南京航空航天大学2016级硕士研究生

2016～2017学年第1学期 《**矩阵论**》 课程考试A卷

考试日期：2017年1月5日 课程编号：6A080001 命题教师： 阅卷教师：

学院 专业 学号 姓名 成绩

一、（20分）设3阶矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&0&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}$.

1．求 A 的特征多项式；

2．求 A 的初等因子和 Jordan 标准形；

3．问： A 与矩阵 $B=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&-1\\0&1&2\end{pmatrix}$ 是否相似？并说明理由.

答案及评分标准：

1.特征多项式为 $f(\lambda)=\lambda(\lambda-1)^2$.（5分）

2. A 的初等因子为 $\lambda,(\lambda-1)^2$，（5分）

Jordan 标准形为 $J=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.（5分）

3. 因为 A 与 B 有相同的初等因子, 所以 A 与 B 相似.（5分）

二、（20 分）设 R^3 的线性变换 σ 定义为 $\sigma\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ -2x_1 + x_2 + a x_3 \\ x_1 \end{pmatrix}$.

1．求 R^3 的基 $\varepsilon_1 = (1, 0, 0)^T, \varepsilon_2 = (1, 1, 0)^T, \varepsilon_3 = (1, 1, 1)^T$ 在 σ 下的像；

2．求 σ 在题 1 所取基下的矩阵 A；

3．求 σ 的全部特征值；

4．给出 σ 可以对角化的充分必要条件（要求以参数 a 表示）.

答案及评分标准:

1. 基像是 $\sigma(\varepsilon_1) = (0, -2, 1)^T, \sigma(\varepsilon_2) = (0, -1, 1)^T, \sigma(\varepsilon_3) = (1, a-1, 1)^T$.（5 分）

2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2-a \\ -3 & -2 & a-2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.（5 分）

3. 因为 $|\lambda I - A| = (\lambda+1)(\lambda-1)^2$，所以 σ 的特征值是 $-1, 1, 1$.（5 分）

4. σ 可对角化 $\Leftrightarrow a = 2$.（5 分）

三、(20 分) 设 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&2\\1&2&7\end{pmatrix}$.

1．证明 A 是正定矩阵；

2．作出 A 的 LDU 分解；

3．证明：若 A 是 n 阶 Hermite 正定矩阵，则存在唯一对角元全为正数的下三角矩阵 B，使得 $A=BB^H$.

答案及评分标准:

1. A 为对称矩阵，且三个顺序主子式 $\Delta_1=1, \Delta_2=2, \Delta_3=8$ 全为正数，所以 A 是正定矩阵.（5 分）

2. $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.（5 分）

3. 已知 A 是正定矩阵，则 A 的各阶顺序主子式 $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_n$ 全为正数，从而存在单位下三角矩阵 L，对角矩阵 $D=diag(d_1, d_2, \cdots, d_n)$，单位上三角矩阵 U，使得 $A=LDU$，其中 $d_k>0, k=1,2,\cdots,n$.（5 分）

由于 $A=U^H DL^H$ 且 A 的 LDU 分解式唯一，所以 $U=L^H$. 取

$$B=Ldiag(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2}, \cdots, \sqrt{d_n}),$$

则 B 为对角元全为正数的下三角矩阵，且 $A=BB^H$. 再由 A 的 LDU 分解式的唯一性，可知 B 是唯一的.（5 分）

四、(20 分) 设 $A=\begin{pmatrix}0 & -1 & -1\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}$.

1．求 $\|A\|_1,\|A\|_\infty,\|A\|_F,\|A\|_2$；

2．求 A 的加号逆 A^+；

3．判断方程组 $Ax=b$ 是否相容？如果相容，求其通解；如果不相容，求其极小最小二乘解.

答案及评分标准:

1. $\|A\|_1=2,\|A\|_\infty=2,\|A\|_F=\sqrt{6},\|A\|_2=\sqrt{3}$.（5 分）

2. A 的一种满秩分解为 $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}=BC$；（5 分）.

因为 $B^+=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ -2 & -1 & 1\end{pmatrix}$，$C^+=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$, 所以

$$A^+=C^+B^+=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix}.$$（5 分）

3. 直接验证，或通过计算 $AA^+b=(2,4,2)^T\neq b$，可知方程组不相容, 从而极小最小二乘解为 $x=A^+b=(2,0,-2)^T$.（5 分）

五、(20 分) 设 A,B 都是 n 阶 Hermite 矩阵，且 $A>B\ge 0$，证明：

1．矩阵 $A^{-1}B$ 的谱半径 $\rho(A^{-1}B)<1$；

2．存在可逆矩阵 P，使得 $\left\|P^{-1}A^{-1}BP\right\|_2<1$；

3．存在相容矩阵范数 $\|\cdot\|$，使得 $\left\|(A-B)^{-1}\right\|\le\dfrac{\left\|A^{-1}\right\|}{1-\left\|A^{-1}B\right\|}$．

答案及评分标准:

1. 已知 $A>0, B\ge 0$，则存在可逆矩阵 P，使得

$$P^H AP=I,\quad P^H BP=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)\ge 0,$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 $A^{-1}B$ 的特征值. (5 分)

由于 $A>B$，所以 $P^H AP>P^H BP$，从而 $0\le\lambda_i<1$，即 $\rho(A^{-1}B)<1$. (5 分)

2. 由题 1 的结论和证明过程，存在可逆矩阵 P，使得

$$P^{-1}A^{-1}BP=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)\ge 0,$$

且 $\rho(A^{-1}B)=\max\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}<1$，于是

$$\left\|P^{-1}A^{-1}BP\right\|_2=\left\|diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)\right\|_2=\rho(A^{-1}B)<1．\text{(5 分)}$$

3. 由题 2 的结论，存在可逆矩阵 P，使得 $\left\|P^{-1}A^{-1}BP\right\|_2<1$. 在 $C^{n\times n}$ 上定义非负实值函数 $\|\cdot\|$ 如下:

$$\|X\|=\left\|P^{-1}XP\right\|_2,\quad \forall X\in C^{n\times n},$$

则 $\|\cdot\|$ 是 $C^{n\times n}$ 上的相容矩阵范数，且 $\|I\|=1$，$\left\|A^{-1}B\right\|<1$. 于是

$$\left\|(A-B)^{-1}\right\|=\left\|(I-A^{-1}B)^{-1}A^{-1}\right\|\le\left\|(I-A^{-1}B)^{-1}\right\|\left\|A^{-1}\right\|\le\frac{\left\|A^{-1}\right\|}{1-\left\|A^{-1}B\right\|}．\text{(5 分)}$$

南京航空航天大学 2018 级硕士研究生

2017～2018 学年第 1 学期 《**矩阵论**》 课程考试 A 卷

考试日期：2018 年 1 月 5 日 课程编号：6A080001 命题教师： 阅卷教师：

学院　　专业　　学号　　姓名　　成绩

一、（20 分）设 4 阶矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&-1\\0&0&-1&-1\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$.

1．求 A 的特征多项式以及特征值的几何重数与代数重数；

2．求 A 的初等因子、最小多项式；

3．求 A 的 Jordan 标准形；

4．问：A 与矩阵 $B=\begin{pmatrix}1&-6&-6&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$ 是否相似？并说明理由.

答案及评分标准：

1.特征多项式为 $f(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda+1)^2$.

$\lambda=1$ 的代数重数是 2，几何重数为 2；

$\lambda=-1$ 的代数重数是 2，几何重数为 1.（5 分）

2. A 的初等因子为 $\lambda-1, \lambda-1, (\lambda+1)^2$，最小多项式为 $(\lambda-1)(\lambda+1)^2$（5 分）

3. A 的 Jordan 标准形为 $J=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&1\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$.（5 分）

4. 因为 B 的初等因子为 $\lambda-1, \lambda-1, \lambda+1, \lambda+1$, 所以 A 与 B 不相似.（5 分）

二、（20 分）设 $\alpha=(-1,1,1)^T$，在 R^3 中定义映射：

$$\sigma(x)=x-\frac{2}{3}(\alpha^T x)\alpha,\quad \forall x\in R^3.$$

1. 证明 σ 是 R^3 的线性变换；
2. 求 σ 在基 $\alpha_1=(-1,1,1)^T,\alpha_2=(0,2,1)^T,\alpha_3=(0,0,3)^T$ 下的矩阵 A；
3. 证明 σ 是 R^3 的正交变换.

答案及评分标准:

1. $\sigma(x+y)=x+y-\frac{2}{3}(\alpha^T x+\alpha^T y)\alpha=\sigma(x)+\sigma(y)$；

$\sigma(kx)=kx-\frac{2}{3}(k\alpha^T x)\alpha=k\sigma(x)$.（5 分）

2. $A=\begin{pmatrix}-1&-2&-2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.（10 分）

3. 证法 1：由于 $(\sigma(x),\sigma(y))=(x,y)$，所以 σ 是正交变换.（5 分）

证法 2：σ 在标准正交基 $\varepsilon_1=(1,0,0)^T,\varepsilon_2=(0,1,0)^T,\varepsilon_3=(0,0,1)^T$ 下的矩阵为

$$Q=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\2&-2&1\end{pmatrix}.$$

因为 $Q^TQ=I$，所以 Q 是正交矩阵，从而 σ 是正交变换.（5 分）

三、(20 分) 设 4×3 列满秩矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，四维列向量 $b=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$.

1．作出 A 的 QR 分解；

2．求 A 的加号逆 A^{+}；

3．证明方程组 $Ax=b$ 不相容，并求其极小最小二乘解.

答案及评分标准:

1. $Q=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $R=\sqrt{2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.（10 分）

2. $A^{+}=(A^{T}A)^{-1}A^{T}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$.（5 分）

3. 由于 $AA^{+}b=(1,0,1,0)^{T}\neq b$，所以方程组 $Ax=b$ 不相容，其极小最小二乘解为 $A^{+}b=(1,0,0)^{T}$.（5 分）

四、（20 分）设 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

1．求 $\|A\|_1, \|A\|_\infty, \|A\|_F, \|A\|_2$；

2．证明矩阵幂级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}A\right)^k$ 绝对收敛，并求其和；

3．设 A 是 n 阶矩阵，证明 $\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_1 \le \|A\|_F \le n\|A\|_1$.

答案及评分标准:

1. $\|A\|_1 = 4, \|A\|_\infty = 3, \|A\|_F = \sqrt{11}, \|A\|_2 = \sqrt{6}$. (5 分)

2. 因为 $\rho(A) \le \|A\|_2 < 3$，所以 $\rho(\frac{A}{3}) < 1$，从而矩阵幂级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}A\right)^k$ 绝对收敛，其和为

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}A\right)^k = (I-\frac{A}{3})^{-1} = 3(3I-A)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}4 & -1 & 1\\ 0 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 5\end{pmatrix}.\text{（5 分）}$$

3. 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，且 $\|A\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ik}$ ，则由 Cauchy 不等式，有

$$\|A\|_1 = \sum_{i=1}^{n} 1\cdot a_{ik} \le \sqrt{n}\left(\sum_{i=1}^{n}|a_{ik}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \sqrt{n}\,\|A\|_F,$$

即 $\|A\|_F \ge \frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_1$. （5 分）

　　另一方面，有

$$\|A\|_F = \left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}| \le n\sum_{i=1}^{n}|a_{ik}| = n\|A\|_1,$$

于是 $\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_1 \le \|A\|_F \le n\|A\|_1$.（5 分）

五、(20 分) 设 A, B 是两个 n 阶 Hermite 正定矩阵，证明：

1．存在 n 阶 Hermite 正定矩阵 S，使得 $A = S^2$；

2． $A + A^{-1} - 2I \geq 0$；

3．若 $A > B$，则 $B^{-1} > A^{-1}$；

4．若 $A = B^2$，则 $B = S$．

答案及评分标准:

1. 已知 $A > 0$，则存在正交矩阵 Q，使得

$$Q^H AQ = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) > 0.$$

取 $S = Qdiag(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \cdots, \sqrt{\lambda_n})Q^H$，则 S 是 Hermite 正定矩阵，并且使得 $A = S^2$. (5 分)

2. 由题 1 的结论，有

$$A + A^{-1} - 2I = S^2 + (S^{-1})^2 - 2I = (S - S^{-1})^2 \geq 0. \text{（5 分）}$$

3. 设 $A > B$，则 $\rho(BA^{-1}) < 1$. 由于

$$\rho(BA^{-1}) = \rho(A^{-1}B) = \rho(A^{-1}(B^{-1})^{-1}),$$

所以 $B^{-1} > A^{-1}$．（5 分）

4. 证法 1：设 $A = B^2$，则 $A = S^2 = B^2$，从而

$$(BS^{-1})^H (BS^{-1}) = I,$$

即 BS^{-1} 为酉矩阵，其特征值的模为 1. 另一方面，由于 S^{-1}, B 都是 Hermite 正定矩阵，所以 BS^{-1} 相似于一个正定矩阵，于是 BS^{-1} 的特征值只能为 1，即存在可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}BS^{-1}P = I$．因此 $B = S$．（5 分）

证法 2：设 $A = B^2$，则 $S^2 \geq B^2$ 且 $S^2 \leq B^2$．由 $S^2 \geq B^2$ 可得

$$\rho(BS^{-1}) \leq \left\| BS^{-1} \right\|_2 \leq 1,$$

从而 $S \geq B$．同理由 $S^2 \geq B^2$ 可得 $S \leq B$．因此 $S = B$．（5 分）

南京航空航天大学2003级硕士研究生

《矩阵论》试题评分标准　　　　2004.1

一、（20分）已知$A=\begin{pmatrix}1&0&i\\0&1&2\\-i&2&5\end{pmatrix}$，其中$i=\sqrt{-1}$；

（1）　求$\|A\|_1=8,\|A\|_2=6,\|A\|_\infty=8,\|A\|_F=\sqrt{37}$；

（2）　证明：$A\geq 0$；

证明：首先A为Hermite矩阵；

又因为A的特征值为 6，1，0，所以$A\geq 0$

（3）　设$\alpha,\beta\in C^n$，$B=\alpha\beta^H$，证明：$\|B\|_F=\|\alpha\|_2\|\beta\|_2$。

证明：$\|B\|_F=\sqrt{tr(B^HB)}=\sqrt{tr(\beta\alpha^H\alpha B)}=\sqrt{\alpha^H\alpha tr(\beta\beta^H)}$

$$=\sqrt{\alpha^H\alpha}\sqrt{\beta^H\beta}=\|\alpha\|_2\|\beta\|_2$$

二、（20分）

（1）设$A=\begin{pmatrix}-1&1&0\\-4&3&0\\-2&1&1\end{pmatrix}$；

（a）　求A的特征多项式和A的全部特征值；

（b）　求A的不变因子、初等因子和最小多项式；

（c）　写出A的Jordan标准形；

解：（a）特征多项式　$f(\lambda)=(\lambda-1)^3$；特征值为1，1，1；

（b）不变因子：$1,\lambda-1,(\lambda-1)^2$；

初等因子：$\lambda-1,(\lambda-1)^2$；

最小多项式：$m(\lambda)=(\lambda-1)^2$；

（c）A的Jordan标准形:$\begin{pmatrix}1&1&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}or\begin{pmatrix}1&&\\&1&1\\&&1\end{pmatrix}$

（2） 设 A 为 n 阶矩阵，证明：A 非奇异的充分必要条件是存在常数项不为零的多项式 $f(x)$ 使 $f(A)=0$。

证明：$\Rightarrow$ $\because A$ 非奇异；$\therefore |A|\neq 0$；

$\therefore A$ 的特征多项式 $f(\lambda)$ 的常数项不为零；且 $f(A)=0$

$\Leftarrow$ 设 A 的特征多项式为 $f(\lambda)$，则其常数项为 $|A|$；

$$\therefore f(A)=A^n+a_{n-1}A^{n-1}+\cdots+a_1A+(-1)^n|A|I=0$$

$$\therefore A(A^{n-1}+a_{n-1}A^{n-2}+\cdots+a_1I)/(-1)^n|A|=I$$

所以 A 非奇异。

三、（20 分）

设 $A=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&1&1&0\\1&2&1&1\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix}$

（1） 作出 A 的满秩分解；

解：$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&1&1&0\end{pmatrix}$

（2） 计算 A^+；

$$\text{解：}\quad A^+=C^T(CC^T)^{-1}(B^TB)^{-1}B^T=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&-\frac{4}{15}&\frac{1}{15}\\0&\frac{1}{5}&\frac{1}{5}\\-\frac{1}{3}&\frac{7}{15}&\frac{2}{15}\\\frac{1}{3}&-\frac{4}{15}&\frac{1}{15}\end{pmatrix}=\frac{1}{15}\begin{pmatrix}5&-4&1\\0&3&3\\-5&7&2\\5&-4&1\end{pmatrix}$$

（3）利用广义逆矩阵方法判断线性方程组 $Ax=b$ 是否相容？若相容，求其通解；若不相容，求其极小最小二乘解。

解：$\because AA^+b=b=\begin{pmatrix}3&1&4\end{pmatrix}^T$；$\therefore$ 相容，即有解。

四、（20分）

（1）设 A,B 均为 n 阶 **Hermite** 矩阵，且 $AB=BA$；证明：

（a）如果 $A>0$，且 $AB>0$，则 $B>0$；

（b）如果 $A>0$，$B>0$，且 $A^3>B^3$，则 $A>B$。

证明：（a）$\because A>0;\therefore A=S^2,S为可逆hermite矩阵;$

$$\therefore S^{-1}ABS=SBS=S^HBS$$

$$又\because AB>0$$
$$\therefore B>0$$

（b）$\because A^3-B^3=(A-B)(A^2+AB+B^2)>0$

$$又\because A>0;B>0;且AB=BA$$
$$\therefore A^2>0;B^2>0;AB>0$$
$$\therefore A^2+AB+B^2>0$$

再由（a）的结论，即得 $A-B>0;$ 即 $A>B$。

(2) 若 A 是2阶实正规矩阵，且 $\alpha\pm i\beta$ 是 A 的一对共轭复特征值，

证明：存在正交矩阵 Q，使得 $Q^TAQ=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\beta & \alpha\end{pmatrix}$。

证明：$设x\pm iy为属于\alpha\pm i\beta的特征向量$

则 $A(x\pm iy)=(\alpha\pm i\beta)(x\pm iy)$

因为A为正规矩阵；所以A 属于不同特征值的特征向量是正交的，

即 $(x\pm iy)^H(x\pm iy)=0$

得到 $x^Tx=1;y^Ty=1;x^Ty=0;y^Tx=0$

即 $\|x\|_2=1;\|y\|_2=1;(x,y)=0$

令 $Q=\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}$，则 Q 为正交矩阵；

且 $AQ=A\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\beta & \alpha\end{pmatrix}=Q\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\beta & \alpha\end{pmatrix}$

所以 $Q^TAQ=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\beta & \alpha\end{pmatrix}$

五、（20 分） 设实数域 R 上空间线性 $R^{2\times 2}$ 的子集 $W=\left\{A\in R^{2\times 2}\middle| tr(A)=0\right\}$；

（1） 证明 W 是 $R^{2\times 2}$ 的子空间；

证明：$\begin{aligned}&\forall A,B\in W\\ &A+B\in W;kA\in W,k\in R\end{aligned}$

所以 W 是 $R^{2\times 2}$ 的子空间

（2） 给出 W 的变换：

$$T(A)=A+A^T,\qquad \forall A\in W$$

证明：T 是 W 上的线性变换；

证明：$\begin{aligned}&\because \forall A,B\in W\\ &T(A+B)=T(A)+T(B);T(kA)=kT(A),k\in R\end{aligned}$

所以 T 是 W 上的线性变换

（2） 求 $Ker(T)$ 及其维数；

解：$Ker(T)=span\left\{\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\right\}$;且 $dim(Ker(T))=1$

（4） 求 W 的一组基和维数，并写出线性变换 T 在所取基下的矩阵。

解：W 的一组基：$\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$；$dim(W)=3$；

线性变换 T 在所取基下的矩阵：$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}$。

南京航空航天大学07-14硕士研究生矩阵论试题

2007 ~ 2008学年《矩阵论》 课程考试A卷

一、(20分)设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ -2 & -2 & 3\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$,

(1)求 A 的特征多项式和 A 的全部特征值;

(2)求 A 的行列式因子、不变因子和初等因子;

(3)求 A 的最小多项式,并计算 $A^6+3A-2I$;

(4)写出 A 的Jordan标准形。

二、(20分)设 $R^{2\times 2}$ 是实数域 R 上全体 2×2 实矩阵构成的线性空间(按通常矩阵的加法和数与矩阵的乘法)。

(1)求 $R^{2\times 2}$ 的维数,并写出其一组基;

(2)设 W 是全体 2×2 实对称矩阵的集合,

证明:W 是 $R^{2\times 2}$ 的子空间,并写出 W 的维数和一组基;

(3)在 W 中定义内积 $(A,B)=tr(BA)$,其中 $A,B\in W$,求出 W 的一组标准正交基;

(4)给出 $R^{2\times 2}$ 上的线性变换 T: $T(A)=A+A^T,\ \ \forall A\in R^{2\times 2}$

写出线性变换 T 在(1)中所取基下的矩阵,并求 T 的核 $Ker(T)$ 和值域 $R(T)$。

三、(20分)

(1)设 $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$,求 $\|A\|_1$,$\|A\|_2$,$\|A\|_\infty$,$\|A\|_F$;

(2)设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$,令 $\|A\|_*=n\cdot\max\limits_{i,j}|a_{ij}|$,

证明:$\|\ \|_*$ 是 $C^{n\times n}$ 上的矩阵范数并说明具有相容性;

(3)证明:$\frac{1}{n}\|A\|_*\le\|A\|_2\le\|A\|_*$。

四、(20分)已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$,向量 $b=\begin{pmatrix}2\\1\\1\\2\end{pmatrix}$,

(1)求矩阵A的 QR 分解;

（2）计算 A^+；

（3）用广义逆判断方程组 $Ax=b$ 是否相容？若相容,求其通解;若不相容,求其极小最小二乘解。

五、(20 分)

（1）设矩阵 $A=\begin{pmatrix}5 & 3 & 2\\ 3 & 2 & t\\ 2 & t & 2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 0.5t\\ 2 & 0.5t & 1\end{pmatrix}$，其中 t 为实数，

问当 t 满足什么条件时，$A>B$ 成立？

（2）设 n 阶 Hermite 矩阵 $A=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{12}^H & A_{22}\end{pmatrix}>0$，其中 $A_{11}\in C^{k\times k}$，

证明：$A_{11}>0,\ A_{22}-A_{12}^H A_{11}^{-1}A_{12}>0$。

（3）已知 Hermite 矩阵 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$，$a_{ii}>\sum_{j\neq i}|a_{ij}|\quad (i=1,2,\cdots,n)$，证明：$A$ 正定。

2007 ~ 2008 学年《矩阵论》 课程考试 B 卷

一.(20 分)已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 1 & -4 & 0\\ 0 & -4 & 0\end{pmatrix}$，

（1）求 A 的不变因子、初等因子及最小多项式；

（2）求 A 的 Jordan 标准形 J 及可逆变换矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=J$；

（3）问矩阵序列 $\{A^k\}$ 是否收敛？.

二.(20 分)

（1）已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix}$，求 $\|A\|_1,\|A\|_2,\|A\|_\infty,\|A\|_F$；

（2）设 A 为 n 阶可逆矩阵，$\|\cdot\|$ 是 $C^{n\times n}$ 上的相容范数，λ 为 A 的任一特征值，

证明：$\|A^{-1}\|^{-1}\le|\lambda|\le\|A\|$ 。

三.(20 分) $R[x]_3$ 表示实数域上次数不小于 3 的多项式与零多项式构成的线性空间，

对 $\forall f(x)\in R[x]_3$，记 $f(x)=ax^2+bx+c,$ 其中 $a,b,c\in R$，在 $R[x]_3$ 上定义线性变换：

$$T[f(x)]=3ax^2+(2a+2b+3c)x+(a+b+4c).$$

（1）给出 $R[x]_3$ 的一组基，并求出线性变换 T 在该基下的表示矩阵；

（2）求线性变换 T 的特征值和特征向量；

（3）判断线性变换 T 是否可对角化？若可以，给出对角化的一组基；若否，证明之。

四.（20 分）

（1）设 $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$，试给出 A 的满秩分解，并计算 A^+；

（2）设 $b=\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$，利用广义逆矩阵判断线性方程组 $Ax=b$ 是否相容？若相容，求其通解；若不相容，求其极小最小二乘解。

五.（20 分）

（1）设 $A=\begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & t \\ 2 & t & 2 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0.5t \\ 2 & 0.5t & 1 \end{pmatrix}$，其中 t 是实数，

问 t 满足什么条件时，$A>B$ 成立？

（2）设 A 为 n 阶 Hermite 矩阵，对任意 $x\in C^n, x\neq 0$，记 $R(x)=\dfrac{x^H Ax}{x^H x}$，

证明：$\lambda_{\min}(A)\leq R(x)\leq \lambda_{\max}(A), x\neq 0$。

（3）设 n 阶 Hermite 矩阵 $A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^H & A_{22} \end{pmatrix}$，其中 $A_{11}\in C^{k\times k}(1\leq k<n)$，

如果 $A_{11}>0, A_{22}-A_{12}^H A_{11}^{-1}A_{12}>0,$ 证明：$A>0$。

2008 ~ 2009 学年《矩阵论》 课程考试 A 卷

一（20 分）设 $A=\begin{pmatrix} 8 & -1 & 6 \\ 3 & 0 & 3 \\ -14 & 2 & -10 \end{pmatrix}$，

（1） 求 A 的特征多项式和 A 的全部特征值；

（2） 求 A 的不变因子、初等因子和最小多项式；

（3） 写出 A 的 Jordan 标准形。

二（20 分）（1）设 $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$，求 $\|A\|_1,\|A\|_2,\|A\|_\infty,\|A\|_F$；

（2） 设 $\|\cdot\|$ 是 $C^{n\times n}$ 上的相容矩阵范数，证明：

（i） 如果 A 是 n 阶可逆矩阵，λ 是 A 的任一特征值，则 $\|A^{-1}\|^{-1}\le|\lambda|\le\|A\|$；

（ii） 如果 $P\in C^{n\times n}$ 是可逆矩阵，令 $\|A\|_P=\|P^{-1}AP\|$，则 $\|A\|_P$ 是 $C^{n\times n}$ 上的相容矩阵范数。

三（20 分）设 $A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$，

（1） 作出 A 的满秩分解，计算 A^+；

（2） 应用广义逆矩阵判定线性方程组 $Ax=b$ 是否相容。若相容，求其通解；

若不相容，求其极小最小二乘解；

（3） 设 A 是 $m\times n$ 实矩阵，b 是 m 维实向量，证明：不相容线性方程组 $Ax=b$ 的最小二乘解唯一当且仅当 A 列满秩。

四 (20 分)设 V 表示实数域 R 上全体 2×2 上三角矩阵作成的线性空间（对矩阵的加法和数量乘法）。

（1） 求 V 的维数，并写出 V 的一组基；

（2） 在 V 中定义线性变换 T：$T(X)=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}X+X\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，$X\in V$

求 T 在（1）中所取基下的矩阵表示；

（3） 求（2）中线性变换 T 的值域 $R(T)$ 和核 $N(T)$，并确定它们的维数；

（4） 在 V 中能否取一组基使得（2）中线性变换 T 在所取基下的矩阵为对角矩阵？如果能，则取一组基；如果不能，则说明理由。

五（20 分）设 $A=(a_{ij})$ 为 n 阶 Hermite 矩阵，证明：

存在唯一 Hermite 矩阵 B 使得 $A=B^3$；

（2） 如果 $A\ge 0$，则 $tr(A^2)\le(tr(A))^2$；

（3） 如果 $A>0$，则 $tr(A)tr(A^{-1})\ge n$。

2009 ~ 20010 学年《矩阵论》 课程考试 A 卷

一、(20 分) 设 $A=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 6\\ -1 & 0 & 3\\ -1 & -1 & 4\end{pmatrix}$,

(1) 求 A 的特征多项式和 A 的全部特征值；

(2) 求 A 的不变因子、初等因子和最小多项式；

(3) 写出 A 的 Jordan 标准型 J；

(4) 求可逆矩阵 P，使 $\boldsymbol{P^{-1}AP=J}$ 。

二、(20 分) (1) 设 $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix}$，求 $\|A\|_1,\|A\|_2,\|A\|_\infty,\|A\|_F$；

(2) 设 $\boldsymbol{A=(a_{ij})\in C^{n\times n}}$，令 $\|A\|_*=n\cdot\max\limits_{i,j}|a_{ij}|$ ，

证明 $\|\ \|_*$ 是 $C^{n\times n}$ 上的矩阵范数并说明具有相容性；

(3) 设 A,B 均为 n 阶矩阵，并且 AB=BA，证明：如果 A 有 n 个互异的特征值，则 B 相似于对 角矩阵。

三、(20 分) 设 $R[x]_3$ 表示实数域 R 上次数小于 3 的多项式再添上零多项式构成的线性空间（按 通常多项式的加法和数与多项式的乘法)。

(1) 在 $R[x]_3$ 中定义线性变换 T：$\begin{cases}T(1+x+x^2)=4+x^2\\ T(x+x^2)=3-x+2x^2\\ T(x^2)=x^2\end{cases}$ 求变换 T 在基 $1,x,x^2$ 下的矩阵；

(2) 求 T 的值域 R(T) 和核 ker(T) 的维数和基；

(3) 求线性变换 T 的特征值及特征向量；

(4) 在 $R[x]_3$ 中定义内积 $(f,g)=\int_{-1}^{4}f(x)g(x)dx$, $f(x),g(x)\in R[x]_3$ 求出 $R[x]_3$ 的一组标准正交基。

四、(20 分)

(1) 设 $A=\begin{pmatrix}4 & 0 & -1\\ 0 & 4 & t\\ -1 & t & 4\end{pmatrix}$，其中 t 为实参数，问 t 取何值时 A 正定；

(2) 设 A 是 n 阶 Hermite 矩阵，证明：A 半正定的充分必要条件是 A 的特征值均为非负实数；

(3) 已知 n 阶矩阵 $A\geq 0$ ，证明 $|A+I|\geq 1$，并且等号成立的充分必要条件为 A=0。

五、(20 分)

(1) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}$, $b=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$

(i)做出 A 的满秩分解，并计算 A^+ ；

(ii)用广义逆矩阵判定线性方程组 Ax=b 是否相容，若相容，求其通解；若不相容，求其极小最小二乘解；

(2) 设 A,B,C 分别为 $m\times n$, $p\times q$, $m\times q$ 矩阵，则矩阵方程 AXB=C 有解的充分必要条件是 $AA^+CB^+B=C$ 。

2010 ~ 2011 学年《矩阵论》 课程考试 A 卷

一（20 分）（1）设 $A=\begin{pmatrix}2 & -3 & 4\\4 & -6 & 8\\6 & -7 & 8\end{pmatrix}$。

（i）求 A 的特征多项式和 A 的全部特征值；

（ii）求 A 的行列式因子，不变因子和初等因子；

（iii）写出 A 的 Jordan 标准形；

（2）设 $A=\begin{pmatrix}17 & -6\\45 & -16\end{pmatrix}$， $B=\begin{pmatrix}14 & -60\\3 & -13\end{pmatrix}$，试问 A 和 B 是否相似？并说明原因。

二（20 分）（1）设 $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\1 & 2\\3 & 1\end{pmatrix}$，求 $\|A\|_1$，$\|A\|_2$，$\|A\|_\infty$，$\|A\|_F$；

（2）设 $A\in C^{n\times n}$ 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，求证：

(i) $\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2\le\|A\|_F^2$；

(ii) $\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2=\|A\|_F^2$ 的充要条件是 A 为正规矩阵。

三（20 分）设 $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 2\end{bmatrix}$， $W=\left\{X\,\middle|\,AX=XA,X\in R^{2\times 2}\right\}$

（1） 证明：W 是 $R^{2\times 2}$ 的线性子空间，并求 W 的基和维数；

（2） 在 W 中定义变换 T： $T(X)=X-X^*$，其中 X^* 为 X 的伴随矩阵， 证明：T 为线性变换；

（3） 求 $\boldsymbol{T}$ 在（1）中所取基下的矩阵表示；

（4） 求（2）中线性变换 T 的值域 $\boldsymbol{R(T)}$ 和核 $Ker(T)$，并确定它们的维数.

四（20 分）设 $A\in R^{m\times n}$。

（1）证明：A^TA 半正定；

（2）证明：$|I+A^TA|\ge 1$，并且等号成立当且仅当 $A=0$；

（3）证明：$|A^TA|\le\prod_{k=1}^{n}(\sum_{i=1}^{m}a_{ik}^2)$；

（4）证明：存在唯一的对称半正定矩阵 S 使得 $A^T A = S^2$ 。

五（20分）（1）设 $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$， $b=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

（i） 求 A 的奇异值分解；

（ii）计算广义逆矩阵 A^+；

（iii）用广义逆矩阵判定线性方程组 $Ax=b$ 是否相容。若相容，求其通解；若不相容，求其极小最小二乘解；

（2）设 $A=\begin{pmatrix}-0.2 & 0.3\\ 0.6 & 0.5\end{pmatrix}$，判定矩阵级数 $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k A^k$ 是否收敛。若收敛，求其和。

2011 ~ 2012 学年《矩阵论》 课程考试 A 卷

一（20分）设 $A=\begin{pmatrix}3 & 6 & -15\\ 1 & 2 & -5\\ 1 & 2 & -5\end{pmatrix}$。

（1） 求 A 的特征多项式和 A 的全部特征值；

（2） 求 A 的行列式因子，不变因子，初等因子和最小多项式；

（3） 写出 A 的 Jordan 标准形 J 。

二（20分）（1）设 $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\\ 0 & -3\end{pmatrix}$，求 $\|A\|_1,\|A\|_2,\|A\|_\infty,\|A\|_F$；

（2）设 $A=(a_{ij})\in C^{m\times n}$，证明：

（i）对 m 阶酉矩阵 U 和 n 阶酉矩阵 V，有 $\|UAV\|_F=\|A\|_F$；

（ii）若 $rank(A)=r$， $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_r$ 为 A 的全部正奇异值，则 $\sum_{k=1}^{r}\sigma_k^2=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2$ 。

三（20分）设 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$， $b=\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix}$.

（1） 计算 A 的满秩分解；

（2）计算广义逆矩阵 A^+；

（3）用广义逆矩阵判定线性方程组 $Ax=b$ 是否相容。若相容，求其通解；若不相容，求其极小最小二乘解。

四（20 分）（1）设 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$，判断 A 是否是正定或半正定矩阵，并说明理由；

（2）设 A 是 n 阶 Hermite 正定矩阵，B 是 n 阶 Hermite 矩阵，证明：AB 相似于实对角矩阵；

（3）设 A，B 均为 n 阶 Hermite 矩阵，并且 $AB=BA$，λ 是 AB 的特征值，证明：存在 A 的特征值 α 和 B 的特征值 β，使得 $\lambda=\alpha\beta$。

五（20 分）设 $R[x]_3$ 表示实数域 $\boldsymbol{R}$ 上次数小于 3 的多项式再添上零多项式构成的线性空间。

（1） 确定 $R[x]_3$ 的维数，并写出 $R[x]_3$ 的一组基；

（2） 对 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2\in R[x]_3$，在 $R[x]_3$ 上定义线性变换 T 如下：

$T(f(x))=(a_0-a_1)+(a_1-a_2)x+(a_2-a_0)x^2$，

求 T 在（1）中所取基下的矩阵表示；

（3） 求（2）中线性变换 T 的值域 $\boldsymbol{R(T)}$ 和核 $Ker(T)$，并确定它们的维数；

（4） 在 $R[x]_3$ 中定义内积

$$(f,g)=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)dx,\ \forall f(x),g(x)\in R[x]_3$$

求 $R[x]_3$ 的一组标准正交基。

2012 ~ 2013 学年《矩阵论》 课程考试 A 卷

一、(20 分) 设 $V=\left\{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\in R^{2\times 2}\mid a_{11}=a_{22}\right\}$ 是 $R^{2\times 2}$ 的一个线性子空间，对任意 $X\in V$，定义：

$T(X)=PX+XP$，其中 $P=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(1) 求 V 的一组基和维数；

(2) 对任意 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\in V$，定义：

$(A,B)=a_{11}b_{11}+2a_{12}b_{12}+a_{21}b_{21}$，

二、(20 分)设三阶矩阵 $A=\begin{pmatrix}-1&1&0\\-4&3&0\\1&0&2\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}3&1&0\\0&3&1\\0&0&3\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}3&a&0\\0&3&a\\0&0&3\end{pmatrix}$.

(1) 求 A 的行列式因子、不变因子、初等因子及 Jordan 标准形；

(2) 利用 λ 矩阵的知识，判断矩阵 B 和 C 是否相似，并说明理由.

三、(20 分)已知线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_4=1,\\x_1+x_2+x_3+2x_4=1,\\x_3+x_4=1\end{cases}$ 不相容.

(1) 求系数矩阵 A 的满秩分解；

(2) 求广义逆矩阵 A^+；

(3) 求该线性方程组的极小最小二乘解.

四、(20 分)已知幂级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{3^k}x^k$ 的收敛半径为 3,矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\1&-2&0\end{pmatrix}$.

(1) 求 $\|A\|_1,\|A\|_\infty,\|A\|_2,\|A\|_F$；

(2) 证明矩阵幂级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{3^k}A^k$ 收敛；

(3) 求矩阵幂级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{3^k}A^k$ 的和.

五、(20 分)设 A,B 是两个 n 阶矩阵,其中 $A=(a_{ij})$，证明:

(1) 若对任意 $i=1,2,\cdots,n$，有 $\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}|<1,$ 则 $I-A$ 可逆；

(2) 若 A,B 都是 Hermite 正定矩阵，则 AB 的特征值均为正数；

(3) 若 A,B 都是 Hermite 半正定矩阵，则 $tr(AB)\ge 0$,并且当等号成立时,必有 $AB=0$.

2013 ~ 2014 学年《矩阵论》 课程考试 A 卷

一、(20 分) 设三阶矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&4&-1\\-1&-3&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

1. 求 A 的特征多项式和初等因子；

2. 求 A 的 Jordan 标准形；

3. 问：A 与矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ 是否相似?并说明理由.

二、(20 分)设 R^3 的线性变换 σ 将基 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ 变为向量 $\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \beta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

1. 求 σ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的矩阵 A；

2. 求向量 $\xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ 及 $\sigma(\xi)$ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的坐标；

3. 求线性变换 σ 的值域和核.

三、(15 分)设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$，$b = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. 计算 A^+；

2. 判断方程组 $Ax = b$ 是否相容？如果相容，求方程组的通解；如果不相容，求方程组的极小最小二乘解.

四、(15 分)已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，且幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} x^k$ 的收敛半径为 2.

1. 求 $\|A\|_1, \|A\|_\infty, \|A\|_2, \|A\|_F$；

2. 证明矩阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} A^k$ 收敛,并求其和.

五、(20 分)设 A 是 n 阶 Hermite 正定矩阵，B 是 n 阶 Hermite 矩阵,证明:

1. 存在可逆矩阵 P，使得 $P^H AP = I$，$P^H BP = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$，并且 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 均为实数；

2. 存在正数 t_0，当 $t > t_0$ 时，$tA + B$ 也是 Hermite 正定矩阵；

3. 若 $A > B \geq 0$，则有 $|A - B| \leq |A|$.

南 京 航 空 航 天 大 学

研究生考试参考答案及评分标准

二00七 ~二00八 学年　第 一 学期　　课程名称：　矩阵论

试卷类型　A 卷　　　　课程编号：　A000003

参考答案及评分标准制定人：　　　　2008 年 1 月 12 日

一、(20 分)

解：(1) $|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & 2 \\ 2 & \lambda+2 & -3 \\ 1 & 1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \lambda^3$，

A 的特征多项式为 λ^3，A 的特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ ………………………… 6 分

(2) A 的行列式因子：$1, 1, \lambda^3$；A 的不变因子：$1, 1, \lambda^3$；A 的初等因子：λ^3；……. 7 分

(3) 因为 $A^2 \neq 0, A^3 = 0$, A 的最小多项式 λ^3；

$$A^6 + 3A - 2I = 3A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -6 \\ -6 & -8 & 9 \\ -3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$ ………………………………………. 4 分

(4) A 的 Jordan 标准形 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ………………………………………………… 3 分

二、(20 分)

解：(1) $R^{2\times 2}$ 的维数为 4，一组基 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$；………. 5 分

(2) $\forall A, B \in W, \forall k \in R$, 则　$\because (A+B)^T = A^T + B^T = A + B$，$\therefore A + B \in W$；

$\because (kA)^T = kA^T = kA$；$\therefore kA \in W$。对加法和数乘封闭，所以是 $R^{2\times 2}$ 的子空间。

W 的维数为 3，一组基 $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$；……….. 5 分

（3）$C_1 = A_1$，$B_1 = \frac{C_1}{\|C_1\|} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$；

$C_2 = A_2 - (A_2, B_1)B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，　　$B_2 = \frac{C_2}{\|C_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$；

$C_3 = A_3 - (A_3, B_1)B_1 - (A_3, B_2)B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，　$B_3 = \frac{C_3}{\|C_3\|} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$。

所以$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$、$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$为$W$ 的一组标准正交基。　…………………　5 分

（4）T 在（1）中所取基下的矩阵为$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$；$T$ 的核 $Ker(T)$：$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & k \\ -k & 0 \end{pmatrix} \middle| k \in R \right\}$；

T 的值域 $R(T)$：$span\{A_1, A_2, A_3\}$=W.　……………………………………………　5 分

三、（20 分）

解：（1）$\|A\|_1 = 4$，$\|A\|_2 = \sqrt{15}$，$\|A\|_\infty = 6$，$\|A\|_F = \sqrt{20}$；　……………………………　8 分

（2）若 $A \neq 0$, 则至少有一个 $a_{ij} \neq 0$，$\|A\|_* = n \cdot \max\limits_{i,j} |a_{ij}| > 0$

若 $A = 0$, 则 $a_{ij} = 0 \quad \forall i, j$，$\|A\|_* = n \cdot \max\limits_{i,j} |a_{ij}| = 0$

$\forall k \in C$，$\|kA\|_* = n \cdot \max\limits_{i,j} |ka_{ij}| = k \cdot n \cdot \max\limits_{i,j} |a_{ij}| = k\|A\|_*$

$\forall A, B \in C^{n \times n}$, $\|A + B\|_* = n \cdot \max\limits_{i,j} |a_{ij} + b_{ij}| \leq n \cdot \max\limits_{i,j} |a_{ij}| + n \cdot \max\limits_{i,j} |b_{ij}| = \|A\|_* + \|B\|_*$

所以 $\| \ \|_*$ 是 $C^{n \times n}$ 上的矩阵范数。

$$\|AB\|_* = n \cdot \max_{i,j} \left| \sum_{i,j} a_{ik} b_{kj} \right| \leq n \cdot \max_{i,j} \sqrt{\sum_k |a_{ik}|^2 \sum_k |b_{kj}|^2}$$

$$\leq n \sqrt{n \cdot \max_{i,j} |a_{ij}|^2 \, n \cdot \max_{i,j} |b_{ij}|^2} \leq n \cdot \sqrt{n} \max_{i,j} |a_{ij}| \cdot \sqrt{n} \max_{i,j} |n_{ij}| = \|A\|_* \|B\|_*$$

所以$\| \ \|_*$是 $C^{n \times n}$ 上的相容矩阵范数。……………………………………………………　8 分

（3）$\|A\|_2^2=\lambda_{\max}\left(A^HA\right)\le\|A\|_F^2=\sum_{i=1}^{n}\left|a_{ij}\right|^2\le n^2\max_{i,j}\left|a_{ij}\right|^2=\|A\|_*^2$，　$\therefore\|A\|_2\le\|A\|_*$

不妨设$\max_{i,j}\left|a_{ij}\right|=\left|a_{i_0j_0}\right|$，则$\frac{1}{n}\|A\|_*=\max_{i,j}\left|a_{ij}\right|=\left|a_{i_0j_0}\right|$

记$x_0=e_{j_0},y_0=e_{i_0}$，则$\|x_0\|_2=1,\|y_0\|_2=1$，

$\therefore\|A\|_2=\max_{\substack{x^Hx=1\\y^Hy=1}}\left|y^HAx\right|\ge\left|y_0{}^HAx_0\right|=\left|a_{i_0j_0}\right|$，　　$\therefore\frac{1}{n}\|A\|_*\le\|A\|_2$

综上可知：$\frac{1}{n}\|A\|_*\le\|A\|_2\le\|A\|_*$　……………………………………………………… 4 分

四、（20 分）

（1）矩阵 A 的 QR 分解：$A=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt2}{2}&-\frac{\sqrt2}{2}&0\\\frac{\sqrt2}{2}&\frac{\sqrt2}{2}&0\\0&0&\frac{\sqrt2}{2}\\0&0&\frac{\sqrt2}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt2&0&\frac{\sqrt2}{2}\\0&\sqrt2&-\frac{\sqrt2}{2}\\0&0&\sqrt2\end{pmatrix}$　……………… 6 分

（2）$A^+=\left(A^TA\right)^{-1}A^T==\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2&2&-1&-1\\-2&2&1&1\\0&0&2&2\end{pmatrix}$　…………………………………… 8 分

（3）$\because AA^+b=\begin{pmatrix}2\\1\\1.5\\1.5\end{pmatrix}$　　$\therefore AA^+b\ne b$　该方程组不相容。

极小最小二乘解 $x=A^+b==\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3\\1\\6\end{pmatrix}$　…………………………………………………… 6分

五、（20 分）

（1）$A-B=\begin{pmatrix}5 & 2 & 0\\ 2 & 1 & 0.5t\\ 0 & 0.5t & 1\end{pmatrix}$，

$\Delta_1=5>0,\Delta_2=1>0$，$\Delta_3=|A-B|=1-\frac{5}{4}t^2>0$ 时 $A>B$ 成立

即 $-\frac{2}{\sqrt{5}}<t<\frac{2}{\sqrt{5}}$ 时 $A>B$ 成立。…………………………………………………… 10 分

（2）$\because A=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{12}^H & A_{22}\end{pmatrix}>0$，$A_{11}$ 为 A 的前 k 阶顺序主子式，$\therefore A_{11}>0.$

存在可逆矩阵 $P=\begin{pmatrix}I_k & 0\\ -A_{12}^H A_{11}^{-1} & I_{n-k}\end{pmatrix}$,使得 $PAP^H=\begin{pmatrix}A_{11} & 0\\ 0 & A_{22}-A_{12}^H A_{11}^{-1}A_{12}\end{pmatrix}=B$，

$\because A>0\quad \therefore B>0,\therefore A_{22}-A_{12}^H A_{11}^{-1}A_{12}>0$。 ……………………. ………………. 6 分

(3)设 λ 是矩阵 A 的任一特征值，相应的特征向量为 $x=(x_1,\cdots,x_n)^T$，令 $|x_{i_0}|=\max_i|x_i|$，

则 $|x_{i_0}|>0$，由 $Ax=\lambda x$，有 $(\lambda-a_{i_0i_0})x_{i_0}=\sum_{j=1,j\neq i_0}^{n}a_{i_0j}x_j$，

从而 $|\lambda-a_{i_0i_0}|\le\sum_{j\neq i_0}|a_{i_0j}|\frac{|x_j|}{|x_{i_0}|}\le\sum_{j\neq i_0}|a_{i_0j}|$

又因为 $a_{ii}>\sum_{j\neq i}|a_{ij}|\quad (i=1,2,\cdots,n)$，所以 $\lambda>0$，

由 λ 的任意性，可知 A 的所有特征值均为正数，所以 A 正定。………………………...……. 4 分

二00七 ~二00八 学年	第 一 学期	课程名称:	矩阵论
试卷类型 B 卷		课程编号:	A000003
参考答案及评分标准制定人:		2008 年 1 月 18 日	

一、(20 分)

解:(1) A 的不变因子:$1,1,(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda+4)$;$A$ 的初等因子:$(\lambda+1),(\lambda-2),(\lambda+4)$;

A 的最小多项式 $(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda+4)$。

(2) A 的 Jordan 标准形 $J=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&-4\end{pmatrix}$,相应的可逆变换矩阵为 $P=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&0\\\frac{1}{9}&\frac{1}{9}&-\frac{2}{9}\\\frac{4}{9}&-\frac{2}{9}&-\frac{2}{9}\end{pmatrix}$。

(3) $\because \rho(A)=4>1$,故矩阵序列 $\left\{A^k\right\}$ 发散。

二、(20 分)

解:(1) $\|A\|_1=5$;$\|A\|_\infty=5$;$\|A\|_F=\sqrt{23}$;

$\because \lambda(A^TA)=\{3,5,15\}$, $\therefore \|A\|_2=[\lambda_{\max}(A^TA)]^{\frac{1}{2}}=\sqrt{15}$ 。

(2) 设 $x\in C^n$ 是 A 相应于特征值 λ 的特征向量,$\therefore Ax=\lambda x, x\neq 0$,

两边取矩阵范数导出的 C^n 上向量范数可得:$|\lambda|\|x\|=\|\lambda x\|=\|Ax\|\leq\|A\|\|x\|$,

$\because \|x\|\neq 0, \therefore |\lambda|\leq\|A\|$;

又 $\because A$ 可逆,$\therefore \frac{1}{\lambda}$ 是 A^{-1} 的特征值,由上述证明可知:$\left|\frac{1}{\lambda}\right|\leq\|A^{-1}\|$;

综上所述有:$\|A^{-1}\|^{-1}\leq|\lambda|\leq\|A\|$ 。

三、（20 分）

解：（1） 可取 $1, x, x^2$ 为 $R[x]_3$ 的一组基，则线性变换 T 在该基下的表示矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}4&1&1\\3&2&2\\0&0&3\end{pmatrix};$$

（2）线性变换 T 的特征值为 5，1，3；

在（1）所取基下相应的特征向量分别为 $\eta_1=1+x,\eta_2=1-3x,\eta_3=-3-x+4x^2$；

（3）$\because T$ 具有 3 个互异特征值，$\therefore T$ 可对角化，其对角化的一组基为 η_1,η_2,η_3 。

四.（1）A 的满秩分解为：$A=BC=\begin{pmatrix}2&-1\\1&0\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&-1&2\\0&0&-3&3\end{pmatrix}$；

$$\therefore A^+=C^T(CC^T)^{-1}(B^TB)^{-1}B^T=\frac{1}{33}\begin{pmatrix}2&1&-1\\4&2&-2\\1&-5&-6\\1&6&5\end{pmatrix};$$

（2）易证 $AA^+b=\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}\neq b$，该方程组不相容，其极小最小二乘解为: $x=A^+b=\frac{1}{33}\begin{pmatrix}6\\12\\-8\\14\end{pmatrix}$.

五.（1）$A-B=\begin{pmatrix}5&2&0\\2&1&0.5t\\0&0.5t&1\end{pmatrix}>0$ 当且仅当各阶顺序主子式均为正：

$\Delta_1=5>0,\Delta_2=1>0$，$\Delta_3=|A-B|=1-\frac{5}{4}t^2>0$

即 $-\frac{2}{\sqrt5}<t<\frac{2}{\sqrt5}$ 时 $A>B$ 成立。

（2）$\because A$ 是 Hermite 矩阵，$\therefore$ 存在酉矩阵 U，使得 $U^HAU=diag\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$，

由此可知：$\lambda_{\min}(A)I\le A\le\lambda_{\max}(A)I$，

$\therefore \forall x \in C^n, x \neq 0$，有 $\lambda_{\min}(A) \leq R(x) = \dfrac{x^H A x}{x^H x} \leq \lambda_{\max}(A)$ 。

（3）$\because A_{11} > 0, \therefore A_{11}{}^{-1}$ 存在，构造可逆矩阵 $P = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ -A_{12}^H A_{11}^{-1} & I_{n-k} \end{pmatrix}$,

使得 $PAP^H = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} - A_{12}^H A_{11}^{-1} A_{12} \end{pmatrix} = B$，

$\because A_{11} > 0, A_{22} - A_{12}^H A_{11}^{-1} A_{12} > 0, \therefore B > 0,$ 从而有 $A > 0$ 。

二 00 八 ～二 00 九 学年 第 1 学期

课程名称：矩阵论 **A 卷** 课程编号：A000003

参考答案及评分标准制定人：《矩阵论》课程组 考试日期：2009 年 1 月 13 日

一、（20 分）

（1）特征值多项式为 $f(\lambda)=|\lambda I-A|=\lambda(\lambda+1)^2$ ---------------3

特征值为 0，—1（二重） ----------------3

（2）不变因子 $1,1,\lambda(\lambda+1)^2$ -------------6

初等因子 $\lambda,(\lambda+1)^2$ --------------2

最小多项式 $m(\lambda)=\lambda(\lambda+1)^2$ ---------------2

（3）Jordan 标准形 $\begin{bmatrix} -1 & 1 & \\ & -1` & 0 \\ & & 0 \end{bmatrix}$ ----------------------4

二、（20 分）

（1）$\|A\|_1=3; \|A\|_2=\sqrt{3}; \|A\|_\infty=2; \|A\|_F=\sqrt{5}$ --------- 2’ *4 = 8

（2）证明：

(i) 因为 A 可逆，则 A 的特征值均非零。设 λ 是 A 的任一特征值，x 是相应的特征向量，则

$$Ax=\lambda x,\quad A^{-1}x=\lambda^{-1}x$$

因为 $\|.\|$ 是 $C^{n\times n}$ 上的相容矩阵范数，则存在与 $\|.\|$ 相容的向量范数 $\|.\|_a$，从而

$$|\lambda|\|x\|_a=\|\lambda x\|_a=\|Ax\|_a\le\|A\|\|x\|_a,\quad |\lambda^{-1}|\|x\|_a\le\|A^{-1}\|\|x\|_a$$

因为 $\|x\|_a>0$，则 $\|A^{-1}\|^{-1}\le|\lambda|\le\|A\|$。 ---------6

（ii） 容易验证：$\|A\|_P=\|P^{-1}AP\|$ 满足相容矩阵范数的四个条件。 -----------6

三、（20 分）

（1） A 的满秩分解为

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$ -----------------5

$$A^{+}=C^{T}(CC^{T})^{-1}(B^{T}B)^{-1}B^{T}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4}\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4}\end{bmatrix}$$ ---------5

（2）因为 $AA^{+}b=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 2\end{bmatrix}\neq b$; 所以不相容的。 -----------3

其极小最小二乘通解为 $x=A^{+}b=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\ 2\\ -\frac{1}{4}\end{pmatrix}$ -----------3

（3）因为 x 是不相容线性方程组 $Ax=b$ 的最小二乘解当且仅 x 是如下相容线性方程组

$$A^{T}Ax=A^{T}b$$

的解，所以不相容线性方程组 $Ax=b$ 的最小二乘解唯一当且仅当 $A^{T}A$ 非奇异，即 $rank(A^{T}A)=n$ 。因为 $rank(A^{T}A)=rank(A)$ ，所以不相容线性方程组 $Ax=b$ 的最小二乘解唯一当且仅当 A 列满秩。 -----------4

四、（20 分）

（1）dim(V)=3,　　　　　　------2

V 的一组基为$\varepsilon_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\varepsilon_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\varepsilon_3=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$　　　　　　------3

（2）因为

$$T(\varepsilon_1)=\varepsilon_1+\varepsilon_2,T(\varepsilon_2)=2\varepsilon_2,T(\varepsilon_3)=-\varepsilon_2+\varepsilon_3$$

则线性变换T在基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$下的矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&2&-1\\0&0&1\end{bmatrix}。$$　　　　　　------------5

（3）因为T在基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$下的矩阵 A 非奇异，$Ker(T)=N(T)=\{0\},\dim(N(T))=0$。---2

$R(T)=span(T(\varepsilon_1),T(\varepsilon_2),T(\varepsilon_3))=span(\varepsilon_1+\varepsilon_2,2\varepsilon_2,-\varepsilon_2+\varepsilon_3)=V$，则 $\dim(R(T))=3$。

----3

（4）因为矩阵 A 的初等因子为$\lambda-2,\lambda-1,\lambda-1$，所以矩阵 A 可对角化。因为线性变换在不同基下的矩阵是相似的，因此存在一组基使得（2）中线性变换T在所取基下的矩阵为对角矩阵。

因为矩阵 A 对应于特征值$\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=1$的特征向量为$\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$,则取 V 的一组基为$\alpha_1=\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$，$T$在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}。$$　　　　　　------------5

五、（20 分）

（1）因为 A 为 n 阶 Hermite 矩阵，则存在 n 阶酉矩阵 U，使得

$$A = U\Lambda U^H,$$

其中 $\Lambda = diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$，并且 $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$。令

$$B = Udiag(\lambda_1^{\frac{1}{3}}, \cdots, \lambda_n^{\frac{1}{3}})U^H,$$

则 B 是 n 阶 Hermite 矩阵，并且 $A = B^3$。 -------------8

设有另一个 n 阶 Hermite 矩阵 E，使得 $A = E^3$，则 E 有谱分解

$$E = Vdiag(\mu_1, \cdots, \mu_n)V^H$$

其中 $\mu_1 \geq \cdots \geq \mu_n$。因为 $A = E^3$，则 $\mu_i^3 = \lambda_i (i = 1, \cdots, n)$，$E = Vdiag(\lambda_1^{\frac{1}{3}}, \cdots, \lambda_n^{\frac{1}{3}})V^H$。由 $A = B^3 = E^3$，有

$$Udiag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)U^H = Vdiag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)V^H。$$

记 $P = U^H V = (p_{ij})$，则 $diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)P = Pdiag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$，从而

$$\lambda_i p_{ij} = \lambda_j p_{ij} \quad (i, j = 1, \cdots, n),$$

于是

$$\lambda_i^{\frac{1}{3}} p_{ij} = \lambda_j^{\frac{1}{3}} p_{ij} \quad (i, j = 1, \cdots, n),$$

即

$$diag(\lambda_1^{\frac{1}{3}}, \cdots, \lambda_n^{\frac{1}{3}})P = Pdiag(\lambda_1^{\frac{1}{3}}, \cdots, \lambda_n^{\frac{1}{3}}),$$

因此 $B = Udiag(\lambda_1^{\frac{1}{3}}, \cdots, \lambda_n^{\frac{1}{3}})U^H = Vdiag(\lambda_1^{\frac{1}{3}}, \cdots, \lambda_n^{\frac{1}{3}})V^H = E$。 -------------4

（2）因为 $A \geq 0$，所以 A 的特征值均非负。设 A 的特征值为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$，且 $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0$，则 A^2 的特征值为 $\lambda_1^2, \cdots, \lambda_n^2$，于是

$$(tr(A))^2 = (\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)^2 \geq \lambda_1^2 + \cdots + \lambda_n^2 = tr(A^2)。$$ ---------------4

（3）因为 $A > 0$，则 A 可逆，并且 $A^{-1} > 0$。由 $I = AA^{-1}$，可得

$$n = tr(I) = tr(AA^{-1}) = tr(A^H A^{-1}) \le \left[tr(A^H A) tr(A^{-H} A^{-1}) \right]^{\frac{1}{2}} = \left[tr(A^2) tr(A^{-2}) \right]^{\frac{1}{2}}$$

由（2）知$\sqrt{tr(A^2)} \le tr(A), \sqrt{tr(A^{-2})} \le tr(A^{-1})$，因此$n \le tr(A)tr(A^{-1})$。 -------------4

二 00 九 ～二 0 一 0 学年 第 1 学期

课程名称：矩阵论 **A 卷** 课程编号：A000003

参考答案及评分标准制定人：《矩阵论》课程组 考试日期：2010 年 1 月 12 日

一、（20 分）

（1）特征值多项式为 $f(\lambda)=|\lambda I-A|=(\lambda-1)^3$ ---------3 分

特征值为 1（三重） ---------3 分

（2）不变因子 $1,\ (\lambda-1),\ (\lambda-1)^2$ ---------3 分

初等因子 $(\lambda-1),\ (\lambda-1)^2$ ---------2 分

最小多项式 $m(\lambda)=(\lambda-1)^2$ ---------1 分

（3）Jordan 标准形 $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$ ---------3 分

（4）由 $P^{-1}AP=J$，$AP=PJ$，记 $P=\begin{pmatrix}p_1 & p_2 & p_3\end{pmatrix}$，则 $\begin{cases}Ap_1=p_1\\Ap_2=p_2\\Ap_3=p_2+p_3\end{cases}$

$(I-A)x=0$ 可求无关解 $\xi=\begin{pmatrix}-1&1&0\end{pmatrix}^T$，$\eta=\begin{pmatrix}3&0&1\end{pmatrix}^T$

取 $p_1=\xi,\ \ p_2=k_1\xi+k_2\eta$，$k_1,\ k_2$ 使 $p_1,\ p_2$ 无关且保证 $(I-A)p_3=-p_2$ 有解。

$k_1=k_2\neq 0$ 满足，故可取 $k_1=k_2=1$，$p_2=\begin{pmatrix}2&1&1\end{pmatrix}^T$，$p_3=\begin{pmatrix}2&0&1\end{pmatrix}^T$

则 $P=\begin{pmatrix}p_1&p_2&p_3\end{pmatrix}$. ---------5 分

二、（20 分）

（1）$\|A\|_1=3;\quad \|A\|_2=3;\quad \|A\|_\infty=5;\quad \|A\|_F=\sqrt{14}$ ---------8 分

（2）证明：

容易验证：$\|A\|_* = n\cdot\max\limits_{i,j}|a_{ij}|$满足矩阵范数三个条件：非负性，正齐次性，三角不等式

相容性：

$$\|AB\|_* = n\cdot\max_{i,j}|\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}|\le n\cdot\max_{i,j}\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}||b_{kj}|\le n\cdot\max_{i,j}|a_{ij}|\sum_{k=1}^{n}|b_{ij}|$$

---------8 分

$$\le n\cdot\max_{i,j}|a_{ij}|\cdot n\cdot\max_{i,j}|b_{ij}| = \|A\|_*\cdot\|B\|_*$$

（3）由条件知A可对角化，存在可逆矩阵 P 使得$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & 0 & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$，其中$\lambda_i\ne\lambda_j$。

又$AB=BA$ 则$P^{-1}AP\cdot P^{-1}BP=P^{-1}BP\cdot P^{-1}AP$，由$\lambda_i\ne\lambda_j$，故$P^{-1}BP$为对角形，

即B可对角化。 ---------4 分

三．解：（1）$\begin{cases}T(1+x+x^2)=4+x^2\\ T(x+x^2)=3-x+2x^2\\ T(x^2)=x^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}T(1)=1+x-x^2\\ T(x)=3-x+x^2\\ T(x^2)=x^2\end{cases}$ 故

$T(1\ x\ x^2)=(1\ x\ x^2)\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ 故所求矩阵为$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ --------5 分

（2）$R(T)=span(T(1),T(x),T(x^2))$，又因为$T(1),T(x),T(x^2)$线性无关，故

$\dim(R(T))=\dim span(T(1),T(x),T(x^2))=3$，基为$T(1),T(x),T(x^2)$；

$\ker(T)=\{p(x)|T(p(x))=0\}$ 设$p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$，易求$a_0=a_1=a_2=0$

$\ker(T)=\{0\}$ $\dim(\ker(T))=0$ ---------5 分

（3）变换T在基$1,x,x^2$下的矩阵$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$，则$A$的特征值及特征向量为

$\lambda_1=1,\quad \eta_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，$\lambda_2=2,\quad \eta_2=\begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix}$，$\lambda_3=-2,\quad \eta_3=\begin{pmatrix}3\\-3\\2\end{pmatrix}$

故变换T的特征值及特征向量，

$\lambda_1=1,\quad \xi_1=x^2$，$\lambda_2=2,\quad \xi_1=3+x-2x^2$，$\lambda_3=-2,\quad \xi_1=3-3x+2x^2$ ---------5 分

（4）对$1,x,x^2$进行标准正交化得：

$$\varepsilon_1=\frac{1}{\sqrt{2}},\varepsilon_2=\frac{\sqrt{6}}{2}x\quad,\quad \varepsilon_3=\frac{\sqrt{10}}{4}\left(3x^2-1\right)$$ ---------5 分

四．解（1）$A=\begin{pmatrix}4 & 0 & -1\\ 0 & 4 & t\\ -1 & t & 4\end{pmatrix}$，$\Delta_1=4>0,\Delta_2=16>0,\quad \Delta_3=60-4t^2>0$则

$$-\sqrt{15}<t<\sqrt{15}$$ ---------8 分

（2）由条件，存在酉阵U,使$U^HAU=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & 0 & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$ 故

$$A\ge 0\quad\Leftrightarrow U^HAU=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & 0 & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}\ge 0\Leftrightarrow \lambda_i\ge 0(i=1\cdots n)$$ ---------6 分

（3） $A\ge 0$，存在酉阵U,使$U^HAU=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & 0 & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$， $\lambda_i\ge 0(i=1\cdots n)$

$$A=U\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & 0 & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}U^H,\quad A+I=U\begin{pmatrix}\lambda_1+1 & & \\ & 0 & \\ & & \lambda_n+1\end{pmatrix}U^H,$$

$$\left|A+I\right|=\left|U\begin{pmatrix}\lambda_1+1 & & \\ & 0 & \\ & & \lambda_n+1\end{pmatrix}U^H\right|=(\lambda_1+1)\cdots\left(\lambda_n+1\right)\ge 1$$

等号成立的充分必要条件为$\lambda_i=0\left(i=1\cdots n\right)$即$A=0$ ---------6 分

五、（**20** 分）

（**1**） A 的满秩分解为

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\\ 1 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & -2 & 0\end{pmatrix}$$ ---------**5** 分

$$A^{+}=C^{T}\left(CC^{T}\right)^{-1}\left(B^{T}B\right)^{-1}B^{T}=\frac{1}{14}\begin{pmatrix}2 & 4 & 1\\ 1 & -5 & 4\\ -2 & -4 & -1\end{pmatrix}$$ ---------**5** 分

由 $AA^{+}b=b$，故方程组相容，通解为

$$x=A^{+}b+\left(I-A^{+}A\right)y=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0.5 & 0 & 0.5\\ 0 & 0 & 0\\ 0.5 & 0 & 0.5\end{pmatrix}y$$

其中 y 任意. ---------**5** 分

（**3**）矩阵方程 $AXB=C$ 有解的充分必要条件是 $AA^{+}CB^{+}B=C$ 。

必要条件：取 $X=A^{+}CB^{+}$ 满足 $AXB=C$，故有解；

充分条件： $AXB=C$ 有解，则 $C=AXB=AA^{+}AXBB^{+}B=AA^{+}CB^{+}B$ ---------**5** 分

2010～2011 学年第 1 学期 《**矩阵论**》 课程考试 A 卷 **答案**

考试日期：2011 年 1 月 12 日，课程编号：A000003，命题教师： 阅卷教师：

学院 专业 学号 姓名 成绩

一.

（1）$|\lambda I - A| = \lambda^2(\lambda-4)$，所以，$\lambda_1=\lambda_2=0,\lambda_3=4$； 4 分

$(\lambda-2,3)=1, D_1(\lambda)=1,$

$\begin{vmatrix}\lambda-2 & 3\\ -4 & \lambda+6\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+4), \begin{vmatrix}-4 & \lambda+6\\ -6 & 7\end{vmatrix}=6\lambda+8,$ 所以，$D_2(\lambda)=1,$

$D_3(\lambda)=\lambda^2(\lambda-4),$ 8 分

所以，不变因子为 $d_1(\lambda)=d_2(\lambda)=1, d_3(\lambda)=\lambda^2(\lambda-4);$ 10 分

所有初等因子为：$\lambda^2, \lambda-4;$ 12 分

A 的 Jordan 标准形为 $\begin{pmatrix}0 & 1 & \\ & 0 & \\ & & 4\end{pmatrix};$ 16 分

（2）矩阵 A，B 特征值均为-1 和 2，有两个互异的特征值，

所以 A，B 均相似于 $\begin{pmatrix}-1 & \\ & 2\end{pmatrix}$；所以，A,B 相似 20 分

二.

（1）$\|A\|_1=6,\ A^HA=\begin{pmatrix}14 & 3\\ 3 & 6\end{pmatrix}, \|A\|_2=\sqrt{15}$，$\|A\|_\infty=4$，$\|A\|_F=2\sqrt{5}$， 8 分

（2）根据 Schur 定理，存在酉阵 U，使 $U^HAU=\begin{pmatrix}\lambda_1 & * & \cdots & *\\ & \lambda_2 & \cdots & \vdots\\ & & \ddots & *\\ & & & \lambda_n\end{pmatrix},$

所以，$\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2 \le \|U^HAU\|_F^2 = \|A\|_F^2$ 14 分

$\Leftarrow$A 为正规矩阵，即 $A^H A = AA^H$, 则存在酉阵 U，$U^H AU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$,

所以，$\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 = \|U^H AU\|_F^2 = \|A\|_F^2$，　　　17 分

$\Rightarrow$由（1）的证明知，"="成立时，有 A 酉相似于一对角阵，根据定理 4.5.2，A 为正规阵　20 分

三.（1）对任意 $X_1, X_2 \in W, k \in R,$ 都有 $X_1 + X_2 \in W,\ kX_1 \in W,$ 所以，W 是 $R^{2\times 2}$ 的线性子空间，设 $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \in W,$ 因为 $AX = XA,$ 所以，$X = \begin{pmatrix} x_{11} & 0 \\ x_{21} & x_{11} + x_{21} \end{pmatrix}$,

W **的一组基为** $X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$ 维数是 2.　　　5 分

（2）对任意 $X_1, X_2 \in W, k \in R,$ 都有 $T(X_1 + X_2) = T(X_1) + T(X_2)$，$T(kX_1) = kT(X_1)$，所以，$T$ 为线性变换　　　9 分

（3）对于 W **的一组基为** $X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$ 有：

$T(X_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0X_1 + 0X_2$，$T(X_2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = -1X_1 + 2X_2$，

$T(X_1, X_2) = (X_1, X_2)\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$，$T$ 在（1）中所取基下的矩阵是 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ 14 分

（4）对于 W **的一组基为** $X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$

若 $T(aX_1 + bX_2) = \begin{pmatrix} -b & 0 \\ 2b & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，则有：$b = 0$，

所以，$Ker(T) = \{kI_2 : k \in R)\}$，维数为 1,　　　17 分

$R(T)=\{T(X):X\in W\}=span\{T(X_1),T(X_2)\}=\{k\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}:k\in R\}$，

维数为 1.　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　20 分

四.

（1）对任意 $x\in R^n$，**有：** $x^TA^TAx=(Ax)^TAx\geq 0$，**所以，** $A^TA\geq 0$，**2 分**

（2）$A^TA\geq 0$，所以，A^TA 的任意特征值 $\lambda\geq 0$，$I+A^TA$ 的任意特征值 $1+\lambda\geq 1$，

所以，$|I+A^TA|\geq 1$　　　　　　　　　　　　　　　　**5 分**

$A=0$ 时，显然，$|I+A^TA|=1$，

$|I+A^TA|=1$ 时，根据上面证明，A^TA 的所有特征值都是 0，可得 $A^TA=0$，利用反证法，可得 $A=0$　　　　　　　　　　　　　　　　9 分

（3）根据半正定矩阵的 Hadamard 不等式，可得 $|A^TA|\leq\prod_{k=1}^{n}(\sum_{i=1}^{m}a_{ik}^2)$　　12 分

（4）因为 $A^TA\geq 0$，存在正交矩阵 U，使

$A^TA=U^Tdiag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)U=(U^Tdiag(\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2},\cdots,\sqrt{\lambda_n})U)^2$，其中 $\lambda_1\geq\lambda_2\geq\cdots\geq\lambda_n$ 是 A^TA 的特征值，取 $S=U^Tdiag(\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2},\cdots,\sqrt{\lambda_n})U$ 即可 15 分

设 $A=S^2=S_1^2$，下面证明 $S=S_1$，

根据上面的证明，设 $S=U^T\Lambda U,\ S_1={U_1}^T\Lambda U_1$,

所以，$U^T\Lambda^2U={U_1}^T\Lambda^2U_1$，即 $\Lambda^2UU_1^T=U{U_1}^T\Lambda^2$，令 $P=U{U_1}^T=(p_{ij})_{n\times n}$

${\lambda_i}^2p_{ij}=\lambda_j^2p_{ij}$，则有 $\lambda_ip_{ij}=\lambda_jp_{ij}$，即 $\Lambda UU_1^T=U{U_1}^T\Lambda$，

所以 $U^T\Lambda U={U_1}^T\Lambda U_1$, 即 $S=S_1$　　　　　　　　　　　　20 分

五.

（1） $A^TA=\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}$， A 的奇异值为 $\sqrt{2},\sqrt{3}$， A^TA 对应于特征值 3 和 2 的标准正交特征向量为

$u_1=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},u_2=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$， $AA^T=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&1&-1\\0&-1&2\end{pmatrix}$对应于特征值 3 和 2，0 的标准正交特征向量分别为

$v_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},v_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$， $v_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$，所以， A 的奇异值分解为：

$$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{-1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&0&\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{-1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{3}&0\\0&\sqrt{2}\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}^T$$ 5 分

$$A^+=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{-1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{-1}{\sqrt{6}}&\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{-1}{3}\end{pmatrix}$$ 10 分

$AA^+b\neq b$,所以 $Ax=b$ 不相容，此方程组的极小最小二乘解为 $x=A^+b=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$ 15 分

A 的全部特征值为 $\lambda_1=0.7,\lambda_2=-0.4$，**所以**， $\rho(A)<1$，

（2）矩阵级数 $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^kA^k$ 收敛 17 分 $S_m=(I+A)^{-1}-(-1)^{m+1}A^{m+1}(I+A)^{-1}$

所以， $S=(I+A)^{-1}$ 20 分

2011 ~ 2012 学年第 1 学期 《**矩阵论**》 课程考试 A 卷

考试日期：2012 年 1 月 9 日，课程编号：A000003，命题教师：　阅卷教师：

一（20 分）

（1）$|\lambda I - A| = \lambda^3$，　3’

$\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = 0$；　3’

（2）$\boldsymbol{A}$ 的行列式因子 $1,\ \lambda, \lambda^3$；　3’

$\boldsymbol{A}$ 的不变因子 $1,\ \lambda, \lambda^2$；　3’

$\boldsymbol{A}$ 的初等因子 λ, λ^2；　2’

$\boldsymbol{A}$ 的最小多项式 λ^2；　1’

（3）$\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$。　5’

二（20 分）

（1）$\|A\|_1 = 6,$　2’

$A^H A = \begin{pmatrix} 14 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \|A\|_2 = \sqrt{14}$；　4’

$\|A\|_\infty = 3$；　2’

$\|A\|_F = \sqrt{19}$.　2’

(2)(i)

$$\|UAV\|_F = [tr((UAV)^H UAV)]^{\frac{1}{2}} = [tr(V^H A^H U^H UAV)]^{\frac{1}{2}}$$

$$= [tr(V^H A^H AV)]^{\frac{1}{2}} = [tr(V^{-1} A^H AV)]^{\frac{1}{2}} = [tr(A^H A)]^{\frac{1}{2}} = \|A\|_F.$$

5’

(ii) 因为 $rank(A) = r$，则由奇异值分解定理知，存在 m 阶酉矩阵 U 和 n 阶酉矩阵 V，使得

$U^H AV = \begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，其中 $\Sigma = diag(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_r)$，从而

$$\sum_{i=1}^{r}\sigma_i^2=\left\|\begin{pmatrix}\Sigma & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right\|_F^2=\left\|U^HAV\right\|_F^2=\|A\|_F^2=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2 \qquad 5'$$

三（20 分）

（1）$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&1&1&0\end{pmatrix}$；　　8'

（2）$A^+=C^T(CC^T)^{-1}(B^TB)^{-1}B^T$　　2'

$$=\frac{1}{15}\begin{pmatrix}5&-4&1\\0&3&3\\-5&7&2\\5&-4&1\end{pmatrix} \qquad 6'$$

（3）因为 $AA^+b=\frac{1}{15}\begin{pmatrix}50\\5\\55\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}10\\1\\11\end{pmatrix}\neq b$，所以 $Ax=b$ 不相容。　　2'

$Ax=b$ 的极小最小二乘解为 $x=A^+b=\frac{1}{15}\begin{pmatrix}19\\12\\-7\\19\end{pmatrix}$。　　2'

四（20 分）

（1）因为 A 的顺序主子式 $\Delta_1=2>0,\Delta_2=5>0,\Delta_3=-8<0$，所以 A 不是正定的。

4'

因为 A 有一个主子式 $\Delta_3=-8<0$ 或 $\begin{vmatrix}3&-3\\-3&2\end{vmatrix}=-3<0$，所以 A 也不是半正定的。

4'

（2）因为 A 是 n 阶 Hermite 正定矩阵，则存在可逆 Hermite 矩阵 S，使得 $A=S^2$，从而 AB 相似于 $S^{-1}ABS=SBS=S^HBS$。　　3'

又因为 B 是 Hermite 矩阵，则 S^HBS 是 Hermite 矩阵。由 Hermite 矩阵的谱分解 S^HBS 相似于实对角矩阵，再由相似的传递性知，AB 相似于实对角矩阵。　　3'

（3）因为 A， B 均为 n 阶 Hermite 矩阵，并且 $AB=BA$，则存在 n 阶酉矩阵 U，使得

$$U^H AU = diag(\alpha_1,\cdots,\alpha_n), U^H BU = diag(\beta_1,\cdots,\beta_n)\text{。} \qquad 3'$$

从而 $U^H ABU = diag(\alpha_1\beta_1,\cdots,\alpha_n\beta_n)$，即 AB 相似于对角矩阵 $diag(\alpha_1\beta_1,\cdots,\alpha_n\beta_n)$。因此，如果 λ 是 AB 的特征值，则存在 A 的特征值 α 和 B 的特征值 β，使得 $\lambda=\alpha\beta$。

3’

五（20 分）

（1） $\dim(R[x]_3)=3$， 2’

$R[x]_3$ 的一组基为 $\alpha_1=1,\alpha_2=x,\alpha_3=x^2$。 3’

（2） 因为

$$T(\alpha_1)=1-x^2=\alpha_1-\alpha_3$$

$$T(\alpha_2)=-1+x=-\alpha_1+\alpha_2$$

$$T(\alpha_3)=-x+x^2=-\alpha_2+\alpha_3$$

则 T 在基 α_1， α_2， α_3 下的矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$。 6’

（3） $R(T)=span(T(\alpha_1),T(\alpha_2),T(\alpha_3))=span(\alpha_1-\alpha_3,-\alpha_1+\alpha_2)$， 1’

$\dim(R(T))=2$， 1’

$Ker(T)=span(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)$， 1’

$\dim(Ker(T))=1$。 1’

（4） $R[x]_3$ 的一组标准正交基为

$\varepsilon_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$； 1’ $\varepsilon_2=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x$； 2’ $\varepsilon_3=\dfrac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}(x^2-\dfrac{1}{3})$。 2’

2012 ~ 2013 学年第 1 学期 《**矩阵论**》 课程考试 A 卷

考试日期：2013 年 1 月 15 日 课程编号：A080001 命题教师： 阅卷教师：

学院	专业	学号	姓名	成绩

一、(20 分)

(1) V 的一组基为 $E_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, E_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, E_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$, 维数为 3.

……………………………………(5 分)

(2) 直接验证内积定义的四个条件成立. …………………………… (4 分)

(3) 标准正交基 $E_1'=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, E_2'=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, E_3'=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$. …………(5 分)

(4) 由于 $T(X)\in V$, 所以 T 是 V 的一个变换. 又直接验证, 知

$$T(X+Y)=T(X)+T(Y), T(kX)=kT(X),$$

因此 T 是 V 的一个线性变换. …………………………………(3 分)

线性变换 T 在基 $E_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, E_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, E_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$ 下的矩阵为

$T=\begin{bmatrix}0&1&1\\2&0&0\\2&0&0\end{bmatrix}$. ………………………………………………(3 分)

二、(20 分) (1) A 的行列式因子为 $D_1(\lambda)=D_2(\lambda)=1, D_1(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-1)^2$; …(3 分)

不变因子为 $d_1(\lambda)=d_2(\lambda)=1, d_1(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-1)^2$; ………………… (3 分)

初等因子为 $\lambda-2, (\lambda-1)^2$; ……………………(2 分)

Jordan 标准形为 $J=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$. ……………………(2 分)

(2) $a=0$, 不相似, 理由是 2 阶行列式因子不同; …………………(5 分)

$a\neq 0$, 相似, 理由是各阶行列式因子相同. …………………(5 分)

三、(20 分)

(1) 矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\1&1&1&2\\0&0&1&1\end{pmatrix}$, A 的满秩分解为

$$A=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}.$$ ……………………(5 分)

(2) $A^{+}=\dfrac{1}{15}\begin{pmatrix}5&1&-4\\5&1&-4\\-5&2&7\\0&3&3\end{pmatrix}.$ ……………………(10 分)

(3) 方程组的极小最小二乘解为 $x=\dfrac{1}{15}\begin{pmatrix}2\\2\\4\\6\end{pmatrix}.$ …………(5 分)

四、(20 分)

(1) $\|A\|_1=4, \|A\|_\infty=3, \|A\|_2=\sqrt{6}, \|A\|_F=3$. ………(10 分)

(2) 因为 $\|A\|_2$ 是相容范数，且 $\|A\|_2=\sqrt{6}<3$，则 $\rho(A)<3$ 在收敛半径内，因此级数收敛. ……………(5 分)

(3) $\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{3^k}A^k=\sum_{k=0}^{\infty}(\dfrac{A}{3})^k=3(3I-A)^{-1}=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&-1&1\end{bmatrix}.$ ……………(5 分)

五、(20 分)

(1) 由$\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|<1$可得，$\|A\|_\infty<1$，由于$\|A\|_\infty$是相容范数，则$\rho(A)<1$，$I-A$的特征值都不为零，因此$I-A$可逆. ……………………………(6 分)

(2) $A>0\Rightarrow A=S^2=SS^H$, 这里$S$是可逆的 Hermite 矩阵, 从而$AB=SS^HB$. 由于$SS^HB$与$S^HBS$有相同的特征值，且$S^HBS>0$，所以$AB$的特征值均为正数.

…………………(8 分)

(3) $A\ge 0\Rightarrow A=S^2=S^HS, AB=S^HSB$，这里$S$是 Hermite 矩阵. 由于$S^HSB$与$SBS^H$有相同的特征值，且$SBS^H\ge 0$，所以$AB$的特征值均为非负数，从而$tr(AB)=tr(SBS^H)\ge 0$. ……………………(4 分)

当$tr(AB)=0$时, 有$tr(SBS^H)=0$, 从而$SBS^H=0$. 设$B=Q^2=QQ^H$, 这里Q也是 Hermite 矩阵, 则

$$SBS^H=SQQ^HS^H=(SQ)(SQ)^H.$$

于是$SQ=0$, 由此得到$AB=0$. …………(2 分)

2013～2014 学年第 1 学期 《**矩阵论**》 课程考试 A 卷

考试日期：2014 年 1 月 14 日 课程编号：A080001 命题教师： 阅卷教师：

学院 专业 学号 姓名 成绩

一、(20 分)

1.特征多项式为 $f_A(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda+1)^2$；(4 分)

初等因子为 $\lambda-1, (\lambda+1)^2$.（6 分）

2. A 的 Jordan 标准形为 $J=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ 或 $J=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$.（5 分）

3. 设 $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$, 则 B 的初等因子为 $\lambda-1, \lambda+1, \lambda+1$, 与 A 的初等因子不同, 所以 A 与 B 不相似.（5 分）

二、(20 分)

1. σ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$.（6 分）

2. 向量 ξ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标为 $x=(10,6,-9)^T$;向量 $\sigma(\xi)$ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标为 $y=Ax=(4,0,-3)^T$.（6 分）

3. 线性变换 σ 的值域为 $R(\sigma)=span\{\beta_1,\beta_2\}$, 核为 $\ker(\sigma)=span\{-\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3\}$ 或 $\ker(\sigma)=span\{(0,1,0)^T\}$ 或 $\ker(\sigma)=\{k(0,1,0)^T \mid k\in R\}$.（8 分）

三、(15 分)

1. A 的一种满秩分解为 $A=\begin{pmatrix}1&1\\-1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&2\end{pmatrix}\overset{\Delta}{=}BC$；(5 分，注意：满秩分解不唯一，需要检验)

又因为 $B^{+}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-2&-1\\1&1&2\end{pmatrix}$, $C^{+}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}5&2\\2&2\\-1&2\end{pmatrix}$, 于是

$A^{+}=C^{+}B^{+}=\frac{1}{18}\begin{pmatrix}7&-8&-1\\4&-2&2\\1&4&5\end{pmatrix}$.（5 分，公式写对，计算结果错误可酌情扣分）

2. 不相容. 方程组 $Ax=b$ 的极小最小二乘解为 $x=A^{+}b=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}-23\\-16\\7\end{pmatrix}$.（5 分）

四、(15 分)

1. $\|A\|_1=3, \|A\|_\infty=3, \|A\|_F=\sqrt{7}$. (6 分)

由于 $A^TA=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&-1\\0&-1&2\end{pmatrix}$, 所以 A^TA 的特征值是 $1,3,3$, 从而 $\|A\|_2=\sqrt{3}$. (4 分)

2. 已知幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}x^k$ 的收敛半径为 2, 且 $\rho(A)\le\|A\|_2<2$, 则矩阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}A^k$ 收敛. 由公式 $\sum_{k=0}^{\infty}B^k=(I-B)^{-1}$, 得到

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}A^k=(I-\frac{1}{2}A)^{-1}=2\begin{pmatrix}\frac{5}{3}&-\frac{1}{3}&1\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&0\\1&0&1\end{pmatrix}. \text{(5 分)}$$

五、(20 分)

1. $A>0\Rightarrow$ 存在可逆矩阵 P_1，使得 $P_1^HAP_1=I$．由于 $P_1^HBP_1$ 也是 Hermite 矩阵，所以

存在酉矩阵P_2，使得

$$P_2^{\ H}(P_1^{\ H}BP_1)P_2 = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n),$$

且$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$均为实数．取$P = P_1P_2$，即为要证的．（8 分）

2. 显然，对任意实数t，$tA + B$也是 Hermite 矩阵. 对题 1 中的实对角矩阵，取正数t_0，使得

$$t_0 + \lambda_1 \geq 0, t_0 + \lambda_2 \geq 0, \cdots, t_0 + \lambda_n \geq 0,$$

则当$t > t_0$时，有$diag(t+\lambda_1, t+\lambda_2, \cdots, t+\lambda_n) > 0$，即

$$P^H(tA+B)P = diag(t+\lambda_1, t+\lambda_2, \cdots, t+\lambda_n) > 0,$$

于是$tA + B$也是 Hermite 正定矩阵. (6 分)

3. 根据题 1 的结论，当$A > B \geq 0$时，有$0 \leq \lambda_i < 1,\ i = 1, 2, \cdots, n$，于是

$$|A - B| = \frac{1}{|\det P|^2}\left|P^H(A-B)P\right| = |A|(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)\cdots(1-\lambda_n) \leq |A|.$$ (6 分)

六、(10 分)

1. 由于$(A^TA)^+ = A^+(A^+)^T$，$AA^+ = (AA^+)^T$，所以

$$(A^TA)(A^TA)^+(A^Tb) = A^TAA^+(A^+)^TA^Tb = A^T(AA^+)^T(AA^+)^Tb = A^Tb,$$

因此方程组$A^TAx = A^Tb$相容. (5 分)

2. 由于$(AA^+)^T(AA^+) = (AA^+)^2 = AA^+$，且$AA^+ \neq 0$，所以$\lambda_{\max}[(AA^+)^T(AA^+)] = 1$，从而$\|AA^+\|_2 = 1$. (5 分)

南 京 航 空 航 天 大 学

研究生考试参考答案及评分标准

二00 七 ~二00 八 学年　第 一 学期　　课程名称：　矩阵论

试卷类型　A 卷　　　　课程编号：　A000003

参考答案及评分标准制定人：　　　　2008 年 1 月 12 日

一、(20 分)

解：(1) $|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & 2 \\ 2 & \lambda+2 & -3 \\ 1 & 1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \lambda^3$，

A 的特征多项式为 λ^3 ，A 的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$ …………………………… 6 分

(2) A 的行列式因子：$1,1,\lambda^3$；A 的不变因子：$1,1,\lambda^3$；A 的初等因子：λ^3；……. 7 分

(3) 因为 $A^2 \neq 0, A^3 = 0$, A 的最小多项式 λ^3；

$$A^6+3A-2I=3A-2I=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -6 \\ -6 & -8 & 9 \\ -3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$ ……………………………………… 4 分

(4) A 的 Jordan 标准形 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ……………………………………………………. 3 分

二、(20 分)

解：(1) $R^{2\times 2}$ 的维数为 4，一组基 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$；………. 5 分

(2) $\forall A,B \in W, \forall k \in R,$ 则　$\because (A+B)^T = A^T + B^T = A+B$，$\therefore A+B \in W$；

$\because (kA)^T = kA^T = kA$；$\therefore kA \in W$。对加法和数乘封闭，所以是 $R^{2\times 2}$ 的子空间。

W 的维数为 3，一组基 $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$；………. 5 分

（3）$C_1 = A_1$，$B_1 = \dfrac{C_1}{\|C_1\|} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$；

$C_2 = A_2 - (A_2, B_1)B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，　　$B_2 = \dfrac{C_2}{\|C_2\|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$；

$C_3 = A_3 - (A_3, B_1)B_1 - (A_3, B_2)B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，　$B_3 = \dfrac{C_3}{\|C_3\|} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$。

所以$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$、$\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$为$W$ 的一组标准正交基。　……..…..……　5 分

（4）T 在（1）中所取基下的矩阵为$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$；$T$ 的核 $Ker(T)$：$\left\{\begin{pmatrix} 0 & k \\ -k & 0 \end{pmatrix} \middle| k \in R\right\}$；

T 的值域 $R(T)$：$span\{A_1, A_2, A_3\}$=W.　……………………………………………　5 分

三、（20 分）

解：（1）$\|A\|_1 = 4$，$\|A\|_2 = \sqrt{15}$，$\|A\|_\infty = 6$，$\|A\|_F = \sqrt{20}$；　……………………………　8 分

（2）若 $A \neq 0$，则至少有一个 $a_{ij} \neq 0$，$\|A\|_* = n \cdot \max\limits_{i,j}|a_{ij}| > 0$

若 $A = 0$，则 $a_{ij} = 0 \quad \forall i, j$，$\|A\|_* = n \cdot \max\limits_{i,j}|a_{ij}| = 0$

$\forall k \in C$，$\|kA\|_* = n \cdot \max\limits_{i,j}|ka_{ij}| = k \cdot n \cdot \max\limits_{i,j}|a_{ij}| = k\|A\|_*$

$\forall A, B \in C^{n\times n}$，　$\|A+B\|_* = n \cdot \max\limits_{i,j}|a_{ij} + b_{ij}|$　$\leq n \cdot \max\limits_{i,j}|a_{ij}| + n \cdot \max\limits_{i,j}|b_{ij}|$

$= \|A\|_* + \|B\|_*$

所以 $\|\ \|_*$ 是 $C^{n\times n}$ 上的矩阵范数。

$$\|AB\|_* = n \cdot \max_{i,j}\left|\sum_{i,j} a_{ik} b_{kj}\right| \leq n \cdot \max_{i,j}\sqrt{\sum_k |a_{ik}|^2 \sum_k |b_{kj}|^2}$$

$$\leq n\sqrt{n \cdot \max_{i,j}|a_{ij}|^2 \, n \cdot \max_{i,j}|b_{ij}|^2} \leq n \cdot \sqrt{n}\max_{i,j}|a_{ij}| \cdot \sqrt{n}\max_{i,j}|n_{ij}| = \|A\|_*\|B\|_*$$

（3）$\|A\|_2^2=\lambda_{\max}\left(A^HA\right)\le\|A\|_F^2=\sum_{i=1}^{n}\left|a_{ij}\right|^2\le n^2\max_{i,j}\left|a_{ij}\right|^2=\|A\|_*^2$， $\therefore\|A\|_2\le\|A\|_*$

不妨设$\max\limits_{i,j}\left|a_{ij}\right|=\left|a_{i_0j_0}\right|$，则$\frac{1}{n}\|A\|_*=\max\limits_{i,j}\left|a_{ij}\right|=\left|a_{i_0j_0}\right|$

记$x_0=e_{j_0},y_0=e_{i_0}$，则$\|x_0\|_2=1,\|y_0\|_2=1$，

$\therefore\|A\|_2=\max\limits_{\substack{x^Hx=1\\y^Hy=1}}\left|y^HAx\right|\ge\left|y_0{}^HAx_0\right|=\left|a_{i_0j_0}\right|$，　　$\therefore\frac{1}{n}\|A\|_*\le\|A\|_2$

综上可知：$\frac{1}{n}\|A\|_*\le\|A\|_2\le\|A\|_*$ …………………………………………… 4 分

四、（20 分）

（1）矩阵 A 的 QR 分解：$A=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt2}{2} & -\frac{\sqrt2}{2} & 0\\ \frac{\sqrt2}{2} & \frac{\sqrt2}{2} & 0\\ 0 & 0 & \frac{\sqrt2}{2}\\ 0 & 0 & \frac{\sqrt2}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt2 & 0 & \frac{\sqrt2}{2}\\ 0 & \sqrt2 & -\frac{\sqrt2}{2}\\ 0 & 0 & \sqrt2\end{pmatrix}$ ……..………… 6 分

（2）$A^+=\left(A^TA\right)^{-1}A^T==\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2 & 2 & -1 & -1\\ -2 & 2 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 2\end{pmatrix}$ …………………………..……… 8 分

（3）$\because AA^+b=\begin{pmatrix}2\\1\\1.5\\1.5\end{pmatrix}$　　$\therefore AA^+b\ne b$　该方程组不相容。

极小最小二乘解 $x=A^+b==\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3\\1\\6\end{pmatrix}$ …………………………………………… 6分

五、（20 分）

（1）$A-B=\begin{pmatrix}5 & 2 & 0\\ 2 & 1 & 0.5t\\ 0 & 0.5t & 1\end{pmatrix}$，

$\Delta_1=5>0,\Delta_2=1>0$，$\Delta_3=|A-B|=1-\dfrac{5}{4}t^2>0$时 $A>B$ 成立

即$-\dfrac{2}{\sqrt{5}}<t<\dfrac{2}{\sqrt{5}}$时 $A>B$ 成立。…………………………………………………… 10 分

（2）$\because A=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{12}^H & A_{22}\end{pmatrix}>0$，$A_{11}$为 A 的前 k 阶顺序主子式，$\therefore A_{11}>0.$

存在可逆矩阵 $P=\begin{pmatrix}I_k & 0\\ -A_{12}^H A_{11}^{-1} & I_{n-k}\end{pmatrix}$,使得 $PAP^H=\begin{pmatrix}A_{11} & 0\\ 0 & A_{22}-A_{12}^H A_{11}^{-1}A_{12}\end{pmatrix}=B$，

$\because A>0 \quad \therefore B>0, \therefore A_{22}-A_{12}^H A_{11}^{-1}A_{12}>0$。 ……………………. …………..…….. 6 分

(3)设 λ 是矩阵 A 的任一特征值，相应的特征向量为 $x=(x_1,\cdots,x_n)^T$，令 $|x_{i_0}|=\max\limits_i |x_i|$，

则 $|x_{i_0}|>0$，由 $Ax=\lambda x$，有 $(\lambda-a_{i_0i_0})x_{i_0}=\sum\limits_{j=1,j\neq i_0}^{n}a_{i_0j}x_j$，

从而 $|\lambda-a_{i_0i_0}|\le\sum\limits_{j\neq i_0}|a_{i_0j}|\dfrac{|x_j|}{|x_{i_0}|}\le\sum\limits_{j\neq i_0}|a_{i_0j}|$

又因为 $a_{ii}>\sum\limits_{j\neq i}|a_{ij}| \quad (i=1,2,\cdots,n)$，所以 $\lambda>0$，

由 λ 的任意性，可知 A 的所有特征值均为正数，所以 A 正定。……………………..……. 4 分

南 京 航 空 航 天 大 学

研究生考试参考答案及评分标准

二00七 ~二00八 学年 第 一 学期	课程名称：	矩阵论
试卷类型 B 卷	课程编号：	A000003
参考答案及评分标准制定人：		2008 年 1 月 18 日

一、（20 分）

解：（1）A 的不变因子：$1,1,(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda+4)$；$A$ 的初等因子：$(\lambda+1),(\lambda-2),(\lambda+4)$；

A 的最小多项式 $(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda+4)$ 。

（2）A 的 Jordan 标准形 $J=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&-4\end{pmatrix}$，相应的可逆变换矩阵为 $P=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&0\\\frac{1}{9}&\frac{1}{9}&-\frac{2}{9}\\\frac{4}{9}&-\frac{2}{9}&-\frac{2}{9}\end{pmatrix}$。

（3）$\because \rho(A)=4>1$，故矩阵序列 $\left\{A^k\right\}$ 发散。

二、（20 分）

解：（1）$\|A\|_1=5$；$\|A\|_\infty=5$；$\|A\|_F=\sqrt{23}$；

$\because \lambda(A^TA)=\{3,5,15\}$， $\therefore \|A\|_2=[\lambda_{\max}(A^TA)]^{\frac{1}{2}}=\sqrt{15}$ 。

（2）设 $x\in C^n$ 是 A 相应于特征值 λ 的特征向量，$\therefore Ax=\lambda x, x\neq 0$，

两边取矩阵范数导出的 C^n 上向量范数可得：$|\lambda|\|x\|=\|\lambda x\|=\|Ax\|\le\|A\|\|x\|$，

$\because \|x\|\neq 0, \therefore |\lambda|\le\|A\|$；

又 $\because A$ 可逆，$\therefore \frac{1}{\lambda}$ 是 A^{-1} 的特征值，由上述证明可知：$\left|\frac{1}{\lambda}\right|\le\|A^{-1}\|$；

综上所述有：$\|A^{-1}\|^{-1}\le|\lambda|\le\|A\|$ 。

三、（20 分）

解：（1） 可取$1,x,x^2$为$R[x]_3$的一组基，则线性变换T 在该基下的表示矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}4&1&1\\3&2&2\\0&0&3\end{pmatrix};$$

（2）线性变换T的特征值为 5，1，3；

在（1）所取基下相应的特征向量分别为$\eta_1=1+x,\eta_2=1-3x,\eta_3=-3-x+4x^2$；

（3）$\because T$ 具有 3 个互异特征值，$\therefore T$ 可对角化，其对角化的一组基为η_1,η_2,η_3 。

四．（1）A 的满秩分解为：$A=BC=\begin{pmatrix}2&-1\\1&0\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&-1&2\\0&0&-3&3\end{pmatrix}$；

$$\therefore A^+=C^T(CC^T)^{-1}(B^TB)^{-1}B^T=\frac{1}{33}\begin{pmatrix}2&1&-1\\4&2&-2\\1&-5&-6\\1&6&5\end{pmatrix};$$

（2）易证$AA^+b=\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}\neq b$，该方程组不相容，其极小最小二乘解为: $x=A^+b=\frac{1}{33}\begin{pmatrix}6\\12\\-8\\14\end{pmatrix}$.

五．（1）$A-B=\begin{pmatrix}5&2&0\\2&1&0.5t\\0&0.5t&1\end{pmatrix}>0$当且仅当各阶顺序主子式均为正：

$\Delta_1=5>0,\Delta_2=1>0$，$\Delta_3=|A-B|=1-\frac{5}{4}t^2>0$

即$-\frac{2}{\sqrt{5}}<t<\frac{2}{\sqrt{5}}$时$A>B$成立。

（2）$\because A$是 Hermite 矩阵，$\therefore$存在酉矩阵U，使得$U^HAU=diag\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$，

由此可知：$\lambda_{\min}(A)I\le A\le\lambda_{\max}(A)I$，

$\therefore \forall x \in C^n, x \neq 0$，有 $\lambda_{\min}(A) \le R(x) = \dfrac{x^H Ax}{x^H x} \le \lambda_{\max}(A)$ 。

（3）$\because A_{11} > 0, \therefore A_{11}{}^{-1}$ 存在，构造可逆矩阵 $P = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ -A_{12}^H A_{11}^{-1} & I_{n-k} \end{pmatrix}$,

使得 $PAP^H = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} - A_{12}^H A_{11}^{-1} A_{12} \end{pmatrix} = B$，

$\because A_{11} > 0, A_{22} - A_{12}^H A_{11}^{-1} A_{12} > 0, \therefore B > 0$, 从而有 $A > 0$ 。

南 京 航 空 航 天 大 学

研究生考试试卷

二00 七 ～二00 八 学年 第 一 学期《 矩 阵 论 》课程

考试日期: 2008 年 1 月 16 日 试卷类型 A 课程编号: A000003

学院 学号 姓名 成绩

一、（20 分）设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ -2 & -2 & 3\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$，

（1）求 A 的特征多项式和 A 的全部特征值；

（2）求 A 的行列式因子、不变因子和初等因子；

（3）求 A 的最小多项式，并计算 $A^6+3A-2I$；

（4）写出 A 的 Jordan 标准形。

二、（20 分）设 $R^{2\times 2}$ 是实数域 R 上全体 2×2 实矩阵构成的线性空间(按通常矩阵的加法和数与矩阵的乘法)。

（1）求 $R^{2\times 2}$ 的维数，并写出其一组基；

（2）设 W 是全体 2×2 实对称矩阵的集合，

证明：W 是 $R^{2\times 2}$ 的子空间，并写出 W 的维数和一组基；

（3）在 W 中定义内积 $(A,B)=tr(BA)$, 其中 $A,B\in W$，求出 W 的一组标准正交基；

（4）给出 $R^{2\times 2}$ 上的线性变换 T： $T(A)=A+A^T$， $\forall A\in R^{2\times 2}$

写出线性变换 T 在（1）中所取基下的矩阵，并求 T 的核 $Ker(T)$ 和值域 $R(T)$。

三、（20 分）

（1）设 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，求 $\|A\|_1$，$\|A\|_2$，$\|A\|_\infty$，$\|A\|_F$；

（2）设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$，令 $\|A\|_* = n\cdot\max\limits_{i,j}|a_{ij}|$，

证明：$\|\ \|_*$ 是 $C^{n\times n}$ 上的矩阵范数并说明具有相容性；

（3）证明：$\dfrac{1}{n}\|A\|_* \le \|A\|_2 \le \|A\|_*$。

四、（20 分）已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\1 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，向量 $b=\begin{pmatrix}2\\1\\1\\2\end{pmatrix}$，

（1）求矩阵 A 的 QR 分解；

（2）计算 A^{+}；

（3）用广义逆判断方程组 $Ax=b$ 是否相容？若相容,求其通解;若不相容,求其极小最小二乘解。

五、（20 分）

（1）设矩阵 $A=\begin{pmatrix}5 & 3 & 2\\ 3 & 2 & t\\ 2 & t & 2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 0.5t\\ 2 & 0.5t & 1\end{pmatrix}$，其中 t 为实数，

问当 t 满足什么条件时，$A>B$ 成立？

（2）设 n 阶 Hermite 矩阵 $A=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{12}^H & A_{22}\end{pmatrix}>0$，其中 $A_{11}\in C^{k\times k}$，

证明：$A_{11}>0$，$A_{22}-A_{12}^H A_{11}^{-1} A_{12}>0$。

（3）已知 Hermite 矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)\in C^{n\times n}$，$a_{ii}>\sum\limits_{j\neq i}\left|a_{ij}\right|\quad \left(i=1,2,\cdots,n\right)$，证明：$A$ 正定

南 京 航 空 航 天 大 学

研究生考试试卷

二00 七 ～二00 八 学年 第 一 学期《 矩 阵 论 》课程

考试日期: 2008 年 月 日 试卷类型 B 课程编号: A000003

学院　　学号　　姓名　　成绩

一.（20 分）已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 1 & -4 & 0\\ 0 & -4 & 0\end{pmatrix}$，

（1）求 A 的不变因子、初等因子及最小多项式；

（2）求 A 的 Jordan 标准形 J 及可逆变换矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=J$；

（3）问矩阵序列 $\left\{A^k\right\}$ 是否收敛？$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 1 & -4 & 0\\ 0 & -4 & 0\end{pmatrix}$.

二.（20 分）

（1）已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$，求 $\|A\|_1, \|A\|_2, \|A\|_\infty, \|A\|_F$；

（2）设 A 为 n 阶可逆矩阵，$\|\cdot\|$ 是 $C^{n\times n}$ 上的相容范数，λ 为 A 的任一特征值，

证明：$\|A^{-1}\|^{-1} \le |\lambda| \le \|A\|$ 。

三.（20 分） $R[x]_3$ 表示实数域上次数不小于 3 的多项式与零多项式构成的线性空间，

对 $\forall f(x) \in R[x]_3$，记 $f(x) = ax^2 + bx + c$,其中 $a,b,c \in R$，在 $R[x]_3$ 上定义线性变换：

$T[f(x)] = 3ax^2 + (2a + 2b + 3c)x + (a + b + 4c).$

（1）给出 $R[x]_3$ 的一组基，并求出线性变换 T 在该基下的表示矩阵；

（2）求线性变换 T 的特征值和特征向量；

（3）判断线性变换 T 是否可对角化？若可以，给出对角化的一组基；若否，证明之。

四.（20 分）

（1）设 $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$，试给出 A 的满秩分解，并计算 A^+；

（2）设 $b=\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$，利用广义逆矩阵判断线性方程组 $Ax=b$ 是否相容？若相容，求其通解；

若不相容，求其极小最小二乘解。

五.（20 分）

（1）设 $A=\begin{pmatrix}5 & 3 & 2\\ 3 & 2 & t\\ 2 & t & 2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 0.5t\\ 2 & 0.5t & 1\end{pmatrix}$,其中 t 是实数，

问 t 满足什么条件时，$A>B$ 成立？

（2）设 A 为 n 阶 Hermite 矩阵，对任意 $x\in C^n, x\neq 0$，记 $R(x)=\dfrac{x^H Ax}{x^H x}$，

证明：$\lambda_{\min}(A)\leq R(x)\leq \lambda_{\max}(A), x\neq 0$。

（3）设 n 阶 Hermite 矩阵 $A=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{12}^H & A_{22}\end{pmatrix}$，其中 $A_{11}\in C^{k\times k}(1\leq k<n)$，

如果 $A_{11}>0, A_{22}-A_{12}^H A_{11}^{-1}A_{12}>0$，证明：$A>0$。

南 京 航 空 航 天 大 学

研究生考试参考答案及评分标准

二 00 八 ～二 00 九 学年 第 1 学期
课程名称：矩阵论 **A 卷** 课程编号：A000003
参考答案及评分标准制定人：《矩阵论》课程组 考试日期：2009 年 1 月 13 日

一、（20 分）

（1）特征值多项式为 $f(\lambda)=|\lambda I-A|=\lambda(\lambda+1)^2$ ---------------3

特征值为 0，—1（二重） ----------------3

（2）不变因子 $1,1,\lambda(\lambda+1)^2$ -------------6

初等因子 $\lambda,(\lambda+1)^2$ --------------2

最小多项式 $m(\lambda)=\lambda(\lambda+1)^2$ ---------------2

（3）Jordan 标准形 $\begin{bmatrix}-1 & 1 & \\ & -1` & 0 \\ & & 0\end{bmatrix}$ ----------------------4

二、（20 分）

（1）$\|A\|_1=3;\|A\|_2=\sqrt{3};\|A\|_\infty=2;\|A\|_F=\sqrt{5}$ --------- 2’ *4 = 8

（2）证明：

(i) 因为 A 可逆，则 A 的特征值均非零。设 λ 是 A 的任一特征值，x 是相应的特征向量，则

$$Ax=\lambda x,\quad A^{-1}x=\lambda^{-1}x$$

因为 $\|.\|$ 是 $C^{n\times n}$ 上的相容矩阵范数，则存在与 $\|.\|$ 相容的向量范数 $\|.\|_a$，从而

$$|\lambda|\|x\|_a=\|\lambda x\|_a=\|Ax\|_a\le\|A\|\|x\|_a,\quad |\lambda^{-1}|\,\|x\|_a\le\|A^{-1}\|\|x\|_a$$

因为 $\|x\|_a>0$，则 $\|A^{-1}\|^{-1}\le|\lambda|\le\|A\|$。 ---------6

（ii） 容易验证：$\|A\|_P=\|P^{-1}AP\|$ 满足相容矩阵范数的四个条件。 -----------6

三、（20 分）

（1） A 的满秩分解为

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$ ------------------5

$$A^{+}=C^{T}(CC^{T})^{-1}(B^{T}B)^{-1}B^{T}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4}\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4}\end{bmatrix}$$ ---------5

（2）因为 $AA^{+}b=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 2\end{bmatrix}\neq b$; 所以不相容的。 -----------3

其极小最小二乘通解为 $x=A^{+}b=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\ 2\\ -\frac{1}{4}\end{pmatrix}$ -----------3

（3）因为 x 是不相容线性方程组 $Ax=b$ 的最小二乘解当且仅 x 是如下相容线性方程组

$$A^{T}Ax=A^{T}b$$

的解，所以不相容线性方程组 $Ax=b$ 的最小二乘解唯一当且仅当 $A^{T}A$ 非奇异，即 $rank(A^{T}A)=n$ 。因为 $rank(A^{T}A)=rank(A)$ ，所以不相容线性方程组 $Ax=b$ 的最小二乘解唯一当且仅当 A 列满秩。 -----------4

四、（20 分）

（1）dim(V)=3, ------2

V 的一组基为$\varepsilon_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\varepsilon_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\varepsilon_3=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ ------3

（2）因为

$$T(\varepsilon_1)=\varepsilon_1+\varepsilon_2,T(\varepsilon_2)=2\varepsilon_2,T(\varepsilon_3)=-\varepsilon_2+\varepsilon_3$$

则线性变换T在基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$下的矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}。$$ ------------5

（3）因为T在基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$下的矩阵 A 非奇异，$Ker(T)=N(T)=\{0\},\dim(N(T))=0$ 。---2

$R(T)=span(T(\varepsilon_1),T(\varepsilon_2),T(\varepsilon_3))=span(\varepsilon_1+\varepsilon_2,2\varepsilon_2,-\varepsilon_2+\varepsilon_3)=V$ ，则$\dim(R(T))=3$ 。 ----3

（4） 因为矩阵 A 的初等因子为$\lambda-2,\lambda-1,\lambda-1$，所以矩阵 A 可对角化。因为线性变换在不同

使得（2）中线性变换T在所取基下的矩阵为对角矩阵。

因为矩阵 A 对应于特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=1$ 的特征向量为 $\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\end{pmatrix}$

$\alpha_1=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ ， T 在 基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下 的

------------5

五、（20 分）

（1）因为 A 为 n 阶 Hermite 矩阵，则存在 n 阶酉矩阵 U，使得

$$A=U\Lambda U^H,$$

其中 $\Lambda=diag(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$，并且 $\lambda_1\ge\cdots\ge\lambda_n$。令

$$B=Udiag(\lambda_1^{\frac{1}{3}},\cdots,\lambda_n^{\frac{1}{3}})U^H,$$

则 B 是 n 阶 Hermite 矩阵，并且 $A=B^3$。 -------------8

设有另一个 n 阶 Hermite 矩阵 E，使得 $A=E^3$，则 E 有谱分解

$$E=Vdiag(\mu_1,\cdots,\mu_n)V^H$$

其中 $\mu_1\ge\cdots\ge\mu_n$。因为 $A=E^3$，则 $\mu_i^3=\lambda_i(i=1,\cdots,n)$，$E=Vdiag(\lambda_1^{\frac{1}{3}},\cdots,\lambda_n^{\frac{1}{3}})V^H$。由 $A=B^3=E^3$，有

$$Udiag(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)U^H=Vdiag(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)V^H。$$

记 $P=U^HV=(p_{ij})$，则 $diag(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)P=Pdiag(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$，从而

$$\lambda_i p_{ij}=\lambda_j p_{ij}\quad(i,j=1,\cdots,n),$$

于是

$$\lambda_i^{\frac{1}{3}}p_{ij}=\lambda_j^{\frac{1}{3}}p_{ij}\quad(i,j=1,\cdots,n),$$

即

$$diag(\lambda_1^{\frac{1}{3}},\cdots,\lambda_n^{\frac{1}{3}})P=Pdiag(\lambda_1^{\frac{1}{3}},\cdots,\lambda_n^{\frac{1}{3}}),$$

因此 $B=Udiag(\lambda_1^{\frac{1}{3}},\cdots,\lambda_n^{\frac{1}{3}})U^H=Vdiag(\lambda_1^{\frac{1}{3}},\cdots,\lambda_n^{\frac{1}{3}})V^H=E$。 -------------4

（2）因为 $A\ge0$，所以 A 的特征值均非负。设 A 的特征值为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$，且 $\lambda_1\ge\cdots\ge\lambda_n\ge0$，则 A^2 的特征值为 $\lambda_1^2,\cdots,\lambda_n^2$，于是

$$(tr(A))^2=(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)^2\ge\lambda_1^2+\cdots+\lambda_n^2=tr(A^2)。$$ ---------------4

（3）因为 $A>0$，则 A 可逆，并且 $A^{-1}>0$。由 $I=AA^{-1}$，可得

$$n=tr(I)=tr(AA^{-1})=tr(A^HA^{-1})\le\left[tr(A^HA)tr(A^{-H}A^{-1})\right]^{\frac{1}{2}}=\left[tr(A^2)tr(A^{-2})\right]^{\frac{1}{2}}$$

由（2）知 $\sqrt{tr(A^2)}\le tr(A),\sqrt{tr(A^{-2})}\le tr(A^{-1})$，因此 $n\le tr(A)tr(A^{-1})$。 -------------4

南 京 航 空 航 天 大 学

研究生考试试卷

二00 八 ～二00九　学年　第 1 学期　　《矩阵论 》课程　A卷

考试日期：2009年1月13 日　　课程编号：A000003

学院	学号	姓名	成绩

一（20分）设 $A=\begin{pmatrix} 8 & -1 & 6 \\ 3 & 0 & 3 \\ -14 & 2 & -10 \end{pmatrix}$，

（1）　求 A 的特征多项式和 A 的全部特征值；

（2）　求 A 的不变因子、初等因子和最小多项式；

（3）　写出 A 的 Jordan 标准形。

二（20 分）（1）设 $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$，求 $\|A\|_1,\|A\|_2,\|A\|_\infty,\|A\|_F$；

（2） 设 $\|\cdot\|$ 是 $C^{n\times n}$ 上的相容矩阵范数，证明：

（i） 如果 A 是 n 阶可逆矩阵，λ 是 A 的任一特征值，则 $\|A^{-1}\|^{-1}\le|\lambda|\le\|A\|$；

（ii） 如果 $P\in C^{n\times n}$ 是可逆矩阵，令 $\|A\|_P=\|P^{-1}AP\|$，则 $\|A\|_P$ 是 $C^{n\times n}$ 上的相容矩阵范数。

三（20 分）设 $A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$，

（1） 作出 A 的满秩分解，计算 A^{+}；

（2） 应用广义逆矩阵判定线性方程组 $Ax=b$ 是否相容。若相容，求其通解；若不相容，求其极小最小二乘解；

（3） 设 A 是 $m\times n$ 实矩阵，b 是 m 维实向量，证明：不相容线性方程组 $Ax=b$ 的最小二乘解唯一当且仅当 A 列满秩。

四 (20 分)设V表示实数域R上全体2×2上三角矩阵作成的线性空间（对矩阵的加法和数量乘法）。

（1） 求V的维数，并写出V的一组基；

（2） 在V中定义线性变换T：$T(X)=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}X+X\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$， $X\in V$

求T在（1）中所取基下的矩阵表示；

（3） 求（2）中线性变换T的值域$R(T)$和核$N(T)$，并确定它们的维数；

（4） 在V中能否取一组基使得（2）中线性变换T在所取基下的矩阵为对角矩阵？如果能，则取一组基；如果不能，则说明理由。

五（20 分）设 $A=(a_{ij})$ 为 n 阶 Hermite 矩阵，证明:

（1） 存在唯一 Hermite 矩阵 B 使得 $A=B^3$；

（2） 如果 $A\geq 0$，则 $tr(A^2)\leq (tr(A))^2$；

（3） 如果 $A>0$，则 $tr(A)tr(A^{-1})\geq n$。

南京航空航天大学2009级硕士研究生

2009～2010学年第1学期《矩阵论》课程考试A卷				
考试日期：2010年1月12日	课程编号：A000003	命题教师：	阅卷教师：	
学院	专业	学号	姓名	成绩

一、（**20**分）设$A=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 6\\ -1 & 0 & 3\\ -1 & -1 & 4\end{pmatrix}$，

（1）　求A的特征多项式和A的全部特征值；

（2）　求A的不变因子、初等因子和最小多项式；

（3）　写出A的**Jordan**标准形$\boldsymbol{J}$。

（4）　求可逆矩阵$\boldsymbol{P}$，使$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{J}$。

二（20 分）（1）设 $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix}$，求 $\|A\|_1$，$\|A\|_2$，$\|A\|_\infty$，$\|A\|_F$；

（2） 设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$，令 $\|A\|_* = n\cdot\max\limits_{i,j}|a_{ij}|$，证明：$\|\bullet\|_*$ 是 $C^{n\times n}$ 上的矩阵范数，并且是相容范数；

（3） 设 ***A***,***B*** 均为 *n* 阶矩阵，并且 ***AB***=***BA***，证明：如果 ***A*** 有 *n* 个互异的特征值，则 ***B*** 相似于对角阵。

三（20 分）设 $R[x]_3$ 表示实数域 $\boldsymbol{R}$ 上次数小于 3 的多项式再添上与零多项式构成的线性空间（按通常多项式的加法和数与多项式的乘法）。

（1） 在 $R[x]_3$ 中定义线性变换 $\boldsymbol{T}$:

$$\begin{cases} T(1+x+x^2)=4+x^2 \\ T(x+x^2)=3-x+2x^2 \\ T(x^2)=x^2 \end{cases}$$

求变换 T 在基 $1,x,x^2$ 下的矩阵；

（2）求 $\boldsymbol{T}$ 的值域 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{T})$和 $\mathbf{Ker}(\boldsymbol{T})$的维数和基；

（3）在 $R[x]_3$ 中定义内积

$$(f,g)=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)dx，\ f(x),g(x)\in R[x]_3$$

求出 $R[x]_3$ 的一组标准正交基。

四（20 分）（1）设 $A=\begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & t \\ -1 & t & 4 \end{pmatrix}$，其中 t 为实参数，问 t 取何值时 $\boldsymbol{A}$ 正定；

（2）设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶 **Hermite** 矩阵，证明：$\boldsymbol{A}$ 半正定的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值均为非负实数。

（3）已知 n 阶矩阵 $A \geq 0$，证明：$|A+I| \geq 1$，并且等号成立的充分必要条件为 $A=0$。

五（20 分）（1）设 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，

（i）　作出 $\boldsymbol{A}$ 的满秩分解，并计算 $\boldsymbol{A}^{+}$；

（ii）　用广义逆矩阵判定线性方程组 $Ax=b$ 是否相容。若相容，求其通解；若不相容，求其极小最小二乘解；

（2）　设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 分别为 $m\times n, p\times q, m\times q$ 矩阵，则矩阵方程 $\boldsymbol{AXB}=\boldsymbol{C}$ 有解的充分必要条件时 $\boldsymbol{AA^{+}CB^{+}B}=\boldsymbol{C}$。

南京航空航天大学2010级硕士研究生

2010～2011 学年第 1 学期 《**矩阵论**》 课程考试 A 卷

考试日期：2011 年 1 月 12 日，课程编号：A000003，命题教师：　　阅卷教师：

学院　　　　　专业　　　　　学号　　　　　姓名　　　　　成绩

一（20 分）（1）设 $A=\begin{pmatrix}2 & -3 & 4\\ 4 & -6 & 8\\ 6 & -7 & 8\end{pmatrix}$。

(i) 求 A 的特征多项式和 A 的全部特征值；

(ii) 求 A 的行列式因子，不变因子和初等因子；

(iii) 写出 A 的 Jordan 标准形；

（2）设 $A=\begin{pmatrix}17 & -6\\ 45 & -16\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}14 & -60\\ 3 & -13\end{pmatrix}$，试问 A 和 B 是否相似？并说明原因。

二（20 分）（1）设 $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}$，求 $\|A\|_1$，$\|A\|_2$，$\|A\|_\infty$，$\|A\|_F$；

（2）设 $A\in C^{n\times n}$ 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，求证：

(i) $\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2\le\|A\|_F^2$；

(ii) $\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2=\|A\|_F^2$ 的充要条件是 A 为正规矩阵。

三（20 分）设 $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}$, $W=\left\{X\,\middle|\,AX=XA, X\in R^{2\times 2}\right\}$

（1） 证明：W 是 $R^{2\times 2}$ 的线性子空间，并求 W 的基和维数；

（2） 在 W 中定义变换 T: $T(X)=X-X^*$，其中 X^* 为 X 的伴随矩阵， 证明：T 为线性变换；

（3） 求 $\boldsymbol{T}$ 在（1）中所取基下的矩阵表示；

（4） 求（2）中线性变换 T 的值域 $\boldsymbol{R(T)}$ 和核 $Ker(T)$，并确定它们的维数.

四（20 分）设 $A\in R^{m\times n}$。

（1）证明：A^TA 半正定；

（2）证明：$|I+A^TA|\geq 1$，并且等号成立当且仅当 $A=0$；

（3）证明：$|A^TA|\leq \prod_{k=1}^{n}(\sum_{i=1}^{m}a_{ik}^2)$；

（4）证明：存在唯一的对称半正定矩阵 S 使得 $A^TA=S^2$。

五（20 分）（1）设 $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$， $b=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$.

（i） 求 A 的奇异值分解；

（ii）计算广义逆矩阵 A^+；

（iii）用广义逆矩阵判定线性方程组 $Ax=b$ 是否相容。若相容，求其通解；若不相容，求其极小最小二乘解；

（2）设 $A=\begin{pmatrix}-0.2 & 0.3\\ 0.6 & 0.5\end{pmatrix}$，判定矩阵级数 $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^kA^k$ 是否收敛。若收敛，求其和。

南京航空航天大学 2010 级硕士研究生

2010～2011 学年第 1 学期 《**矩阵论**》 课程考试 A 卷 **答案**

考试日期：2011 年 1 月 12 日，课程编号：A000003，命题教师： 阅卷教师：

学院	专业	学号	姓名	成绩

一.

（1）$|\lambda I - A| = \lambda^2(\lambda-4)$，所以，$\lambda_1=\lambda_2=0,\lambda_3=4$； 4 分

$(\lambda-2,3)=1, D_1(\lambda)=1,$

$\begin{vmatrix} \lambda-2 & 3 \\ -4 & \lambda+6 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda+4), \begin{vmatrix} -4 & \lambda+6 \\ -6 & 7 \end{vmatrix} = 6\lambda+8,$所以，$D_2(\lambda)=1,$

$D_3(\lambda)=\lambda^2(\lambda-4),$ 8 分

所以，不变因子为$d_1(\lambda)=d_2(\lambda)=1, d_3(\lambda)=\lambda^2(\lambda-4);$ 10 分

所有初等因子为：$\lambda^2, \lambda-4;$ 12 分

A 的 Jordan 标准形为$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ & 0 & \\ & & 4 \end{pmatrix};$ 16 分

（2）矩阵 A，B 特征值均为-1 和 2，有两个互异的特征值，

所以 A，B 均相似于$\begin{pmatrix} -1 & \\ & 2 \end{pmatrix}$;所以，A,B 相似 20 分

二.

（1）$\|A\|_1 = 6,\ A^H A = \begin{pmatrix} 14 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \|A\|_2 = \sqrt{15}$，$\|A\|_\infty = 4$，$\|A\|_F = 2\sqrt{5}$， **8 分**

（2）根据 Schur 定理，存在酉阵 U，使$U^H A U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ & \lambda_2 & \cdots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix},$

所以，$\sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 \le \|U^H A U\|_F^2 = \|A\|_F^2$ 14 分

$\Leftarrow$A 为正规矩阵，即 $A^H A = AA^H$,则存在酉阵 U，$U^H A U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix},$

所以，$\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2=\|U^HAU\|_F^2=\|A\|_F^2$，　　17 分

$\Rightarrow$由（1）的证明知，“=”成立时，有 A 酉相似于一对角阵，根据定理 4.5.2，A 为正规阵　　20 分

三．（1）对任意$X_1,X_2\in W,\ k\in R,$都有$X_1+X_2\in W,\ kX_1\in W,$所以，$W$是$R^{2\times2}$的线性子空间，设$X=\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}\\x_{21}&x_{22}\end{pmatrix}\in W,$因为$AX=XA,$所以，

$$X=\begin{pmatrix}x_{11}&0\\x_{21}&x_{11}+x_{21}\end{pmatrix},$$

W**的一组基为**$X_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\ X_2=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},$维数是 2.　　5 分

（2）对任意$X_1,X_2\in W,\ k\in R,$都有$T(X_1+X_2)=T(X_1)+T(X_2)$，$T(kX_1)=kT(X_1)$，所以，T为线性变换　　9 分

（3）对于W**的一组基为**$X_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\ X_2=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},$有：

$T(X_1)=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=0X_1+0X_2$，$T(X_2)=\begin{pmatrix}-1&0\\2&1\end{pmatrix}=-1X_1+2X_2$，

$T(X_1,X_2)=(X_1,X_2)\begin{pmatrix}0&-1\\0&2\end{pmatrix}$，$T$在（1）中所取基下的矩阵是$A=\begin{pmatrix}0&-1\\0&2\end{pmatrix}$　14 分

（4）对于W**的一组基为**$X_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\ X_2=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},$

若$T(aX_1+bX_2)=\begin{pmatrix}-b&0\\2b&b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$，则有：$b=0$，

所以，$Ker(T)=\{kI_2:k\in R)\}$，维数为 1,　　17 分

$R(T)=\{T(X):X\in W\}=span\{T(X_1),T(X_2)\}=\{k\begin{pmatrix}-1&0\\2&1\end{pmatrix}:k\in R\}$，

维数为 1.　　20 分

四.

（1）对任意$x\in R^n$，**有：**$x^TA^TAx=(Ax)^TAx\geq0$，**所以，**$A^TA\geq0$，**2 分**

（2）$A^TA\geq0$，所以，A^TA的任意特征值$\lambda\geq0$，$I+A^TA$的任意特征值$1+\lambda\geq1$，所以，$|I+A^TA|\geq1$　　**5 分**

$A=0$时，显然，$|I+A^TA|=1$，

$|I+A^TA|=1$时，根据上面证明，A^TA的所有特征值都是 0，可得$A^TA=0$，利用反证法，可得$A=0$　　9 分

（3）根据半正定矩阵的 Hadamard 不等式，可得$|A^TA|\le\prod_{k=1}^{n}(\sum_{i=1}^{m}a_{ik}^2)$ 12 分

（4）因为$A^TA\ge 0$，存在正交矩阵 U，使

$A^TA=U^Tdiag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)U=(U^Tdiag(\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2},\cdots,\sqrt{\lambda_n})U)^2$，其中 $\lambda_1\ge\lambda_2\ge\cdots\ge\lambda_n$是$A^TA$的特征值，取$S=U^Tdiag(\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2},\cdots,\sqrt{\lambda_n})U$即可 15 分

设$A=S^2=S_1^2$，下面证明$S=S_1$，

根据上面的证明，设$S=U^T\Lambda U,\ S_1=U_1{}^T\Lambda U_1,$

所以，$U^T\Lambda^2U=U_1{}^T\Lambda^2U_1$，即$\Lambda^2UU_1^T=UU_1{}^T\Lambda^2$，令$P=UU_1{}^T=(p_{ij})_{n\times n}$

$\lambda_i{}^2p_{ij}=\lambda_j^2p_{ij}$，则有$\lambda_ip_{ij}=\lambda_jp_{ij}$，即$\Lambda UU_1^T=UU_1{}^T\Lambda$，

所以$U^T\Lambda U=U_1{}^T\Lambda U_1$,即$S=S_1$ 20 分

五.

（1）$A^TA=\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}$，$A$的奇异值为$\sqrt{2},\sqrt{3}$，$A^TA$对应于特征值 3 和 2 的标准正交特征向量为$u_1=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},u_2=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，$AA^T=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&1&-1\\0&-1&2\end{pmatrix}$对应于特征值 3 和 2，0 的标准正交特征向量分别为

$v_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},v_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，$v_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$，所以，$A$的奇异值分解为：

$$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{-1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&0&\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{-1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{3}&0\\0&\sqrt{2}\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}^T$$ 5 分

$$A^+=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{-1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{-1}{\sqrt{6}}&\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{-1}{3}\end{pmatrix}$$ 10 分

$AA^{+}b \neq b$, 所以 $Ax=b$ 不相容，此方程组的极小最小二乘解为 $x=A^{+}b=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ 15 分

A 的全部特征值为 $\lambda_1=0.7, \lambda_2=-0.4$，**所以，** $\rho(A)<1$，

（2）矩阵级数 $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k A^k$ 收敛　　17 分 $S_m=(I+A)^{-1}-(-1)^{m+1}A^{m+1}(I+A)^{-1}$

所以，$S=(I+A)^{-1}$　　20 分

南京航空航天大学 2011 级硕士研究生

2011～2012 学年第 1 学期　《**矩阵论**》　课程考试 A 卷

考试日期：2012 年 1 月 9 日，课程编号：A000003，命题教师：　阅卷教师：

学院	专业	学号	姓名	成绩

一（20 分）设 $A=\begin{pmatrix}3 & 6 & -15\\ 1 & 2 & -5\\ 1 & 2 & -5\end{pmatrix}$。

（1）　求 A 的特征多项式和 A 的全部特征值；

（2）　求 A 的行列式因子，不变因子，初等因子和最小多项式；

（3）　写出 A 的 Jordan 标准形 J。

（1）$|\lambda I-A|=\lambda^3$，　3’

　　$\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=\lambda_3=0$；　3’

（2）$\boldsymbol{A}$ 的行列式因子 $1,\ \lambda,\lambda^3$；　3’

　　$\boldsymbol{A}$ 的不变因子 $1,\ \lambda,\lambda^2$；　3’

　　$\boldsymbol{A}$ 的初等因子 λ,λ^2；　2’

　　$\boldsymbol{A}$ 的最小多项式 λ^2；　1’

（3）$\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形 $\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$。　5’

二（20 分）（1）设 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$，求 $\|A\|_1,\|A\|_2,\|A\|_\infty,\|A\|_F$；

（2）设 $A=(a_{ij})\in C^{m\times n}$，证明：

（i）对 m 阶酉矩阵 U 和 n 阶酉矩阵 V，有 $\|UAV\|_F=\|A\|_F$；

（ii）若 $rank(A)=r$，$\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_r$ 为 A 的全部正奇异值，则 $\sum_{k=1}^{r}\sigma_k^2=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2$。

（1）$\|A\|_1=6,$ 2’

$A^HA=\begin{pmatrix} 14 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \|A\|_2=\sqrt{14}$； 4’

$\|A\|_\infty=3$； 2’

$\|A\|_F=\sqrt{19}$. 2’

(2)(i) $$\|UAV\|_F=[tr((UAV)^HUAV)]^{\frac{1}{2}}=[tr(V^HA^HU^HUAV)]^{\frac{1}{2}}$$
$$=[tr(V^HA^HAV)]^{\frac{1}{2}}=[tr(V^{-1}A^HAV)]^{\frac{1}{2}}=[tr(A^HA)]^{\frac{1}{2}}=\|A\|_F.$$ 5’

(ii) 因为 $rank(A)=r$，则由奇异值分解定理知，存在 m 阶酉矩阵 U 和 n 阶酉矩阵 V，

使得 $U^HAV=\begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，其中 $\Sigma=diag(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_r)$，从而

$$\sum_{i=1}^{r}\sigma_i^2=\left\|\begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\|_F^2=\|U^HAV\|_F^2=\|A\|_F^2=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2$$ 5’

三（20 分）设 $A=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&1&1&0\\1&2&1&1\end{pmatrix}$， $b=\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix}$.

（1） 计算 A 的满秩分解；

（2）计算广义逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{+}$；

（3）用广义逆矩阵判定线性方程组 $Ax=b$ 是否相容。若相容，求其通解；若不相容，求其极小最小二乘解。

（1） $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&1&1&0\end{pmatrix}$； 8’

（2） $A^{+}=C^{T}(CC^{T})^{-1}(B^{T}B)^{-1}B^{T}$ 2’

$$=\frac{1}{15}\begin{pmatrix}5&-4&1\\0&3&3\\-5&7&2\\5&-4&1\end{pmatrix}$$ 6’

（3）因为 $AA^{+}b=\frac{1}{15}\begin{pmatrix}50\\5\\55\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}10\\1\\11\end{pmatrix}\neq b$，所以 $Ax=b$ 不相容。 2’

$Ax=b$ 的极小最小二乘解为 $x=A^{+}b=\frac{1}{15}\begin{pmatrix}19\\12\\-7\\19\end{pmatrix}$。 2’

四（20 分）（1）设 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$，判断 A 是否是正定或半正定矩阵，并说明理由；

（2）设 A 是 n 阶 Hermite 正定矩阵，B 是 n 阶 Hermite 矩阵，证明：AB 相似于实对角矩阵；

（3）设 A，B 均为 n 阶 Hermite 矩阵，并且 $AB=BA$，λ 是 AB 的特征值，证明：存在 A 的特征值 α 和 B 的特征值 β，使得 $\lambda=\alpha\beta$。

（1）因为 A 的顺序主子式 $\Delta_1=2>0, \Delta_2=5>0, \Delta_3=-8<0$，所以 A 不是正定的。

4’

因为 A 有一个主子式 $\Delta_3=-8<0$ 或 $\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}=-3<0$，所以 A 也不是半正定的。

4’

（2）因为 A 是 n 阶 Hermite 正定矩阵，则存在可逆 Hermite 矩阵 S，使得 $A=S^2$，从而 AB 相似于 $S^{-1}ABS=SBS=S^HBS$。　3’

又因为 B 是 Hermite 矩阵，则 S^HBS 是 Hermite 矩阵。由 Hermite 矩阵的谱分解 S^HBS 相似于实对角矩阵，再由相似的传递性知，AB 相似于实对角矩阵。　3’

（3）因为 A，B 均为 n 阶 Hermite 矩阵，并且 $AB=BA$，则存在 n 阶酉矩阵 U，使得

$$U^HAU=diag(\alpha_1,\cdots,\alpha_n), U^HBU=diag(\beta_1,\cdots,\beta_n)。$$ 3’

从而 $U^HABU=diag(\alpha_1\beta_1,\cdots,\alpha_n\beta_n)$，即 AB 相似于对角矩阵 $diag(\alpha_1\beta_1,\cdots,\alpha_n\beta_n)$。因此，如果 λ 是 AB 的特征值，则存在 A 的特征值 α 和 B 的特征值 β，使得 $\lambda=\alpha\beta$。

3’

五（20 分）设 $R[x]_3$ 表示实数域 $\boldsymbol{R}$ 上次数小于 3 的多项式再添上零多项式构成的线性空间。

（1）　确定 $R[x]_3$ 的维数，并写出 $R[x]_3$ 的一组基；

（2）　对 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2\in R[x]_3$，在 $R[x]_3$ 上定义线性变换 T 如下：

$$T(f(x))=(a_0-a_1)+(a_1-a_2)x+(a_2-a_0)x^2,$$

求 T 在（1）中所取基下的矩阵表示；

（3）　求（2）中线性变换 T 的值域 $\boldsymbol{R(T)}$ 和核 $Ker(T)$，并确定它们的维数；

（4）　在 $R[x]_3$ 中定义内积

$$(f,g)=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)dx,\ \forall f(x),g(x)\in R[x]_3$$

求 $R[x]_3$ 的一组标准正交基。

（1）　$\dim(R[x]_3)=3$，　2'

$R[x]_3$ 的一组基为 $\alpha_1=1,\alpha_2=x,\alpha_3=x^2$。　3'

（2）　因为

$$T(\alpha_1)=1-x^2=\alpha_1-\alpha_3$$
$$T(\alpha_2)=-1+x=-\alpha_1+\alpha_2$$
$$T(\alpha_3)=-x+x^2=-\alpha_2+\alpha_3$$

则 T 在基 α_1，α_2，α_3 下的矩阵为 $\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\-1&0&1\end{pmatrix}$。　6'

（3）$R(T)=span(T(\alpha_1),T(\alpha_2),T(\alpha_3))=span(\alpha_1-\alpha_3,-\alpha_1+\alpha_2)$，　1'

$\dim(R(T))=2$，　1'

$Ker(T)=span(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)$，　1'

$\dim(Ker(T))=1$。　1'

（4）$R[x]_3$ 的一组标准正交基为

$\varepsilon_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$；　1'

$\varepsilon_2=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x$；　2'

$\varepsilon_3=\dfrac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}(x^2-\dfrac{1}{3})$。　2'

2012 年矩阵论试题参考答案

一、(16 分) 已知 4 阶方阵 A 的特征值为 $1,\ 2,\ 2,\ 2$，且其一阶和二阶行列式因子分别为 $D_1(\lambda)=1,\ D_2(\lambda)=\lambda-2.$

1. (6 分) 求 A 的不变因子和最小多项式;
2. (4 分) 求 A 的 Jordan 标准形;
3. (6 分) 求实数 t 的取值范围，使 $\cos At$ 为收敛矩阵.

解. 1. 因为 $D_4(\lambda)$ 即为 A 的特征多项式，且 A 的特征值为 $1,\ 2,\ 2,\ 2$，故 $D_4(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-2)^3$. 再由行列式因子与不变因子的性质与相互关系知 $D_3(\lambda)=(\lambda-2)^2$，从而 A 的不变因子为

$$d_1(\lambda)=1,\ d_2(\lambda)=\lambda-2,\ d_3(\lambda)=\lambda-2,\ d_4(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-2),$$

A 的最小多项式为 $m_A(\lambda)=d_4(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-2)$.

2. 由 A 的不变因子知，A 的初等因子为 $\lambda-1,\ \lambda-2,\ \lambda-2,\ \lambda-2$，故 A 的 Jordan 标准形为 $J=\begin{pmatrix}1&&&\\&2&&\\&&2&\\&&&2\end{pmatrix}$.

3. $\cos At$ 的特征值为 $\cos t,\ \cos 2t,\ \cos 2t,\ \cos 2t$，谱半径为 $\rho(\cos At)=\max\{|\cos t|,\ |\cos 2t|\}$. $\cos At$ 为收敛矩阵当且仅当其谱半径小于 1，即 $|\cos t|\neq 1,\ \ |\cos 2t|\neq 1$，故实数 t 的取值范围是: $t\neq\dfrac{k\pi}{2}$，$k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$.

二、(16 分) 设 $\|\cdot\|_a$ 和 $\|\cdot\|_b$ 分别是 $\mathbf{C}^m$ 和 $\mathbf{C}^n$ 上的向量范数. 对任何 $x=(\xi_1,\ \cdots,\ \xi_m,\ \xi_{m+1},\ \cdots,\ \xi_{m+n})^T\in\mathbf{C}^{m+n}$，定义 $\|x\|=\|u\|_a+\|v\|_b$，其中 $u=(\xi_1,\ \cdots,\ \xi_m)^T$，$v=(\xi_{m+1},\ \cdots,\ \xi_{m+n})^T$.

1. (10 分) 证明 $\|\cdot\|$ 是 $\mathbf{C}^{m+n}$ 上的一种向量范数;
2. (6 分) 若 $\forall A_{11}\in\mathbf{C}^{m\times m}$，$A_{12}\in\mathbf{C}^{m\times n}$，$A_{21}\in\mathbf{C}^{n\times m}$，$A_{22}\in\mathbf{C}^{n\times n}$，及 $\forall u\in\mathbf{C}^m$，$v\in\mathbf{C}^n$ 有

$\|A_{11}u\|_a \le \|A_{11}\|_{m_1} \cdot \|u\|_a$，$\|A_{12}v\|_a \le \|A_{12}\|_{m_1} \cdot \|v\|_b$，$\|A_{21}u\|_b \le \|A_{21}\|_{m_1} \cdot \|u\|_a$，$\|A_{22}v\|_b \le \|A_{22}\|_{m_1} \cdot \|v\|_b$，

其中$\|\cdot\|_{m_1}$是矩阵m_1范数．证明$\mathbf{C}^{(m+n)\times(m+n)}$上的矩阵$m_1$范数与上面定义的向量范数$\|\cdot\|$相容．

证明．1．　1）非负性．　当$x=(\xi_1,\ \cdots,\ \xi_m,\ \xi_{m+1},\ \cdots,\ \xi_{m+n})^T=0$时，$u=(\xi_1,\ \cdots,\ \xi_m)^T=0$，$v=(\xi_{m+1},\ \cdots,\ \xi_{m+n})^T=0$，故$\|x\|=\|u\|_a+\|v\|_b=0$．　当$x=(\xi_1,\ \cdots,\ \xi_m,\ \xi_{m+1},\ \cdots,\ \xi_{m+n})^T\ne 0$时，$u\ne 0$或$v\ne 0$，故$\|u\|_a>0$或$\|v\|_b>0$，从而$\|x\|=\|u\|_a+\|v\|_b>0$.

2）齐次性．$\forall \lambda\in\mathbf{C},\ \forall x=(\xi_1,\ \cdots,\ \xi_m,\ \xi_{m+1},\ \cdots,\ \xi_{m+n})^T\in\mathbf{C}^{m+n}$，

$$\|\lambda x\|=\|\lambda u\|_a+\|\lambda v\|_b=|\lambda|\cdot\|u\|_a+|\lambda|\cdot\|v\|_b=|\lambda|\cdot(\|u\|_a+\|v\|_b)=|\lambda|\cdot\|x\|.$$

3）三角不等式．

$\forall x=(\xi_1,\ \cdots,\ \xi_m,\ \xi_{m+1},\ \cdots,\ \xi_{m+n})^T$，$y=(\eta_1,\ \cdots,\ \eta_m,\ \eta_{m+1},\ \cdots,\ \eta_{m+n})^T\in\mathbf{C}^{m+n}$，记$u_1=(\xi_1,\ \cdots,\ \xi_m)^T$，$v_1=(\xi_{m+1},\ \cdots,\ \xi_{m+n})^T$，$u_2=(\eta_1,\ \cdots,\ \eta_m)^T$，$v_2=(\eta_{m+1},\ \cdots,\ \eta_{m+n})^T$，则

$$\|x+y\|=\|u_1+u_2\|_a+\|v_1+v_2\|_b\le\|u_1\|_a+\|u_2\|_a+\|v_1\|_b+\|v_2\|_b=\|x\|+\|y\|.$$

由定义知$\|\cdot\|$是$\mathbf{C}^{m+n}$上的一种向量范数．

2．$\forall A\in\mathbf{C}^{(m+n)\times(m+n)},\ \forall x=(\xi_1,\ \cdots,\ \xi_m,\ \xi_{m+1},\ \cdots,\ \xi_{m+n})^T\in\mathbf{C}^{m+n}$，将$A$和$x$分块为

$A=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}$及$x=\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}$，其中$A_{11}\in\mathbf{C}^{m\times m}$，$A_{12}\in\mathbf{C}^{m\times n}$，$A_{21}\in\mathbf{C}^{n\times m}$，$A_{22}\in\mathbf{C}^{n\times n}$，$u\in\mathbf{C}^m$，$v\in\mathbf{C}^n$，则$Ax=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{11}u+A_{12}v\\ A_{21}u+A_{22}v\end{pmatrix}$，

$$\begin{aligned}\|Ax\|&=\|A_{11}u+A_{12}v\|_a+\|A_{21}u+A_{22}v\|_b\le\|A_{11}u\|_a+\|A_{12}v\|_a+\|A_{21}u\|_b+\|A_{22}v\|_b\\&\le\|A_{11}\|_{m_1}\cdot\|u\|_a+\|A_{12}\|_{m_1}\cdot\|v\|_b+\|A_{21}\|_{m_1}\cdot\|u\|_a+\|A_{22}\|_{m_1}\cdot\|v\|_b\\&=(\|A_{11}\|_{m_1}+\|A_{21}\|_{m_1})\cdot\|u\|_a+(\|A_{12}\|_{m_1}+\|A_{22}\|_{m_1})\cdot\|v\|_b\le\|A\|_{m_1}\cdot\|u\|_a+\|A\|_{m_1}\cdot\|v\|_b\\&=\|A\|_{m_1}\cdot(\|u\|_a+\|v\|_b)=\|A\|_{m_1}\cdot\|x\|,\end{aligned}$$

所以$\mathbf{C}^{(m+n)\times(m+n)}$上的矩阵范数$\|\cdot\|_{m_1}$与上面定义的向量范数$\|\cdot\|$相容．

三、(18 分)

1. (8 分) 设 $X=\left(x_{ij}\right)_{n\times n}$ 是矩阵变量，且 $\det X\neq 0$．求 $\dfrac{d}{dX^T}\det\left(X^{-1}\right)$；

2. (10 分) 设 $A=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$．求矩阵幂级数 $\sum_{k=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{k-1}A^{2k}t^{2k-1}}{(2k-1)!}$ 的和．

解. 1． $\det\left(X^{-1}\right)=\dfrac{1}{\det X}$， $\det X=\sum_{k=1}^{n}x_{ik}X_{ik}=x_{ij}X_{ij}+\sum_{k\neq j}^{n}x_{ik}X_{ik}$，其中 X_{ik} 是 x_{ik} 的代数余子式，$\dfrac{\partial}{\partial x_{ij}}(\det X)=X_{ij}$，从而

$$\frac{\partial\det\left(X^{-1}\right)}{\partial x_{ij}}=\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\left(\frac{1}{\det X}\right)=-\frac{1}{(\det X)^2}\cdot\frac{\partial}{\partial x_{ij}}(\det X)=-\frac{X_{ij}}{(\det X)^2},$$

$$\frac{d}{dX^T}\det\left(X^{-1}\right)=\left(\frac{\partial\det\left(X^{-1}\right)}{\partial x_{ij}}\right)^T=\left(-\frac{X_{ij}}{(\det X)^2}\right)^T=-\frac{1}{(\det X)^2}X^*=-\frac{1}{\det X}X^{-1}.$$

2． $$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}A^{2k}t^{2k-1}}{(2k-1)!}=A\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}A^{2k-1}t^{2k-1}}{(2k-1)!}=A\sin At.$$

$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0\\-1&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2$． 设 $\sin\lambda t=q(\lambda,t)(\lambda-1)^2+b_1(t)\lambda+b_0(t)$． 在该式及对其两边关于 λ 求导后的式子中，将 $\lambda=1$ 代入得

$$\begin{cases}\sin t=b_1(t)+b_0(t),\\ t\cos t=b_1(t),\end{cases}$$

解得

$$b_0(t)=\sin t-t\cos t,\quad b_1(t)=t\cos t.$$

从而

$$\sin At=b_1(t)A+b_0(t)I=t\cos t\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}+(\sin t-t\cos t)\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sin t&0\\t\cos t&\sin t\end{pmatrix}.$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}A^{2k}t^{2k-1}}{(2k-1)!}=A\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}A^{2k-1}t^{2k-1}}{(2k-1)!}=A\sin At=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sin t&0\\t\cos t&\sin t\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\sin t&0\\\sin t+t\cos t&\sin t\end{pmatrix}.$$

四、(14 分) 设 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & -1 & 0\\ 2 & 3 & 2\end{pmatrix}$.

1. (8 分) 求矩阵 A 的 Crout 分解;

2. (6 分) 利用 Crout 分解求方程 $Ax=b$ 的解,其中 $b=(1,\ 1,\ -1)^T$.

解. 1. 设 $A=\begin{pmatrix}l_{11} & 0 & 0\\ l_{21} & l_{22} & 0\\ l_{31} & l_{32} & l_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & r_{12} & r_{13}\\ 0 & 1 & r_{23}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. 由 Crout 分解的紧凑计算格式得

$$l_{11}=a_{11}=1,\ l_{21}=a_{21}=0,\ l_{31}=a_{31}=2,\ r_{12}=\frac{a_{12}}{l_{11}}=1,\ r_{13}=\frac{a_{13}}{l_{11}}=2,$$

$$l_{22}=a_{22}-l_{21}r_{12}=-1,\ l_{32}=a_{32}-l_{31}r_{12}=1,\ r_{23}=\frac{1}{l_{22}}\left(a_{23}-l_{21}r_{13}\right)=0,$$

$$l_{33}=a_{33}-l_{31}r_{13}-l_{32}r_{23}=-2,$$

故 A 的 Crout 分解为

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 2 & 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

2. 由 $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 2 & 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$ 解得 $\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$,

再由 $\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$ 解得 $\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$,

即方程 $Ax=b$ 的解的解为 $x=\begin{pmatrix}0\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$.

五、(14 分) 利用 Gerschgorin 定理及特征值的隔离方法判断矩阵

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ 1 & 6 & 2\\ 1 & 1 & 11\end{pmatrix}$$

是否有小于零的特征值,并估计 A 的每个特征值的分布范围.

证明．1． A 有小于零的特征值.

A 的三个行盖尔圆为

$$G_1=\{z\in\mathbf{C}^n \mid |z+1|\le 3\},\ G_2=\{z\in\mathbf{C}^n \mid |z-6|\le 3\},\ G_3=\{z\in\mathbf{C}^n \mid |z-11|\le 2\},$$

三个列盖尔圆为

$$\widetilde{G}_1=\{z\in\mathbf{C}^n \mid |z+1|\le 2\},\ \widetilde{G}_2=\{z\in\mathbf{C}^n \mid |z-6|\le 3\},\ \widetilde{G}_3=\{z\in\mathbf{C}^n \mid |z-11|\le 3\}.$$

G_1 与 $\widetilde{G}_1$ 均为孤立的盖尔圆，且 $\widetilde{G}_1\subset G_1$，而 G_2 与 G_3 相交，$\widetilde{G}_2$ 与 $\widetilde{G}_3$ 也相交．由盖尔圆定理知 $\widetilde{G}_1$ 中有 A 的一个特征值，$(G_2\cup G_3)\cap(\widetilde{G}_2\cup\widetilde{G}_3)$ 中有 A 的两个特征值.

令

$$D_1=\begin{pmatrix}\frac{5}{2} & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix},\ B_1=D_1AD_1^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 5 & \frac{5}{2}\\ \frac{2}{5} & 6 & 2\\ \frac{2}{5} & 1 & 11\end{pmatrix},$$

则 B_1 与 A 相似，从而与 A 有相同的特征值． B_1 的三个列盖尔圆为

$$\widetilde{G}_1^{B_1}=\left\{z\in\mathbf{C}^n \,\middle|\, |z+1|\le\frac{4}{5}\right\},\ \widetilde{G}_2^{B_1}=\{z\in\mathbf{C}^n \mid |z-6|\le 6\},$$

$$\widetilde{G}_3^{B_1}=\left\{z\in\mathbf{C}^n \,\middle|\, |z-11|\le\frac{9}{2}\right\}.$$

$\widetilde{G}_1^{B_1}$ 仍为孤立的盖尔圆．由盖尔圆定理知 $\widetilde{G}_1^{B_1}$ 中仍有且仅有 B_1 的一个特征值.

由于 B_1 为实矩阵，其特征多项式为实系数多项式，从而其特征值如为复数，则必共轭成对出现．注意到 $\widetilde{G}_1^{B_1}$ 的圆心为 $(-1,\ 0)$，在实轴上，$\widetilde{G}_1^{B_1}$ 关于实轴对称，如果含有复特征值，则其共轭的特征值也在 $\widetilde{G}_1^{B_1}$ 中，与每个孤立盖尔圆中只有一个特征值矛盾．因此，含于 $\widetilde{G}_1^{B_1}$ 中的该特征值必为实数，即位于实轴上．再注意到 $\widetilde{G}_1^{B_1}$ 的半径为 $\frac{4}{5}$ 知，该特征值位于闭区间 $\left[-\frac{9}{5},\ -\frac{1}{5}\right]$ 中，故 B_1，从而 A，有一个小于零的特征值.

2. 令

$$D_2=\begin{pmatrix}\frac{3}{5} & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix},\quad B_2=D_2AD_2^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & \frac{8}{3} & \frac{4}{3}\\ \frac{3}{4} & 6 & 2\\ \frac{3}{4} & 1 & 11\end{pmatrix},$$

则 B_2 与 A 相似，从而与 A 有相同的特征值． B_2 的三个行盖尔圆为

$$G_1=\{z\in\mathbf{C}^n \mid |z+1|\le 4\},\quad G_2=\left\{z\in\mathbf{C}^n \;\middle|\; |z-6|\le\frac{11}{4}\right\},\quad G_3=\left\{z\in\mathbf{C}^n \;\middle|\; |z-11|\le\frac{7}{4}\right\},$$

它们是3个孤立的盖尔圆，从而每个盖尔圆中各有 B_2，即 A 的一个特征值．由与上面相同的推理知，每个特征值均为实数，都位于实轴上，故 A 的特征值分别位于 $[-5,\ 3]$，$\left[\frac{13}{4},\ \frac{35}{4}\right]$ 和 $\left[\frac{37}{4},\ \frac{51}{4}\right]$ 中.

综合 1.的结果知，A 的3个特征值分别位于 $\left[-\frac{9}{5},\ -\frac{1}{5}\right]$，$\left[\frac{13}{4},\ \frac{35}{4}\right]$ 和 $\left[\frac{37}{4},\ \frac{51}{4}\right]$ 中.

六、（22 分）设 $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$，$D=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$.

1. （8 分）求 A 的全部 $\{1\}$ 逆；

2. （8 分）求 A 的加号逆 A^+；

3. （6 分）判断矩阵方程 $AX=D$ 是否有解.

解. 1. $\begin{pmatrix}A & I_3\\ I_2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\triangleq\begin{pmatrix}I_2 & S\\ 0 & \\ T & 0\end{pmatrix}$,

$$T\begin{pmatrix}1 & 0 & a\\ 0 & 1 & b\end{pmatrix}S=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & a\\ 0 & 1 & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-2a & a & a\\ -2b & -1+b & b\end{pmatrix},$$

故 A 的全部 $\{1\}$ 逆为

$$A\{1\}=\left\{\begin{pmatrix}1-2a & a & a\\ -2b & -1+b & b\end{pmatrix}\ \middle|\ a,\ b\text{任意}\right\}.$$

2． A 为列满秩矩阵，故 A 的加号逆为

$$A^{+}=\left[\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}\right]^{-1}\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}2 & -2\\ -2 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}2 & 2 & 2\\ -2 & -5 & 1\end{pmatrix}.$$

3. 在 A 的 $\{1\}$ 逆的集合 $A\{1\}$ 中取 A 的一个 $\{1\}$ 逆 $A^{(1)}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$．由教材定理 6.5 知

$AX=D$ 有解的充要条件是 $AA^{(1)}D=D$．计算得

$$AA^{(1)}D=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}\neq D,$$

故矩阵方程 $AX=D$ 无解.

南京航空航天大学 2012 级硕士研究生

2012～2013 学年第 1 学期 《**矩阵论**》 课程考试 A 卷

考试日期：2013 年 1 月 15 日 课程编号：A080001 命题教师： 阅卷教师：

学院 专业 学号 姓名 成绩

一、(20 分) 设 $V=\left\{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\in R^{2\times 2} \mid a_{11}=a_{22}\right\}$ 是 $R^{2\times 2}$ 的一个线性子空间，对任意 $X\in V$，定义：$T(X)=PX+XP$，其中 $P=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(1) 求 V 的一组基和维数；

(2) 对任意 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\in V$，定义：

$$(A,B)=a_{11}b_{11}+2a_{12}b_{12}+a_{21}b_{21},$$

证明 (A,B) 是 V 的一个内积；

(3) 求 V 在题（2）所定义的内积下的一组标准正交基；

(4) 证明 T 是 V 的线性变换，并求 T 在题（1）所取基下的矩阵.

解答：(1) V 的一组基为 $E_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, E_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, 维数为 3.

……………………………………(5 分)

(2) 直接验证内积定义的四个条件成立. ……………………………… (4 分)

(3) 标准正交基 $E_1'=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, E_2'=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3'=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. …………(5 分)

(4) 由于 $T(X)\in V$, 所以 T 是 V 的一个变换. 又直接验证, 知

$$T(X+Y)=T(X)+T(Y), T(kX)=kT(X),$$

因此 T 是 V 的一个线性变换. ……………………………………(3 分)

线性变换 T 在基 $E_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, E_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 下的矩阵为

$$T=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$ ……………………………………………………(3 分)

二、(20 分)设三阶矩阵 $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ -4 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}3 & a & 0\\ 0 & 3 & a\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$.

(1) 求 A 的行列式因子、不变因子、初等因子及 Jordan 标准形;

(2) 利用 λ 矩阵的知识，判断矩阵 B 和 C 是否相似，并说明理由.

解答:(1) A 的行列式因子为 $D_1(\lambda)=D_2(\lambda)=1,\ D_1(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-1)^2$;⋯(3 分)

不变因子为 $d_1(\lambda)=d_2(\lambda)=1,\ d_1(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-1)^2$; ⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯(3 分)

初等因子为 $\lambda-2,\ (\lambda-1)^2$;⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯(2 分)

Jordan 标准形为 $J=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. ⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯(2 分)

(2) $a=0$, 不相似, 理由是 2 阶行列式因子不同; ⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯(5 分)

$a\neq 0$, 相似, 理由是各阶行列式因子相同. ⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯(5 分)

三、(20 分)已知线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 \qquad\qquad + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 1, \\ \qquad\qquad x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$ 不相容.

(1) 求系数矩阵 A 的满秩分解;

(2) 求广义逆矩阵 A^+;

(3) 求该线性方程组的极小最小二乘解.

解答:(1) 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, A 的满秩分解为

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$ ……………………(5 分)

(2) $A^+ = \dfrac{1}{15} \begin{pmatrix} 5 & 1 & -4 \\ 5 & 1 & -4 \\ -5 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$ ……………………(10 分)

(3) 方程组的极小最小二乘解为 $x = \dfrac{1}{15} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$ …………(5 分)

四、(20 分) 已知幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{3^k}x^k$ 的收敛半径为 3, 矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 0\end{pmatrix}$.

（1） 求 $\|A\|_1,\|A\|_\infty,\|A\|_2,\|A\|_F$；

（2） 证明矩阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{3^k}A^k$ 收敛；

（3） 求矩阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{3^k}A^k$ 的和.

解答：(1) $\|A\|_1=4,\|A\|_\infty=3,\|A\|_2=\sqrt{6},\|A\|_F=3$. ·········(10 分)

(2) 因为 $\|A\|_2$ 是相容范数，且 $\|A\|_2=\sqrt{6}<3$，则 $\rho(A)<3$ 在收敛半径内，因此级数收敛. ···············(5 分)

(3) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{3^k}A^k=\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{A}{3})^k=3(3I-A)^{-1}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}$. ···············(5 分)

五、(20 分)设 A, B 是两个 n 阶矩阵, 其中 $A=(a_{ij})$，证明:

(1) 若对任意 $i=1,2,\cdots,n$，有 $\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|<1$, 则 $I-A$ 可逆;

(2) 若 A, B 都是 Hermite 正定矩阵，则 AB 的特征值均为正数;

(3) 若 A, B 都是 Hermite 半正定矩阵，则 $tr(AB)\geq 0$, 并且当等号成立时, 必有 $AB=0$.

解答:

(1) 由 $\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|<1$ 可得，$\|A\|_{\infty}<1$，由于 $\|A\|_{\infty}$ 是相容范数，则 $\rho(A)<1$，$I-A$ 的特征值都不为零，因此 $I-A$ 可逆. ………………………… (6 分)

(2) $A>0\Rightarrow A=S^2=SS^H$, 这里 S 是可逆的 Hermite 矩阵, 从而 $AB=SS^HB$. 由于 SS^HB 与 S^HBS 有相同的特征值，且 $S^HBS>0$，所以 AB 的特征值均为正数. ……………… (8 分)

(3) $A\geq 0\Rightarrow A=S^2=S^HS, AB=S^HSB$，这里 S 是 Hermite 矩阵. 由于 S^HSB 与 SBS^H 有相同的特征值，且 $SBS^H\geq 0$, 所以 AB 的特征值均为非负数, 从而 $tr(AB)=tr(SBS^H)\geq 0$. ………………… (4 分)

当 $tr(AB)=0$ 时, 有 $tr(SBS^H)=0$, 从而 $SBS^H=0$. 设 $B=Q^2=QQ^H$, 这里 Q 也是 Hermite 矩阵, 则

$$SBS^H=SQQ^HS^H=(SQ)(SQ)^H.$$

于是 $SQ=0$, 由此得到 $AB=0$. ………… (2 分)

.

南京航空航天大学 2013 级硕士研究生

2013 ~ 2014 学年第 1 学期　《**矩阵论**》　课程考试 A 卷

考试日期：2014 年 1 月 14 日　课程编号：A080001　命题教师：　　阅卷教师：

学院	专业	学号	姓名	成绩

一、(20 分) 设三阶矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 4 & -1\\ -1 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

1. 求 A 的特征多项式和初等因子;
2. 求 A 的 Jordan 标准形;
3. 问: A 与矩阵 $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$ 是否相似?并说明理由.

答案及评分标准：1.特征多项式为 $f_A(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda+1)^2$；(4 分)
初等因子为 $\lambda-1,(\lambda+1)^2$.（6 分）

2. A 的 Jordan 标准形为 $J=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ 或 $J=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$.（5 分）

3. 设 $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$, 则 B 的初等因子为 $\lambda-1,\lambda+1,\lambda+1$, 与 A 的初等因子不同, 所以 A 与 B 不相似.（5 分）

二、(20 分) 设 R^3 的线性变换 σ 将基 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ 变为向量

$\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \beta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

1. 求 σ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的矩阵 A；

2. 求向量 $\xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ 及 $\sigma(\xi)$ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的坐标；

3. 求线性变换 σ 的值域和核.

答案及评分标准： 1. σ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.（6 分）

2. 向量 ξ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的坐标为 $x = (10, 6, -9)^T$;向量 $\sigma(\xi)$ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的坐标为 $y = Ax = (4, 0, -3)^T$.（6 分）

3. 线性变换 σ 的值域为 $R(\sigma) = span\{\beta_1, \beta_2\}$,核为 $\ker(\sigma) = span\{-\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3\}$ 或 $\ker(\sigma) = span\{(0, 1, 0)^T\}$ 或 $\ker(\sigma) = \{k(0, 1, 0)^T \mid k \in R\}$.（8 分）

三、(15 分)设 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}-3\\ 3\\ 1\end{pmatrix}$.

1．计算 A^{+}；

2．判断方程组 $Ax=b$ 是否相容？如果相容，求方程组的通解；如果不相容，求方程组的极小最小二乘解.

答案及评分标准: 1. A 的一种满秩分解为 $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}\overset{\Delta}{=}BC$；(5 分，注意：满秩分解不唯一，需要检验)

又因为 $B^{+}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & -2 & -1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$,　$C^{+}=\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix}5 & 2\\ 2 & 2\\ -1 & 2\end{pmatrix}$, 于是

$A^{+}=C^{+}B^{+}=\dfrac{1}{18}\begin{pmatrix}7 & -8 & -1\\ 4 & -2 & 2\\ 1 & 4 & 5\end{pmatrix}$.（5 分，公式写对，计算结果错误可酌情扣分）

2. 不相容. 方程组 $Ax=b$ 的极小最小二乘解为 $x=A^{+}b=\dfrac{1}{9}\begin{pmatrix}-23\\ -16\\ 7\end{pmatrix}$.（5 分）

四、(15 分) 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&0&-1\\1&1&0\end{pmatrix}$, 且幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}x^k$ 的收敛半径为 2.

1. 求 $\|A\|_1, \|A\|_\infty, \|A\|_2, \|A\|_F$；

2. 证明矩阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}A^k$ 收敛, 并求其和.

答案及评分标准： 1. $\|A\|_1=3, \|A\|_\infty=3, \|A\|_F=\sqrt{7}$. (6 分)

由于 $A^TA=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&-1\\0&-1&2\end{pmatrix}$, 所以 A^TA 的特征值是 $1,3,3$, 从而 $\|A\|_2=\sqrt{3}$. (4 分)

2. 已知幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}x^k$ 的收敛半径为 2, 且 $\rho(A)\le\|A\|_2<2$, 则矩阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}A^k$ 收敛. 由公式 $\sum_{k=0}^{\infty}B^k=(I-B)^{-1}$, 得到

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}A^k=(I-\frac{1}{2}A)^{-1}=2\begin{pmatrix}\frac{5}{3}&-\frac{1}{3}&1\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&0\\1&0&1\end{pmatrix}.\ (5\text{ 分})$$

五、(20 分)设 A 是 n 阶 Hermite 正定矩阵, B 是 n 阶 Hermite 矩阵, 证明:

1. 存在可逆矩阵 P，使得 $P^H AP = I,\ P^H BP = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$，并且 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 均为实数;

2. 存在正数 t_0，当 $t > t_0$ 时，$tA + B$ 也是 Hermite 正定矩阵;

3. 若 $A > B \geq 0$，则有 $|A - B| \leq |A|$.

证明及评分标准: 1. $A > 0 \Rightarrow$ 存在可逆矩阵 P_1，使得 $P_1{}^H AP_1 = I$. 由于 $P_1{}^H BP_1$ 也是 Hermite 矩阵，所以存在酉矩阵 P_2，使得

$$P_2{}^H (P_1{}^H BP_1)P_2 = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n),$$

且 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 均为实数. 取 $P = P_1 P_2$，即为要证的. （8 分）

2. 显然, 对任意实数 t, $tA + B$ 也是 Hermite 矩阵. 对题 1 中的实对角矩阵, 取正数 t_0, 使得

$$t_0 + \lambda_1 \geq 0, t_0 + \lambda_2 \geq 0, \cdots, t_0 + \lambda_n \geq 0,$$

则当 $t > t_0$ 时, 有 $diag(t + \lambda_1, t + \lambda_2, \cdots, t + \lambda_n) > 0$, 即

$$P^H (tA + B)P = diag(t + \lambda_1, t + \lambda_2, \cdots, t + \lambda_n) > 0,$$

于是 $tA + B$ 也是 Hermite 正定矩阵. (6 分)

3. 根据题 1 的结论, 当 $A > B \geq 0$ 时, 有 $0 \leq \lambda_i < 1,\ i = 1, 2, \cdots, n$, 于是

$$|A - B| = \frac{1}{|\det P|^2} \left| P^H (A - B)P \right| = |A|(1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2)\cdots(1 - \lambda_n) \leq |A|. \text{(6 分)}$$

六、(10 分) 设 A 是 $m \times n$ 实矩阵, 且 $A \neq 0$.

1. 利用广义逆矩阵证明: 对任意 $b \in R^m$, 方程组 $A^T Ax = A^T b$ 相容;
2. 证明: $\|AA^+\|_2 = 1$.

证明及评分标准: 1. 由于 $(A^T A)^+ = A^+(A^+)^T$, $AA^+ = (AA^+)^T$, 所以

$$(A^T A)(A^T A)^+(A^T b) = A^T AA^+(A^+)^T A^T b = A^T (AA^+)^T (AA^+)^T b = A^T b,$$

因此方程组 $A^T Ax = A^T b$ 相容. (5 分)

2. 由于 $(AA^+)^T (AA^+) = (AA^+)^2 = AA^+$, 且 $AA^+ \neq 0$, 所以 $\lambda_{\max}[(AA^+)^T (AA^+)] = 1$,

从而 $\|AA^+\|_2 = 1$. (5 分)

矩阵论班号：			学号			姓名			
题号	1	2	3	4	5	6	7	8	总分
得分									

Part I (70 分，必做题)

第 1 题	10 分
得分	

Let $\mathbf{P}_4$ be the vector space consisting of all real polynomials of degree less than 4 with usual addition and scalar multiplication.

(1) Let $\mathbf{S}=\{f\in\mathbf{P}_4 \mid f \text{ has at least one real root}\}$. Determine if S is a subspace of $\mathbf{P}_4$. Explain.

(2) Let x_1,x_2,x_3 be three distinct real numbers. For each pair of polynomials f and g in $\mathbf{P}_4$, define $<f,g>=\sum_{i=1}^{3} f(x_i)g(x_i)$. Determine if $<f,g>$ defines an inner product on $\mathbf{P}_4$. Explain.

Solution

(1) S is not a subspace of $\mathbf{P}_4$. Let $f(x)=x+1$, $g(x)=-x+1$. Then $f(x)+g(x)=2$, which does not have real roots. Thus, S is not closed under addition. Hence, S is not a subspace of $\mathbf{P}_4$.

(2) It does not define an inner product on $\mathbf{P}_4$. Let $f(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\in\mathbf{P}_4$. Then $<f,f>=0$. It is obvious that $f\neq 0$. The axiom 1 in the definition of inner product is violated.

第 2 题	15 分
得分	

Consider the inner product space $C[-1,1]$ with inner product defined by

$$<f,g>=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx.$$

Let **S** be the subspace spanned by the set of vectors $\{1,x,x^2\}$.

(1) Find an orthonormal basis for **S.**

(2) Let $f(x)=e^x$. Find a linear function(线性函数) $g(x)\in\mathbf{S}$ such that $\|f(x)-g(x)\|$ is minimal.

Solution

(1) $<1,1>=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}1dx=1$, the first vector is 1.

$<x,1>=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}xdx=0$, the second vector is $\frac{x-0}{\|x-0\|}=\sqrt{3}x$

$$<x^2,1>1+<x^2,\sqrt{3}x>\sqrt{3}x=(\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}x^2dx)1+(\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\sqrt{3}x^3dx)\sqrt{3}x=\frac{1}{3}$$

The third vector is $\frac{x^2-\frac{1}{3}}{\left\|x^2-\frac{1}{3}\right\|}=\frac{\sqrt{45}}{2}(x^2-\frac{1}{3})$.

(2) $\{1,\sqrt{3}x\}$ is an orthonormal basis for $Span\{1,x\}$. $g(x)$ must be the orthogonal projection of $f(x)$ onto $Span\{1,x\}$. Suppose that $g(x)=a\sqrt{3}x+b$. Hence,

$$a=<f,1>=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}e^x dx=\frac{1}{2}(e-e^{-1}),$$

$$b=<f,\sqrt{3}x>=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}e^x\sqrt{3}xdx=\frac{\sqrt{3}}{2}\int_{-1}^{1}e^x xdx=\frac{\sqrt{3}}{2}[e^x x-e^x]_{-1}^{1}=\sqrt{3}e^{-1}$$

$$g(x)=\frac{1}{2}(e-e^{-1})+3e^{-1}x$$

第 3 题	10 分
得分	

Given four points（−1, 0）,（0, 1）,（1, 3）and（2,9）on the plane, find a linear function (线性函数) $y = ax + b$ that best fits（拟合）the given data in the "least squares" sense（在最小二乘意义下）.

Solution

The question can be formulated as finding the least squares solution to the following system.

$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$. The least squares solutions are the solution to the following system

$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$. This system is simplified to $\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 13 \end{pmatrix}$.

This system has a unique solution $a = \frac{29}{10}, b = \frac{9}{5}$. The linear function is $y = \frac{29}{10}x + \frac{9}{5}$.

第 4 题	15 分
得分	

For the given matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 6 & 2 \\ 3 & 4 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{3\times 4}$$

(1) Find an orthonormal basis for $N(A)$, the nullspace of A.

(2) Find the orthogonal projection matrix P from $\mathbf{R}^4$ to $N(A)$.

(3) What is the orthogonal projection matrix from $\mathbf{R}^4$ to $R(A^T)$? Explain.

Solution

(1) Reduce matrix A to its reduced row echelon form by performing elementary row operations.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 6 & 2 \\ 3 & 4 & 4 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & 10 & 0 \\ 0 & -5 & 10 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A basis for $N(A)$ is $\{ (1,0,0,-1)^T, (-4,2,1,0)^T \}$

Applying the Gram-Schmidt orthogonalization process, we obtain an orthonormal basis

$$(\frac{1}{\sqrt{2}},0,0,-\frac{1}{\sqrt{2}})^T, \frac{1}{\sqrt{13}}(-2,2,1,-2)^T.$$

Find the vector projection of $(-4,2,1,0)^T$ onto $(\frac{1}{\sqrt{2}},0,0,-\frac{1}{\sqrt{2}})^T$, which is

$$(-4,2,1,0)^T\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}(\frac{1}{\sqrt{2}},0,0,-\frac{1}{\sqrt{2}})^T = (-2,0,0,2)^T$$

$$(-4,2,1,0)^T - (-2,0,0,2)^T = (-2,2,1,-2)^T = (-2,2,1,-2)^T$$

Normalize this vector, we obtain $\frac{1}{\sqrt{13}}(-2,2,1,-2)^T$.

(2)

$$P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{2}{\sqrt{13}}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{13}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{13}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{2}{\sqrt{13}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{1}{\sqrt{13}} & -\frac{2}{\sqrt{13}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{21}{26} & -\frac{4}{13} & -\frac{2}{13} & -\frac{5}{26}\\ -\frac{4}{13} & \frac{4}{13} & \frac{2}{13} & -\frac{4}{13}\\ -\frac{2}{13} & \frac{2}{13} & \frac{1}{13} & -\frac{2}{13}\\ -\frac{5}{26} & -\frac{4}{13} & -\frac{2}{13} & \frac{21}{26}\end{pmatrix}$$

(3) The projection from $\mathbf{R}^4$ to $R(A^T)$ is $I-P$.

第 5 题	20 分
得分	

Let $\mathbf{V}$ be the vector space spanned by the set of functions $\{1, \sin x, \cos x\}$ over the real number field with usual addition and scalar multiplication. Let σ be a linear transformation on $\mathbf{V}$ defined by

$$\sigma(p(x)) = 2p(x) + p'(x).\quad (注：p'(x) 为 p(x) 的一阶导数)$$

(1) Find the kernel and image of σ.
(2) Find the matrix A representing σ with respect to the ordered basis $[1, \sin x, \cos x]$.
(3) Is matrix A diagonalizable over the real number field? Why?
(4) Find all one-dimensional σ-invariant subspaces of $\mathbf{S}$.

Solution

(1) Let $p(x) = a + b\sin x + c\cos x$. $\sigma(p(x)) = 0$ if and only if $2a + 2b\sin x + 2c\cos x + b\cos x - c\sin x = 0$, if and only if $a = 0, 2b - c = 0, 2c + b = 0$ if and only if $a = b = c = 0$

Hence, the kernel of σ is {0},

The image of σ is spanned by $\sigma(1) = 2, \sigma(\sin x) = 2\sin x + \cos x, \sigma(\cos x) = 2\cos x - \sin x$. Hence, the image of σ is the subspace spanned by $\{1, \sin x, \cos x\}$.

(2)

$$\sigma(1) = 2\cdot 1 + 0\cdot \sin x + 0\cdot \cos x$$
$$\sigma(\sin x) = 0\cdot 1 + 2\cdot \sin x + 1\cdot \cos x$$
$$\sigma(\cos x) = 0\cdot 1 + (-1)\cdot \sin x + 2\cdot \cos x$$

The representing matrix is $\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$. It is not diagonalizable over the real number field since this matrix has complex eigenvalues.

(3) A one-dimensional σ-invariant subspace is a subspace spanned by an eigenvector of σ. Because σ has only one real eigenvalue, there is a unique one-dimensional σ-invariant subspace which is spanned by {1}.

Part II (选做题, 30 分)

请在第 6、第 7、第 8 题中选择两题解答. 如果你做了三题，请在题号上画圈标明需要批改的两题. 否则，阅卷者会随意挑选两题批改，这可能影响你的成绩.

第 6 题	15 分
得分	

Let **S**, **T**, and **U** be subspaces of a vector space **V**.
Determine if $\mathbf{S}\cap(\mathbf{T}+\mathbf{U})=(\mathbf{S}\cap\mathbf{T})+(\mathbf{S}\cap\mathbf{U})$ always true. (注： + 表示子空间的和) If $\mathbf{S}\cap(\mathbf{T}+\mathbf{U})=(\mathbf{S}\cap\mathbf{T})+(\mathbf{S}\cap\mathbf{U})$ is always true, prove it. Otherwise, give a counter example(反例).

第 7 题	15 分
得分	

A matrix $A\in\mathbf{R}^{m\times n}$ is said to have a right inverse (右逆) if there exists a matrix $P\in\mathbf{R}^{n\times m}$ such that $AP=I_m$.

(a) If A has a right inverse, show that the column vectors of A span $\mathbf{R}^m$

(b) Is it possible for an $m\times n$ matrix to have a right inverse if $n<m$? $n\ge m$? Explain.

第 8 题	15 分
得分	

A matrix $A\in\mathbf{C}^{n\times n}$ is said to be skew-hermitian if $A^H=-A$. Show that an eigenvalue of a skew-hermitian matrix is either 0 or purely imaginary(纯虚数).

选做题参考解答：

第 6 题

Solution: The statement is not always true. For example, let $\mathbf{V}=\mathbf{R}^2$, $\mathbf{S}=Span\{(1,1)^T\}$, $\mathbf{T}=Span\{(1,0)^T\}$, $\mathbf{U}=Span\{(0,1)^T\}$. Then

$$\mathbf{S}\cap\mathbf{T}=\{\mathbf{0}\},\ \mathbf{S}\cap\mathbf{U}=\{\mathbf{0}\},\ \mathbf{T}+\mathbf{U}=\mathbf{R}^2,$$
$$\mathbf{S}\cap(\mathbf{T}+\mathbf{U})=\mathbf{S}\cap\mathbf{R}^2=\mathbf{S},$$
$$(\mathbf{S}\cap\mathbf{T})+(\mathbf{S}\cap\mathbf{U})=\{\mathbf{0}\}+\{\mathbf{0}\}=\{\mathbf{0}\}$$

Two sides are not the same since $\mathbf{S}\neq\{\mathbf{0}\}$.

第 7 题

Proof

(a) If A has a right inverse, then for any vector $\mathbf{x}\in\mathbf{R}^m$, we have $AP\mathbf{x}=I_m\mathbf{x}=\mathbf{x}$. $A(P\mathbf{x})=\mathbf{x}$. Since $P\mathbf{x}$ is a vector in $\mathbf{R}^n$, $A(P\mathbf{x})$ is a linear combination of the column vectors of A. Thus, the column vectors of A span $\mathbf{R}^m$.

(b) If $n<m$, then $r(A)<m$. It is impossible for the column vectors of A to span $\mathbf{R}^m$ since the dimension of t $R(A)$ is less than m. Hence, matrix A cannot have a right inverse.

If $n\ge m$, matrix A may or may not have a right inverse. In the case of $r(A)<m$, matrix A cannot have a right inverse. In the case of $r(A)=m$, $R(A)=\mathbf{R}^m$ since $R(A)$ is a subspace of $\mathbf{R}^m$ and the dimension of $R(A)$ is equal to the dimension of $\mathbf{R}^m$. There exists $\mathbf{p}_i\in\mathbf{R}^n$ such that $\mathbf{e}_i=A\mathbf{p}_i$ for $i=1,2,\cdots,m$. Let $P=(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\cdots,\mathbf{p}_m)$, we obtain that $AP=I_m$.

第 8 题

Proof Let λ be an eigenvalue of A, $\mathbf{x}$ be an eigenvector of A belonging to λ.

Then

$$A\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}.$$
$$\mathbf{x}^HA\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}^H\mathbf{x},$$

Take the conjugate transpose of the equality above, we obtain that

$$-\mathbf{x}^HA\mathbf{x}=\bar{\lambda}\mathbf{x}^H\mathbf{x}.$$

Hence, $\bar{\lambda}\mathbf{x}^H\mathbf{x}+\lambda\mathbf{x}^H\mathbf{x}=\mathbf{0}$.

Since $\mathbf{x}^H\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$, we obtain that $\bar{\lambda}+\lambda=0$. Thus, λ is either 0 or pure imaginary.

Method 2

Consider the matrix iA. $(iA)^H = -i(-A) = iA$. So iA is Hermitian.

We know that the eigenvalues of iA are all real numbers. There is a unitary matrix U such that $U^H(iA)U = D$, where D is a diagonal matrix whose diagonal elements are real numbers.

Then $U^H AU = -iD$. Matrix A is similar to matrix $-iD$. Thus, the eigenvalues of A are purely imaginary or zero.

Method 3

Consider the matrix iA. $(iA)^H = -i(-A) = iA$. So iA is Hermitian.

We know that the eigenvalues of iA are all real numbers.

Suppose that $\det(\lambda I - iA) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n)$, where $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ are real numbers.

Then $\det(\lambda I - A) = i^{-n}\det(i\lambda I - iA) = i^{-n}(i\lambda - \lambda_1)(i\lambda - \lambda_2)\cdots(i\lambda - \lambda_n)$

$$= (\lambda + i\lambda_1)(\lambda + i\lambda_2)\cdots(\lambda + i\lambda_n)$$

Hence, the eigenvalues of A are $-i\lambda_1, -i\lambda_2, \cdots, -i\lambda_n$. Each of the eigenvalues is either purely imaginary or zero.

《矩阵论》复习提纲与习题选讲

Chapter1　线性空间和内积空间

内容总结：

- 线性空间的定义、基和维数；
- 一个向量在一组基下的坐标；
- 线性子空间的定义与判断；
- 子空间的交
- 内积的定义；
- 内积空间的定义；
- 向量的长度、距离和正交的概念；
- Gram-Schmidt 标准正交化过程；
- 标准正交基。

习题选讲：

1、设 $\boldsymbol{R[x]_3}$ 表示实数域 $\boldsymbol{R}$ 上次数小于 3 的多项式再添上零多项式构成的线性空间（按通常多项式的加法和数与多项式的乘法）。

（1） 求 $\boldsymbol{R[x]_3}$ 的维数；并写出 $\boldsymbol{R[x]_3}$ 的一组基；求$1+x+2x^2$在所取基下的坐标；

（2） 在 $\boldsymbol{R[x]_3}$ 中定义

$$(f,g)=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)dx\,,\qquad f(x),g(x)\in R[x]_n$$

证明：上述代数运算是内积；求出 $\boldsymbol{R[x]_3}$ 的一组标准正交基；

（3）求$1+x+2x^2$与 $\boldsymbol{1-x+2x^2}$ 之间的距离；

（4）证明：$R[x]_2$ 是 $\boldsymbol{R[x]_3}$ 的子空间；

（5）写出 $\boldsymbol{R[x]_2\cap R[x]_3}$ 的维数和一组基；

二、 设 $\boldsymbol{R}^{2\times2}$ 是实数域 $\boldsymbol{R}$ 上全体 2×2 实矩阵构成的线性空间（按通常矩阵的加法和数与矩阵的乘法）。

（1） 求 $\boldsymbol{R}^{2\times2}$ 的维数，并写出其一组基；

（2） $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$在(1)所取基下的坐标；

（3） 设 $\boldsymbol{W}$ 是实数域 $\boldsymbol{R}$ 上全体 2×2 实对称矩阵构成的线性空间（按通常矩阵的加法和数与矩阵的乘法）。

证明：$\boldsymbol{W}$ 是 $\boldsymbol{R}^{2\times2}$ 的子空间；并写出 $\boldsymbol{W}$ 的维数和一组基；

（4） 在 $\boldsymbol{W}$ 中定义内积

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\boldsymbol{tr}(\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}),\qquad \boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\boldsymbol{W}$$

求出 $\boldsymbol{W}$ 的一组标准正交基；

（5）求$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$与$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$之间的距离；

（6）设 $\boldsymbol{V}$ 是实数域 $\boldsymbol{R}$ 上全体 2×2 实上三角矩阵构成的线性空间（按通常矩阵的加法和数与矩阵的乘法）。

证明：$\boldsymbol{V}$ 也是 $\boldsymbol{R}^{2\times2}$ 的子空间；并写出 $\boldsymbol{V}$ 的维数和一组基；

（7）写出子空间 $\boldsymbol{W}\cap\boldsymbol{V}$ 的一组基和维数。

Chapter2　线性映射与线性变换

内容总结：

- 线性映射在基对下的矩阵表示；
- 矩阵的典型关系：相抵（等价）、相似与相合；
- 线性变换在基下的矩阵表示；
- 线性变换在不同基下的矩阵之间的关系——相似；
- 矩阵的特征值和特征向量的定义与计算；
- 矩阵可对角化的条件。

习题选讲：

一、 设 $R[x]_3$ 表示实数域 R 上次数小于 3 的多项式再添上零多项式构成的线性空间（按通常多项式的加法和数与多项式的乘法）。

（1） 求 $R[x]_3$ 的维数，并写出 $R[x]_3$ 的一组基；

（2） $1+x\ \ +2x^2$ 在(1)所取基下的坐标；

（3）求 $1+x^3+2x^2$ 与 $1-x+2x^2$ 之间的距离；

（4） 在 $R[x]_3$ 中定义内积

$$(f,g)=\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx\text{，}\qquad f(x),g(x)\in R[x]_n$$

求出 $R[x]_3$ 的一组标准正交基;

(5) 在 $R[x]_3$ 中定义线性变换 D： $D(f(x))=f'(x)$， $\qquad f(x)\in R[x]_n$

求 D 在（1）中所取基下的矩阵表示.

二、设 $A=\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$，

（1） 求 A 的特征多项式和 A 的全部特征值；

（2）求 A 的全部特征向量；

（3）求每个特征值的代数重数和几何重数；

（4）判断 A 是否可对角化。

Chapter3　λ矩阵与矩阵的 Jordan 标准形

内容总结：

- λ矩阵的定义与运算；
- λ矩阵的 smith 标准形、不变因子、行列式因子和初等因子；
- 矩阵的相似的条件；
- 矩阵的 Jordan 标准形；
- 最小多项式理论

习题选讲：

一、设$A=\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$，

（1）　求 A 的特征多项式和 A 的全部特征值；
（2）　求 A 的行列式因子、不变因子、初等因子；
（3）　写出 A 的 Jordan 标准形；
（4）　写出 A 的最小多项式
（5）　求 A^4-A^2。

Chapter4　矩阵的因子分解

内容总结：

- 矩阵的满秩分解；
- 矩阵的三角分解；
- 了解矩阵的 QR 分解；
- 了解矩阵的 schur 定理和奇异值分解

习题选讲：

一、（1）已知 $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 9 \\ 1 & 2 & -6 \end{bmatrix}$，作出矩阵 A 的 LU 分解；

（2）已知 $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$，作出矩阵 A 的满秩分解；

Chapter5　Hermite 矩阵与正定矩阵

- Hermite 矩阵的定义和性质；
- 正定矩阵的定义、性质和判定定理；
- 矩阵不等式

习题选讲：

一、

（1）　设 $A=\begin{pmatrix} 2 & i & i \\ -i & 2 & i \\ -i & -i & 2 \end{pmatrix}$，其中 $i=\sqrt{-1}$，证明：$A>0$；

（2）　设 $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，问：$A>B$ 吗？ 说明理由；

（3）　设 A,B 均为 n 阶 Hermite 矩阵，且 $A>0$，$B\geq 0$，且 $AB=BA$，

证明：$AB\geq 0$；

（4）　设 A,B 均为 n 阶 Hermite 矩阵，且 $A>0$，即 A 正定，

证明：AB 相似于实对角矩阵；

（5）　设 A,B 均为 n 阶 Hermite 矩阵，$A>0$，且 $AB>0$；

证明：$B>0$；

(6) 证明：若 $A>0,$ 则 $A^{-1}>0,$；

Chapter6　范数与极限

- 向量范数
- 矩阵范数—1、2、∞、F 范数的定义与计算；
- 范数等价性—范数不等式

习题选讲：

（1）设 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$，求 $\|A\|_1,\|A\|_2,\|A\|_\infty,\|A\|_F$；

（2）　设 $A\in C^{n\times n}$ 是可逆矩阵，$\|*\|$ 是满足 $\|I\|=1$ 的相容矩阵范数，

证明：$\|A^{-1}\|\geq\|A\|^{-1}$　；

（3）　设 $A\in C^{m\times n}$，证明：　$\|A\|_2\leq\|A\|_F\leq\sqrt{rank(A)}\|A\|_2$；

Chapter8　广义逆矩阵

- 广义逆矩阵的定义
- 广义逆矩阵 A^+ 的定义、性质、计算
- 利用广义逆矩阵 A^+ 判断线性方程组的相容性，并表示通解形式

习题选讲：

（1）叙述广义逆矩阵 A^+ 的定义；

（2）设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$；　作出 A 的满秩分解，并计算 A^+；

（3）利用(2)中广义逆矩阵判断如下线性方程组

$$Ax=[6,3,3]^T$$

是否相容？若相容，求其通解；若不相容，求其极小最小二乘解。