南 京 航 空 航 天 大 学

研究生考试参考答案及评分标准

二 00 七 ～二 00 八 学年　第 一 学期　课程名称：矩阵论

试卷类型 B 卷　　课程编号：A000003

参考答案及评分标准制定人：　　2008 年 1 月 18 日

一、(20 分)

解：(1) A 的不变因子：$1,1,(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda+4)$；$A$ 的初等因子：$(\lambda+1),(\lambda-2),(\lambda+4)$；$A$ 的最小多项式 $(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda+4)$。

(2) A 的 **Jordan** 标准形 $J=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&-4\end{pmatrix}$，相应的可逆变换矩阵为 $P=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&0\\\frac{1}{9}&\frac{1}{9}&-\frac{2}{9}\\\frac{4}{9}&-\frac{2}{9}&-\frac{2}{9}\end{pmatrix}$。

(3) $\because \rho(A)=4>1$，故矩阵序列 $\{A^k\}$ 发散。

二、(20 分)

解：(1) $\|A\|_1=5$；$\|A\|_\infty=5$；$\|A\|_F=\sqrt{23}$；

$$\because \lambda(A^TA)=\{3,5,15\},\quad \therefore \|A\|_2=\left[\lambda_{\max}(A^TA)\right]^{\frac{1}{2}}=\sqrt{15}\ 。$$

(2) 设 $x\in C^n$ 是 A 相应于特征值 λ 的特征向量，$\therefore Ax=\lambda x, x\neq 0$，

两边取矩阵范数导出的 C^n 上向量范数可得：$|\lambda|\|x\|=\|\lambda x\|=\|Ax\|\le\|A\|\|x\|$，

$\because \|x\|\neq 0$，$\therefore |\lambda|\le\|A\|$；

又 $\because A$ 可逆，$\therefore \frac{1}{\lambda}$ 是 A^{-1} 的特征值，由上述证明可知：$\left|\frac{1}{\lambda}\right|\le\|A^{-1}\|$；

综上所述有：$\|A^{-1}\|^{-1}\le|\lambda|\le\|A\|$。

三、（20 分）

解：（1） 可取$1,x,x^2$为$R[x]_3$的一组基，则线性变换T在该基下的表示矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}4&1&1\\3&2&2\\0&0&3\end{pmatrix};$$

（2）线性变换T的特征值为 5，1，3；

在（1）所取基下相应的特征值分别为$\eta_1=1+x$，$\eta_2=1-3x$，$\eta_3=-3-x+4x^2$；

（3）$\because T$具有 3 个互异特征值，$\therefore T$可对角化，其对角化的一组基为η_1,η_2,η_3 。

四.（1）A的满秩分解为：$A=BC=\begin{pmatrix}2&-1\\1&0\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&-1&2\\0&0&-3&3\end{pmatrix}$；

$$\therefore A^+=C^T(CC^T)^{-1}(B^TB)^{-1}B^T=\frac{1}{33}\begin{pmatrix}2&1&-1\\4&2&-2\\1&-5&-6\\1&6&5\end{pmatrix};$$

（2）易证$AA^+b=\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}\neq b$，该方程组不相容，其极小最小二乘解为：$x=A^+b=\frac{1}{33}\begin{pmatrix}6\\12\\-8\\14\end{pmatrix}$。

五.（1）$A-B=\begin{pmatrix}5&2&0\\2&1&0.5t\\0&0.5t&1\end{pmatrix}>0$当且仅当各阶顺序主子式均为正：

$$\Delta_1=5>0，\Delta_2=1>0，\Delta_3=|A-B|=1-\frac{5}{4}t^2>0$$

即$-\frac{2}{\sqrt5}<t<\frac{2}{\sqrt5}$时$A>B$成立。

（2）$\because A$是 Hermite 矩阵，$\therefore$存在酉矩阵 $\boldsymbol{U}$，使得$U^HAU=diag\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$，

由此可知：$\lambda_{\min}(A)I\le A\le\lambda_{\max}(A)I$，

$\therefore \forall x \in C^n, x \neq 0$，有 $\lambda_{\min}(A) \le R(x) = \dfrac{x^H A x}{x^H x} \le \lambda_{\max}(A)$。

（3）$A_{11} > 0$，$\therefore A_{11}^{-1}$ 存在，构造可逆矩阵 $P = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ -A_{12}^H A_{11}^{-1} & I_{n-k} \end{pmatrix}$，

使得 $PAP^H = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} - A_{12}^H A_{11}^{-1} A_{12} \end{pmatrix} = B$，

$\because A_{11} > 0$，$A_{22} - A_{12}^H A_{11}^{-1} A_{12} > 0$，$\therefore B > 0$，从而有 $A > 0$　。