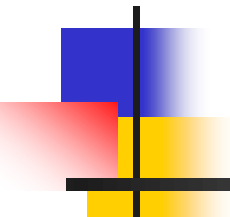


第一章

線性方程式系統



1.1 線性方程式系統簡介

1.2 高斯消去法與高斯-喬登消去法

1.3 線性方程式系統的應用

1.1 線性方程式系統簡介

- n 個變數的線性方程式 (linear equation)

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b$$

係數 a_1 ， a_2 ， a_3 ， \dots ， a_n 都是實數，並且常數項 b 也是實數。 a_1 稱為領先係數(leading coefficient)， x_1 稱為領先變數(leading variable)。

- 注意：

- (1) 線性方程式之變數不可以是相乘或是開根號，且變數不能被包含在三角、指數或對數函數裡面。
- (2) 變數只能以第一冪次的方程式表示。

■ 範例 1：線性、非線性

線性 (a) $3x + 2y = 7$

(b) $\frac{1}{2}x + y - \pi z = \sqrt{2}$ 線性

線性 (c) $x_1 - 2x_2 + 10x_3 + x_4 = 0$ (d) $(\sin \frac{\pi}{2})x_1 - 4x_2 = e^2$ 線性

非線性 (e) $xy + z = 2$

(f) $e^x - 2y = 4$ 非線性

變數不能相乘(非第一幕次)

非線性 (g) $\sin x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0$

(h) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 4$ 非線性

三角函數

非第一幕次

- n 個變數線性方程式的解 (solution)

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b$$

當 $x_1 = s_1, x_2 = s_2, x_3 = s_3, \cdots, x_n = s_n$

使得 $a_1s_1 + a_2s_2 + a_3s_3 + \cdots + a_ns_n = b$

- 解集合 (solution set)

所有滿足線性方程式的解所構成的集合。

- 範例 2：解集合的參數化表示 (parametric representation)

$$x_1 + 2x_2 = 4$$

其中一解為 $(2, 1)$ ，即 $x_1 = 2, x_2 = 1$

將方程式整理成 $x_1 = 4 - 2x_2$ ，並令 $x_2 = t$

可得 $x_1 = 4 - 2t$

則解集合為 $\{(4 - 2t, t) \mid t \in R\}$

或 $\{(s, 2 - \frac{1}{2}s) \mid s \in R\}$

- n 個變數 m 條線性方程式系統 (system of linear equations)

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$

- 一致性 (consistent)

線性方程式系統至少有一解

- 非一致性 (inconsistent)

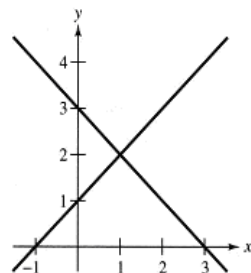
線性方程式系統無解

■ 對一線性方程式系統而言，下列有一為真

- (1) 系統只有唯一解(一致性系統)
- (2) 系統有無限多組解(一致性系統)
- (3) 系統為無解(非一致性系統)

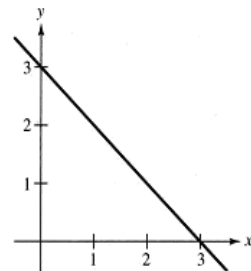
■ 範例 4：(線性方程式系統的解)

(1) $x + y = 3$
 $x - y = -1$
兩相交直線



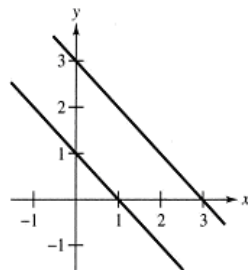
(唯一解)

(2) $x + y = 3$
 $2x + 2y = 6$
兩重疊直線



(無限多組解)

(3) $x + y = 3$
 $x + y = 1$
兩平行直線



(無解)

■ 範例 5：使用回代法(back substitution)解列梯形形式的方程式系統

$$x - 2y = 5 \quad (1)$$

$$y = -2 \quad (2)$$

解：將 $y = -2$ 代入(1) 可得

$$x - 2(-2) = 5$$

$$x = 1$$

此系統有唯一解 $x = 1, y = -2$

■ 範例 6：使用回代法解列梯形形式的方程式系統

$$x - 2y + 3z = 9 \quad (1)$$

$$y + 3z = 5 \quad (2)$$

$$z = 2 \quad (3)$$

解：將 $z=2$ 代入(2) 可得

$$y + 3(2) = 5$$

$$y = -1$$

再將 $y=-1$ 及 $z=2$ 代入(1)得

$$x - 2(-1) + 3(2) = 9$$

$$x = 1$$

此系統有唯一解 $x=1, y=-1, z=2$

- 等價 (equivalent)

若兩線性方程式系統的解集合完全相同，

則稱此兩 線性方程式系統為等價

- 下列運算會產生兩個等價的線性方程式系統

(1) 兩方程式互換

(2) 一方程式乘上一非零常數

(3) 一方程式的倍數加到另一方程式

- 範例 7：利用高斯消去法將線性方程式系統改寫成列梯形形式

$$x - 2y + 3z = 9 \quad (1)$$

$$-x + 3y = -4 \quad (2)$$

$$2x - 5y + 5z = 17 \quad (3)$$

解： (1) + (2) \rightarrow (2)

$$x - 2y + 3z = 9$$

$$y + 3z = 5 \quad (4)$$

$$2x - 5y + 5z = 17$$

(1) \times (-2) + (3) \rightarrow (3)

$$x - 2y + 3z = 9$$

$$y + 3z = 5$$

$$-y - z = -1 \quad (5)$$

$$(4) + (5) \rightarrow (5)$$

$$\begin{array}{rclcl} x & - & 2y & + & 3z & = & 9 \\ & & y & + & 3z & = & 5 \\ & & & & 2z & = & 4 \end{array} \quad (6)$$

$$(6) \times \frac{1}{2} \rightarrow (6)$$

$$\begin{array}{rclcl} x & - & 2y & + & 3z & = & 9 \\ & & y & + & 3z & = & 5 \\ & & & & z & = & 2 \end{array}$$

所以此系統的解為 $x=1, y=-1, z=2$ (唯一解)

■ 範例 8：求解線性方程式系統(非一致性(矛盾)系統)

$$x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \quad (1)$$

$$2x_1 - x_2 - 2x_3 = 2 \quad (2)$$

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -1 \quad (3)$$

解： $(1) \times (-2) + (2) \rightarrow (2)$

$(1) \times (-1) + (3) \rightarrow (3)$

$$\begin{array}{rclcl} x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ & & 5x_2 & - & 4x_3 & = & 0 \end{array} \quad (4)$$

$$\begin{array}{rclcl} & & 5x_2 & - & 4x_3 & = & -2 \end{array} \quad (5)$$

$$(4) \times (-1) + (5) \rightarrow (5)$$

$$x_1 - 3x_2 + x_3 = 1$$

$$5x_2 - 4x_3 = 0$$

$$0 = -2$$

矛盾

所以此線性方程式系統無解

■ 範例 9：求解線性方程式系統(無限多組解)

$$x_2 - x_3 = 0 \quad (1)$$

$$x_1 - 3x_3 = -1 \quad (2)$$

$$-x_1 + 3x_2 = 1 \quad (3)$$

解：(1) \leftrightarrow (2)

$$x_1 - 3x_3 = -1 \quad (1)$$

$$x_2 - x_3 = 0 \quad (2)$$

$$-x_1 + 3x_2 = 1 \quad (3)$$

$$(1) + (3) \rightarrow (3)$$

$$x_1 - 3x_3 = -1$$

$$x_2 - x_3 = 0$$

$$3x_2 - 3x_3 = 0 \quad (4)$$

$$\begin{array}{rclcl} x_1 & & - & 3x_3 & = & -1 \\ & x_2 & - & x_3 & = & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow x_2 = x_3,$$

$$x_1 = -1 + 3x_3$$

$$\text{令 } x_3 = t$$

$$\text{則 } x_1 = 3t - 1,$$

$$x_2 = t, \quad t \in R$$

$$x_3 = t,$$

所以此系統有無限多組解

摘要與復習 (1.1節之關鍵詞)

- linear equation: 線性方程式
- system of linear equation: 線性方程系統
- leading coefficient: 領先係數
- leading variable: 領先變數
- solution: 解
- solution set: 解集合
- parametric representation: 參數化表示
- consistent: 一致性(有解)
- inconsistent: 非一致性(無解、矛盾)
- equivalent: 等價

1.2 高斯消去法與高斯-喬登消去法

■ $m \times n$ 矩陣 (matrix)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{matrix} m \text{列} \\ n \text{行} \end{matrix}$$

■ 注意：

- (1) 矩陣中的每一個元素(entry) a_{ij} 是一個數
- (2) 一 m 列 n 行的矩陣的大小(size) 為 $m \times n$
- (3) 若 $m = n$ ，則此矩陣稱為 n 階方陣(square of order n)
- (4) 對一方陣而言，元素 $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ 稱為主對角線 (main diagonal) 的元素

- 範例 1：矩陣

大小

$$[2]$$

$$1 \times 1$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$2 \times 2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$1 \times 4$$

$$\begin{bmatrix} e & \pi \\ 2 & \sqrt{2} \\ -7 & 4 \end{bmatrix}$$

$$3 \times 2$$

- 注意：

矩陣最常用的方式是用來表示線性方程式系統

■ m 個方程式 n 個變數的線性方程式系統

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & + & \dots & + & a_{3n}x_n & = & b_3 \\ & & & & \vdots & & & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & a_{m3}x_3 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

以矩陣方式表示為 $Ax = b$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

- 增廣矩陣 (augmented matrix)

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & b_3 \\ & \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right] = [A \mid b]$$

- 係數矩陣 (coefficient matrix)

$$\left[\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ & \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{array} \right] = A$$

- 三個基本列運算 (elementary row operation)

(1) 兩列互換

$$r_{ij} : R_i \leftrightarrow R_j$$

(2) 一列乘上一非零常數

$$r_i^{(k)} : (k)R_i \rightarrow R_i$$

(3) 一列的倍數加到另一列

$$r_{ij}^{(k)} : (k)R_i + R_j \rightarrow R_j$$

- 列等價 (row equivalent)

若一矩陣可由另一矩陣的一些基本列運算來獲得，則此兩個矩陣稱為列等價

■ 範例 2：(基本列運算)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_{12}} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 & -2 \\ 1 & 3 & -3 & 0 \\ 5 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1^{(\frac{1}{2})}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & -3 & 0 \\ 5 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 5 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_{13}^{(-2)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & 13 & -8 \end{bmatrix}$$

■ 範例 3：使用基本列運算解一個系統

線性系統

相對的增廣矩陣

基本列運算

$$\begin{array}{rrcr} x & - & 2y & + & 3z & = & 9 \\ -x & + & 3y & & & = & -4 \\ 2x & - & 5y & + & 5z & = & 17 \end{array} \quad \left[\begin{array}{cccc} 1 & -2 & 3 & 9 \\ -1 & 3 & 0 & -4 \\ 2 & -5 & 5 & 17 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{rrcr} x & - & 2y & + & 3z & = & 9 \\ & & y & + & 3z & = & 5 \\ 2x & - & 5y & + & 5z & = & 17 \end{array} \quad \left[\begin{array}{cccc} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & -5 & 5 & 17 \end{array} \right]$$

$$r_{12}^{(1)} : (1)R_1 + R_2 \rightarrow R_2$$

$$\begin{array}{rrcr} x & - & 2y & + & 3z & = & 9 \\ & & y & + & 3z & = & 5 \\ & & -y & - & z & = & -1 \end{array} \quad \left[\begin{array}{cccc} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array} \right]$$

$$r_{13}^{(-2)} : (-2)R_1 + R_3 \rightarrow R_3$$

■ 範例 3：使用基本列運算解一個系統

線性系統

$$\begin{array}{rclcrcl} x & - & 2y & + & 3z & = & 9 \\ & & y & + & 3z & = & 5 \\ & & & & 2z & = & 4 \end{array}$$

相對的增廣矩陣

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

基本列運算

$$r_{23}^{(1)} : (1)R_2 + R_3 \rightarrow R_3$$

$$\begin{array}{rclcl} x & - & 2y & + & 3z & = & 9 \\ & & y & + & 3z & = & 5 \\ & & & & z & = & 2 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$r_3^{(\frac{1}{2})} : (\frac{1}{2})R_3 \rightarrow R_3$$

$$\longrightarrow \begin{array}{rcl} x & = & 1 \\ y & = & -1 \\ z & = & 2 \end{array}$$

- 列梯形形式 (row-echelon form)

- (1) 全部為零的列在矩陣最底下

- (2) 不全為零的列，其第一個非零元素為1，稱為領先1 (leading 1)

- (3) 對兩相鄰的非零列而言，較高列之領先1出現在較低列之領先1的左邊

- 列簡梯形形式 (reduced row-echelon form)

- (1) ~ (3) 同上

- (4) 在領先1的那一行除了領先1以外的位置全部為零

- 範例 4：判斷下列矩陣為列梯形形式或列簡梯形形式

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \text{列梯形形式}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{列簡梯形形式}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{列梯形形式}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{列簡梯形形式}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

- 高斯消去法 (Gaussian elimination)

將矩陣化簡為列梯形形式的程序

- 高斯-喬登消去法 (Gauss-Jordan elimination)

將矩陣化簡為列簡梯形形式的程序

- 注意：

(1) 每個矩陣只有一個列簡梯形形式

(2) 每個矩陣可以有很多種列梯形形式(不同的列運算
會產生不同的列梯形形式)

■ 範例：高斯消去法與高斯喬登消去法之步驟說明

← 產生 leading 1

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 8 & 12 \\ 2 & 8 & -6 & 4 & 12 & 28 \\ 2 & 8 & -1 & 4 & -5 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_{12}} \begin{bmatrix} 2 & 8 & -6 & 4 & 12 & 28 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 8 & 12 \\ 2 & 8 & -1 & 4 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

↑ 最左邊的非零行

leading 1

$$\xrightarrow{r_1^{(1/2)}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 & 2 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 8 & 12 \\ 2 & 8 & -1 & 4 & -5 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_{13}^{(-2)}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 & 2 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 8 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -24 \end{bmatrix}$$

↑ 讓在 leading 1 下的元素為 0

↑ 產生 leading 1

↑ 最左邊的非零行 子矩陣

$$\xrightarrow{r_2^{(-\frac{1}{2})}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 & 2 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -24 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_{23}^{(-5)}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 & 2 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

leading 1

讓在leading 1 下的元素為0

子矩陣

產生 leading 1

$$\xrightarrow{r_3^{(\frac{1}{3})}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 & 2 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_{31}^{(-6)}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

讓leading 1 以外的其他位置為0

leading 1

列梯形形式

列梯形形式

$$\xrightarrow{r_{32}^{(4)}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_{21}^{(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 2 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

列梯形形式

列簡梯形形式

■ 範例 7：用高斯-喬登消去法求解線性方程式系統(唯一解)

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x & - & 2y & + & 3z & = & 9 \\ -x & + & 3y & & & = & -4 \\ 2x & - & 5y & + & 5z & = & 17 \end{array}$$

解：

增廣矩陣

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & -2 & 3 & 9 \\ -1 & 3 & 0 & -4 \\ 2 & -5 & 5 & 17 \end{array} \right] \xrightarrow{r_{12}^{(1)}, r_{13}^{(-2)}} \left[\begin{array}{cccc} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{r_{23}^{(1)}} \left[\begin{array}{cccc} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{r_3^{(\frac{1}{2})}} \left[\begin{array}{cccc} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{r_{21}^{(2)}, r_{32}^{(-3)}, r_{31}^{(-9)}} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right] \longrightarrow \begin{array}{rcl} x & = & 1 \\ y & = & -1 \\ z & = & 2 \end{array}$$

列梯形形式

列簡梯形形式

■ 範例 8：求解線性方程式系統(無限多組解)

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 + 4x_1 - 2x_3 & = & 0 \\ 3x_1 + 5x_2 & = & 1 \end{array}$$

解：

增廣矩陣 列簡梯形形式

$$\left[\begin{array}{cccc} 2 & 4 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{r_1^{(\frac{1}{2})}, r_{12}^{(-3)}, r_2^{(-1)}, r_{21}^{(-2)}} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \end{array} \right]$$

相對的線性方程式系統

$$\begin{array}{rcl} x_1 & + & 5x_3 = 2 \\ x_2 & - & 3x_3 = -1 \end{array}$$

領先變數(leading variable): x_1, x_2

自由變數(free variable): x_3

$$\begin{aligned}x_1 &= 2 - 5x_3 \\x_2 &= -1 + 3x_3\end{aligned}$$

$$\text{令 } x_3 = t$$

$$\begin{aligned}x_1 &= 2 - 5t, \\x_2 &= -1 + 3t, \quad t \in R \\x_3 &= t,\end{aligned}$$

所以此系統有無限多組解

- 線性方程式的齊次系統 (homogeneous system)

若一線性方程系統的常數項均為零時，
則此系統為齊次系統

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & a_{13}x_3 + & \cdots + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + & a_{23}x_3 + & \cdots + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ a_{31}x_1 + & a_{32}x_2 + & a_{33}x_3 + & \cdots + & a_{3n}x_n & = & 0 \\ & & & & & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & a_{m2}x_2 + & a_{m3}x_3 + & \cdots + & a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}$$

- 顯然解 (trivial solution)

$$x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = x_n = 0 \quad (\text{任意 } n \text{ 變數齊次系統的解})$$

- 非顯然解 (nontrivial solution)

顯然解之外的其他解

- 注意：

- (1) 所有的齊次系統均為一致性(consistent)系統
- (2) 若系統的方程式比變數少，則有無限多組解
- (3) 對於一個齊次系統來說，下列有一為真
 - (a) 系統只有一個顯然解
 - (b) 系統除了顯然解外還有無限多組解

■ 範例 9：求解下列的齊次線性方程式系統

$$\begin{array}{rrcr} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}$$

解： 增廣矩陣 列簡梯形式

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{r_{12}^{(2)}, r_2^{(\frac{1}{3})}, r_{21}^{(1)}} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right]$$

領先變數： x_1, x_2

自由變數： x_3

令 $x_3 = t$

$$x_1 = -2t, x_2 = t, x_3 = t, t \in R$$

當 $t = 0, x_1 = x_2 = x_3 = 0$ (顯然解)

摘要與復習 (1.2節之關鍵詞)

- matrix: 矩陣
- row: 列
- column: 行
- entry: 元素
- size: 大小
- square matrix: 方陣
- order: 階
- main diagonal: 主對角線
- augmented matrix: 增廣矩陣
- coefficient matrix: 係數矩陣

-
- elementary row operation: 基本列運算
 - row equivalent: 列等價
 - row-echelon form: 列梯形形式
 - reduced row-echelon form: 列簡梯形形式
 - leading 1: 領先1
 - Gaussian elimination: 高斯消去法
 - Gauss-Jordan elimination: 高斯-喬登消去法
 - free variable: 自由變數
 - homogeneous system: 齊次系統
 - trivial solution: 顯然解
 - nontrivial solution: 非顯然解

1.3 線性方程式系統的應用

線性方程式系統源自於廣泛多樣的應用且為線性代數的中心主題之一。在這一節中，我們將會看到兩種這方面的應用，而在以後的章節將會看到更多。第一種應用是有關於如何在平面上用一個多項式函數去逼近一組資料點。第二種應用則是針對電學的網路分析和克希荷夫定律。

多項式曲線逼近

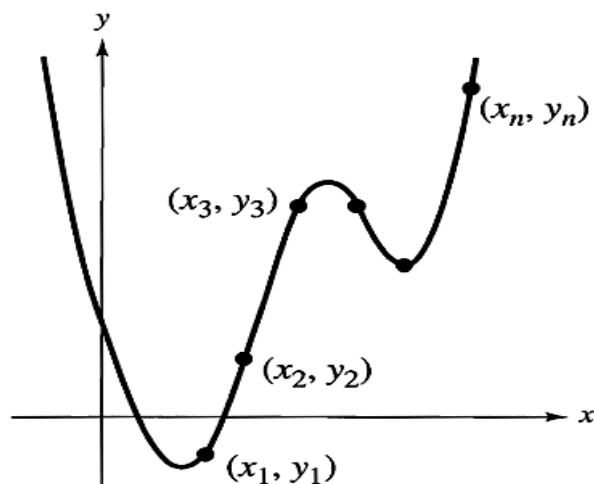
假設在 xy 平面上有下列 n 個點所表示的一個資料集合

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$$

如果要找出一個 $n-1$ 次多項式的函數

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1}$$

而且其圖形是通過這些指定的點，這個過程我們通常稱為**多項式曲線逼近 (polynomial curve fitting)**。我們可證得若 x 軸上的點是不同的，則正好有一個能滿足這 n 個點的 $(n-1)$ 次 (或少於) 多項式函數，如圖 1.4 所示。



多項式曲線逼近

圖 1.4

要解出 $p(x)$ 的 n 個係數，需將 n 點中的每一點分別代入多項式函數中來獲得下列 n 個變數 a_0, a_1, \dots, a_{n-1} 的 n 個線性方程式：

$$\begin{aligned}a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \cdots + a_{n-1}x_1^{n-1} &= y_1 \\a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + \cdots + a_{n-1}x_2^{n-1} &= y_2 \\&\vdots \\a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \cdots + a_{n-1}x_n^{n-1} &= y_n\end{aligned}$$

這個過程可以用範例 1 的一個二次多項式來說明之。

範例 1 多項式曲線逼近

找出多項式 $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ ，使其圖形能通過 $(1, 4)$ ， $(2, 0)$ 和 $(3, 12)$ 這些點。

解：將 $x=1, 2, 3$ 分別代入 $p(x)$ ，其結果將等於個別對應的 y 值，因此將會產生下列以 a_0, a_1 及 a_2 為變數的線性方程式系統。

$$p(1) = a_0 + a_1(1) + a_2(1)^2 = a_0 + a_1 + a_2 = 4$$

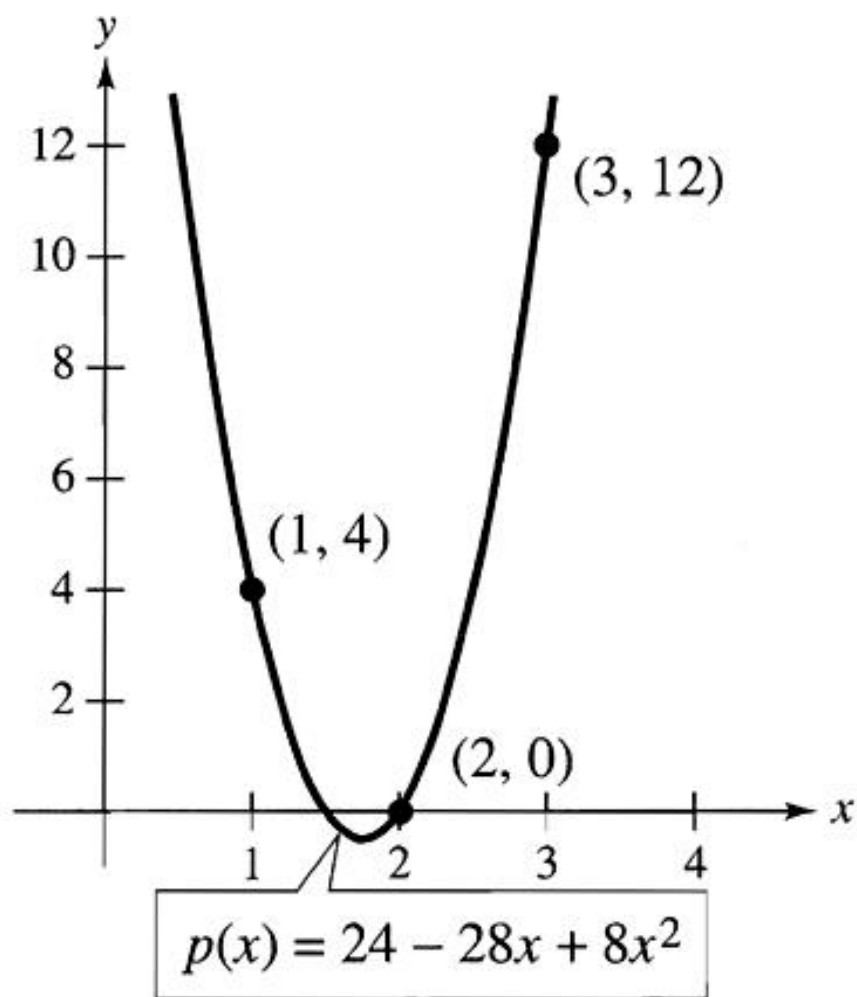
$$p(2) = a_0 + a_1(2) + a_2(2)^2 = a_0 + 2a_1 + 4a_2 = 0$$

$$p(3) = a_0 + a_1(3) + a_2(3)^2 = a_0 + 3a_1 + 9a_2 = 12$$

這系統的解為 $a_0=24$ ， $a_1=-28$ 及 $a_2=8$ ，因此多項式函數為

$$p(x) = 24 - 28x + 8x^2$$

此多項式的圖形如圖 1.5 所示。



■ 圖 1.5

範例 3 在曲線逼近之前轉換較大的 x 值

找出一可以逼近下列點的多項式。

$$\begin{array}{ccccc} \overbrace{(x_1, y_1)} & \overbrace{(x_2, y_2)} & \overbrace{(x_3, y_3)} & \overbrace{(x_4, y_4)} & \overbrace{(x_5, y_5)} \\ (2006, 3), & (2007, 5), & (2008, 1), & (2009, 4), & (2010, 10) \end{array}$$

解：因為所給予的 x 值是較大的，所以用 $z = x - 2008$ 來代換可得

$$\begin{array}{ccccc} \overbrace{(z_1, y_1)} & \overbrace{(z_2, y_2)} & \overbrace{(z_3, y_3)} & \overbrace{(z_4, y_4)} & \overbrace{(z_5, y_5)} \\ (-2, 3), & (-1, 5), & (0, 1), & (1, 4), & (2, 10) \end{array}$$

這和範例 2 中的點集合是相同的。因此逼近這些點的多項式為

$$\begin{aligned} p(z) &= \frac{1}{24}(24 - 30z + 101z^2 + 18z^3 - 17z^4) \\ &= 1 - \frac{5}{4}z + \frac{101}{24}z^2 + \frac{3}{4}z^3 - \frac{17}{24}z^4 \end{aligned}$$

由於 $z = x - 2008$ ，我們可以得到

$$p(x) = 1 - \frac{5}{4}(x - 2008) + \frac{101}{24}(x - 2008)^2 + \frac{3}{4}(x - 2008)^3 - \frac{17}{24}(x - 2008)^4$$

範例 4 逼近曲線的應用

如表 1.1 所示，求出有關前三個行星到太陽的平均距離與週期的多項式，然後用這個多項式來計算火星週期與測試這個逼近的準確性 (距離是以天文學的單位來量測，而週期則是以年來量測)。(來源：*CRC Handbook of Chemistry and Physics*)

表 1.1

行星	水星	金星	地球	火星	木星	土星
平均距離	0.387	0.723	1.0	1.523	5.023	9.541
週期	0.241	0.615	1.0	1.881	11.861	29.457

解：一開始，我們先找一個通過點 (0.387, 0.241), (0.723, 0.615) 和 (1, 1) 的二次多項式函數

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

將這些點代入 $p(x)$ 可獲得以下的線性方程式系統

$$a_0 + 0.387a_1 + (0.387)^2a_2 = 0.241$$

$$a_0 + 0.723a_1 + (0.723)^2a_2 = 0.615$$

$$a_0 + a_1 + a_2 = 1$$

此系統的近似解為

$$a_0 \approx -0.0634, \quad a_1 \approx 0.6119, \quad a_2 \approx 0.4515$$

所以此多項式函數可以近似為

$$p(x) = -0.0634 + 0.6119x + 0.4515x^2$$

利用 $p(x)$ 推估火星的週期為

$$p(1.523) \approx 1.916 \text{ 年}$$

將此估計結果與圖 1.7 所圖示之實際的火星週期做比較。注意實際的週期 (從表 1.1) 為 1.881 年。

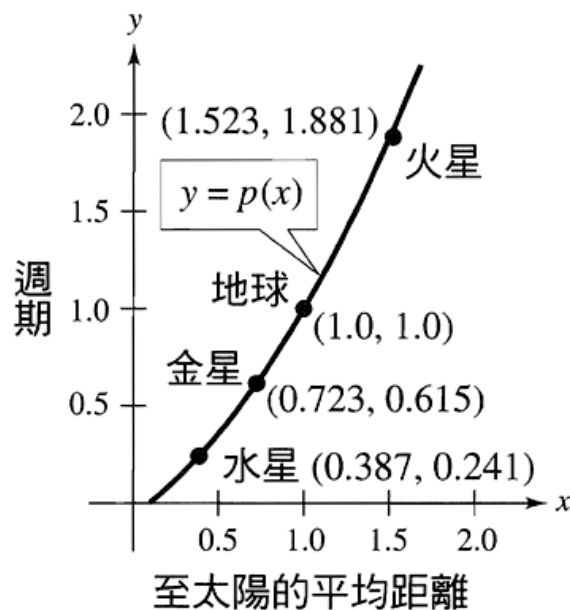


圖 1.7

從範例 4 所示的應用中，我們應該可以學習到一個重要的課題：逼近所給資料點的多項式，並不一定能給予一個精確的模型來描述除了所給資料點以外之 x 與 y 的關係。一般而言，離已知點愈遠的額外點其逼近的程度越差。舉例來說，在範例 4 中，木星的平均距離為 5.203，而以其代入多項式求得之近似週期為 15.343 年——這對於木星的實際週期為 11.861 年是一個差勁的估測。

曲線逼近的問題有時相當困難。其他型式的函數通常會比多項式函數提供較好的逼近。如果要看這方面的問題，我們再來看看範例 4 中曲線逼近的問題。對前六個行星的距離與週期取自然對數，所產生的結果將如表 1.2 和圖 1.8 所示。

表 1.2

行星	水星	金星	地球	火星	木星	土星
平均距離 (x)	0.387	0.723	1.0	1.523	5.203	9.541
距離的自然對數	-0.949	-0.324	0.0	0.421	1.649	2.256
週期 (y)	0.241	0.615	1.0	1.881	11.861	29.457
週期的自然對數	-1.423	-0.486	0.0	0.632	2.473	3.383

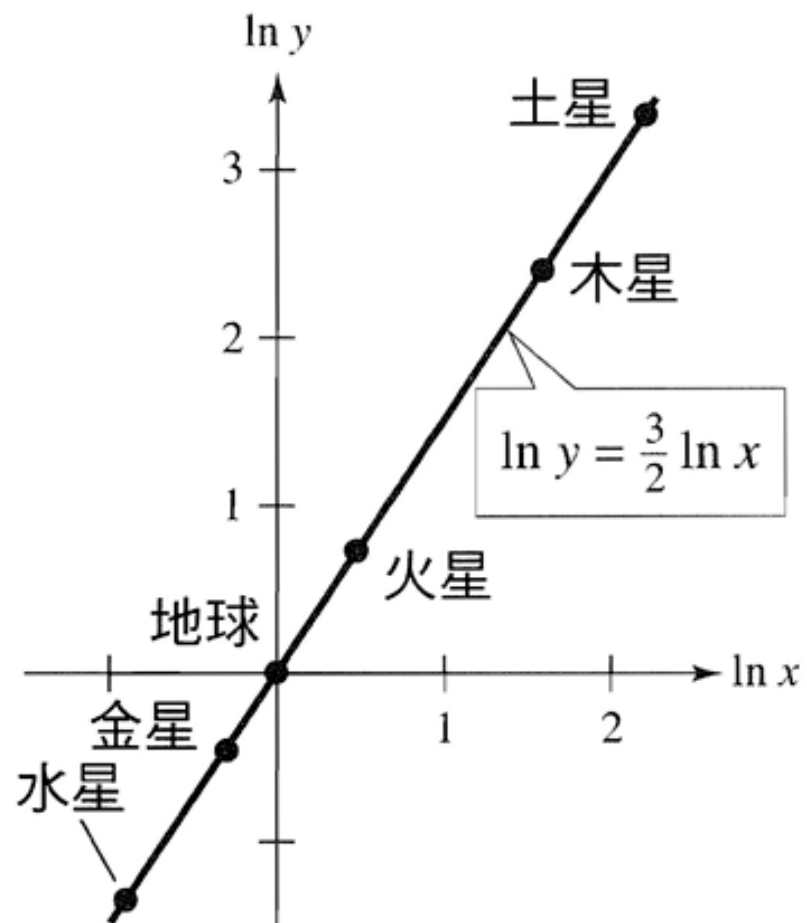


圖 1.8

現在，逼近一個對距離與週期取對數的多項式將產生以下 $\ln x$ 和 $\ln y$ 之間的線性關係。

$$\ln y = \frac{3}{2} \ln x$$

從此方程式可知 $y = x^{3/2}$ 或 $y^2 = x^3$ 。

換言之，每個行星週期 (以年為單位) 的平方會等於其到太陽平均距離 (以天文學為單位) 的立方。此關係是在 1619 年由 Johannes Kepler 首先發現的。



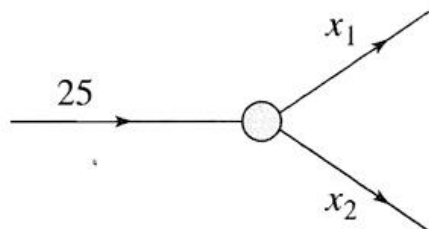
網路分析

由分支和接合點所組成的網路可以在多種不同的領域被使用為模式，如經濟學、交通流量分析與電機工程等。

在這些模式中，它可以被假設成以下的這樣模式，流進接合點的總流量會等於流出接合點的總流量。舉例來說，如圖 1.9 所示，流入接合點有 25 單位的流量，則流出的流量也必定是 25 單位的流量，這情形可以用下列的線性方程式來表示

$$x_1 + x_2 = 25$$

因為在網路中的每一個接合點都會產生一線性方程式，我們可以經由解線性方程式系統來分析由幾個接合點所組成網路的流量。此過程如範例 5 所示。



■ 圖 1.9

範例 5

網路分析

建立一個線性方程式系統來表示圖 1.10 所示的網路，並求解此系統。

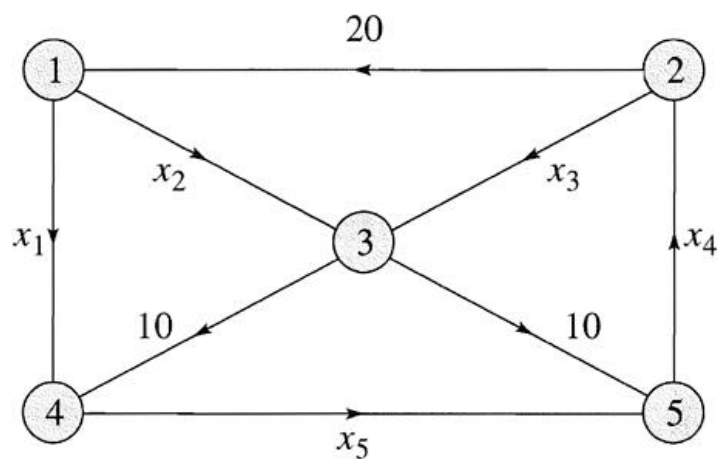


圖 1.10

解：網路的每一個接合點會產生一線性方程式，如以下所示。

$$\begin{array}{rcll} x_1 + x_2 & = & 20 & \text{接合點 1} \\ & x_3 - x_4 & = & -20 \quad \text{接合點 2} \\ & x_2 + x_3 & = & 20 \quad \text{接合點 3} \\ x_1 & - x_5 & = & -10 \quad \text{接合點 4} \\ & -x_4 + x_5 & = & -10 \quad \text{接合點 5} \end{array}$$

此系統的增廣矩陣為

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -20 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 20 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -10 \end{array} \right]$$

利用高斯-喬登消去法可以得到以下的矩陣

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 30 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

從上列的矩陣可知，我們可以得到

$$x_1 - x_5 = -10, \quad x_2 + x_5 = 30, \quad x_3 - x_5 = -10, \quad \text{和} \quad x_4 - x_5 = 10$$

令 $x_5 = t$ ，我們可以得到

$$x_1 = t - 10, \quad x_2 = -t + 30, \quad x_3 = t - 10, \quad x_4 = t + 10, \quad x_5 = t$$

在這裡 t 為實數，因此此系統有無限多解。

在範例 5 中，假設我們能控制分支 x_5 的流量，利用範例 5 所求得的答案，這樣我們就可以控制其他變數所代表的流量。舉例來說，令 $t=10$ 將會使得 x_1 和 x_3 的流量減少至 0。如圖 1.11 所示。同樣的，令 $t=20$ 將可得到如圖 1.12 所示的網路。

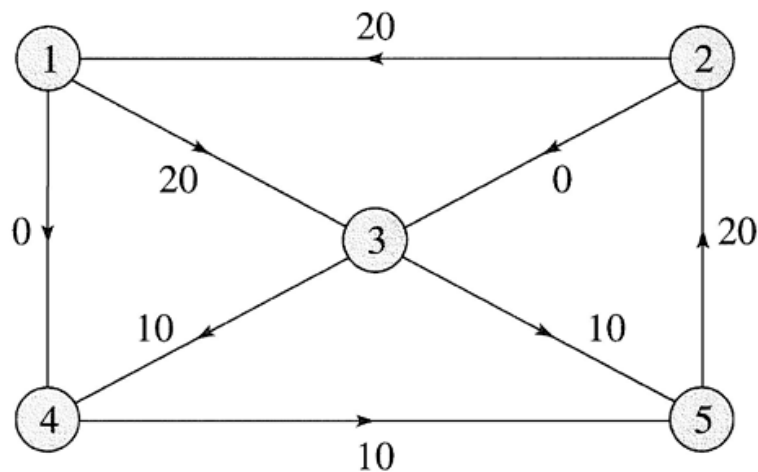


圖 1.11

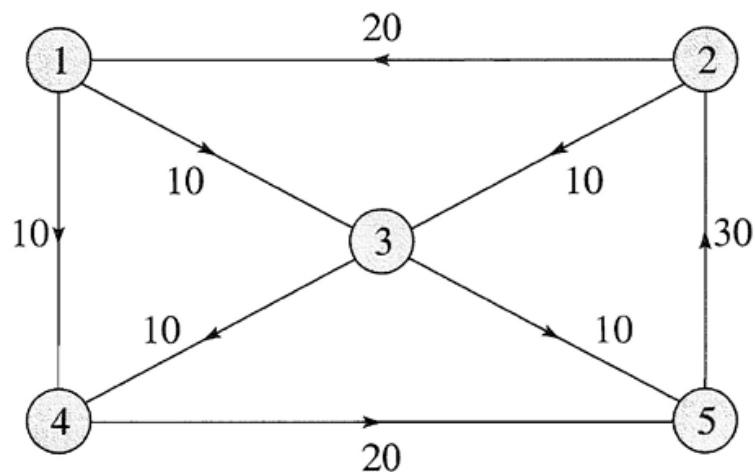




圖 1.12

我們可以看到在範例 5 中所用的網路分析的形式將可以被用來處理城市街道的交通流量問題或是灌溉系統的水流量問題。

電路是網路分析通常會應用的另一種型態。而此系統的分析一般是使用電路的兩種特性，即大家所熟知的**克希荷夫定律 (Kirchhoff's Laws)**。

1. 所有流進接合點的電流量會等於流出的電流量。
2. 一閉迴路路徑的所有 IR (I 是電流， R 是電阻) 乘積的和會等於此路徑的總電壓。

在電路中，電流的單位為安培，電阻的單位為歐姆。電流和電阻的乘積則為電壓，電池是用  的符號來表示，而較長的垂直線條表示電流由此端流出，電阻是用  的符號來表示，而電流的方向則是由分支的箭頭來決定。

注意

一閉迴路迴圈是一連串的分支，就像第一個分支的起始點和最後分支點是一致的。

範例 6 電路的分析

如圖 1.13 所示，求出此電路的電流 I_1 , I_2 和 I_3 。

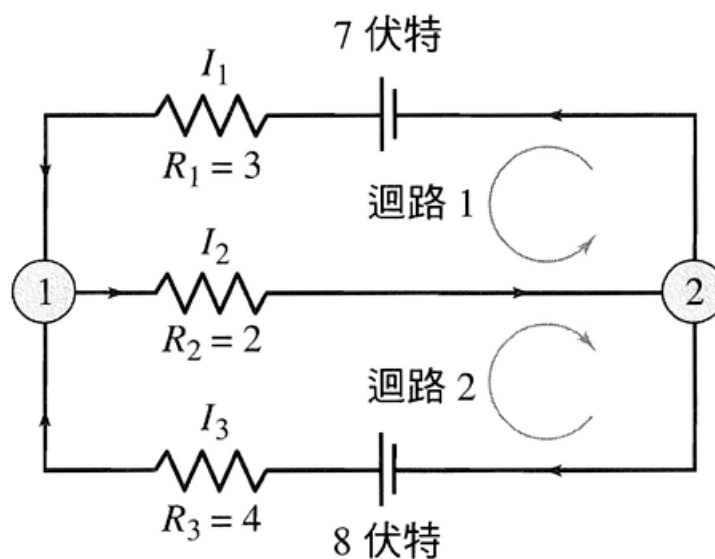


圖 1.13

解：應用克希荷夫第一定律來表示任一接合點

$$I_1 + I_3 = I_2 \quad \text{接合點 1 或接合點 2}$$

並且用克希荷夫第二定律來表示以下兩個迴路

$$R_1 I_1 + R_2 I_2 = 3I_1 + 2I_2 = 7 \quad \text{迴路 1}$$

$$R_2 I_2 + R_3 I_3 = 2I_2 + 4I_3 = 8 \quad \text{迴路 2}$$

因此我們得到下列三個線性方程式以 I_1 , I_2 和 I_3 為變數的系統

$$\begin{aligned} I_1 - I_2 + I_3 &= 0 \\ 3I_1 + 2I_2 &= 7 \\ 2I_2 + 4I_3 &= 8 \end{aligned}$$

對此系統的增廣矩陣作高斯-喬登消去法

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

可以得到下列的化簡的列梯形矩陣

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

此結果表示 $I_1=1$ 安培、 $I_2=2$ 安培、和 $I_3=1$ 安培。