一、 已知 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 2i\\ 2 & -2i & 1\end{pmatrix}$，其中 $i=\sqrt{-\mathbf{1}}$，求 $\|A\|_{\mathbf{1}}$， $\|A\|_{\mathbf{2}}$， $\|A\|_{\infty}$， $\|A\|_{F}$；

解：$\|\boldsymbol{A}\|_1=\max\{3,3,5\}=5$，$\|\boldsymbol{A}\|_\infty=\max\{3,3,5\}=5$

因为 $\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{H}}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 2\boldsymbol{i}\\ 2 & -2\boldsymbol{i} & 1\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}$，所以存在酉矩阵 $\boldsymbol{U}$，

使得 $(\boldsymbol{U}^{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{U})(\boldsymbol{U}^{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U})=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1^2 & & \\ & \lambda_2^2 & \\ & & \lambda_3^2\end{pmatrix}$

即 $\boldsymbol{U}^{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{U}=\begin{pmatrix}\lambda_1^2 & & \\ & \lambda_2^2 & \\ & & \lambda_3^2\end{pmatrix}$， $\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{A}$ 的特征值为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值的平方

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=1+2\sqrt{2},\lambda_3=1-2\sqrt{2}$ ， $\|\boldsymbol{A}\|_2=\left(\lambda_{\max}(\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{A})\right)^{\frac{1}{2}}=1+2\sqrt{2}$

$\boldsymbol{tr}(\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{A})=19,\|\boldsymbol{A}\|_{\boldsymbol{F}}=\sqrt{19}$.

二 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -15 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ -2 & -37 & 1\end{pmatrix}$，

1. 求 A 的特征多项式和 A 的全部特征值；
2. 求 A 的不变因子、初等因子及最小多项式；
3. 求 A 的 Jordan 标准型及变换矩阵 P ,使得 $P^{-1}AP=J$ ；

解：1. $|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=(\lambda-4)(\lambda-1)^2$， $\lambda_1=4,\lambda_2=\lambda_3=1$

2.行列式因子 $\boldsymbol{D}_3=(\lambda-4)(\lambda-1)^2$, $\boldsymbol{D}_2=1$, $\boldsymbol{D}_1=1$；

不变因子为 $\boldsymbol{d}_1=\boldsymbol{d}_2=1$, $\boldsymbol{d}_3=(\lambda-4)(\lambda-1)^2$，初等因子为 $(\lambda-4),(\lambda-1)^2$

$$\boldsymbol{A}\to\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & (\lambda-4)(\lambda-1)^2\end{pmatrix}$$ ，最小多项式为 $(\lambda-4)(\lambda-1)^2$.

3. $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形为 $\begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ ，存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ ，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{J}$

$$(\boldsymbol{Ap}_1,\boldsymbol{Ap}_2,\boldsymbol{Ap}_3)=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)\begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}\boldsymbol{Ap}_1=4\boldsymbol{p}_1\\ \boldsymbol{Ap}_2=\boldsymbol{p}_2\\ \boldsymbol{Ap}_3=\boldsymbol{p}_2+\boldsymbol{p}_3\end{cases}$$

取 $\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}-5\\ 1\\ -9\end{pmatrix}$， $\boldsymbol{Ap}_2=\boldsymbol{p}_2\Rightarrow\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \boldsymbol{k}\end{pmatrix}$， $\boldsymbol{Ap}_3=\boldsymbol{p}_2+\boldsymbol{p}_3\Rightarrow\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\boldsymbol{k}\\ 0\\ \boldsymbol{l}\end{pmatrix}$ （$\boldsymbol{k},\boldsymbol{l}$ 任意）

取 $\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 2\end{pmatrix}$， $\boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$ ，则 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-5 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 0\\ -9 & 2 & 1\end{pmatrix}$.

4. 令 $T>0$，确定幂级数 $s(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(T^2+\frac{1}{k^2+3k+1})^{\frac{k}{2}}}z^k$ 的收敛半径。令 $h(z)=s(\frac{z}{2})$，对上述 A 讨论矩阵级数 $h(A)$ 的绝对收敛性。

令 $a_k=\dfrac{1}{\left(T^2+\dfrac{1}{k^2+3k+1}\right)^{\frac{k}{2}}}$，则 $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{a_k}=\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{1}{\left(T^2+\dfrac{1}{k^2+3k+1}\right)^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{1}{T}$ ，则 $R=T$

因为 $h(z)=s\left(\dfrac{z}{2}\right)$，代入可得 $\rho\left(\dfrac{A}{2}\right)=2$

所以当 $\rho=2<T$ 时，幂级数 $h(A)$ 绝对收敛.

三 1. 求矩阵 $A=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 3 & -1\\ 3 & 2\end{bmatrix}$ 的奇异值分解.

解：$\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}19 & 0\\ 0 & 14\end{pmatrix}$，$\lambda_1=19,\lambda_2=14$，

$\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 19 和 14 的特征向量为 $\boldsymbol{u}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{u}_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{H}}$ 的非零特征值与 $\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{A}$ 的相同，此外还有一个特征值为 0

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{H}}$ 对应于特征值 19 和 14 的特征向量为 $\boldsymbol{v}_1=\dfrac{1}{\sqrt{19}}\begin{pmatrix}-1\\3\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{v}_1=\dfrac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}$

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{H}}$ 对应于特征值 0 的特征向量为 $\boldsymbol{v}_3=\dfrac{1}{\sqrt{266}}\begin{pmatrix}-9\\-11\\8\end{pmatrix}$

所以 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 3 & -1\\ 3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{-1}{\sqrt{19}} & \dfrac{3}{\sqrt{14}} & \dfrac{-9}{\sqrt{266}}\\ \dfrac{3}{\sqrt{19}} & \dfrac{-1}{\sqrt{14}} & \dfrac{-11}{\sqrt{266}}\\ \dfrac{3}{\sqrt{19}} & \dfrac{2}{\sqrt{14}} & \dfrac{8}{\sqrt{266}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{19} & 0\\ 0 & \sqrt{14}\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}^{\boldsymbol{H}}$.

2. 已知矩阵 B，存在可逆矩阵 $P=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix}$，使得 $P^{-1}BP=J=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$，求 e^{2Bt}，这里 t 是实数.

解：$\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}-2&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$. 当 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{e}^{2\boldsymbol{x}\boldsymbol{t}}$ 时， $\boldsymbol{f}(1)=\boldsymbol{e}^{2t},\boldsymbol{f}'(1)=2\boldsymbol{t}\boldsymbol{e}^{2t}$，则

$$\boldsymbol{e}^{2\boldsymbol{B}t}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}^{2t}&0&0\\0&\boldsymbol{e}^{2t}&2\boldsymbol{t}\boldsymbol{e}^{2t}\\0&0&\boldsymbol{e}^{2t}\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}^{2t}&2\boldsymbol{t}\boldsymbol{e}^{2t}&0\\0&\boldsymbol{e}^{2t}&0\\0&4\boldsymbol{t}\boldsymbol{e}^{2t}&\boldsymbol{e}^{2t}\end{pmatrix}.$$

四、 1．当实数 t 满足什么条件时，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&\boldsymbol{t}&2\\0&2&\boldsymbol{t}+4\end{pmatrix}$ 半正定?

解：由题意 $\boldsymbol{A}$ 的所有主子式均非负，则

$$\boldsymbol{t}\geq 0,\boldsymbol{t}+4\geq 0,\begin{vmatrix}4&0\\0&\boldsymbol{t}\end{vmatrix}\geq 0,\begin{vmatrix}4&0\\0&\boldsymbol{t}+4\end{vmatrix}\geq 0,\begin{vmatrix}\boldsymbol{t}&2\\2&\boldsymbol{t}+4\end{vmatrix}\geq 0$$

所以 $\boldsymbol{t}\geq -2+2\sqrt{2}$.

2．A 为 n 阶非奇异矩阵，证明： $A^H A$ 为 n 阶 Hermite 正定矩阵.

证明：因为$\left(\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{A}\right)^{\boldsymbol{H}}=\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{A}$,所以 $\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{A}$ 为 Hermite 矩阵。

对于任意 $\boldsymbol{x}\neq 0$， $\boldsymbol{A}$ 是非奇异矩阵，所以 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\neq 0$.

因此 $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})>0$，则 $\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵。

五 矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&2&2\\1&-1&-3\end{bmatrix}$，向量 $b=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$，

1．求矩阵 A 的满秩分解，并计算 A^{+}；

2．对于方程组 $Ax=b$，用广义逆判断方程组是否相容，若相容，求其通解及极小范数解，若不相容，求其通解及极小最小二乘解。

解：$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&2&2\\1&-1&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&2&2\\0&0&0\end{pmatrix}$, 即 $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&1&1\end{pmatrix}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&2&2\\0&0&0\end{pmatrix}$

所以 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&2&2\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&2&2\end{pmatrix}=\boldsymbol{BC}$（满秩分解）

$$\boldsymbol{A}^{+}=\boldsymbol{C}^{T}\left(\boldsymbol{CC}^{T}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{B}^{T}\boldsymbol{B}\right)^{-1}\boldsymbol{B}^{T}=\begin{pmatrix}1&0\\1&2\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&0\\0&\frac{1}{8}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{2}{9}&\frac{1}{9}&\frac{1}{9}\\\frac{11}{36}&\frac{5}{18}&\frac{1}{36}\\-\frac{5}{36}&\frac{1}{18}&-\frac{7}{36}\end{pmatrix}，\quad \boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\\frac{3}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}，\quad \boldsymbol{AA}^{+}\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}=\boldsymbol{b}.$$ 方程组有解.

通解为：$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{A})\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}1\\\frac{3}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}&\frac{1}{6}&-\frac{1}{6}\\\frac{1}{3}&-\frac{1}{6}&\frac{1}{6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{y}_1\\\boldsymbol{y}_2\\\boldsymbol{y}_3\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}1\\\frac{3}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}+\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}\boldsymbol{y}_1+\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}\boldsymbol{y}_2+\frac{1}{6}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}\boldsymbol{y}_3=\begin{pmatrix}1\\\frac{3}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}+\boldsymbol{k}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$$ ($\boldsymbol{k}$ 为任意常数).