最適化 1 追加レポート

坪井正太郎（101830245）

2020 年 12 月 12 日

1　期末試験

(1)2 段階シンプレックス法

1.

$$\boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{0}$$

2.

(B) の最適解を目的関数に代入した値が、

(i) 0 のとき → その時の基底解が、元の問題 (A) の実行可能解となる。

(ii) 0 でないとき →(A) に実行可能解が存在しない。

(2) 双対性

1.

$$\begin{aligned} \text{目的関数：} \quad & 12w_1 + 20w_2 \to \text{最大} \\ \text{制約条件：} \quad & w_1 + w_2 \leq -2 \\ & 2w_1 + 4w_2 \leq -1 \\ & 2w_2 \leq -1 \end{aligned}$$

2.

$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^* >= \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{w}$ となるような (D) の実行可能解 $\boldsymbol{w}$ のうち、最大なのは $\boldsymbol{w}^*$ であり、$\boldsymbol{w}^*$ が (D) の最適解である。同時に、$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} >= \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{w}^*$ となるような (P) の実行可能解 $\boldsymbol{x}$ のうち、最小なのは $\boldsymbol{x}^*$ であり、$\boldsymbol{x}^*$ が (P) の最適解である。

(3) **最適化** 1

2

最適化の授業の中で、塗り分け問題の定式化について最も興味を持った。このような地図の塗り分け問題があることは、知っていたが、愚直解を求める以外の方法を知らなかった。整数問題として定式化する方法があるという方法、0-1 変数の導入が知れた点が良かった。

3　期末レポート

3.1　シンプレックス法

(a)

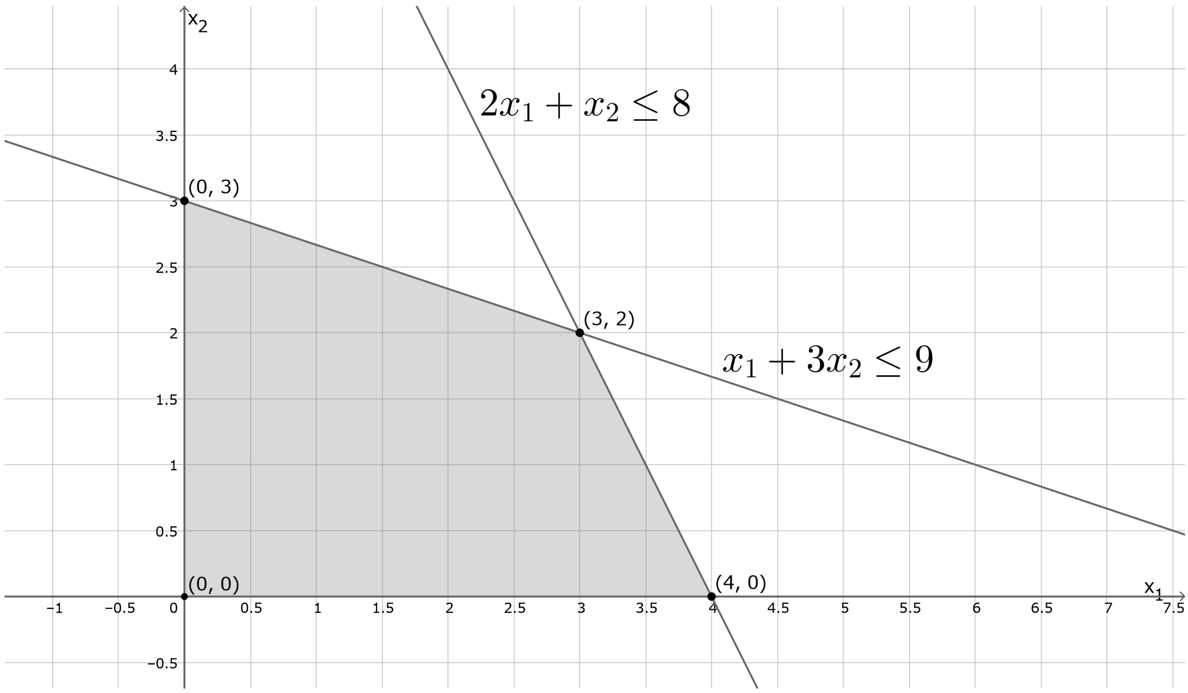

図 1　実行可能領域

(b)

$$
\begin{aligned}
\text{目的関数：} \quad & -2x_1 - 3x_2 \to \text{最大} \\
\text{制約条件：} \quad & 2x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\
& x_1 + 3x_2 + x_4 = 9 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

(c)

まず、初期条件は次のようになる。

$$
\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{N} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c}_N = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}
$$

1. (a)

$$\pi = (\boldsymbol{B}^T)^{-1}\boldsymbol{c}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\boldsymbol{c}_N - \boldsymbol{N}^T\pi = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

(c)

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \bar{\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

(d)

$$\theta = 3$$

(e)

$$\boldsymbol{x}_N = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_B = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} \text{と更新されるので、} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}^T$$

2. (a)

$$\pi = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\boldsymbol{c}_N - \boldsymbol{N}^T\pi = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(c)

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix}, \bar{\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

(d)

$$\theta = 3$$

(e)

$$\boldsymbol{x}_N = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{と更新されるので、} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$$

3. (a)

$$\pi = (\boldsymbol{B}^T)^{-1}\boldsymbol{c}_B = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

(b)

$$\boldsymbol{c}_N - \boldsymbol{N}^T\pi = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} \text{となる。}$$

この時点で相対コスト係数がどちらも正なので、最適解は $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$

3.2　グラフ彩色問題

色全体の集合を、$\boldsymbol{C} = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$ とする。
制約条件を

$$\forall i \in V, p_{ic_1} + p_{ic_2} + p_{ic_3} + p_{ic_4} \geq 1$$

$$\forall (i, j) \in E, (p_{ic_1} + p_{jc_1}), (p_{ic_2} + p_{jc_2}), (p_{ic_3} + p_{jc_3}), (p_{ic_4} + p_{jc_4}) \leq 1$$

となり、目的関数は $x = p_{ic_1}p_{ic_2} + p_{ic_1}p_{ic_3} + p_{ic_1}p_{ic_4} + p_{ic_2}p_{ic_3} + p_{ic_2}p_{ic_4} + p_{ic_3}p_{ic_4}$ として、

$$\left(\sum_{i=1}^{|V|} \frac{x}{x} \right) \to \text{最大}$$

となる。ただし、$x = 0$ のとき $\frac{x}{x} = 0$ とする。