{-1}(z))|}{|z - y|} = 0.$$

Sea $M > 0$ tal que $|S^{-1}v| \leq M|v|$ para todo $v \in \mathbb{R}^n$. Entonces, por el paso 5,

$$\begin{aligned}\frac{|S^{-1}\varphi(f^{-1}(z))|}{|z - y|} &\leq \frac{M|\varphi(f^{-1}(z))|}{|f^{-1}(z) - f^{-1}(y)|} \frac{|f^{-1}(z) - f^{-1}(y)|}{|z - y|} \\ &\leq \frac{2M|\varphi(f^{-1}(z))|}{|f^{-1}(z) - f^{-1}(y)|}\end{aligned}$$

para todo $z \in R$, $z \neq y$, lo cual converge a 0 cuando $z \to y$. $\square$

4. Teorema de la función implícita

Teorema 3.26 (Función Implícita)**.** *Sea $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ continuamente diferenciable alrededor de $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ y $f(x_0, y_0) = 0$. Sea M la matriz de $m \times m$ dada por*

$$(D_{n+j} f^i(x_0, y_0)), \qquad i, j = 1, \dots m,$$

y suponemos que $\det M \neq 0$. *Entonces existe un abierto $U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, $x_0 \in U$, y un abierto $V \subset \mathbb{R}^m$, $y_0 \in V$, tales que, para cada $x \in U$, existe un único $g(x) \in V$ tal que $f(x, g(x)) = 0$. Más aún, g es diferenciable.*

Es decir, la ecuación

$$f(x, y) = 0$$

define *implícitamente* y como función de x, siempre y cuando las derivadas en y formen una matriz no singular.

La demostración del Teorema de la Función Implícita se sigue del Teorema de la Función Inversa.

Demostración. Sea $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ la función definida por $F(x, y) = (x, f(x, y))$. Entonces la matriz Jacobiana $F'(x_0, y_0)$ está dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ D_1 f^1(x_0, y_0) & \dots & D_n f^1(x_0, y_0) & D_{n+1} f^1(x_0, y_0) & \dots & D_{n+m} f^1(x_o, y_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1 f^m(x_0, y_0) & \dots & D_n f^m(x_0, y_0) & D_{n+1} f^m(x_0, y_0) & \dots & D_{n+m} f^m(x_o, y_0) \end{pmatrix},$$

es decir, es de la forma

$$F'(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \mathrm{Id} & 0 \\ \star & M \end{pmatrix},$$

así que $\det F'(x_0, y_0) = \det M \neq 0$.

Por el teorema de la función inversa, existe un abierto $U \times V$ alrededor de (x_0, y_0) y un abierto W alrededor de $F(x_0, y_0)$ tales que $F : U \times V \to W$ tiene inversa $F^{-1} : W \to U \times V$ y es diferenciable. No es difícil ver que esta inversa es de la forma

$$F^{-1}(u, v) = (u, h(u, v)),$$

Para $(u, v) \in W$, y $h : W \to V$ es diferenciable.

Como $F^{-1}(x,y) = (x, h(x,y))$,

$$(x,y) = F(x, h(x,y)) = (x, f(x, h(x,y))),$$

por lo que

$$f(x, h(x,y)) = y. \tag{3.3}$$

Así que $f(x, h(x,0)) = 0$, y por lo tanto podemos escoger $g(x) = h(x,0)$. $\square$

Es fácil calcular $Dg(x)$ para cada $x \in U$: Como $f(x, g(x)) = 0$,

$$f^i(x, g(x)) = 0$$

para cada $i = 1, 2, ..., m$. Calculando la j-ésima derivada parcial utilizando la regla de la cadena,

$$D_j f^i(x, g(x)) + \sum_{l=1}^{m} D_{n+l} f^i(x, g(x)) D_j g^l(x) = 0. \tag{3.4}$$

Ahora bien, 3.4 es un sistema lineal con m ecuaciones y m variables, y, además,

$$\det \big(D_{n+l} f^i(x, g(x)) \big)_{i,l} \neq 0.$$

Así que podemos resolver, de forma unívoca, para cada $D_j g^l(x)$.

Veamos esto a través de un ejemplo.

Ejemplo 3.27. Consideremos la ecuación

$$x^2 y + 2xy^2 = 0,$$

alrededor del punto $(1,1)$. Como

$$D_2 f(1,1) = x^2 + 4xy \Big|_{(1,1)} \neq 0,$$

la ecuación define implícitamente y como función de x, digamos $y = g(x)$, en una vecindad de $(1,1)$. Sean

$$f(x,y) = x^2 y + 2xy^2 \qquad \text{y} \qquad F(x) = f(x, g(x)).$$

Entonces

$$F'(x) = D_1 f(x, g(x)) + D_2 f(x, g(x)) g'(x) = 0,$$

es decir

$$(2xg(x) + 2g(x)^2 + (x^2 + 4xg(x))g'(x) = 0,$$

de donde obtenemos que

$$g'(x) = -\frac{2xg(x) + 2g(x)^2}{x^2 + 4xg(x)}.$$

Usualmente se escribe

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy + 2y^2}{x^2 + 4xy}.$$

El Teorema de la Función Implícita, a través de la ecuación (3.3), implica que la función f es localmente una proyección sobre el espacio $\mathbb{R}^m$. Este resultado es conocido como el Teorema del Rango. Recordemos que, si M es una matriz de $n \times m$, su rango $\rho(M)$ es el número máximo de columnas linealmente independientes de M. Es decir, la dimensión de su imagen en $\mathbb{R}^m$.

Teorema 3.28 (Rango)**.** *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ continuamente diferenciable alrededor de x_0 y $f(x_0) = 0$. Suponemos que $m \leq n$ y que $f'(x_0)$ tiene rango igual a m. Entonces existe un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$, $x_0 \in U$, y una función $\Psi : U \to \mathbb{R}^n$ diferenciable tal que*

$$f \circ \Psi(x^1, \ldots, x^n) = (x^{n-m+1}, \ldots, x^n).$$

Demostración. Como $\rho(f'(x_0)) = m$, $f'(x_0)$ tiene m columnas linealmente independientes, digamos las columnas $j_1 < j_2 < \ldots < j_m$. Sea $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una permutación tal que

$$(x^1, x^2, \ldots, x^n) = g(\ldots, x^{j_1}, \ldots, x^{j_m}).$$

Es decir, g manda las últimas m coordenadas de cada punto en $\mathbb{R}^n$ a las coodernadas $j_1, \ldots, j_m$. Entonces $f \circ g : \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ satisface las hipótesis del Teorema de la Función Implícita, así que existe $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que

$$f \circ g \circ H(x^1, \ldots, x^n) = (x^{n-m+1}, \ldots, x^n).$$

Nota que H es de la forma $(x', x'') \mapsto (x', h(x', x''))$, como en la ecuación (3.3). Entonces tomamos $\Psi = g \circ H$. $\square$

5. Derivadas de orden mayor

Si la función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es diferenciable, las derivadas parciales $D_i f(x)$ existen, y pueden ser ellas mismas diferenciables. Si cada $D_i f(x)$ es diferenciable, entonces sus derivadas parciales existen y se denominan derivadas parciales *de segundo orden* de f. Éstas se denotan por

$$D_{ij} f(x) = D_j(D_i f)(x).$$

Similarmente, las derivadas parciales de orden k se denotan por

$$D_{i_1 i_2 \ldots i_k} f(x) = D_{i_k} \cdots (D_{i_2}(D_{i_1} f))(x).$$

En general, $D_{ij} f(x) \neq D_{ji} f(x)$, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.29. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Sus derivadas parciales están dadas por

$$D_1 f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

$$D_2 f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^5 - 4x^3y^2 - xy^4}{(x^2+y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Para $(x,y) \neq (0,0)$,

$$D_{12} f(x,y) = D_{21} f(x,y) = \frac{x^6 + 9x^4y^2 - 9x^2y^4 - y^6}{(x^2+y^2)^3}.$$

Sin embargo,

$$D_{12} f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{D_1 f(0,h) - D_1 f(0,0)}{h} = -1,$$

y

$$D_{21} f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{D_2 f(h,0) - D_2 f(0,0)}{h} = 1,$$

por lo que $D_{12} f(0,0) \neq D_{21} f(0,0)$.

Nota que, en el ejemplo anterior, $D_{12} f$ y $D_{21} f$ no son continuas en $(0,0)$. De hecho, ni siquiera tienen limite en $(0,0)$. Sin embargo, tenemos el siguiente el teorema.

Teorema 3.30. *Si $D_{ij} f$ y $D_{ji} f$ existen en una vecindad de x_0 y son continuas en x_0, entonces*

$$D_{ij} f(x_0) = D_{ji} f(x_0).$$

Demostración. Suponemos primero que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $i = 1$, $j = 2$, y definimos $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, por

$$F(x) = f(x_0 + x).$$

Tenemos entonces que

$$D_1 F(0) = D_1 f(x_0), \qquad D_2 F(0) = D_2 f(x_0)$$
$$D_{12} F(0) = D_{12} f(x_0), \qquad D_{21} F(0) = D_{21} f(x_0).$$

Si definimos $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ por $G(x^1, x^2) = F(x^2, x^1)$, $D_1 G(0) = D_2 F(0)$ y $D_{12} G(0) = D_{21} F(0)$. Queremos demostrar entonces que

$$D_{12} G(0) = D_{12} F(0).$$

En búsqueda de una contradicción, suponemos que es falso y, sin pérdida de generalidad,

$$D_{12} F(0) > D_{12} G(0).$$

Como ambas derivadas son continuas en $(0,0)$, existe un rectángulo $R = [-\varepsilon,\varepsilon]\times[-\varepsilon,\varepsilon]$ tal que

$$D_{12}F(x) - D_{12}G(x) > 0$$

para $x \in R$. Entonces

$$D_2(D_1(F-G))(x^1,x^2) > 0$$

para $(x^1,x^2) \in [-\varepsilon,\varepsilon]\times[-\varepsilon,\varepsilon]$, así que $x^2 \mapsto D_1(F-G)(x^1,x^2)$ es estrictamente creciente en $[-\varepsilon,\varepsilon]$ para cada $x^1 \in [-\varepsilon,\varepsilon]$. En particular, tenemos que

$$D_1(F-G)(x^1,\varepsilon) > D_1(F-G)(x^1,-\varepsilon).$$

Si definimos $H : [-\varepsilon,\varepsilon] \to \mathbb{R}$ por

$$H(x^1) = (F-G)(x^1,\varepsilon) - (F-G)(x^1,-\varepsilon),$$

$H'(x) > 0$ en $[-\varepsilon,\varepsilon]$, por lo que es estrictamente creciente en $[-\varepsilon,\varepsilon]$ y entonces

$$H(\varepsilon) > H(-\varepsilon). \tag{3.5}$$

Pero

$$H(\varepsilon) = F(\varepsilon,\varepsilon) - G(\varepsilon,\varepsilon) - F(\varepsilon,-\varepsilon) + G(\varepsilon,-\varepsilon)$$

y

$$H(-\varepsilon) = F(-\varepsilon,\varepsilon) - G(-\varepsilon,\varepsilon) - F(-\varepsilon,-\varepsilon) + G(-\varepsilon,-\varepsilon),$$

y, como $G(x^1,x^2) = F(x^2,x^1)$,

$$H(\varepsilon) = -F(\varepsilon,-\varepsilon) + F(-\varepsilon,\varepsilon) = H(-\varepsilon) = F(-\varepsilon,\varepsilon) - F(\varepsilon,-\varepsilon),$$

por lo que $H(\varepsilon) = H(-\varepsilon)$, lo cual es una contradicción con (3.5).

En el caso general, definimos $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ por

$$\phi(u,v) = f(x_0^1,\ldots,\overbrace{u}^{i\text{-ésimo}},\ldots,\overbrace{v}^{j\text{ésimo}},\ldots,x_0^n).$$

Entonces $D_{ij}f(x_0) = D_{12}\phi(x_0^i,x_0^j)$ y $D_{ji}f(x_0) = D_{21}\phi(x_0^i,x_0^j)$, y el teorema se sigue. □

Definición 3.31. Decimos que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es *de clase* C^k, $k = 1,2,\ldots$, y escribimos $f \in C^k$, si las derivadas parciales de orden k

$$D_{i_1 i_2 \ldots i_k} f(x)$$

existen y son continuas. Decimos que f es de clase C^0, o simplemente de clase C, y escribimos $f \in C^0$ ($f \in C$, respectivamente), si f es continua.

Decimos que f es de clase C^∞, denotado $f \in C^\infty$, si todas las derivadas parciales de cualquier orden existen. Es decir, $f \in C^k$ para todo $k \geq 1$.

Ejemplo 3.32. Sea, para $k = 0, 1, 2, \ldots$,

$$f_k(x) \begin{cases} x^k \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

La diferenciabilidad de cada f_k es descrita por la siguiente tabla.

k	En 0, f_k es	Clase
0	discontinua	ninguna
1	continua	C
2	diferenciable, f_k' no continua	C
3	diferenciable con f_k' continua	C^1
4	f_k' diferenciable, f_k'' no continua	C^1
5	f_k'' continua, pero no diferenciable	C^2
$2n$	$f_k^{(n-1)}$ diferenciable, pero $f_k^{(n)}$ no continua	C^{n-1}
$2n+1$	$f_k^{(n)}$ continua, pero no diferenciable	C^n

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función de clase C^k. Definimos $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$\phi(t) = f(x_0 + t(x - x_0)) = f(x_0^1 + t(x^1 - x_0^1), \ldots, x_0^n + t(x^n - x_0^n)).$$

Entonces $\phi(0) = f(x_0)$ y $\phi(1) = f(x)$. Como $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$, $\phi \in C^k(\mathbb{R})$ y

$$\phi^{(k)}(t) = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_k = 1}^{n} D_{i_1 i_2 \ldots i_k} f(x_0 + t(x - x_0)) \prod_{l=1}^{k} (x^{i_l} - x_0^{i_l}).$$

Por el teorema de Taylor, existe $c \in [0, 1]$ tal que

$$\phi(1) = \phi(0) + \phi'(0) + \ldots + \frac{\phi^{k-1}(0)}{(k-1)!} + R_k,$$

donde

$$R_k = \frac{\phi^k(c)}{k!}.$$

Estas observaciones implican el siguiente teorema.

Teorema 3.33. *Si $f \in C^k$, $x_0, x \in \mathbb{R}^n$, entonces existe y entre x_0 y x tal que*

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} D_i f(x_0)(x^i - x_0^i) \tag{3.6}$$

$$+ \ldots + \frac{1}{(k-1)!} \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_k = 1}^{n} D_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}} f(x_0) \prod_{l=1}^{k-1} (x^{i_l} - x_0^{i_l}) + R_k(x),$$

donde

$$R_k(x) = \frac{1}{k!} \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_k = 1}^{n} D_{i_1 i_2 \ldots i_k} f(y) \prod_{l=1}^{k} (x^{i_l} - x_0^{i_l}).$$

Al polinomio de la ecuación (3.6) se le llama *polinomio de Taylor alrededor de x_0 de f*. Si $f \in C^\infty$, podemos calcular tantos sumandos como queramos, y a la serie así obtenida se le llama *expansión de Taylor alrededor de x_0*. Si esta serie converge a $f(x)$, es decir $R_k(x) \to 0$, en una vecindad de x_0, entonces decimos que f es *analítica real* en x_0.

Ejemplo 3.34. Sea $f(x,y) = \operatorname{sen} xy$. Entonces $f(0,0) = 0$, y

$$\begin{aligned}
D_1 f(x,y) &= y\cos xy, \quad D_1 f(0,0) = 0\\
D_2 f(x,y) &= x\cos xy, \quad D_2 f(0,0) = 0\\
D_{11} f(x,y) &= -y^2 \operatorname{sen} xy, \quad D_{11} f(0,0) = 0\\
D_{12} f(x,y) &= \cos xy - xy\operatorname{sen} xy, \quad D_{12} f(0,0) = 1\\
D_{21} f(x,y) &= \cos xy - xy\operatorname{sen} xy, \quad D_{21} f(0,0) = 1\\
D_{22} f(x,y) &= -x^2 \cos xy, \quad D_{22} f(0,0) = 0.
\end{aligned}$$

Entonces, los primeros términos de la expansión de Taylor alrededor de $(0,0)$ de $\operatorname{sen} xy$ son

$$\frac{1}{2}(1(x-0)(y-0) + 1(y-0)(x-0)) = xy.$$

Nota que coinciden con el primer término de la expansión de $\operatorname{sen} w$, con $w = xy$.

Si una función es de clase C^∞, entonces no necesariamente es analítica. De hecho, es posible que la expansión converja a un límite distinto de $f(x)$, como lo muestra que el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.35. Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Entonces f es de clase C^∞, pero $f^{(k)}(0)$ para todo k. Entonces la expansión Taylor de f alrededor de 0 es idénticamente 0, pero $f(x) \neq 0$ para todo $x \neq 0$.

Ejercicios

1. Demuestra que las derivadas direccionales de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ en x_0 satisfacen
$$D_{tu}f(x_0) = tD_u f(x_0),$$
$$D_{u+v}f(x_0) = D_u f(x_0) + D_v f(x_0) \text{ si } f \text{ es diferenciable en } x_0.$$
2. Decimos que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es *homogénea de grado* α si $f(tx) = t^\alpha f(x)$, para $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$.
   Si además f es diferenciable, muestra la fórmula de Euler
$$\sum_{i=1}^{n} x^i D_i f(x) = \alpha f(x).$$
3. Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable y $f(0) = 0$, demuestra que existen $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que
$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} x^i g_i(x).$$
4. Demuestra la proposición 3.13.
5. Demuestra la proposición 3.14.
6. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $f : A \to \mathbb{R}^n$ inyectiva y continuamente diferenciable tal que $\det f'(x) \neq 0$ para todo $x \in A$. Muestra que $f(A)$ es abierto y $f^{-1} : f(A) \to A$ es diferenciable.
   Muestra además que $f(B)$ es abierto para todo $B \subset A$ abierto.
7. *a*) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continuamente diferenciable. Muestra que f no es inyectiva. (*Sugerencia:* Considera la función $g(x, y) = \big(f(x, y), y\big)$.)
   b) Generaliza este resultado a funciones continuamente diferenciables $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, con $m < n$.
8. *a*) Muestra que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisface $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces f es inyectiva.
   b) Sin embargo, muestra que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por
$$f(x, y) = (e^x \cos y, e^y \operatorname{sen} y)$$
   satisface $\det f'(x, y) \neq 0$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, pero no es inyectiva.
9. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continuamente diferenciable tal que existe $c > 0$ tal que
$$|f(x) - f(y)| \geq c|x - y|$$
   para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$. Muestra que
   a) f es inyectiva;
   b) $\det f'(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$; y

c) $f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$. (*Sugerencia:* Como en la demostración del Teorema de la Función Inversa, considera la función $g(x) = |y - f(x)|^2$.)

10. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Muestra por inducción que, para $x \neq 0$, $k = 1, 2, \ldots$,

$$f^{(k)}(x) = \frac{P_k(x)}{Q_k(x)} e^{-\frac{1}{x^2}},$$

donde P_k y Q_k son polinomos. Concluye que $f \in C^\infty$ y $f^{(k)}(0) = 0$ para todo k.