第一章 线性空间与内积空间

1. 线性空间、维数、基与坐标

(1) 线性空间 V 中存在加法和数乘运算，且加法和数乘运算满足8个条件.

(2) 线性空间 V 中线性无关向量的最大个数 n 称为 V 的维数, 记为 $\dim(V) = n$; V 中任意 n 个线性无关向量称为 V 的一组基.

(3) 如果 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是线性空间 V 中的 n 个线性无关向量, 且 V 中任一向量都可由其线性表示, 则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 V 的一组基且 $\dim(V) = n$.

(4) 设$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$是线性空间 V 的一组基, $\varepsilon'_1,\varepsilon'_2,\cdots,\varepsilon'_n$是 V 的 n 个向量, 则存在 n 阶方阵 T, 使得

$$(\varepsilon'_1,\varepsilon'_2,\cdots,\varepsilon'_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)T,$$

当且仅当 T 可逆时, $\varepsilon'_1,\varepsilon'_2,\cdots,\varepsilon'_n$ 也是 V 的一组基.

(5) 设$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$是线性空间 V 的基, 则向量 α 在这组基下的坐标$(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$ 是如下线性组合的系数向量:

$$\alpha = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_n\varepsilon_n.$$

2. 线性子空间

(1) 设 V 是线性空间, W 是 V 的非空子集，则 W 是 V 的子空间的充分必要条件是

$$\forall k \in P, \forall \alpha, \beta \in W \Rightarrow k\alpha, \alpha + \beta \in W$$

(2) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$ 是线性空间 V 的一组向量，

$$W = L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s) = \{k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s \mid k_i \in P\},$$

则 W 是 V 的子空间.

(3) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$ 与 $\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_t$ 是线性空间 V 的两组向量, 则 $L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s) = L(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t)$ 的充分必要条件是 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 与 $\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_t$ 等价.

（4）$\dim(L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s))=\mathrm{rank}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s)$;

(5) 设 V_1, V_2 是线性空间 V 的两个子空间，则 $V_1 \cap V_2$ 和 V_1+V_2 也是 V 的子空间.

(6) 如果 V_1 和 V_2 是线性空间 V 的有限维子空间, 则

$$\dim(V_1)+\dim(V_2)=\dim(V_1+V_2)+\dim(V_1\bigcap V_2).$$

3. 直和的判别法

(1) $V_1 + V_2$ 中任意向量的分解式唯一；

(2) $V_1 + V_2$ 中零向量的表法唯一；

(3) $V_1 \cap V_2 = \{0\}$;

(4) $\dim(V_1 + V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2)$.

4. 内积空间　内积定义

(1) 内积是一种代数运算，满足共轭对称性，左侧可加性和齐次性以及非负性；

(2) Cauchy 不等式：$\left|(\alpha,\beta)\right| \le \|\alpha\| \|\beta\|$；

(3) 三角不等式：$\|\alpha+\beta\| \le \|\alpha\| + \|\beta\|$；

(4) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关的充分必要条件是 Gram 矩阵

$$G(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m) = \left((\alpha_i,\alpha_j)\right)_{m\times m}$$

非奇异.

(5) 线性无关向量组一定可以标准正交化.

5. 标准正交基的性质

(1) 有限维内积空间 V 的标准正交基一定存在.

(2) 有限维内积空间 V 的任意一组标准正交向量可扩充为 V 的一组标准正交基.

(3) 设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 是内积空间 V 的一组标准正交基, 且 $\alpha = x_1\varepsilon_1 + \cdots + x_n\varepsilon_n$, $\beta = y_1\varepsilon_1 + \cdots + y_n\varepsilon_n$, 则

$$(\alpha, \beta) = y^H x = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}.$$

6. 常见内积空间

(1) $V = C^n$， 内积 $(x, y) = y^H x = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$;

(2) $V = C[a,b]$， 内积 $(f, g) = \int_a^b f(x) g(x) dx$;

(3) $V = C^{m\times n}$， 内积 $(A, B) = \mathrm{tr}(B^H A)$.

第二章　线性映射与线性变换

1. 线性变换的定义

设 V 是数域 P 的线性空间，$\mathscr{A}$ 是 V 到自身的一个映射，如果

$$\mathscr{A}(\alpha+\beta)=\mathscr{A}(\alpha)+\mathscr{A}(\beta),\quad \forall\alpha,\beta\in V$$

$$\mathscr{A}(k\alpha)=k\mathscr{A}(\alpha),\quad \forall\alpha\in V, k\in P$$

则称 $\mathscr{A}$ 是 V 上的线性变换.

~~2. 线性变换的性质~~

如果 $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 是V上的线性变换，$k\in P$, 则 $\mathscr{A}+\mathscr{B}$, $\mathscr{A}\mathscr{B}$, $k\mathscr{A}$ 也是V上的线性变换.

3. 线性变换的矩阵表示

(1) 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是线性空间 V 的一组基，$\mathscr{A}$ 是 V 上的线性变换，则

$$\begin{cases} \mathscr{A}(\varepsilon_1) = a_{11}\varepsilon_1 + a_{21}\varepsilon_2 + \cdots + a_{n1}\varepsilon_n \\ \mathscr{A}(\varepsilon_2) = a_{12}\varepsilon_1 + a_{22}\varepsilon_2 + \cdots + a_{n2}\varepsilon_n \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathscr{A}(\varepsilon_n) = a_{1n}\varepsilon_1 + a_{2n}\varepsilon_2 + \cdots + a_{nn}\varepsilon_n \end{cases}$$

即 $\mathscr{A}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n) = (\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)A.$

(2) n 维线性空间上的线性变换与 n 阶矩阵一一对应.

(3) 同一个线性变换在不同基下的矩阵一定相似.

4. 线性变换的值域与核

设$\mathscr{A}$是 n 维线性空间V上的线性变换，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是 V 的一组基，$\mathscr{A}$在这组基下的矩阵是 A，则

（1）$\mathscr{A}$的核为 $Ker(\mathscr{A})=\{\alpha\in V\mid\mathscr{A}(\alpha)=0\}$;

（2）$\mathscr{A}$的值域为 $R(\mathscr{A})=\{\mathscr{A}(\alpha)\mid\alpha\in V\}$;

（3）$R(\mathscr{A})=L(\mathscr{A}(\varepsilon_1),\mathscr{A}(\varepsilon_2),\cdots,\mathscr{A}(\varepsilon_n))$;

（4）$\dim(R(\mathscr{A}))=\mathrm{rank}(A)$;

（5）$\dim(R(\mathscr{A}))+\dim(Ker(\mathscr{A}))=n$.

5. 矩阵 A 可对角化的充分必要条件

（1） A 有 n 个线性无关的特征向量.

（2）设 A 的全部互异特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$， 则

$$C^n = V_{\lambda_1} \dot{+} V_{\lambda_2} \dot{+} \cdots \dot{+} V_{\lambda_r}$$

（3） A 的每一个特征值的几何重数等于代数重数.

（4）C^n 可以分解成 A 的一维不变子空间的直和.

（5）A 的初等因子都是一次式.

（6）A 的最小多项式 $m(\lambda)$ 没有重零点.

6. 酉变换和酉矩阵 定义

设$\mathscr{A}$是 n 维酉空间 V 的线性变换，则下列命题等价：

(1)$\mathscr{A}$是酉变换，即$(\mathscr{A}(\alpha),\mathscr{A}(\beta))=(\alpha,\beta)$；

(2) $\|\mathscr{A}(\alpha)\|=\|\alpha\|,\quad \forall\alpha\in V$;

(3) 如果 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots\varepsilon_n$ 是 V 的一组标准正交基，则 $\mathscr{A}(\varepsilon_1),\mathscr{A}(\varepsilon_2),\cdots,\mathscr{A}(\varepsilon_n)$ 也是 V 的一组标准正交基;

(4) $\mathscr{A}$在 V 的标准正交基下的矩阵是酉矩阵.

第三章　λ矩阵与矩阵的Jordan标准形

1. 数字矩阵 A 与 B 相似的条件

（1）存在数字矩阵 P 与 Q，使得 $\lambda I - A = P(\lambda I - B)Q$.

（2）它们的特征矩阵 λI- A 和 λI- B 相抵.

（3）它们有相同的不变因子.

（4）它们有相同的行列式因子.

（5）它们有相同的初等因子.

2. 矩阵的最小多项式

（1）矩阵 A 的最小多项式 $m(\lambda)$ 能整除 A 的任一化零多项式.

（2）矩阵 A 的最小多项式能整除特征多项式 $f(\lambda)$.

（3）λ_0 是 A 的特征值的充分必要条件是 $m(\lambda_0)=0$；

（4）相似的矩阵具有相同的最小多项式.

（5）矩阵 A 的最小多项式为其最后一个不变因子.

3. 矩阵的不变因子、行列式因子和初等因子的求法

（1）化 $\lambda I - A$ 为 Smith 标准形：

$$\lambda I - A \cong \mathrm{diag}\,(d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_n(\lambda))$$

则 $d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_n(\lambda)$ 是 A 的 n 个不变因子.

（2）令

$$\begin{cases} D_1(\lambda) = d_1(\lambda) \\ D_2(\lambda) = d_1(\lambda) d_2(\lambda) \\ \quad\vdots \\ D_n(\lambda) = d_1(\lambda) d_2(\lambda) \cdots d_n(\lambda) \end{cases}$$

则 $D_1(\lambda), D_2(\lambda), \cdots, D_n(\lambda)$ 是 A 的 n 个行列式因子.

（3）将矩阵 A 的不变因子 $d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_n(\lambda)$ 分解成一次因式的方幂：

$$(\lambda-\lambda_1)^{n_1}, (\lambda-\lambda_2)^{n_2}, \cdots, (\lambda-\lambda_s)^{n_s}$$

即为 A 的全部初等因子.

4. Jordan 标准形的求法　对应的变换矩阵P求法

（1）求矩阵 A 的初等因子

$$(\lambda-\lambda_1)^{n_1},(\lambda-\lambda_2)^{n_2},\cdots,(\lambda-\lambda_s)^{n_s}$$

（2）对 A 的每个初等因子 $(\lambda-\lambda_i)^{n_i}$ 构造 Jordan 块：

$$J_i=\begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{pmatrix}_{n_i\times n_i}$$

（3）A 的Jordan标准形为 $J=\mathrm{diag}(J_1,J_2,\cdots,J_s)$.

第四章　矩阵的因子分解

1. 满秩分解

设 $m \times n$ 矩阵 A 的秩为 $r \geqslant 1$，则存在 $m \times r$ 列满秩矩阵 B 和 $r \times n$ 行满秩矩阵 C, 使得 $A = BC$.

2. 三角分解

（1）LU分解：设 A 的各阶顺序主子式非零，则存在唯一的单位下三角矩阵 L 和上三角矩阵 U, 使得 $A = LU$.

（2）LDU分解：设 A 的各阶顺序主子式非零，则存在唯一的单位下三角矩阵 L，单位上三角矩阵 U 和对角矩阵 $D = \mathrm{diag}(d_1, d_2,\cdots,d_n)$，使得 $A = LDU$, 并且

$$d_1 = a_{11}, \quad d_k = \frac{\Delta_k(A)}{\Delta_{k-1}(A)}, \quad k = 2,\cdots,n.$$

3. QR分解

（1）设 A 是 n 阶非奇异实矩阵，则存在酉矩阵 Q 和非奇异上三角矩阵 R，使得 $A = QR$.

（2）设 A 是 $m\times n$ 列满秩矩阵，则存在 $m\times n$ 列正交规范矩阵 Q 和 n 阶非奇异上三角矩阵 R，使得 $A = QR$.

（3）设 A 是 $m\times n$ 矩阵且 $\mathrm{rank}(A)=r>0$ ，则 A 有分解式：

$$A=QR$$

其中 Q 是 $m\times r$ 列正交规范矩阵，R 是 $r\times n$ 行满秩矩阵.

4. Schur定理(正交分解)

（1）设 A 是 n 阶复矩阵，则存在 n 阶酉矩阵 U 和 n 阶上三角矩阵 R, 使得 $U^HAU=R$.

（2）设 A 是 n 阶实矩阵，则存在 n 阶正交矩阵 Q 和 n 阶块上三角矩阵 R 使得 $Q^TAQ=R$.

5. 奇异值分解

设 A 是 $m\times n$ 实（酉）矩阵，且 rank $(A)=r$，则存在 m 阶正交（酉）矩阵 V 和 n 阶正交（酉）矩阵 U，使得

$$V^T AU=\begin{pmatrix}\Sigma & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\quad\left(V^H AU=\begin{pmatrix}\Sigma & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right)$$

其中 $\Sigma=\mathrm{diag}(\sigma_1,\cdots,\sigma_r)$, 且 $\sigma_1,\cdots,\sigma_r$ 是 A 的正奇异值.

6. 正规矩阵的性质

定义

（1）n 阶矩阵 A 酉相似于对角矩阵的充分必要条件为 A 是正规矩阵.

（2）设 A, B 均为 n 阶正规矩阵且 $AB = BA$，则存在 n 阶酉矩阵 U，使得 U^HAU 与 U^HBU 同时为对角矩阵.

（3）若 A 是正规矩阵，则 A 的属于不同特征值的特征向量正交.

（4）若 A 是正规矩阵，则 A 的奇异值是 A 的特征值的模.

第五章　Hermite矩阵与正定矩阵

1. Hermite矩阵的性质

（1）如果 A 是 Hermite 矩阵，则对正整数 k，A^k 也是 Hermite 矩阵；

（2）如果 A 是可逆 Hermite 矩阵，则 A^{-1} 是 Hermite 矩阵；

（3）若 A, B 是 Hermite 矩阵，则 AB 是 Hermite 矩阵的充分必要条件是 $AB = BA$；

（4）若 A 是 Hermite 矩阵，则对任意方阵 S，$S^H AS$ 也是 Hermite 矩阵.

（5）设 A 为 n 阶 Hermite 矩阵，则 A 的所有特征值全是实数.

（6）设 A 为 n 阶 Hermite 矩阵，则 A 的属于不同特征值的特征向量互相正交.

（7）A 为 n 阶 Hermite 矩阵的充分必要条件是存在酉矩阵 U 使得

$$U^H AU = \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$均为实数 .

2. Hermite 矩阵正定的判别方法

（1）A 的 n 个特征值均为正数；

（2）存在 n 阶可逆矩阵 P 使得 $P^H AP = I$；

（3）存在 n 阶可逆矩阵 Q 使得 $A = Q^H Q$；

（4）存在 n 阶可逆 Hermite 矩阵 S 使得 $A = S^2$.

（5）A 的顺序主子式均为正数，即

$$\Delta_k(A) > 0 \qquad k = 1, \cdots, n.$$

（6）A 的所有主子式全大于零.

3. 正定矩阵的性质

设 A 是 n 阶正定矩阵，其特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，则

(1) A^{-1} 是正定矩阵；

(2) 如果 Q 是任一 $n \times m$ 列满秩矩阵，则 $Q^H AQ > 0$;

(3) $|A| > 0$； $\operatorname{tr}(A) > \lambda_i (i = 1,2,\cdots,n)$.

(4) 设 A, B 均为 n 阶 Hermite 矩阵且 $B>0$，则存在可逆矩阵 P 使得

$$P^H AP = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n), \quad P^H BP = I.$$

4. Hermite 矩阵半正定的判别方法

（1）A的n 个特征值均为非负数；

（2）存在 n 阶可逆矩阵 P 使得 $P^H AP=\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$;

(3) 存在秩为 r 的矩阵 Q 使得 $A=Q^H Q$;

（4）存在秩为 r 的 n 阶Hermite矩阵 S 使得 $A=S^2$.

（5）A 的所有主子式均非负.

5. 矩阵不等式

(1) $A \geq B \Leftrightarrow A - B \geq 0.$

(2) $A \geq B \Leftrightarrow \forall x \in C^n$, 有 $x^H A x \geq x^H B x.$

(3) 设 $A = \mathrm{diag}(a_1, \cdots, a_n), B = \mathrm{diag}(b_1, \cdots, b_n)$, 则

$$A \geq B (A > B) \Leftrightarrow a_i \geq b_i (a_i > b_i)(i = 1, 2, \cdots, n)$$

(4) $A \geq B (A > B) \Leftrightarrow$ 对任意 n 阶可逆矩阵 P 都有

$$P^H A P \geq P^H B P \; (P^H A P > P^H B P)$$

(5) 设 A, B 均为 n 阶 Hermite 矩阵且 $A \geqslant 0, B > 0$，则

$$B \geq A \Leftrightarrow \rho(AB^{-1}) \leq 1; \;\; B > A \Leftrightarrow \rho(AB^{-1}) < 1.$$

(6) 设 A 是 n 阶Hermite矩阵, 则 $\lambda_{\min}(A)I \le A \le \lambda_{\max}(A)I$.

(7) 设 A 是 Hermite 非负定矩阵，则 $A \leqslant \mathrm{tr}(A)\, I$.

(8) 设 A, B 均为 n 阶 Hermite 矩阵, 且 $AB = BA$, 则

若 $A > B > 0$，则 $A^2 > B^2$;

若 $A \ge B \ge 0$，则 $A^2 \ge B^2$.

(9) 设 $A > 0, C > 0$且 $AC = CA$, 则 $AC > 0$.

(10) 设 $A \ge 0, C \ge 0$ 且 $AC = CA$, 则 $AC \ge 0$.

第六章　范数与极限

1. 向量范数 定义

(1)　$1-$范数 $\|x\|_1=\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|$；

(2)　$2-$范数 $\|x\|_2=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$；

(3)　$\infty-$范数 $\|x\|_\infty=\max\limits_{1\le i\le n}|x_i|$；

(4)　$p-$范数 $\|x\|_p=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$，　$p>1$

2. 矩阵范数

定义

(1) $1-$范数 $\|A\|_1=\max\limits_{1\le j\le n}\sum\limits_{i=1}^{m}|a_{ij}|$

(2) $2-$范数 $\|A\|_2=[\lambda_{\max}(A^HA)]^{\frac{1}{2}}$

(3) $\infty-$范数 $\|A\|_\infty=\max\limits_{1\le i\le m}\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}|=\|A^H\|_1$

(4) $F-$范数 $\|A\|_F=\left(\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}=\left(tr(A^HA)\right)^{\frac{1}{2}}$

3. 矩阵范数与向量范数的联系

设 $A\in C^{m\times n}$且 $p=1, 2, \infty$，则 $\|A\|_p=\max\limits_{\|x\|_p=1}\|Ax\|_p$

4. 矩阵范数的相容性

设 $A \in C^{m\times n}$, $B \in C^{n\times k}$, $p = 1, 2, \infty, F$, 则

(1) $\|AB\|_p \le \|A\|_p \|B\|_p$;

(2) $\|AB\|_2 \le \|A\|_F \|B\|_2$;

(3) $\|AB\|_F \le \|A\|_2 \|B\|_F$.

5. 矩阵范数的性质

(1) $\left\|A^H\right\|_2 = \left\|A^T\right\|_2 = \|A\|_2$;

(2) $\left\|A^H A\right\|_2 = \|A\|_2^2$;

(3) $\|UA\|_2 = \|AV\|_2 = \|UAV\|_2 = \|A\|_2$;

(4) $\|UA\|_F = \|AV\|_F = \|UAV\|_F = \|A\|_F$;

(5) $\left\|A^H\right\|_F = \left\|A^T\right\|_F = \|A\|_F$;

(6) $\|A\|_2^2 \le \|A\|_1 \|A\|_\infty$.

6. 矩阵的谱半径

(1) 设 $\|\cdot\|$ 是 $C^{n\times n}$ 上的任一相容矩阵范数，则 $\rho(A)\le\|A\|$.

(2) 设 $A\in C^{n\times n}$ 且 $\rho(A)<R$, 则在 $C^{n\times n}$ 上存在相容矩阵范数 $\|\cdot\|$, 使得 $\|A\|<R$.

(3) 设 $\|\cdot\|$ 是 $C^{n\times n}$ 上的相容矩阵范数，则对任意 $A\in C^{n\times n}$，有

$$\rho(A)=\lim_{k\to\infty}\|A^k\|^{\frac{1}{k}}.$$

~~7. 矩阵序列与矩阵级数~~

(1) $\lim\limits_{k\to\infty} A^{(k)} = A \Leftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty} a_{ij}^{(k)} = a_{ij} \Leftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty}\left\|A^{(k)} - A\right\| = 0.$

(2) 设级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ 的收敛半径为 R, 如果 $\rho(A) < R$, 则 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k A^k$ 绝对收敛; 如果 $\rho(A) > R$, 则 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k A^k$ 发散.

(3) 矩阵幂级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} A^k$ 收敛 $\Leftrightarrow \rho(A) < 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty} A^k = 0.$

(4) 设 $A \in C^{n\times n}$ 是非奇异矩阵, $E \in C^{n\times n}$, $\|\cdot\|$ 是 $C^{n\times n}$ 上的相容矩阵范数且 $\left\|A^{-1}E\right\| < 1$, 则 $A + E$ 可逆.

8. 矩阵指数函数 e^{At} 的计算

(1) 若 $A=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$, 则

$$e^{At}=\mathrm{diag}(e^{\lambda_1 t},e^{\lambda_2 t},\cdots,e^{\lambda_n t});$$

(2) 若 A 是特征值为 λ 的 m 阶 Jordan 块, 则

$$e^{At}=\begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \cdots & \dfrac{t^{m-1}}{(m-1)!}e^{\lambda t} \\ & e^{\lambda t} & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & te^{\lambda t} \\ & & & e^{\lambda t} \end{pmatrix};$$

(3) 若 $A=\mathrm{diag}(J_1,J_2,\cdots,J_s)$, 则

$$e^{At}=\mathrm{diag}(e^{J_1 t},e^{J_2 t},\cdots,e^{J_s t});$$

(4) 若 $A = PJP^{-1}$, 则 $e^{At} = Pe^{Jt}P^{-1}$;

(5) 若 $A \in C^{n \times n}$ 有 n 重特征值 λ, 则

$$e^{At} = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(A - \lambda I)^k}{k!} t^k.$$

第八章　广义逆矩阵

1. 加号逆的定义

设 $A \in R^{m\times n}$, 则 $G = A^{+}$ 的充分必要条件是:

（1）$AGA = A$;

（2）$GAG = G$;

（3）$(AG)^{T} = AG$;

（4）$(GA)^{T} = GA$.

2. 加号逆的基本性质

(1) 若 A 是 n 阶可逆矩阵，则 $A^{+}=A^{-1}$;

(2) 方程组 $Ax=b$ 相容的充要条件是 $AA^{+}b=b$;

(3) 若 $Ax=b$ 相容，则其通解是

$$x=A^{+}b+(I-A^{+}A)y,\quad \forall y\in R^{n};$$

(4) 若 $Ax=b$ 相容，则 $x=A^{+}b$ 是其极小范数解；

(5) 若 $Ax=b$ 不相容，则其最小二乘解的通式 是

$$x=A^{+}b+(I-A^{+}A)y,\forall y\in R^{n}.$$

(6) 若 $Ax=b$ 不相容，则其极小最小二乘解是 $x=A^{+}b$.

3. 加号逆的计算

（1）设 A 的奇异值分解为 $A=U\begin{pmatrix}\Sigma & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}V^T$, 则

$$A^+=V\begin{pmatrix}\Sigma^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}U^T;$$

（2）设 A 的满秩分解为 $A=BC$, 则

$$A^+=C^T(CC^T)^{-1}(B^TB)^{-1}B^T=C^+B^+;$$

(3) 若 A 列满秩, 则 $A^+=(A^TA)^{-1}A^T;$

(4) 若 A 行满秩, 则 $A^+=A^T(AA^T)^{-1}.$