2020.11.15 高等工程数学

一、 已知$A=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&2&1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$，求$\|A\|_1$，$\|A\|_2$，$\|A\|_\infty$，$\|A\|_F$；

解：$\|\boldsymbol{A}\|_1=\max\{3,3,4\}=4$，$\|\boldsymbol{A}\|_\infty=\max\{3,3,4\}=4$

因为$\boldsymbol{A^H}=\begin{pmatrix}2&0&-1\\0&2&-1\\1&1&2\end{pmatrix}$，$A^HA=\begin{pmatrix}5&1&0\\1&5&0\\0&0&6\end{pmatrix}$，特征值为$\lambda_1=\lambda_2=6,\lambda_3=4$

$\|\boldsymbol{A}\|_2=\left(\lambda_{\max}(\boldsymbol{A^H A})\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{6}$ ， $\|\boldsymbol{A}\|_{\boldsymbol{F}}=4$.

二、 已知矩阵$A=\begin{pmatrix}1&0&-2\\-10&3&-28\\0&0&1\end{pmatrix}$，

1． 求A的特征多项式和A的全部特征值；
2． 求A的不变因子、初等因子及最小多项式；
3． 求A的 Jordan 标准型J及变换矩阵P,使得$P^{-1}AP=J$；
4． 令$T>0$,确定幂级数$s(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\left(T^3+\frac{3}{k^2+3}\right)^{\frac{k}{3}}}z^k$ 的收敛半径。令$h(z)=s(2z-7)$，

对上述A讨论矩阵幂级数$h(A)$的绝对收敛性（收敛圆边界上的情形除外）。

解：1. $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&2\\10&\lambda-3&28\\0&0&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-3)(\lambda-1)^2$，$\lambda_1=3,\lambda_2=\lambda_3=1$

2.行列式因子$\boldsymbol{D}_3=(\lambda-3)(\lambda-1)^2,\boldsymbol{D}_2=1,\boldsymbol{D}_1=1$；

不变因子为$\boldsymbol{d}_1=\boldsymbol{d}_2=1,\ \ \boldsymbol{d}_3=(\lambda-3)(\lambda-1)^2$，初等因子为$(\lambda-3),(\lambda-1)^2$

$$\boldsymbol{A}\to\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&(\lambda-3)(\lambda-1)^2\end{pmatrix}$$ ，最小多项式为$(\lambda-3)(\lambda-1)^2$.

3. $\boldsymbol{A}$的 Jordan 标准形为$\begin{pmatrix}3&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，存在可逆矩阵$\boldsymbol{P}$，使得$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{J}$

$$\left(\boldsymbol{Ap}_1, \boldsymbol{Ap}_2, \boldsymbol{Ap}_3\right)=\left(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3\right)\begin{pmatrix}3&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}\boldsymbol{Ap}_1=3\boldsymbol{p}_1\\ \boldsymbol{Ap}_2=\boldsymbol{p}_2\\ \boldsymbol{Ap}_3=\boldsymbol{p}_2+\boldsymbol{p}_3\end{cases}$$

取 $\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{Ap}_2=\boldsymbol{p}_2\Rightarrow\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{k}\\5\boldsymbol{k}\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{Ap}_3=\boldsymbol{p}_2+\boldsymbol{p}_3\Rightarrow\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}\frac{1}{5}\boldsymbol{l}+\frac{9}{10}\boldsymbol{k}\\ \boldsymbol{l}\\ -\frac{1}{2}\boldsymbol{k}\end{pmatrix}$（$\boldsymbol{k},\boldsymbol{l}$ 任意）

取 $\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}2\\10\\0\end{pmatrix}$， $\boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ ，则 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&2&2\\1&10&1\\0&0&-1\end{pmatrix}$.（答案不唯一）

4. 令 $a_k=\dfrac{1}{\left(T^3+\dfrac{3}{k^2+3}\right)^{\frac{k}{3}}}$，则 $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{a_k}=\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{1}{\left(T^3+\dfrac{3}{k^2+3}\right)^{\frac{1}{3}}}=\dfrac{1}{T}$ ，则 $R=T$

因为 $h(z)=s(2z-7)$，代入可得 $\rho(2A-7I)=5$

所以当 $\rho=5<T$ 时，幂级数 $h(A)$ 绝对收敛.

三 1. 求矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&1\\2&1\\3&-1\end{bmatrix}$ 的奇异值分解.

2. 已知矩阵 B，存在可逆矩阵 $P=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$，使得 $P^{-1}BP=J=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}$，求

e^{2tB} ，这里 t 是实数.

解：1. $\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}14&0\\0&3\end{pmatrix}$，$\lambda_1=14,\lambda_2=3$，

$\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 14 和 3 的特征向量为 $\boldsymbol{u}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{u}_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{H}}$ 的非零特征值与 $\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{A}$ 的相同，此外还有一个特征值为 0

$\boldsymbol{AA^H}$ 对应于特征值 14 和 3 的特征向量为 $\boldsymbol{v}_1=\frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$

$\boldsymbol{AA^H}$ 对应于特征值 0 的特征向量为 $\boldsymbol{v}_3=\frac{1}{\sqrt{42}}\begin{pmatrix}5\\-4\\1\end{pmatrix}$

所以 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1\\2&1\\3&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{14}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{5}{\sqrt{42}}\\\frac{2}{\sqrt{14}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{-4}{\sqrt{42}}\\\frac{3}{\sqrt{14}}&\frac{-1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{42}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{14}&0\\0&\sqrt{3}\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}^{\boldsymbol{H}}$.

2. $\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\2&1&1\end{pmatrix}$. 当 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{e}^{2\boldsymbol{x}\boldsymbol{t}}$ 时， $\boldsymbol{f}(3)=\boldsymbol{e}^{6t}, \boldsymbol{f}(2)=\boldsymbol{e}^{4\boldsymbol{t}}, \boldsymbol{f}\,'(2)=2\boldsymbol{te}^{4\boldsymbol{t}}$，则

$$\boldsymbol{e}^{2\boldsymbol{Bt}}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}^{6\boldsymbol{t}}&0&0\\0&\boldsymbol{e}^{4t}&2\boldsymbol{te}^{4t}\\0&0&\boldsymbol{e}^{4t}\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}^{6t}&0&0\\-2\boldsymbol{e}^{6t}+(2+4\boldsymbol{t})\boldsymbol{e}^{4t}&(1+2\boldsymbol{t})\boldsymbol{e}^{4t}&2\boldsymbol{te}^{4t}\\-4\boldsymbol{te}^{4t}&-2\boldsymbol{te}^{4t}&(1-2\boldsymbol{t})\boldsymbol{e}^{4t}\end{pmatrix}.$$

四、 1．当实数 t 满足什么条件时，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2020&0&0\\0&-2\boldsymbol{t}&\boldsymbol{t}\\0&\boldsymbol{t}&-\boldsymbol{t}-4\end{pmatrix}$ 半正定?

解：由题意 $\boldsymbol{A}$ 的所有主子式均非负，则

$$-2\boldsymbol{t}\geq 0, -\boldsymbol{t}-4\geq 0, \begin{vmatrix}2020&0\\0&-2\boldsymbol{t}\end{vmatrix}\geq 0, \begin{vmatrix}2020&0\\0&-\boldsymbol{t}-4\end{vmatrix}\geq 0, \begin{vmatrix}-2\boldsymbol{t}&\boldsymbol{t}\\\boldsymbol{t}&-\boldsymbol{t}-4\end{vmatrix}\geq 0$$

所以 $\boldsymbol{t}\leq -8$.

2．令 $B\in C^{m\times n}$ 为复矩阵，证明： $B^HB\in C^{n\times n}$ 为Hermite半正定矩阵.

证明：因为 $\left(\boldsymbol{B^H B}\right)^{\boldsymbol{H}}=\boldsymbol{B^H B}$,所以 $\boldsymbol{B^H B}$ 为 Hermite 矩阵。

对于任意 $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{C}^{\boldsymbol{n}}$， $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{B^H B})\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{Bx})^{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{Bx})\geq 0$，则 $\boldsymbol{B^H B}$ 为半正定矩阵。

3．令 $B\in C^{m\times n}$ 为复矩阵，$A\in C^{n\times n}$ 为 Hermite 正定矩阵，利用 2 中结论证明：若 $tr(AB^HB)=0$，则 $B=0$.

证明：A 为正定矩阵，则存在可逆矩阵 P，使得 $A=P^HP$，

所以 $tr(AB^HB)=tr(P^HPB^HB)=tr(PB^HBP^H)$.

由 2 的结论，B^HB 为Hermite半正定矩阵，则 $tr(PB^HBP^H)\geq 0$.

若 $tr(PB^HBP^H)=tr(AB^HB)=0$ 当且仅当 $B^HB=0$.

设 $B=(b_{ij})$，则 $\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\left|b_{ij}\right|^2=0$ ，即 $b_{ij}=0$，$B=0$.

五 矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & -2 & 1\\ 1 & -1 & -1\end{bmatrix}$，向量 $b=\begin{pmatrix}6\\6\\0\end{pmatrix}$，

1．求矩阵 A 的满秩分解，并计算 A^+；

2．对于方程组 $Ax=b$，用广义逆判断方程组是否相容，若相容，求其通解及极小范数解，若不相容，求其通解及极小最小二乘解。

解：$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & -2 & 1\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & -3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，即 $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & -3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

所以 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & -3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & -3\end{pmatrix}=\boldsymbol{BC}$ （满秩分解）

$$\boldsymbol{A}^+=\boldsymbol{C}^T\left(\boldsymbol{CC}^T\right)^{-1}\left(\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B}\right)^{-1}\boldsymbol{B}^T=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6}\\ 0 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6}\\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}，\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}，\boldsymbol{AA}^+\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}6\\6\\0\end{pmatrix}=\boldsymbol{b}.$$

方程组有解.

通解为： $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{A})\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&0\end{pmatrix}\boldsymbol{y}$,

极小范数解为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$.