

基于动态规划的多波束测深宽度和最短测线问题

摘要

多波束测深器是一种测量海水深度的设备，用于探测海底地形地貌等。本文通过建立空间直角坐标系建立了在不同海底地形下多波束测深的覆盖宽度和重叠率的模型，更准确和高效地测量出海水深度。

针对问题一，建立覆盖宽度和重叠率模型并计算出相关指标值。首先，在测深时将动态过程转化为一个静态的由多个三角形组合成的几何图。然后，利用正弦定理和各个三角形间相似关系，构造方程组可解出多波束测深的覆盖宽度。再利用覆盖宽度与重叠率之间的关系求出重叠率。最后，利用题目给的测线位置有对称关系算出各值并保存到 result1.xlsx 文件。

针对问题二，主要建立多波束覆盖宽度模型。首先，经分析该题是在问题一的基础上考虑测线方向与坡面法向在水平投影的夹角 β ，再对多波束测深的覆盖宽度建模。然后，建立空间直角坐标系，利用测深面与海底坡面的法向量作叉乘求得交线的方向向量。再利用线面角的计算公式求得交线与水平面的夹角。其线面角的关系可以转换到问题一坡度与水平面的关系，利用问题一建立的覆盖宽度的模型来建立问题二覆盖宽度模型。最后利用测线方向夹角成 45° 的等差关系简化运算求得结果并保存到 result2.xlsx 文件。

针对问题三，主要解决设计一组测量总长度最短的测线。首先，用数学语言描述，可知是一个单目标优化问题。然后，需要先用两平行线的距离公式求出 d 的关系式，再求得各平行线的方程式，进而求得重叠率这约束条件的表达式。再分别讨论覆盖面最后是被沿着 X 轴还是 Y 轴方向的直线所截两种情况来求得覆盖面积这一约束条件的表达式。最后，通过对角度进行遍历，得到当 $\beta = 90^\circ$ 时测量总长度最短。

针对问题四，首先考虑到直接使用海水深度数据生成的由于海底坡度变化较为复杂，利用 $Eag(Rdanh)$ 方法，对海底平面用小波处理使海底平面更平滑。结合微分思想求出船航行一小段距离 L 时扫描过的面积，进一步求出一整个条带的面积以及本条带和下一条条带见的重叠率。利用问题三的动态规划模型在问题四背景下的新海域底面积和坡度倾角的约束条件下求出航行结束后的测线总长度，总覆盖面积，以及重叠率超过 20% 部分的总长度为 68744 米。

关键字：正余弦定理；立体几何；动态规划；微元思想

一、问题重述

1.1 问题背景

多波束测深系统是用来测量水深的主要设备之一，其原理就是测量船换能器在水平面发出声波再反射，通过传播时间和传播速度来计算其深度。但是，由于在实际生活中，海底的地形或平坦或陡峭，差异较大导致不易精确测量其坡度起伏。

多波束测深器是一种海洋探测设备，可以同时发射和接收多个声波束，从而获得更准确的声纳图像。这种设备通常用于探测海底地形、水下地貌、海底生物、海底电缆和管道等。多波束测深器在海洋方面有着广泛的应用，特别是在海洋测量、海底地质勘探和水声通信等领域。

此外，多波束测深器还可以应用于海洋生态学研究、海洋资源勘探、海底管道检测和海洋工程等领域。它能够提供高质量的数据和图像，为科学家和工程师们提供重要的参考和决策支持。

总之，多波束测深器在海洋方面的应用非常广泛，它能够提供高分辨率的数据和图像，为海洋研究、勘探和工程提供重要的技术支持。

1.2 问题提出

针对示意图、表格、文字等相关数据信息，建立相关的数学模型，解决以下问题：

问题 1：根据题目提供的示意图，在具有一定坡度 α 的海底地形的条件下，建立多波束测深器的覆盖面积 W 和相邻条带的覆盖率 η 的数学模型。当开角 $\theta=120^\circ$ ，坡度 $\alpha=1.5^\circ$ ，测线中心点海水深度 $D_0=70m$ 时，利用其模型计算出测线距中心点 9 处不同位置下的海水深度 D 、覆盖宽度 W 和与前一条测线的重叠率 η 的指标值，并且保存到 result1.xlsx 文件中。

问题 2：根据题目提供的示意图，建立多波束测深器覆盖宽度 W 的数学模型。当开角 $\theta=120^\circ$ ，坡度 $\alpha=1.5^\circ$ ，测线中心点海水深度 $D_0=120m$ 时，利用其模型计算出测线距中心点 8 处不同位置不同测线方向夹角下的覆盖宽度 W ，并且结果保存到 result2.xlsx 文件中。

问题 3：假设一个南北长 2 海里、东西宽 4 海里、东浅西深的矩形海域，且测线中心点海水深度 $D_0=110m$ ，坡度 $\alpha=1.5^\circ$ ，开角 $\theta=120^\circ$ 。设计一组测线，其要求测线长度最短、覆盖整个海域、重叠率在 10%到 20%之间。

问题 4：根据附件提供的海水深度数据，设计一组测线，其要求尽可能覆盖整

个海域、测线长度尽可能短、重叠率在 20%以下。并且求出在该条件下的侧线长度、漏测区域占待测区域的占比、以及重叠率超过 20%的长度。

二、模型假设

2.1 模型假设

结合多波束测深系统的实际情况，为确保模型求解的准确性和合理性，本文排除了一些因素的干扰，提出以下几点假设。

(1) 假设待测海域里的海水是一种理想化的均匀介质，声波可在其作匀速直线运动传播，不考虑水中杂质或阻挡物对声波传播速度和接收时间的影响。

(2) 假设测量船换能器在测深时没有上下左右摆动，且每次向海底发射的声波信号路线与海平面垂直。

(3) 假设海底地面为一个二维平面，不考虑地面起伏对测量的影响。

(4) 假设待测海域的海水深度在一个合适的范围内，不过于深，也不过于浅。

(5) 假设声波传播到海底界面的时候，立刻产生反射，忽略其延时性。

三、符号说明

3.1 符号说明

符号	说明
α	坡度
β	测线方向与坡面法向在水平面上投影的夹角
θ	换能器开角
W	覆盖宽度
D_i	在 i 处的水深
η	相邻条带间的重叠率
d	两平行测线的距离

四、问题分析

问题的研究对象是多波束测深系统，研究内容为测量海域在不同位置下的海水深度、覆盖宽度和重叠率等相关指标值。该问题描述了该系统在不同的海底地形下的测深特点，并设计测线路线来让测量的工作效率更高。

4.1 对问题一的分析

问题一的要求有两个部分，第一部分要求在海底地形有坡度的情况，对多波束测深的覆盖宽度和相邻条带间重叠率进行分析和建立模型。首先，多波束测深器在测深时是一个动态的过程，但是整体观察其测线轨迹及题目提供的示意图，可以将其转化为一个静态的由多个三角形组合成的几何图。然后，通过分析各个三角形之

间存在的关系和挖掘各个角度之间的关系，构造方程组联立可以求解出多波束测深的覆盖宽度。最后，利用覆盖宽度与重叠率之间的关系，求出重叠率即可。

第二部分要求当多波束测深开角 $\theta = 120^\circ$ ，坡度 $\alpha = 1.5^\circ$ ，测线中心点海水深度 $D_0 = 70m$ 时，利用其模型计算出以测量船测线为轴线的 9 处不同位置下的海水深度 D 、覆盖宽度 W 和与前一条测线的重叠率 η 的指标值。另外，可以发现题目要求的测线位置是关于中心点对称的，可以利用对称关系简化计算量。

4.2 对问题二的分析

问题二的要求有两个部分，第一部分要求是在问题一的基础上，再考虑测线方向与海底坡面的法向在水平面上投影的夹角 β ，对多波束测深的覆盖宽度进行分析和建立模型。首先，明确问题二所提供的示意图是在三维空间里，不同于问题一的二维示意图，所以需要建立空间直角坐标系来帮助研究。然后，需要对测深面与海底坡面的交线进行分析，并且还要分析交线与水平面的线面角的关系。最后，其线面角的关系可以转换到问题一坡度与水平面的关系，利用问题一建立的多波束测深覆盖宽度的模型来建立问题二的多波束测深覆盖宽度的模型。

第二部分要求当多波束测深开角 $\theta = 120^\circ$ ，坡度 $\alpha = 1.5^\circ$ ，测线中心点海水深度 $D_0 = 120m$ 时，利用其模型计算出多波束测深系统在距海域中心点处的 8 处不同距离和 8 个不同测线方向夹角下的覆盖宽度 W 。另外，通过分析可以发现题目要求的测线方向夹角成 45° 的等差关系，而且还有隐藏的对对应关系。比如 0° 和 180° 的测线路线是相同的，只是测线方向恰恰相反。

4.3 对问题三的分析

问题三的要求是在给定的矩形海域内，设计一组测线，覆盖整个海域且重叠率在 $10\% \sim 20\%$ 范围内，然后让测量总长度尽可能最短。首先，用数学语言理清问题的要求，可以发现是一个单目标优化问题。特定不变值是不影响到测量总长度的，所以需要再分别对变化值进行分析，即对重叠率和单条测线下的覆盖面积进行分析。然后，在分析覆盖面积时还要分别讨论覆盖面最后是被沿着 X 轴方向的直线所截，还是被沿着 Y 轴方向的直线所截的两种情况。最后，通过对角度进行遍历，得到最优解即可。

4.4 对问题四的分析

考虑到直接使用海水深度数据生成的由于海底坡度变化较为复杂，利用 Eas (Rdanh) 方法，对海底平面用小波进行处理，剔除异常数据，使海底平面更加平滑，能够简化后续计算。首先结合微分思想求出船航行一小段距离 L 时扫描过的面积，进一步求出一整个条带的面积以及本条带和下一条条带间的重叠率，利用问题

三建立的动态规划模型在问题四更大的海域底面积和更复杂的坡度倾角的约束条件下求出航行结束后的测线总长度，随着动态规划的结束，其总覆盖面积，以及重叠率超过 20%部分的总长度均可随之得到。

五、模型建立与求解

5.1 问题一模型的建立与求解

(1) 单波束测深的工作原理分析

因为声波在均匀介质中是作匀速直线运动传播，所以声波在海水中的传播速度 v 是可以确定的。单波束测深系统再去记录从发射到接受的传播时间 t ，利用 $s = v \cdot t$ 就可以求解其深度。

(2) 多波束测深的工作原理分析

考虑到单波束测深系统只有一个波束打到海底，导致在测线之间没有数据。于是，将波束扩展为多个独立地打到海底，测线之间就可以产生关系和数据，从而也可以扩大测量单位面积，提高测量效率。

5.1.1 问题一模型的建立

考虑到测线是以测量船测线为轴线的，而且测线也是一维的，为了便于更清楚地表示在距中心点不同距离下的几何图，记 T_0 为中心点位置， T_i 为在一维测线上距中心点 i 米下的位置。注意此时的 i 可以为负值。记 D_{T_0} 为中心点位置下的海水深度，则 D_{T_i} 为在一维测线上距中心点 i 米下的位置的海水深度。

5.1.1.1 动态过程转为静态几何图的分析

(1) 测线相互平行且海底地形平坦下的分析

当在理想的情况下，即多波束测深系统的测线相互平行而且海底地形平坦没有坡度起伏，为了更直观分析，当前需要将这个动态的测深问题抽象成由多个三角形组成的静态的几何图，如图 1。

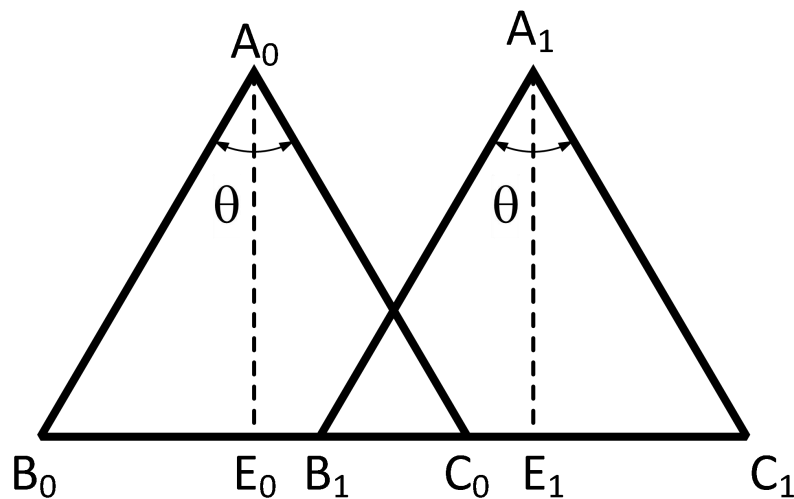


图 1 测线平行且海底地形平坦下的几何图

在 $\triangle A_0B_0C_0$ 中，已知 $B_0C_0 = W$ ， $A_0E_0 = D_0$ ， $\angle B_0A_0C_0 = \theta$ ，得出角边关系，即：

$$\frac{W_0}{\frac{2}{D_0}} = \tan \frac{\theta}{2} \quad (1)$$

且此时海底地形平坦，不考虑坡度。有关系

$$\triangle A_0B_0C_0 \cong \triangle A_1B_1C_1 \cong \dots \cong \triangle A_iB_iC_i, \quad D_0 = D_1 = D_2 = \dots = D_i, \quad \text{即 } \Delta D = 0。$$

(2) 海底地形有一定坡度下的分析

考虑到在实际生活中，有一定坡度的海底地形是会影响到多波束测深系统测深的，导致深度数据不够准确。现设想一个坡度为 α 且为平面的海底地面。为了更直观地分析，现需要将这个动态的多波束测深问题抽象成由多个三角形组成的静态的几何图，如图 2。

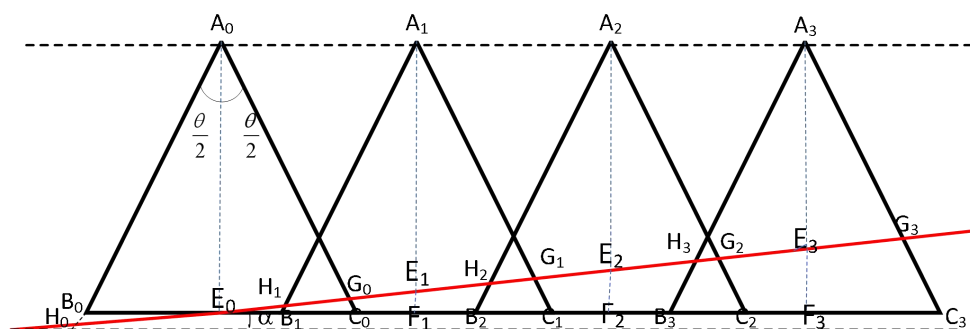


图 2 有坡度的海底地形的示意图

根据题意，已知线段 $A_0E_0 = D_0$ ，线段 $A_1E_1 = D_1 \dots$ 线段 $A_iE_i = D_i$ ，线段 $E_0F_1 = A_0A_1 = d$ 。且易得 $\triangle A_0G_0H_0 \sim \triangle A_1G_1H_1 \dots \triangle A_iG_iH_i$ 存在相似的关系。线段 $A_0E_0 \parallel A_1E_1 \parallel \dots \parallel A_iE_i$ ，且存在一个等差为 ΔD 的数列关系。于是现只要求解其中一个线段的长度便可以求其他位置下的海水深度 D_i 。这样可以简化计算，以求解出 D_0 为例。

在 $\triangle E_0E_1F_1$ 中，可得出以下边角关系式：

$$E_1F_1 = d \cdot \tan \alpha \quad (2)$$

进而，各个三角形之间也存在以下关系：

$$\begin{cases} D_{T_0} = D_{T_0} \\ D_{T_1} = D_{T_0} - d \cdot \tan \alpha \\ D_{T_2} = D_{T_0} - 2 \cdot d \cdot \tan \alpha \\ \dots \\ D_{T_i} = D_{T_0} - i \cdot d \cdot \tan \alpha \end{cases} \quad (3)$$

海水深度之间的关系：

$$\Delta D = |D_m - D_n| = |m - n| \cdot d \cdot \tan \alpha \quad (4)$$

5.1.1.2 建立多波束覆盖宽度的数学模型

在图 2 中，设 H_0E_0 长度为 a ，线段 E_0G_0 长度为 b 。由图 2，易得 $\angle A_0B_0E_0 = 90^\circ - \frac{\theta}{2}$ 。由于“三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角的和”，所以在 $\triangle B_0H_0E_0$ 中， $\angle B_0H_0E_0 = 90^\circ - \frac{\theta}{2} - \alpha$ 。又因为 $\triangle B_0H_0E_0$ 和 $\triangle E_0G_0C_0$ 存在对顶角相等的关系，便可以构造出以下关系：

$$\frac{\frac{W}{2}}{\sin(90^\circ - \frac{\theta}{2} - \alpha)} = \frac{a}{\sin(90^\circ + \frac{\theta}{2})} \quad (5)$$

$$\frac{\frac{W}{2}}{\sin(90^\circ + \frac{\theta}{2} - \alpha)} = \frac{b}{\sin(90^\circ - \frac{\theta}{2})} \quad (6)$$

通过式子 (3)、(4)、(5)、(6)，求得 a 、 b 结果如下：

$$a = \frac{\sin(90^\circ + \frac{\theta}{2}) \tan \frac{\theta}{2} (D_0 - \Delta D)}{\sin(90^\circ - \frac{\theta}{2} - \alpha)} \quad (7)$$

$$b = \frac{\sin(90^\circ - \frac{\theta}{2}) \tan \frac{\theta}{2} (D_0 - \Delta D)}{\sin(90^\circ + \frac{\theta}{2} - \alpha)} \quad (8)$$

又因为多波束测深的覆盖宽度 $W = a + b$ ，便可以解得：

$$W = \left[\frac{\sin(90^\circ + \frac{\theta}{2})}{\sin(90^\circ - \alpha - \frac{\theta}{2})} + \frac{\sin(90^\circ - \frac{\theta}{2})}{\sin(90^\circ - \alpha + \frac{\theta}{2})} \right] \cdot (D_0 - \Delta d) \cdot \tan \frac{\theta}{2} \quad (9)$$

5.1.1.3 建立相邻条带间的重叠率的数学模型

当侧线平行且海底地形平坦且没有坡度时, 如图 3, 其覆盖率 $\eta = 1 - \frac{d}{W} = \frac{W-d}{W}$ 。

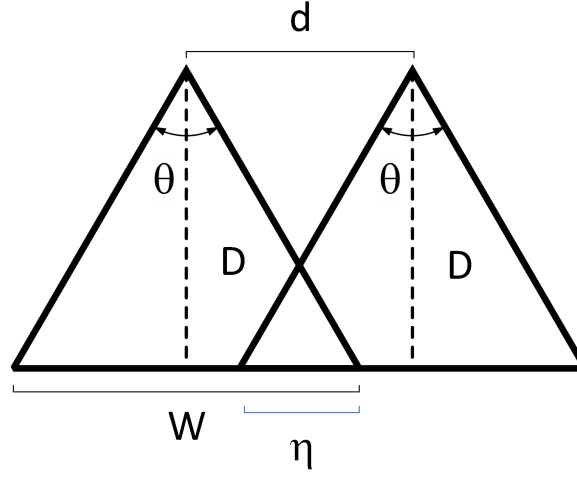


图 3 测线平行且海底地形平坦且没有坡度的示意图

当侧线平行且海底地形平坦且有坡度时, 如图 4。

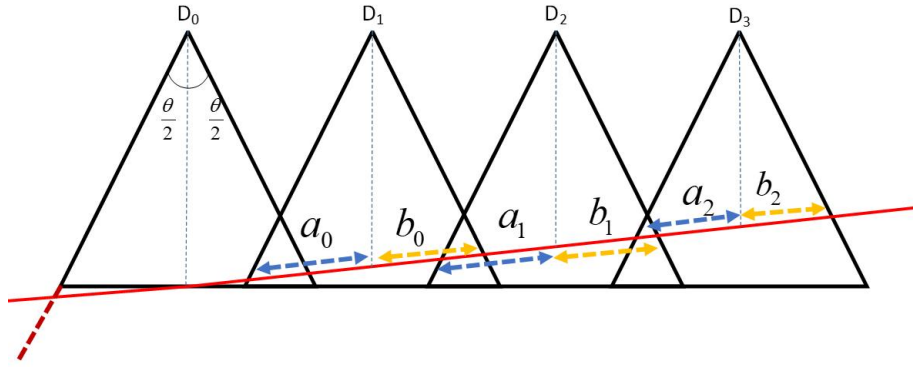


图 4 测线平行且海底地形平坦且有坡度的示意图

通过观察, 重叠部分即为 G_0H_1 。再进一步挖掘边角关系, 可得:

$$\eta_0 = \frac{E_0G_0 + H_1E_1 - E_0E_1}{W_0} \quad (10)$$

即:

$$\eta_0 = \frac{b_0 + a_1 - \frac{d}{\cos \alpha}}{W_0} \quad (11)$$

那么在距中心点 i 米的位置时的重叠率为:

$$\eta_i = \frac{b_i + a_{i+1} - \frac{d}{\cos \alpha}}{W_i} \quad (12)$$

5.1.2 问题一模型的求解

当开角 $\theta=120^\circ$ ，坡度 $\alpha=1.5^\circ$ ，测线中心点海水深度 $D_0=70m$ 时，利用其模型计算出测线距中心点 9 处不同位置下的海水深度 D 、覆盖宽度 W 和与前一条测线的重叠率 η 的指标值。将这三个参数值带入模型，其求解结果如下表：

(1) 测线距中心点不同距离下的海水深度求解

测线距中心点 9 处不同位置下的海水深度的计算结果如下表 1：

表 1 测线距中心点不同距离下的海水深度求解结果

测线距中心点处的距离/m	-800	-600	-400	-200	0	200	400	600	800
海水深度/m	90.9487	85.7116	80.4744	75.2372	70	64.7628	59.5256	54.2884	49.0513

(2) 多波束覆盖宽度的模型求解

测线距中心点 9 处不同位置下的覆盖宽度的计算结果如下表 2：

表 2 测线距中心点不同距离下的覆盖宽度求解结果

测线距中心点处的距离/m	-800	-600	-400	-200	0	200	400	600	800
覆盖宽度/m	315.813	297.628	279.442	261.256	243.07	224.884	206.699	188.513	170.327

(3) 相邻条带间覆盖率的模型求解

测线距中心点 9 处不同位置下的相邻条带间覆盖率的计算结果如下表 3：

表 3 测线距中心 s 点不同距离下的覆盖率求解结果

测线距中心点处的距离/m	-800	-600	-400	-200	0	200	400	600	800
与前一条测线的重叠率/%	——	0.35695	0.31511	0.26743	0.21262	0.14895	0.07407	-0.0153	-0.1236

5.2 问题二模型的建立与求解

5.2.1 问题二模型的建立

考虑到问题二要求测线方向与海底坡面的法向量在水平面上的投影存在夹角 β ，现先对题目提供的示意图进行分析。得到问题二的夹角 β 的范围为 $[0^\circ, 360^\circ)$ 。

而问题一的夹角 β 是固定值，为 90° 。

5.2.1.1 建立空间直角坐标系

现以测线中心点在水平面上的投影为 O 点，以坡面法向在水平面上的投影为 X 轴，以在水平面上与 X 轴垂直且要求与测线方向的夹角小于 90° 的直线为 Y 轴，以在 O 点垂直于水平面的直线为 Z 轴，如图 5。

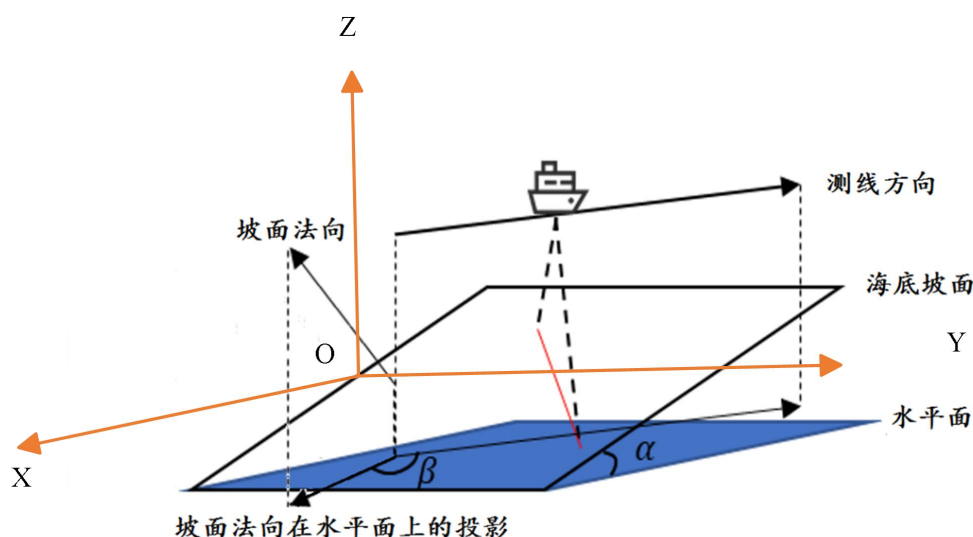


图 5 空间直角坐标系图

5.2.1.2 建立测深面与海底坡面的交线的方向向量模型

为便于更直观地描述，现将多波束测深系统换能器在某个位置发出的多波束形成的二维平面命名为测深面，即图 6 中 $\triangle ABC$ 所在平面。将测深面与海底坡面的交线命名为测深宽度线，即图 6 中线段 GH 就是测深面与海底坡面的交线。

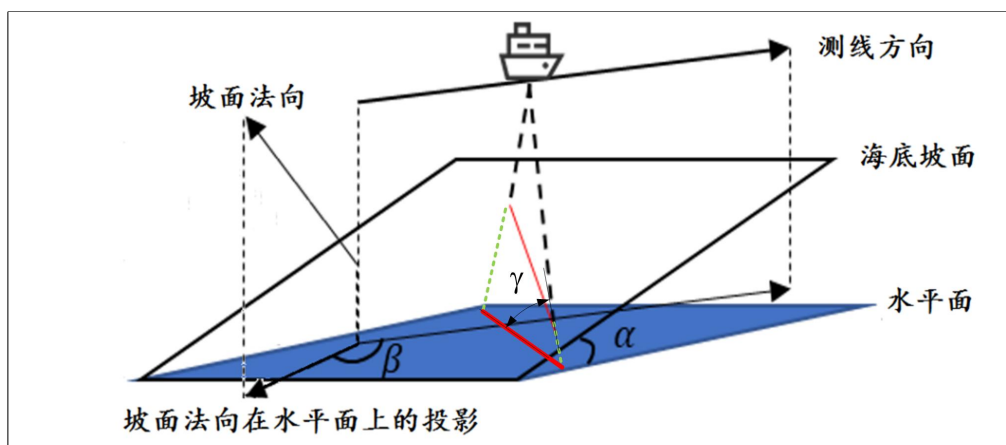


图 6 测深面与海底坡面的交线示意图

(1) 海底坡面的法向量

通过图 5，可以发现坡面法向在平面 XOZ 上，即在 X 轴、 Z 轴上有分向量。而在 Y 轴上的投影为一个点，即没有分向量。为了便于分析，现只考虑在平面 XOZ 上的几何关系，如图 7。

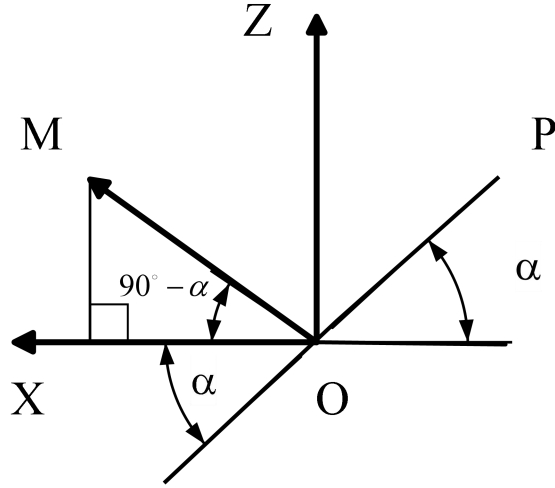


图 7 坡面法向在平面 XOZ 上投影的几何关系图

$\angle POQ$ 为海底坡度 α ，直线 OM 为海底坡度的法向， $\angle POM$ 为直角，则 $\angle MON = 90^\circ - \alpha$ 。在 $\triangle MON$ 中，存在边角关系：

$$\frac{MN}{ON} = \tan(90^\circ - \alpha) \quad (13)$$

现设线段 ON 的长度为 1 米，则 MN 长度为 $\tan(90^\circ - \alpha)$ 。所以海底坡面的一个法向量为 $(1, 0, \tan(90^\circ - \alpha))$ 。

(2) 测深面的法向量

因为测深面与测线方向成垂直关系，测线方向又与水平面平行，所以测深面与水平面垂直，测深面的法向量与水平面平行。则测深面的法向在平面 XOY 上，即在 X 轴、 Y 轴上有分向量。而在 Z 轴上的投影为一个点，即没有分向量。为了便于分析，现只考虑在平面 XOY 上的几何关系，如图 8。

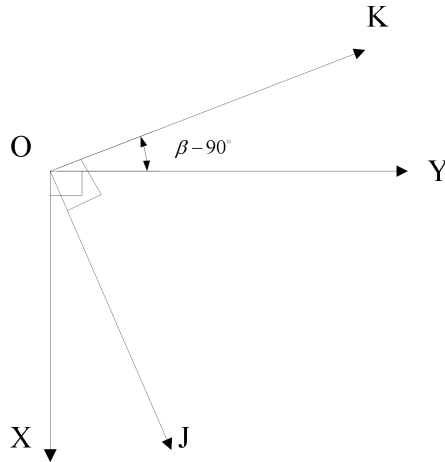


图 8 测深面的法向在平面 XOY 上投影的几何关系图

$\angle XOK$ 为测深方向与海底坡面的法向在水平面上投影的夹角 β ，直线 OK 为测深面的法向， $\angle XOY$ 为直角，则 $\angle KOJ = \beta - 90^\circ$ 。在 $\triangle KOJ$ 中，存在边角关系：

$$\frac{JK}{OJ} = \tan(\beta - 90^\circ) \quad (14)$$

现设线段 OJ 的长度为 1 米，则 JK 长度为 $\tan(\beta - 90^\circ)$ 。所以测深面的一个法向量为 $(\tan(\beta - 90^\circ), 1, 0)$ 。

(3) 利用两平面法向量作叉乘求交线的方向向量

由上面 (1) 和 (2) 的分析，得到了两平面的法向量分别为 $(1, 0, \tan(90^\circ - \alpha))$ 、 $(\tan(\beta - 90^\circ), 1, 0)$ ，则其交线的方向向量 \vec{s} 为：

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & \tan(90^\circ - \alpha) \\ \tan(\beta - 90^\circ) & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad (15)$$

求得：

$$\vec{s} = -\tan(90^\circ - \alpha) \cdot \vec{i} + \tan(90^\circ - \alpha) \cdot \tan(\beta - 90^\circ) \cdot \vec{j} + \vec{k} \quad (16)$$

5.2.1.3 建立覆盖宽度线与水平面的线面角模型

由上述分析，得到了覆盖宽度线的方向向量为：

$$\vec{s} = (-\tan(90^\circ - \alpha), \tan(90^\circ - \alpha) \tan(\beta - 90^\circ), 1)$$

又易得，水平面的一个法向量为 $\vec{t} = (0, 0, 1)$ 。

现设覆盖宽度线与水平面的线面角 γ 。由线面角的计算公式，可得：

$$\sin \gamma = \frac{|\vec{s} \cdot \vec{t}|}{|\vec{s}| |\vec{t}|} = \frac{1}{\sqrt{\tan^2(90^\circ - \alpha) + \tan^2(90^\circ - \alpha) \tan^2(\beta - 90^\circ) + 1}} \quad (17)$$

特别地，当 $\beta = 0^\circ$ 或 180° 时， $\tan(\beta - 90^\circ)$ 的值不存在。但实际生活中，这种情况是存在的，即就是测线方向在空间直角坐标系中沿着 Y 轴方向，如图 5。

5.2.1.4 建立多波束测深覆盖宽度模型

在问题一中，坡度 α 是海底坡面与水平面的一个夹角。在问题二中，线面角 γ 是覆盖宽度线与水平面的一个夹角。换句话讲，其实各个位置下的覆盖宽度线组成测深面也可以想象成一个坡面，坡度为 γ 。所以，利用问题一建立的多波束测深的覆盖宽度模型，即可求出问题二的多波束测深覆盖宽度模型。

于是，联立式子（9）和（14）求得多波束测深覆盖宽度 W_1 ：

$$W = \left[\frac{\sin(90^\circ + \frac{\theta}{2})}{\sin(90^\circ - \gamma - \frac{\theta}{2})} + \frac{\sin(90^\circ - \frac{\theta}{2})}{\sin(90^\circ - \gamma + \frac{\theta}{2})} \right] \cdot (D_0 - \Delta d) \cdot \tan \frac{\theta}{2} \quad (18)$$

其中，

$$\gamma = \arcsin \frac{1}{\sqrt{\tan^2(90^\circ - \alpha) + \tan^2(90^\circ - \alpha) \cdot \tan^2(\beta - 90^\circ) + 1}} \quad (19)$$

5.2.2 问题二模型的求解

当开角 $\theta=120^\circ$ ，坡度 $\alpha=1.5^\circ$ ，海域中心点处海水深度 $D_0=120m$ 时，利用其模型计算出测量船距海域中心点 8 处不同位置在 8 个测线方向夹角的覆盖宽度 W 。将这三个参数值带入其模型，其求解结果如下表 4：

表 4 距中心点不同距离不同测线方向夹角的覆盖率求解结果

覆盖宽度/m		测量船距海域中心点处的距离/海里							
		0	0.3	0.6	0.9	1.2	1.5	1.8	2.1
测线方向夹角/ $^\circ$	0	415.692	466.091	516.489	566.888	617.287	667.686	718.085	768.484
	45	416.191	451.871	487.551	523.231	558.911	594.591	630.272	665.952
	90	415.692	415.692	415.692	415.692	415.692	415.692	415.692	415.692
	135	416.191	380.511	344.830	309.150	273.470	237.790	202.110	166.430
	180	415.692	365.293	314.894	264.495	214.096	163.697	113.299	62.900
	225	416.191	380.511	344.830	309.150	273.470	237.790	202.110	166.430
	270	415.692	415.692	415.692	415.692	415.692	415.692	415.692	415.692
	315	416.191	451.871	487.551	523.231	558.911	594.591	630.272	665.952

5.3 问题三模型的建立与求解

5.3.1 模型的建立

问题要求假设一个南北长 2 海里、东西宽 4 海里、东浅西深的矩形海域上，设计一组测线，要求测线长度 L 最短、覆盖海域的面积 $S=8$ 平方海里、重叠率 η 在 10% 到 20% 范围之内。其中相关参数为测线中心点海水深度 $D_0=110m$ ，坡度 $\alpha=1.5^\circ$ ，开角 $\theta=120^\circ$ 。经初步分析可知，这是个单目标优化的问题。

根据右手系建立空间直角坐标系：以海域中心点投影到水平面时与海底坡面的交点为 O 点，以东西方向为 X 轴，以南北方向为 Y 轴，以垂直于海平面的方向为 Z 轴。

5.3.1.1 数学语言描述

(1) 对目标函数进行数学语言表述

记经过海域中心点的测线为 l_0 ，其测量长度为 L_1 。在海平面上，以测量船测线 l_0 为轴线，靠近 l_0 且为正方向的测线分别记为 $l_i(i=1,2,3\dots)$ ，靠近 l_0 且为负方向的测线分别记为 $l_i(i=-1,-2,-3\dots)$ 。

那么，目标函数为：

$$\min \sum_{i=1}^n L_i = L(\theta, \alpha, S, \eta, D_0) \quad (20)$$

其中 n 为测线的总条数。

(2) 对约束条件进行数学语言表述

由题可已知：开角 $\theta = 120^\circ$ ，坡度 $\alpha = 1.5^\circ$ ，测线中心点的海水深度 $D_0 = 110m$ ， $S = 8$ 平方海里， $\eta \in [10\%, 20\%]$ 。

(3) 总的数学模型

总的数学模型如下：

$$L_i = L(\theta, \alpha, S, \eta, D_0), \text{ 其中, } \min L = i \times L_1 + \sum_{j=1}^N L_2 \quad (21)$$

$$s.t. \begin{cases} \theta = 120^\circ \\ \alpha = 1.5^\circ \\ D_0 = 110 \\ 10\% \leq \eta \leq 20\% \\ S = 8 \end{cases} \quad (22)$$

5.3.1.2 对约束条件重叠率进行分析

在提供的重叠率计算公式 $\eta = 1 - \frac{d}{W}$ ，放在问题三中考虑，即 d 为两平行线间的距离， $d_{(l_i, l_{i+1})}$ 。两平行线的距离公式：

$$d = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (23)$$

又因为已知测线中心点的海水深度 $D_0 = 110m$ ，则可以利用问题二建立的覆盖宽度模型求解出 W_i 。

根据图 10，设测线的表达式： $l_i: y = kx + b_i$ 。其中 k 为测线的斜率， b 为在 y 轴上的截距。根据图 10 中几何关系，可得 $k = \tan(180^\circ - \beta)$ 。

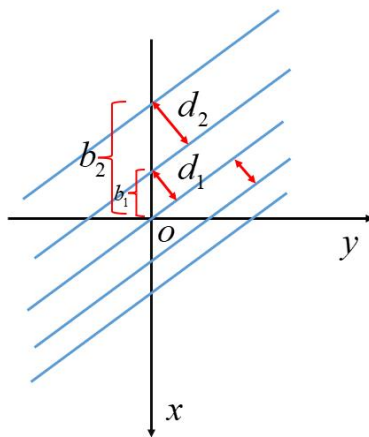


图 9 计算 b_i 时的几何示意图

根据图 9，可得：

$$b_i = \frac{\sum_{l_i, l_0}^{|i|} d_{(l_i, l_0)}}{\sin \beta} \quad (24)$$

所以测线的表达式：

$$l_i: y = \tan(180^\circ - \beta)x + \frac{\sum_{l_i, l_0}^{|i|} d_{(l_i, l_0)}}{\sin \beta} \quad (25)$$

5.3.1.3 对约束条件覆盖面积进行分析

为了便于更清楚地表述，记测线 l_i 每次所测量地覆盖面积为 S_i 。且一旦 $\sum S_i = 8$ ，则测线条数 n 就可以都确定，进而 $\sum_{i=1}^n L_i$ 也可以确定。现需要分两种情况讨论覆盖面最后被沿着 X 轴或是 Y 轴方向的直线所截的情况：

第一种，当 S_i 最后覆盖面的边被沿着 X 轴方向的直线所截，如图 10。

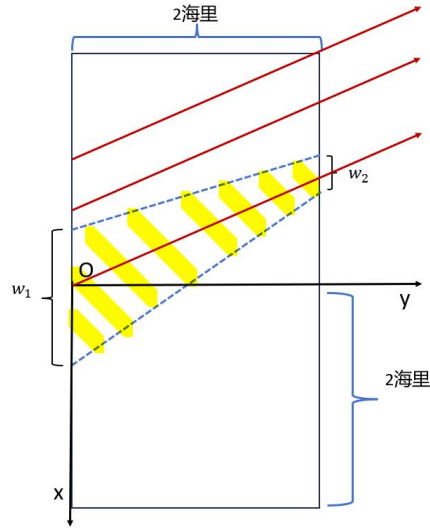


图 10 覆盖面的边被沿着 X 轴方向的直线所截示意图

由梯形面积的计算公式，可得：

$$S_i = \frac{(W_1 + W_2) \times 2}{2} = W_1 + W_2 \quad (25)$$

此时，

$$D_1 = D_0 + \frac{d}{\sin \beta} \times \tan 1.5^\circ \quad (26)$$

$$D_2 = D_0 + \frac{2 - \tan(180^\circ - \beta)x}{\sin \beta \cdot \cos(\beta - 90^\circ)} \times \tan 1.5^\circ \quad (27)$$

然后，利用问题一的覆盖宽度模型去求出 W_1 、 W_2 ，进而可以求出 S_i 。

最后，测量船的测线长度：

$$L_j = \frac{2}{\cos(\beta - 90^\circ)} \quad (28)$$

第二种，当 S_i 最后覆盖面的边被沿着 Y 轴方向的直线所截，如图 11。即

$b > 2 - 2 \tan(180^\circ - \beta)$ 时，

$$S_i = \frac{(W_1 + W_3) \times 2}{2} = W_1 + W_3 \quad (29)$$

$$L_k = \frac{y}{\cos(\beta - 90^\circ)} \quad (30)$$

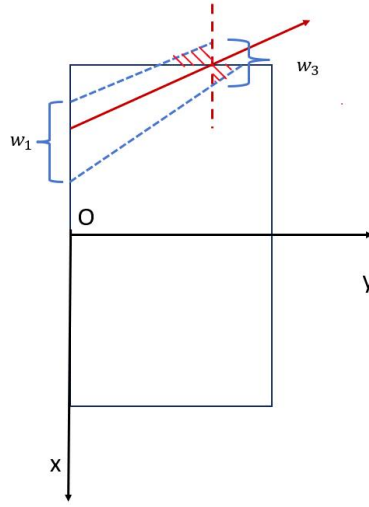


图 11 覆盖面的边被沿着 Y 轴方向的直线所截示意图

又因为东西宽 4 海里为固定值，中心点处所对应的 $x = 2$ ，而且所对应位置的深度一样。然后把 $x = 2$ 带入式子 (25) 即可得到 y 值。

$$y = 2 \tan(180^\circ - \beta) + \frac{\sum_{i=0}^{|l|} d_{(l_i, l_0)}}{\sin \beta} \quad (31)$$

注意，也存在当 S_i 最后覆盖面一边被沿着 X 轴方向的直线所截，一边被沿着 Y 轴方向的直线所截的情况。但是，可以割补法求面积的思想，利用对角线将该覆盖面积分成覆盖面的边被沿着 X 轴方向的直线所截的面积和覆盖面的边被沿着 Y 轴方向的直线所截两部分的面积之和。

5.3.2 问题三模型求解

基于以上建立的模型，由问题二中，侧线与东西方向夹角 β ，以 5° 为增量，通过对 β 角进行遍历，当 β 为 90° 时，此时可以测线测量长度最短。海水在 x 轴正方向上逐渐变浅，测线平行于 y 轴。随着 x 轴的增加，间距逐渐变大。测量长度最短时的测线如图 12 所示。

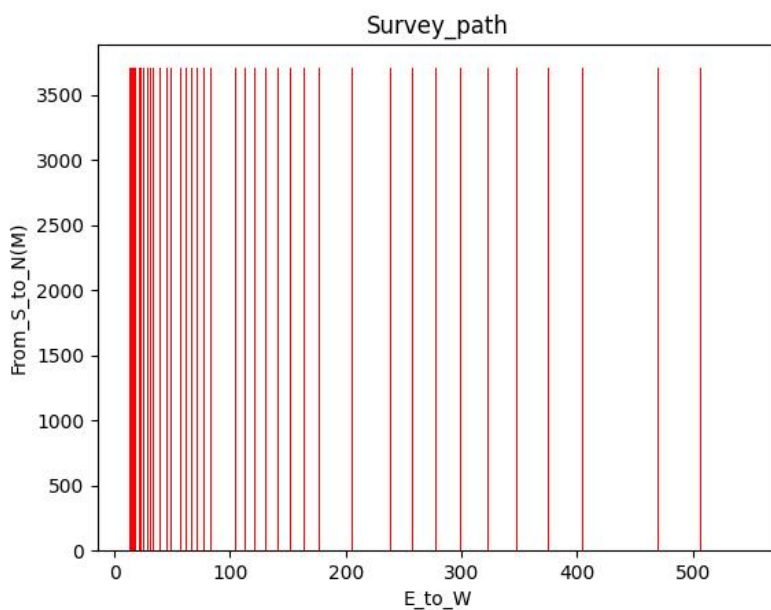


图 12 测量长度最短的测线可视化图

此时 β 角与侧线总长度之间的关系，如图 13 所示。

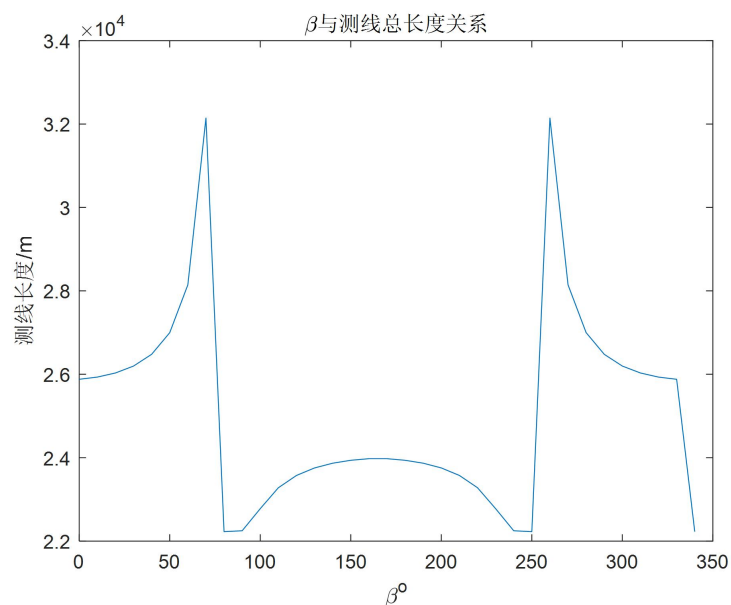


图 13 测量长度最短的测线可视化图

最终，当 β 角为 $\frac{\pi}{2}$ 时，测线总长度最短，最短为 22247.74 米。

5.4 问题四的模型建立与求解

5.4.1 问题四的模型建立

5.4.1.1 数据预处理及可视化

由于海底坡度变化较为复杂，数据量大，现利用 $\text{Eag}(\text{Rdanh})$ 方法，将海底平面进行小波处理，剔除了部分异常值，使海底平面更加平滑，如图 14 和图 15。这样

便于更好地简化计算和建立模型。

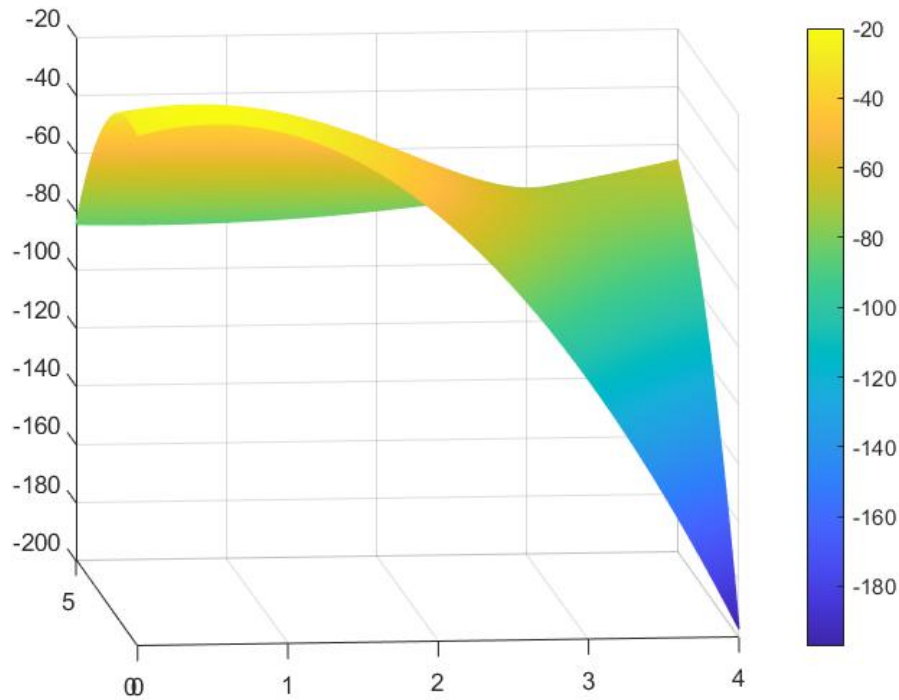


图 14 海域底部地形图可视化

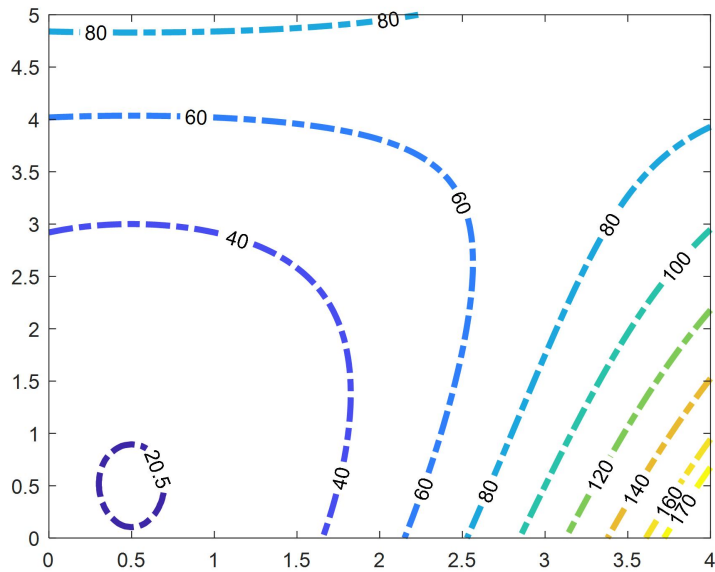


图 15 海域底部地形等深图

5. 4. 1. 2 利用微分思想建立测线总长度的动态规划模型

结合微分思想，将短时间内船向前行驶 Δl 其测量平面与海底坡面产生的交线长度 W 不变。

利用第三问当 β 为 90° 时，总航线长度最短的结论，方向确定的情况下一条船驶过 Δl 后在海底形成的覆盖面积为：

$$S = w_i \times \Delta l \quad (32)$$

一条船从海域一侧驶向另一侧在海底形成的条带面积为：

$$S = \sum_{i=0}^n w_i \times \Delta l \quad (33)$$

通过动态规划得出多条船一起驶过（或是一条船走过所有航线）在海底形成的总覆盖面积为

$$S_{\text{总}} = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^n w_i \times \Delta l \quad (34)$$

重叠部分的面积为：

$$S_{\text{重}} = \sum_{j=0}^N \sum_{j=0}^n r_i \times \Delta l \quad (35)$$

其中， r 为重叠部分的长度。

有效总面积为扫描面积减去重叠面积

$$S_{\text{有效}} = S_{\text{总}} - S_{\text{重}} \quad (36)$$

可以计算出该矩形海域的面积为 $S_{\text{海域}} = 2 \times 4 \times 1852 \times 1852 = 27439232$ 平方米

$$S_{\text{漏}} = S_{\text{海域}} - S_{\text{有效}} \quad (37)$$

$$R_{\text{漏}} = \frac{S_{\text{海域}} - S_{\text{有效}}}{S_{\text{海}}} \quad (38)$$

其中， $R_{\text{漏}}$ 为漏测比例

$$\min L = L(\theta, \eta, S_{\text{海域}}, D_{\text{平均}}) \quad (39)$$

$$s.t. \begin{cases} \theta = 120^\circ \\ D_{\text{平均}} = 50.8^\circ \\ \eta \leq 20\% \\ S_{\text{海域}} = 27439232 \end{cases} \quad (40)$$

$$l_i : y = \tan(180^\circ - \beta)x + \frac{\sum_{i=0}^{|i|} d_{(l_i, l_0)}}{\sin \beta} \quad (41)$$

带入式子（25）可得到 y 值。

$$y = 2 \tan(180^\circ - \beta) + \frac{\sum_{i=0}^{|l|} d_{(l_i, l_0)}}{\sin \beta} \quad (42)$$

5.4.2 问题四的模型求解

最终求得的最短测线长度为 68744 米，具体示意图如下

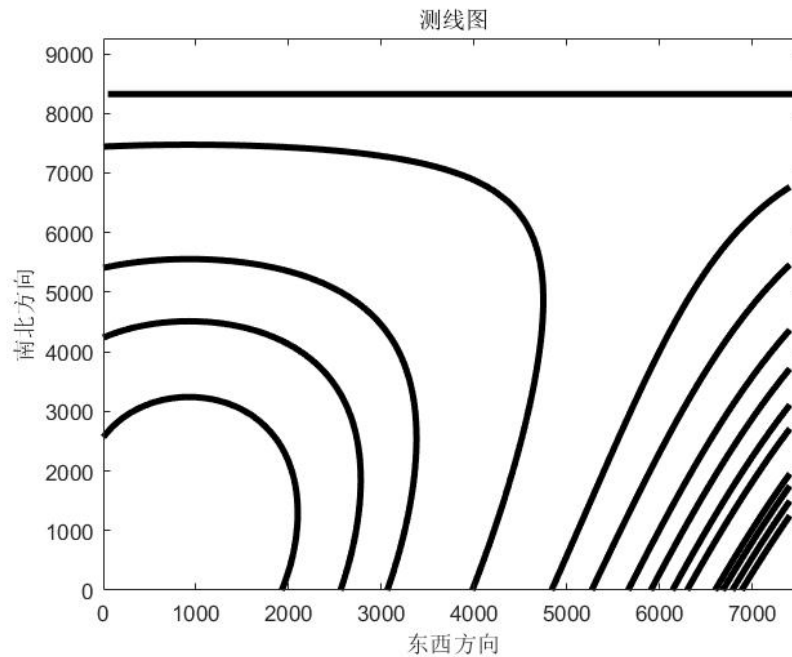


图 16 最短测线示意图

六、模型评价与改进

6.1 模型的评价

6.1.1 模型的优点

- (1) 极大简化了运算的规划过程，得到很好的可视化展示。
- (2) 灵活建立空间坐标系，合理运用向量，极大地简化了运算。理清了各个线面之间的关系。
- (3) 运用大量投影的思想，将三维空间转换到二维平面上，使思路更清楚。

6.1.2 模型的缺点

- (1) 船体易受风、浪、涌、流的影响，较小的风浪使船体产生很大的摇摆幅度，换能器的姿态不断发生变化，影响多波束换能器的发射和接收的方向与海平面产生篇幅夹角。
- (2) 测量船测深时也会受风浪的外界环境影响，从而可能让船体本身倾斜产生误差。

6.2 模型的改进

- (1) 针对缺点一，尽量考虑到测量多波束换能器的发射和接受方向与海平面的夹角大小，增加修正角。
- (2) 针对缺点二：尽量考虑到测船体本身与海平面的倾斜角，在空间直角坐标系增加偏移幅度。

七、参考文献

- [1] 付勇先. 海底地形的多波束测深数据预处理及三维建模方法研究[D].中国地质大学(北京),2016.
- [2] 关永贤,刘胜旋,刘方兰. 多波束测深系统边缘波束的特殊处理技术研究[C]//中国地球物理学会.中国地球物理.2003——中国地球物理学会第十九届年会论文集.南京:师范大学出版社,2003:394.
- [3] 史磊.单波束测深系统与浅水多波束测深系统在水下地形测量中的对比分析[J].黑龙江水利科技,2018,46(05):32-34.DOI:10.14122/j.cnki.hskj.2018.05.010.
- [4] 黄伟强,王进.多波束测深系统的精度评估方法研究[J].中国水运(下半月),2017,17(06):336-337.
- [5] 张治国,王朝.多波束测深系统在航道水深监测中的应用[J].甘肃科技,2023,39(07):17-20.

附录

附录目录：

- | |
|--------------------|
| 1. 问题一 Matlab 程序代码 |
| 2. 问题二 Matlab 程序代码 |
| 3. 问题三 Matlab 程序代码 |
| 4. 问题四 Matlab 程序代码 |

附录 1: 问题一的程序

```
1. x = -800:200:800;
2. theta = 120;
3. alfa = 1.5;
4. % 水深
5. water_depth_y = 70 - tand(alfa).*x;
6. % 红长边
7. w = tand(theta/2)*water_depth_y*2;
8. % 左边红边
9. l1 = w/2*sind(90+theta/2)/sind(90-theta/2-alfa);
10. l2 = w/2*sind(90-theta/2)/sind(90+theta/2-alfa);
11. % 覆盖宽度
12. l_all = l1+l2;
13. % 求右边+左边
14. l_r1 = zeros(size(l1)-1);
15. for i=1:length(l2)-1
16.     l_r1(i) = l2(i)+l1(i+1);
17. end
18. % 求解重合边边长
19. % 间距
20. d = 200;
21. l_common = l_r1-d/cosd(alfa);
22. yita = (1-d./l_all(2:end))*100;
```

附录 2: 问题二的程序

```
1. % 坡面旋转
2. alfa = -1.5;
3. % 测线面旋转
4. beta = 0:45:315;
5. % 旋转矩阵
6. % 坡面向量
7. v_turn = getturn(alfa);
8. p = [0;1];
9. pp = v_turn * p;
10. pp1 = [pp(1),0,pp(2)];
11. % 测线
12. p1 = [0;1];
13. deta = zeros(length(beta),1);
14. for i =1:length(beta)
15.     if mod(beta(i),90) ==0
16.         deta(i) = alfa;
17.         continue
18.     end
19.     v_turn2 = getturn(90-beta(i));
20.     pp2 = v_turn2 * p1;
```



```

21.     syms r s t
22.     pp2(end+1) = 0;
23.     % 求解行列式
24.     am = det([ r s t;pp1;pp2']);
25.     % 提取向量
26.     am = coeffs(am);
27.     am = flip1r(am);
28.     deta(i) = GetGama(am);
29. end
30. theta = 120;
31. alfa = abs(deta)';
32. % 测量距离
33. distance = 0:0.3:2.1;
34. % 测量角
35. beta = 0:45:315;
36. % 一海里等于 1852 米
37. distance = distance*1852;
38. % 计算深度
39. depth = 120;
40. water_depth = depth-sind(beta-90)*distance.*tand(1.5);
41. w = zeros(8,8);
42. % 计算覆盖长度
43. for i=1:length(beta)
44.     w(i,:) = water_depth(i,:).*tand(theta/2)*2;
45.     if mod(beta(i),90)==0
46.         if beta(i)==0
47.             continue
48.         elseif beta(i)==180
49.             continue
50.         end
51.     else
52.         % 红长边
53.         l1 = w(i,+)/2.*sind(90+theta/2)./sind(90-theta/2-alfa(
            i));
54.         l2 = w(i,+)/2.*sind(90-theta/2)./sind(90+theta/2-alfa(
            i));
55.         % 覆盖宽度
56.         w(i,:) = l1+l2;
57.     end
58. end
59. % 求解伽马夹角
60. function deta = GetGama(accross)
61.     % 平面方向量(0,0,1)
62.     n1 = [0,0,1];

```

```

63.     deta = acosd(dot(accross,n1)/norm(n1)*norm(accross))-90;
64.end
65.function [v_turn] = getturn(alfa)
66.     v_turn = [cosd(alfa),-sind(alfa);sind(alfa),cosd(alfa)];
67.end

```

附录 3: 问题三的程序

(1):

```

1. function [gama] = Getgama(beta)
2. % 求解 gama 的值
3. % 坡面旋转
4. alfa = -1.5;
5. % 坡面向量
6. v_turn = getturn(alfa);
7. p = [0;1];
8. pp = v_turn * p;
9. % 坡面法向量
10. pp1 = [pp(1),0,pp(2)];
11.% 测线
12.p1 = [0;1];
13.% 如果与深度梯度方向垂直
14.if mod(beta,90) ==0
15.     gama = abs(alfa);
16.     return
17.end
18.v_turn2 = getturn(90-beta);
19.pp2 = v_turn2 * p1;
20.syms r s t
21.pp2(end+1) = 0;
22.% 求解行列式
23.am = det([ r s t;pp1;pp2']);
24.% 提取向量
25.temp = coeffs(am,'r');
26.am1(1)= temp(2);
27.temp = coeffs(am,'s');
28.am1(2)= temp(2);
29.temp = coeffs(am,'t');
30.am1(3)= temp(2);
31.gama = Getma(am1);
32.
33.end
34.

```

(2):

```

1. function deta = Getma(accross)
2.     % 平面方向量(0,0,1)

```

```

3.     n1 = [0,0,1];
4.     deta = asind(dot(accross,n1)/norm(n1)*norm(accross));
5. end
(3):
1. function [v_turn] = getturn(alfa)
2.     v_turn = [cosd(alfa),-sind(alfa);sind(alfa),cosd(alfa)];
3. end
(4):
1. function [w0] = getw(D0,alfa)
2. % 根据深度求 w
3.     theta = 120;
4.     w = tand(theta/2)*D0*2;
5. % 左边红边
6.     l1 = w/2*sind(90+theta/2)/sind(90-theta/2-alfa);
7.     l2 = w/2*sind(90-theta/2)/sind(90+theta/2-alfa);
8. % 覆盖宽度
9.     w0 = l1+l2;
10. end
(5):
1. alfa = 1.5;
2. theta = 120;
3. j = 1;
4. line_all_area = 0;
5. % 海里换算
6. n_2_h = 1852;
7. d0 = 110 + 2 * 1852 *tand(alfa);
8. yita = 0.1;
9. % 求起始点
10. x = 2*cosd(alfa)*d0/(1.8-sind(alfa));
11. d0 = d0-x*tand(alfa)/2;
12. while line_all_area < 2 *4*n_2_h.^2/cosd(alfa)
13.     disp((110 + 2 * 1852 *tand(alfa)-d0)/tand(1.5))
14.     w_c = getw(d0,alfa);
15.     d = (1-yita)*w_c;
16.     d0 = d0 - d*tand(alfa);
17.     line_all_area = line_all_area + w_c * n_2_h*2;
18.     w_l = w_c;
19.     if j > 2
20.         line_all_area = line_all_area -n_2_h*2*w_c*yita;
21.     end
22.     j = j + 1;
23. end

```

附录 4: 问题四的程序

```

1. % 获取大小

```

```

2. size_all = size(data1,1)*size(data1,1);
3. e_depth = sum(data1,"all")/size_all;
4. % 加上 dh 后
5. e_depth_p = ((sum(data1,"all")+data1)/(size_all+1));
6. % 标准差
7. sd = sum((data1-e_depth_p).^2,'all');
8. sd_d = (data1-e_depth)+sum((data1-e_depth).^2,'all');
9. q = (size_all-1)*(sd_d-sd)/sd;
10.sum(q > 2.15,'all')
11.% 阈值大于 2.15
12.index = q > 2.15;
13.data1(index) = data1(index).*(q(index)-1.14);
14.mesh(x,y',-data1)

```