

## Aufgabe HexMax - Dokumentation

### Lösungsansatz:

Mein Programm folgt dem Ansatz zu prüfen, ob aus der Eingabezahl bei der gegebenen Anzahl an Umlegungen, für jede Stelle die größtmögliche Zahl „f“ generiert werden kann bzw. welches die maximal generierbare Ziffer ist. Dabei wird geprüft, ob dies, unter Berücksichtigung der stellenübergreifenden Effekte, eine insgesamt valide Lösung darstellt.

Das Programm führt dafür eine Tiefensuche (preorder) in einem Suchbaum durch, der für die Prüfung der jeweiligen Lösungsmöglichkeit dynamisch erzeugt wird. Es werden systematisch mögliche Lösungen ermittelt und auf Validität und Optimalität geprüft.

Um die Effizienz des Programms zu steigern, werden bei der Prüfung des Suchbaums die Prinzipien der Memoisation und des Prunings angewandt, indem nach jedem Prüfvorgang, die für folgende Prüfvorgänge nicht mehr relevanten Abschnitte des Suchbaums ausgeschlossen werden.

### Programmatische Umsetzung:

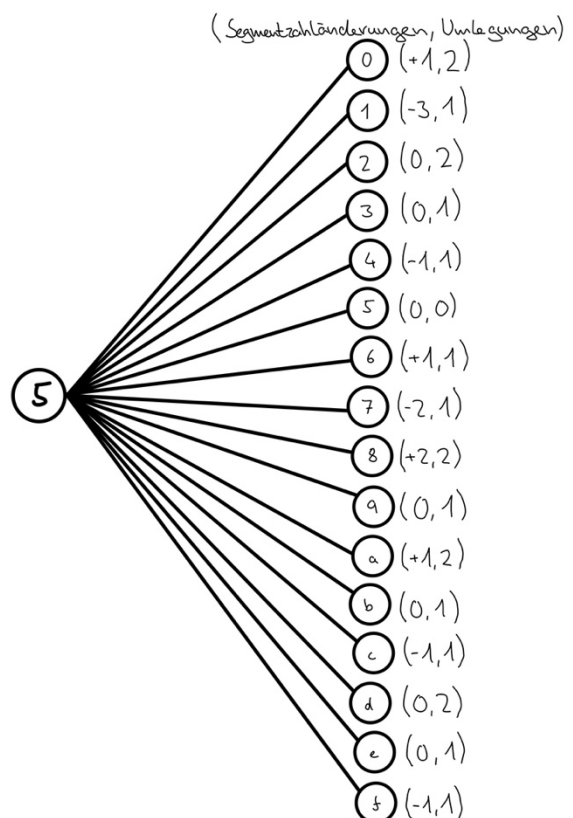
Nach dem Einlesen des Datensatzes aus einer Textdatei werden im ersten Schritt durch das Programm die später analysierten Teil-(Such)bäume erzeugt. Für jede Stelle der Eingabezahl wird ein Teilbaum angelegt, der die Information enthält, wie viele Darstellungssegmente entfernt bzw. hinzugefügt werden müssen, um alle anderen möglichen Zahlen zu erzeugen, sowie wie viele Umlegungen dafür nötig sind.

Abbildung 1 zeigt ein Beispiel für einen solchen Teilbaum für die Zahl „Fünf“.

Die Tatsache, dass in diesem Beispiel auch kleinere Zahlen als „Fünf“ aufgeführt sind zeigt, dass es sich in diesem Beispiel um den Teilbaum einer der ersten nachfolgenden Stelle der Eingabezahl handelt - bei der Erzeugung des Teilbaums der ersten Stelle der Eingabezahl wäre dies nicht der Fall, da ja explizit nach Möglichkeiten gesucht wird, die Eingabezahl zu vergrößern.

In Klammern wird dargestellt, wie sich die Anzahl der benötigten Segmenten ändert sowie wie viele Umlegungen notwendig sind, um diese umzusetzen.

Eine Änderungen der Anzahl der benötigten Segmente, die von dieser Ziffer benutzt werden, wird dabei nur wenn sie positiv ist, auch als Umlegung gezählt, um eine spätere Doppelzählung bei der entsprechenden Umkehrrelation (Hinzufügen/Entfernen) zu vermeiden.



zur Darstellung der Segmentzahländerung und Anzahl der benötigten Umlegungen

Realisiert wird der Teilbaum, indem ein Objekt (Digit) erstellt wird, dass die Informationen abspeichert und für die spätere Verwendung einfach zugänglich macht.

Anschließend werden die Informationen der einzelnen Teilbäume in Listen zusammengefasst, die den einzelnen Objekten zugeordnet werden. Dabei wird für jede Ziffer der Eingabezahl eine Liste erstellt, die, unter Einbeziehung der Informationen aller nachfolgenden Stellen, für alle möglichen generierbaren Segmentzahländerungen speichert, wie viele Umlegungen mindestens notwendig sind, um diese jeweils zu erreichen.

An diesem Punkt ist die Vorbereitungsphase beendet und die eigentliche Tiefensuche nach der optimalen Lösung beginnt.

Prinzipiell bestünde die Möglichkeit, diese Suche rekursiv oder iterativ durchzuführen. Ich habe mich für den iterativen Ansatz entschieden, obwohl die rekursive Lösung minimal schneller und durch die automatische Erzeugung des Callstacks etwas weniger aufwendig ist, um bei zu großen Datensätzen den „Recursion limit exceeded“-Error zu vermeiden.

Die Tiefensuche macht es sich zu Nutze, dass die anfangs erzeugten Teilbäume wiederholt eingesetzt werden können, da die entsprechenden Objekte während der Suche nicht abgeändert werden. Beginnend mit der ersten Ziffer wird für jede Änderungsmöglichkeit dieser Ziffer, der entsprechende Suchbaum der nachfolgenden Ziffer dem Callstack, implementiert als Deque (kleinere Laufzeit für Einfügoperationen), hinzugefügt. Durch dieses Vorgehen wird sozusagen ein großer Gesamtsuchbaum erstellt.

Abbildung 2 zeigt einen allgemeingültigen Gesamtsuchbaum, wobei die Wurzel  $Z_1$  der ersten Ziffer der Eingabezahl, sowie die Verästelungen mit f und 0, der maximalen bzw. minimalen Hexzahl entspricht.

Die Tiefensuche beginnt mit dem höchstmöglichen Ast und fügt dem entsprechenden Objekt die Informationen über die Bilanz an zu viel bzw. zu wenig benutzen Segmenten sowie die übrigen zur Verfügung stehenden Umlegungen hinzu. Eine valide Lösung zeichnet sich dadurch aus, dass diese beiden Bilanzen ausgeglichen sind.

Der Lösungsbaum wird nun dahingehend durchlaufen, dass, beginnend mit der größtmöglichen Zahl (in der Beispielsabbildung 2 von unten nach oben), geprüft wird, ob dieser Ast eine valide Lösung darstellt.

Während dieses sich wiederholenden Prozesses wird anhand der vorher erzeugten Listen geprüft, ob es noch möglich ist, restliche Segmente mit den verbleibenden Umlegungen „unterzubringen“.

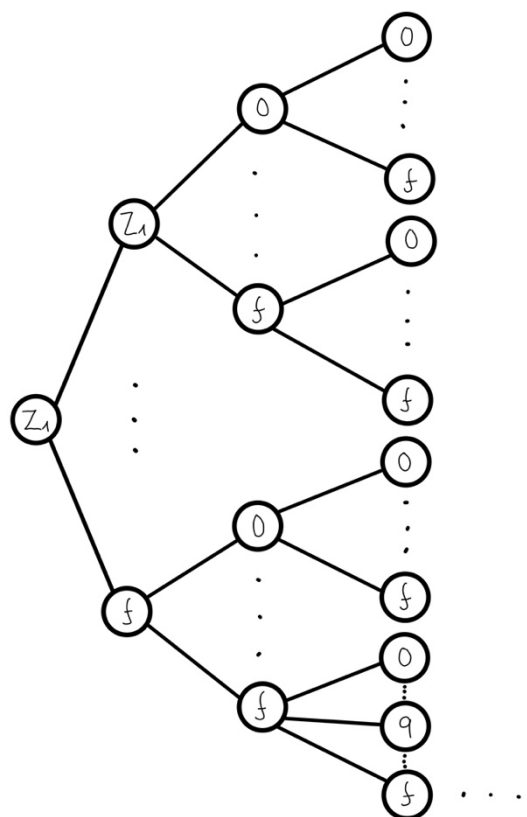


Abbildung 2: Darstellung eines allgemeingültigen Gesamtsuchbaums

Falls dies für einen bestimmten Lösungspfad im Suchbaum nicht mehr möglich ist, wird der Durchlauf abgebrochen. Der Suchbaum wird beschnitten („gepruned“), dieser Pfad nicht weiterverfolgt und einer Liste an Callstack-Elementen hinzugefügt, die zu keiner validen Lösung geführt haben. Durch diese Memoisation wird vermieden, dass bei späteren Durchläufen nicht zielführende Pfade erneut geprüft werden.

Der Vorgang wiederholt sich solange bis eine valide Lösung gefunden ist.

Bei der ersten Ziffer der Eingabezahl werden nur mögliche Ziffern ausprobiert, die größer oder gleich der Ausgangsziffer sind, da sonst die Bedingung einer größeren Gesamtzahl nicht erfüllt wird.

Wenn ein Lösungspfad komplett durchlaufen wird, d.h. bis zur letzten Ziffer der Eingabezahl, nicht unterbrochen wurde, stellt dieser die optimale Lösung dar, da die Prüfung ja in absteigender Größe der möglichen Zahlen erfolgt. Die kleinste mögliche Lösung ist dabei die ursprüngliche Eingabezahl selbst, falls durch Umlegung der Segmente keine Erhöhung der Zahl möglich ist.

Das Ergebnis wird letztendlich in Form einer Textdatei ausgegeben und die Ausführung beendet.

Die Funktionen `elaborateConversion()` und `display()` dienen ausschließlich dem Zweck den Umlegungsprozess von der Eingabezahl zur optimalen Ausgabezahl zu visualisieren, so wie dies in der Aufgabenstellung für kleinere Datensätze gefordert ist.

Die Aufgabenstellung lässt sich auf vielseitige Weise inhaltlich erweitern. Nachfolgend sind einige Beispiele von möglichen Vorgaben beschrieben, die in meinem Programm auch zusätzlich implementiert sind:

- Unendlich Umlegungen, aber eingeschränkte Anzahl an Stellen und Segmenten
  - Der einzige Unterschied in der Programm-Logik ist, dass die verbleibenden Umlegungen ignoriert werden und nur nach noch *übrigen* Segmenten geschaut wird.
- Unendlich Segmente, aber limitierte Umlegungen und Ziffern
  - Analog zur ersten Erweiterung wird in diesem Fall nur auf die restlichen Umlegungen geachtet, jedoch nicht auf Segmentunterschiede.
- Unendliche Anzahl an Stellen, aber limitierte Umlegungen und Segmente
  - Hier wird geprüft, wie viele Segmente von anderen Ziffern mit den verfügbaren Umlegungen entfernt werden können, um sie als eine oder mehrere Einsen (nutzt nur zwei Segmente) oder einmalig als Sieben (nutzt drei Segmente, falls die entfernten Segmente ungerade sind) der gegebenen Zahl voranzustellen - es wird das Prinzip verfolgt, dass eine Zahl mit mehr Stellen immer größer ist als eine Zahl mit weniger Stellen, selbst wenn die einzelnen Ziffern kleiner sind – die Maximierung der nachfolgenden Stellen bleibt davon unberührt.

Inklusive dieser Erweiterungen unterscheidet sich das Programm nicht erheblich vom Programm zur ursprünglichen Aufgabenstellung. Die Modifikationen lassen sich jedoch beliebig schichten, z.B. um unendliche Umlegungen und unendliche Ziffern zu ermöglichen. Weiterhin könnte man anstatt nach dem Maximum auch nach dem Minimum suchen. Auch diese Änderungen sind eher trivial und benötigen nur minimale Codeanpassungen, weshalb ich diese nicht implementiert habe.

### **Laufzeitkomplexität:**

$$O(n, c) = O(\text{constructSubTrees}) + O(\text{constructLists}) + O(\text{depthFirstSearch})$$

$$O(\text{constructSubTrees}) = 16^n = n$$

- Erstellung eines Objektes für jede Ziffer (n-mal)
- Konstante Erstellungszeit (16)

$$O(\text{constructLists}) = (n \cdot (16 + (2c \cdot 2c))) = n \cdot c^2$$

- Erstellung der Liste für jedes Objekt (n-mal)
- Konstante Iteration über mögliche Änderungen (16)
- Geschachtelte Iteration über mögliche Segmentzahländerungen, abhängig von Umlegungen (-c bis c;  $2c$ ), also  $2c^2$

$$O(\text{depthFirstSearch}) = n \cdot c \cdot 2c = n \cdot c^2$$

- Für jede Ziffer (n-mal) gibt es  $2c^2$  unterschiedliche Möglichkeiten für Umlegungen und Segmentzahländerungen
- Sobald sie sich doppelten, hilft die Memoisation

$$O(n, c) = n \cdot c^2$$

Hierbei werden nicht einzelne Operation, wie das Suchen in einem Array ( $O(n)$ ) inkludiert. Es ist eine allgemeine Abschätzung der Laufzeit, so lässt sich für diese Abschätzung auf eine allgemein pseudo polynomische und somit wahrscheinlich exponentielle Laufzeit schließen.

Ohne Memoisation würde eine Laufzeitkomplexität von  $16^n$  vorliegen, wegen der 16 Abzweigungen des Baumes von jedem Knoten aus, wobei die Tiefe  $n$  wäre.

Trotzdem liegt die Vermutung nah, dass dieses Problem NP-vollständig ist, aufgrund von der rekursiv-exponentiellen Natur.

### **Speicherkomplexität:**

Ohne Memoisation würde der Baum eine Tiefe von  $n$  haben und jeder Knoten würde in 16 weiteren resultieren, wodurch der Callsack einen exponentiellen Speicher von  $16^n$  bräuchte. Mit Memoisation gibt es jedoch keine doppelten Verzweigungen mehr, wodurch eine polynomische Speichernutzung entsteht.

## Wichtigsten Auszüge aus dem Programm-Code:

### Vorbereitungsfunktionen, zum Erstellen der Objekte und Listen

```
class Digit: # Klassen, zum Abbilden einer einzelnen Ziffer

    def __init__(self, value, digitNum): # Definition der Attribute einer Ziffer
        self.value = value # Zahlenwert
        self.originalSegments = segments[int(value, 16)] # verwendete Segmente
        self.originalBinary = binary[int(value, 16)] # Binärkodierung
        self.digitNum = digitNum # Stelle der Ziffer in der Zahl
        self.possibleChanges = {} # hashmap, zum Nachschlagen möglicher Änderungen dieser Ziffer und deren Segmentzahländerungen und Umliegungen
        self.bestPossibleList = {} # hashmap, zur Darstellung der minimalen Umliegungen nötig, um eine Segmentzahländerung zu erreichen, bei noch n - digitNum übrigen Ziffern

    def constructTable(self): # Funktion, zur Erstellung der possibleChanges hashmap
        rangeStart = 0
        if self.digitNum == 1:
            rangeStart = int(self.value, 16)
        for hexNum in range(rangeStart, 16): # Iteration über alle Hexzahl (0 bis 15)

            segmentChange = segments[hexNum] - self.originalSegments

            xorDiff = bin(int(binary[hexNum], 2) ^ int(self.originalBinary, 2))[2:]
            sumAcross = sum(int(x) for x in xorDiff)
            swapChange = (sumAcross + segmentChange) / 2

            change = (segmentChange, swapChange)
            self.possibleChanges[hexNum] = change

    def constructSubTrees(hexNum): # Funktion, zur Erstellung der Objekte pro Ziffer

        subTreeObjects = []
        cnt = 1

        for digit in hexNum: # Iteration über alle Ziffern der Eingabezahl
            digitObject = Digit(digit, cnt)
            digitObject.constructTable()
            subTreeObjects.append(digitObject)
            cnt += 1

        return subTreeObjects

    def constructLists(subTrees): # Funktion, zur Erstellung der bestPossibleList hashmap
        bestSoFar = {}
        for subTree in subTrees[-1]: # Iteration über alle erstellten Ziffernobjekte, um diese zu aktualisieren
            best = {}
            for changes in subTree.possibleChanges.values(): # Iteration über alle möglichen Änderungen einer Ziffer, um Minimalen zu ermitteln
                if changes[0] in best:
                    if changes[1] < best[changes[0]]:
                        best[changes[0]] = changes[1]
                else:
                    best[changes[0]] = changes[1]
            tempBestSoFar = {}
            for segChange in best: # Iteration über die hashmap zur Darstellung der minimalen Umliegungen nötig, um eine Segmentzahländerung zu erreichen, bei dieser Ziffer
                if bestSoFar != {}:
                    for otherSegChange in bestSoFar: # Iteration über die hashmap zur Darstellung der minimalen Umliegungen nötig, um eine Segmentzahländerung zu erreichen, bei den in der Eingabezahl noch nachfolgenden Ziffern zusammen
                        if segChange + otherSegChange in tempBestSoFar:
                            if best[segChange] + bestSoFar[otherSegChange] < tempBestSoFar[segChange + otherSegChange]:
                                tempBestSoFar[segChange + otherSegChange] = best[segChange] + bestSoFar[otherSegChange]
                        else:
                            tempBestSoFar[segChange + otherSegChange] = best[segChange] + bestSoFar[otherSegChange]
                    else:
                        bestSoFar = best
            bestSoFar = tempBestSoFar
            tempBestSoFar = {}
            subTree.bestPossibleList = bestSoFar
        return subTrees # Rückgabe der aktualisierten Ziffernobjekte
```

### Funktion für die eigentliche Tiefensuche

```
def depthFirstSearch(subTree, subTrees, swaps): # Funktion zum Ausführen einer Tiefensuche auf dynamisch erzeugten Bäumen

    started = {}
    none = []

    stack = deque()
    stack.append((subTree, (0, 0), []))

    while stack: # Iteration über den sich ständig verändernden Callstack
        nextObject = stack.pop()

        subTree = nextObject[0]

        if subTree == "": # Prüfung, ob noch Ziffern übrig sind
            if nextObject[1][0] == 0 and nextObject[1][1] <= swaps: # Prüfung, ob die Lösung valide ist
                strArray = [hex(x)[2:] for x in nextObject[2]]
                string = "".join(strArray)
                return string
            continue

        attributesId = " ".join([str(x) for x in nextObject[1], subTree.digitNum]) # Erstellung einer eindeutigen Identifikation dieser Stelle im Baum, um eine Memoization dieser iterativen Lösung zu ermöglichen

        if len(stack) != 0:
            nextAttributesId = " ".join([str(x) for x in [stack[len(stack)-1][1], stack[len(stack)-1][0].digitNum]]) # Erstellung einer eindeutigen Identifikation des derzeit nachfolgenden Elements im Callstack,

        if attributesId in started: # Prüfung, ob der ein vorher begonnener Teilbaum bereits vollständig "umrundet" wurde, ohne Lösung
            for ele in started[attributesId]:
                none.append(ele)
            del started[attributesId]

        if attributesId in none: # Verwendung der Memoization, Abbrechung wenn bekannt ist, dass dieser Pfad zu keinem Ergebnis führt
            continue

        if len(stack) != 0: # Prüfung, ob auch eine Memoization dieses Teilbaums noch möglich ist
            if nextAttributesId in started:
                started[nextAttributesId].append(attributesId)
            else:
                started[nextAttributesId] = [attributesId]

        if subTree.digitNum <= len(subTrees): # Prüfung, ob dieser Pfad noch weiter geht
            for newSubTree in subTree.possibleChanges: # Erstellung neuer Callstackelemente für jede weitere Änderungsmöglichkeit, mit Prüfungen, ob diese zu validen Ergebnissen führen könnten

                newSegmentChange = nextObject[1][0] + subTree.possibleChanges[newSubTree][0]
                if subTree.digitNum == len(subTrees):
                    if newSegmentChange != 0:
                        continue

                newSwapChange = nextObject[1][1] + subTree.possibleChanges[newSubTree][1]
                if newSwapChange > swaps:
                    continue
                if newSwapChange == swaps and newSegmentChange != 0:
                    continue

                if -1 * newSegmentChange not in subTree.bestPossibleList:
                    continue
                else:
                    if newSwapChange + subTree.bestPossibleList[-1 * newSegmentChange] > swaps:
                        continue

                newChosenNumbers = nextObject[2] + [newSubTree]

                if subTree.digitNum <= len(subTrees)-1:
                    newSubTreeToAdd = deepcopy(subTrees[subTree.digitNum])
                    newSubTreeToAdd.value = newSubTree
                    stack.append((newSubTreeToAdd, (newSegmentChange, newSwapChange), newChosenNumbers))
                else:
                    stack.append((" ", (newSegmentChange, newSwapChange), newChosenNumbers))
```

## Funktionen zur Abbildung der Segmentänderung von Eingabebezahl zu Ausgabebezahl

```
def display(num): # Funktion, zur Abbildung einer binäre Siebensegmentkodierung
    start = 0
    end = 7
    parts = []
    rangeEnd = len(num)/7
    for _ in range(int(rangeEnd)):
        parts.append(num[start:end])
        start += 7
        end += 7
    for digit in parts:
        print("\n")
        if digit[0] == "1":
            print("——")
        if digit[5] == "1":
            print("| ", end="")
        else:
            print(" ", end="")
        if digit[1] == "1":
            print("|", end="")
        if digit[6] == "1":
            print("\n——")
        else:
            print("\n")
        if digit[4] == "1":
            print("| ", end="")
        else:
            print(" ", end="")
        if digit[2] == "1":
            print("|", end="")
        if digit[3] == "1":
            print("\n——")
        print("\n")
    print("\n=====")

def elaborateConversion(frm, to): # Funktion, zur Abbildung des Übergangs von Eingabezahl zur Ausgabeszah
    changingNum = ""
    str1 = ""
    str2 = ""
    for idx, digits in enumerate(zip(frm, to)):
        bin1 = binaryOfHex(digits[0])
        while len(bin1) != 7:
            bin1 = "0" + bin1
        bin2 = binaryOfHex(digits[1])
        while len(bin2) != 7:
            bin2 = "0" + bin2
        str1 += bin1
        str2 += bin2
    display(str1)
    changingNum = str1

    for idx in range(len(changingNum)):
        digitsInBin = (changingNum[idx], str2[idx])
        if digitsInBin[0] != digitsInBin[1]:

            changingNum = list(changingNum)
            changingNum[idx] = digitsInBin[1]
            changingNum = "".join(changingNum)

            for idx2, digit in enumerate(changingNum):
                if idx2 > idx:
                    if digit == digitsInBin[1] and str2[idx2] != digitsInBin[1]:
                        changingNum = list(changingNum)
                        changingNum[idx2] = digitsInBin[0]
                        changingNum = "".join(changingNum)
                        break
            display(changingNum)
```







### hexmax2:

632B29B38F11849015A3BCAEE2CDA0BD496919F8

37

→

```
ffffffffffffd9a9beaee8eda8bda989d9f8
```

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \quad | \end{array}$$
$$\frac{1}{2}$$

—

$$\frac{1}{11}$$
$$\begin{array}{c} \text{---} \\ | \quad | \\ \text{---} \\ | \end{array}$$
$$\begin{array}{c} | \\ \hline | \quad | \\ \hline \end{array}$$
$$\frac{\begin{array}{c} \text{---} \\ | \quad | \\ \text{---} \\ | \quad | \\ \text{---} \end{array}}{\begin{array}{c} | \quad | \\ | \quad | \\ | \quad | \end{array}}$$
$$\begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \end{array}$$

11

$$\frac{11}{1}$$

11

1

$$\frac{11}{11}$$


—

1

—

—

—

0000-0000-0000-0000



\_\_\_\_\_





[illegible]