一. 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ i & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，求 $\|A\|_1$、$\|A\|_2$、$\|A\|_\infty$、$\|A\|_F$

$$\|A\|_1 = \max_{1\leqslant j\leqslant n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| = 1+1+1=3$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = 1+1+1=3$$

$$A^H A=\begin{pmatrix} 2 & -2i & -i \\ 2i & 3 & 2 \\ i & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \lambda(A^H A) = 1, \sqrt{3}+2\ 2\sqrt{},$$

$$\|A\|_2 = (\lambda_{max}(A^H A))^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3+2\sqrt{2}}$$

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(tr(A^H A) \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2+3+2} = \sqrt{7}$$

二．已知：$A=\begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -19 & 1 \end{pmatrix}$

1.求 A 的特征多项式及全部特征值

2.求 A 的不变因子、初等因子及最小多项式

3.求 A 的 Jordan 标准型 J，变换矩阵 P，使 $P^{-1}BP=J$

4.令 $T>0$，确定幂级数 $S(Z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(T^2+\frac{1}{k^2+1})^{\frac{k}{2}}}Z^k$ 的收敛半径，令 $h(Z)=S(\frac{Z}{2})$，

讨论的 $h(A)$ 绝对收敛性

1\. $f(\lambda)=\det(\lambda I-A)=\begin{vmatrix} \lambda-1 & 5 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ 2 & 19 & \lambda-1 \end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-2),\ \lambda_{1,2}=1,\ \lambda_3=2$

2\. 行列式因子：

$$D_1(\lambda)=1$$

$$\begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 \\ 2 & \lambda-1 \end{vmatrix}=(\lambda-1)^2$$

$$\begin{vmatrix} 0 & \lambda-2 \\ 2 & 19 \end{vmatrix}=-2(\lambda-2)$$

$$\therefore D_2(\lambda)=1$$

$$D_3(\lambda)=\begin{vmatrix} \lambda-1 & 5 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ 2 & 19 & \lambda-1 \end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-2)$$

不变因子：

$$d_1(\lambda)=D_1(\lambda)=1$$

$$d_2(\lambda)=\frac{D_2(\lambda)}{D_1(\lambda)}=1$$

$$d_3(\lambda)=\frac{D_3(\lambda)}{D_2(\lambda)}=(\lambda-1)^2(\lambda-2)$$

初等因子：

$$(\lambda-1)^2,\quad \lambda-2$$

最小多项式：

$$m(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda-2)$$

3. $J_1=2$，$J_2=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，$J=\begin{pmatrix}J_1 & 0\\ 0 & J_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

$P^{-1}AP=J, AP=PJ$，令 $P=(P_1,P_2,P_3)$ 得 $\begin{cases}(A-I)P_1=0\\ (A-2I)P_2=0\\ (A-2I)P_3=P_2\end{cases}$

取 $P_1=\begin{pmatrix}-5\\ 1\\ -9\end{pmatrix}, P_2=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}, P_3=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$，$P=\begin{pmatrix}-5 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 1 & 0 & 0\\ -9 & 1 & 1\end{pmatrix}$

4. $\lim\limits_{k\to\infty}\left[\dfrac{1}{(T^2+\frac{1}{k^2+1})^{\frac{k}{2}}}\right]^{\frac{1}{k}}=\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{1}{(T^2+\frac{1}{k^2+1})^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{1}{T}, R=T$

$$h(Z)=S\left(\frac{Z}{2}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(T^2+\frac{1}{k^2+1})^{\frac{k}{2}}}\left(\frac{Z}{2}\right)^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(4T^2+\frac{4}{k^2+1})^{\frac{k}{2}}}Z^k$$

$$\lim_{k\to\infty}\left[\frac{1}{(4T^2+\frac{4}{k^2+1})^{\frac{k}{2}}}\right]^{\frac{1}{k}}=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{(4T^2+\frac{4}{k^2+1})^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2T}, R=2T$$

当 $\rho(A)=2<2T, T>1$，矩阵幂级数绝对收敛；$\rho(A)=2>2T, T<1$，矩阵幂级数发散；当 $\rho(A)=2=2T, T=1$，不确定

三．1.求 A=$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$的奇异值分解

2.若 B=$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$，存在可逆阵 P=$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$，使 $P^{-1}BP=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，求 $\sin(Bt^2)$

---

1. $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, A^T=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^HA=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 18 \end{pmatrix}$$

$\left|\lambda I-A^HA\right|=0$，$\lambda = 9,18$

$$u_1(\lambda)=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2(\lambda)=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, U=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$AA^H=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & -2 & -5 \\ -2 & 17 & 2 \\ -5 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$\left|\lambda I-AA^H\right|=0$，$\lambda = 9,18,0$

$$u_1(\lambda)=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}, u_2(\lambda)=\begin{pmatrix} -\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{4}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix}, u_3(\lambda)=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, V=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$A=V\begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^H=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{9} & 0 \\ 0 & \sqrt{18} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^H$$

2. $f(x)=\sin(t^2x), f'(x)=t^2\cos(t^2x)$

$f(3)=\sin(3t^2), f(1)=\sin(t^2), f'(1)=t^2\cos(t^2)$

$$f(B)=P\begin{pmatrix} f(3) & 0 & 0 \\ 0 & f(1) & f'(1) \\ 0 & 0 & f(1) \end{pmatrix}P^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sin(3t^2) & 0 & 0 \\ 0 & \sin(t^2) & t^2\cos(t^2) \\ 0 & 0 & \sin(t^2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sin(3t^2) & 0 & 0 \\ 0 & \sin(t^2) & t^2\cos(t^2) \\ 0 & 0 & \sin(t^2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \sin(t^2) & t^2\cos(t^2) & 0 \\ 0 & \sin(t^2) & 0 \\ 2\sin(t^2)-2\sin(3t^2) & 2t^2\cos(t^2) & \sin(3t^2) \end{pmatrix}$$

四．1.当实数 t 满足什么条件时，$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & t \\ -6 & t & 32 \end{pmatrix}$半正定

2.设 A 为 n 阶可逆 Hermite 矩阵，证明：存在 n 阶矩阵 S>0，使$A^2=S^2$

3.设 A 为 n 阶矩阵，$B>0$。证明B^3A^HA相似于对角阵且对角元均非负

1.A 半正定，当且仅当 A 的各阶主子式均大于等于 0

$$|2| \geq 0, |1| \geq 0, |32| \geq 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \geq 0, \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ -6 & 32 \end{vmatrix} \geq 0, \begin{vmatrix} 1 & t \\ t & 32 \end{vmatrix} \geq 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & t \\ -6 & t & 32 \end{vmatrix} \geq 0$$

得$-\sqrt{14} \leqslant t \leqslant \sqrt{14}$

2.因为$A^2=AA=A^HA=A^HIA$，所以A^2与单位阵相合，单位阵正定，所以A^2正定。

由A^2正定，可得存在酉矩阵 U，使$U^HA^2U=\Lambda=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$，其中

$\lambda_i>0, i=1,2\cdots n$。

取$S=U\Lambda' U^H, \Lambda' = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$易得 S 与$\Lambda'$相合且$\Lambda'$正定，所以 S

正定，又有$S^2=U\Lambda' U^HU\Lambda' U^H=U\Lambda'\Lambda' U^H=U\Lambda U^H=A^2$

3.因为$B>0$，所以$B^3>0$，令$B^3=Q^HQ$，$B^3A^HA=Q^H(QA^HAQ^H)(Q^H)^{-1}$，所以$B^3A^HA$与$QA^HAQ^H$相似。$\left(QA^HAQ^H\right)^H=QA^HAQ^H$，所以$QA^HAQ^H$为 Hermite 矩阵，存在酉矩阵 U，

使 $U^H Q A^H A Q^H U = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$，又因为 $QA^H AQ^H = \left(AQ^H\right)^H \left(AQ^H\right)$，所以

$\lambda_i \geqslant 0$，$i = 1, \cdots, n$。由相似的传递性和相似的矩阵有相同的特征值，得 $B^3 A^H A$ 相似于对角阵，且特征值均非负。

五．设$A=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&0&1\\1&2&1\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}3\\3\\6\end{pmatrix}$

1.求 A 的满秩分解，计算A^+

2.用广义逆判断线性方程组$Ax=b$是否相容
若相容，求其通解；若不相容，求其极小最小二乘解

1.

$$A=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&0&1\\1&2&0\end{pmatrix}, L_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}, L_1A=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}, L_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}, L_2A=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$A=L_1^{-1}L_2^{-1}\begin{pmatrix}1&2&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&1\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$A^+=C^T(CC^T)^{-1}(B^TB)^{-1}B^T$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}^T\left(\begin{pmatrix}1&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}^T\right)^{-1}\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&1\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&1\end{pmatrix}\right)^{-1}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&1\end{pmatrix}^T$$

$$=\frac{1}{15}\begin{pmatrix}2&-1&1\\4&-2&2\\-5&10&5\end{pmatrix}$$

$AA^+b=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&0&1\\1&2&0\end{pmatrix}\frac{1}{15}\begin{pmatrix}2&-1&1\\4&-2&2\\-5&10&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\3\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\\6\end{pmatrix}=b$，线性方程组$Ax=b$相容

通解为$x=A^+b+(I-A^+A)y, y\in R^n$