# 南京航空航天大学

## 研究生考试试卷

| | | |
|---|---|---|
| 2000~2001 学年 | 第一学期 | 《矩阵论》课程 |
| 考试日期：　年　月　日 | 试卷类型： | 课程编号：A000003 |
| 学院　　学号 | 姓名 | 成绩 |

一、（20 分）

（1）设 A 为 n 阶非奇异复矩阵，试述矩阵 A 的 QR 分解定理；

（2）设 $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ (i)作出 A 的一个满秩分解；(ii)计算广义逆矩阵 $A^{+}$。

二、（18 分）

（1）设 $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}$，求 $\|A\|_1, \|A\|_2, \|A\|_\infty, \|A\|_F$；

（2）设 A 为 n 阶可逆矩阵，$\|\cdot\|$ 是满足 $\|I\|=1$ 的矩阵范数，证明 $\|A^{-1}\| \ge \|A\|^{-1}, \|A\|_2 \le \sqrt{n}\|A\|_1$。

三、（22 分）设 $A=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{bmatrix}$

（1）求 A 的特征多项式和 A 的全部特征值；

（2）求 A 的不变因子、初等因子和最小多项式；

（3）写出 A 的 Jordan 标准型；

（4）求 $\lim A^k$；

（5）计算 $e^A$。

四、（20 分）

（1）设 $A=\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$，证明 A 为正定矩阵；

（2）设 A，B 均为 Hermite 矩阵，证明：

(i)如果 A>0，则 AB 相似于对角矩阵；

(ii)如果 A>0,B>0，则 AB 的特征值均为正数；

(iii)如果 A>0,B>0,且 AB=BA，则 AB 是 Hermite 正定矩阵。

五、（20 分）设 V 是实数域 R 上全部 3 阶实反对称矩阵作成的线性空间（按矩阵的加法和数量乘法）

（1）求 V 的维数，并写出 V 的一组基；

（2）证明：若 A 是 3 阶实对称矩阵，且 $X\in V$，则必有 $AX+XA\in V$；

（3）作映射 T 如下：

$$T(X)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}X+X\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix},\ X\in V$$

证明：T 是 V 上的线性变换；

（4）求 T 在（1）中所取基下的矩阵表示。