南京航空航天大学 2020 级硕士研究生

二０二０～二０二一　学年　第 1 学期　　《高等工程数学》课程　A 卷

考试日期：　2020 年 11 月 15 日　　　课程编号：

学院　　　　学号　　　　姓名　　　　成绩

一（20 分）已知$A=\begin{bmatrix}2&0&1\\0&2&1\\-1&-1&2\end{bmatrix}$，求$\|A\|_1$，$\|A\|_\infty$，$\|A\|_F$，$\|A\|_2$。

$\|A\|_1=4$

$\|A\|_\infty=4$

$\|A\|_F=4$

$\|A\|_2=\sqrt{6}$

二（20 分） 已知矩阵$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & -2\\ -10 & 3 & -28\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$,

1. 求A的特征多项式和A的全部特征值；(6 分)
2. 求A的不变因子、初等因子及最小多项式；(6 分)
3. 求A的 Jordan 标准型J及变换矩阵P,使得$P^{-1}AP=J$；(6 分)
4. 令$T>0$, 确定幂级数$s(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\left(T^3+\frac{3}{k^2+3}\right)^{\frac{k}{3}}}z^k$的收敛半径。令$h(z)=s\,(2z-7)$, 对上述$A$讨论矩阵幂级数$h(A)$的绝对收敛性（收敛圆边界上的情形除外）。(2 分)

特征多项式$f(\lambda)=(\lambda-3)(\lambda-1)^2$
特征值$\lambda_1=3,\ \lambda_{2,3}=1$
不变因子$d_1=d_2=1,\ d_3=(\lambda-3)(\lambda-1)^2$
初等因子$\lambda-3,\ (\lambda-1)^2$
最小多项式$m(\lambda)=(\lambda-3)(\lambda-1)^2$

$$J=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$P=\begin{bmatrix}0 & -2 & -\frac{14}{5}\\ 5 & -10 & -5\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$T>5$时$h(A)$绝对收敛

三（20 分）. 1. 求矩阵$A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\\ 3 & -1\end{bmatrix}$的奇异值分解. (10 分)

2. 已知矩阵B，存在可逆矩阵$P=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}$, 使得$P^{-1}BP=J=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$, 求$e^{2tB}$，这里$t$是实数. (10 分)

$A=V^T\Sigma U$，其中

$$\Sigma=\begin{bmatrix}\sqrt{14} & 0\\ 0 & \sqrt{3}\end{bmatrix},\ U=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\ V=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{5}{\sqrt{42}}\\ \frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-4}{\sqrt{42}}\\ \frac{3}{\sqrt{14}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{42}}\end{bmatrix}$$

$$P^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$e^{2tB}=Pe^{2tJ}P^{-1}=\begin{bmatrix}e^{6t} & 0 & 0\\ 2e^{4t}-2e^{6t}+4te^{4t} & e^{4t}+2te^{4t} & 2te^{4t}\\ -4te^{4t} & -2te^{4t} & e^{4t}-2te^{4t}\end{bmatrix}$$

四（20 分） 1．当实数t满足什么条件时，$A=\begin{bmatrix}2020 & 0 & 0\\ 0 & -2t & t\\ 0 & t & -t-4\end{bmatrix}$半正定？(10 分)

2．令$B\in\mathbb{C}^{m\times n}$为复矩阵，证明： $B^HB\in\mathbb{C}^{n\times n}$为Hermite半正定矩阵. (7 分)

3．　令$B\in\mathbb{C}^{m\times n}$为复矩阵，$A\in\mathbb{C}^{n\times n}$为Hermite正定矩阵，利用 2. 中结论证明：若$\mathrm{tr}(AB^HB)=0$，则$B=0$. (3 分)

1. 所有主子式非负，$t\leq -8$.
2. 根据定义证明即可.
3. 先证明$B^HB=0$，再证明$B=0$.

五（ 20 分） 矩阵$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$，向量$b = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$,

1．求矩阵A的满秩分解，并计算A^+；(10 分)

2．对于方程组$Ax = b$，用广义逆判断方程组是否相容，若相容，求其通解及极小范数解，若不相容，求其通解及极小最小二乘解。(10 分)

$$A = BC = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A^+ = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$\hat{x} = A^+ b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$，可验证$A\hat{x} = b$，故方程组相容

$$x = A^+ b + (I - A^+ A) y = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} y$$