第七章
特徵值與特徵向量

7.1 特徵值與特徵向量
7.2 對角化
7.3 對稱矩陣與正交對角化
7.4 特徵值與特徵向量的應用

CENGAGE Learning
Elementary Linear Algebra
R. Larsen et al. (6 Edition)

投影片設計製作者
淡江大學 電機系 翁慶昌 教授

7.1 特徵值與特徵向量

- 特徵值問題 (eigenvalue problem)

  若A為一$n\times n$矩陣，在R^n中是否存在著非零向量$\mathbf{x}$，使得$A\mathbf{x}$與$\mathbf{x}$之間存在著倍數關係？

- 特徵值(eigenvalue)與特徵向量(eigenvector)

  A：$n\times n$ 矩陣

  λ：純量

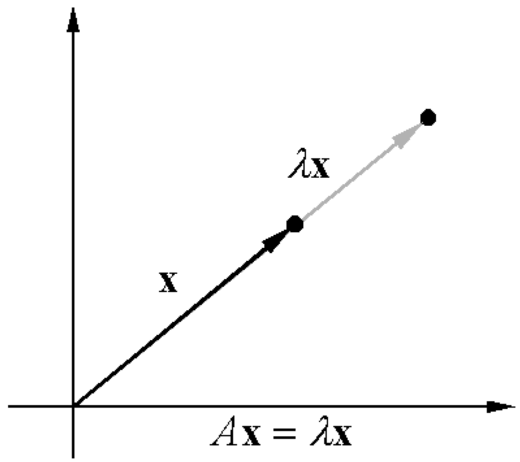
  $\mathbf{x}$： R^n中的非零向量

  特徵值

  $$Ax=\lambda x$$

  特徵向量

- 幾何表示



- 範例 1： 證明特徵值與特徵向量

$$A=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\quad x_1=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}\quad x_2=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$$

$$Ax_1=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ 0\end{bmatrix}=\overset{\text{特徵值}}{\overset{\downarrow}{2}}\underset{\text{特徵向量}}{\underset{\uparrow}{\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}}}=2x_1$$

$$Ax_2=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ -1\end{bmatrix}=\overset{\text{特徵值}}{\overset{\downarrow}{-1}}\underset{\text{特徵向量}}{\underset{\uparrow}{\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}}}=(-1)x_2$$

- 定理 7.1：λ的特徵向量可形成一個子空間 (Subspace)

  若A為一$n\times n$矩陣，且λ為 A的一個特徵值，則對應於λ的所有特徵向量與零向量可構成一個R^n的子空間，稱為特徵空間(eigenspace)

證明：

x_1與x_2為特徵值λ所對應的特徵向量

$$(i.e.\ \ Ax_1 = \lambda x_1,\ \ Ax_2 = \lambda x_2)$$

$$(1)\ A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2 = \lambda x_1 + \lambda x_2 = \lambda(x_1 + x_2)$$

$(i.e.\ \ x_1 + x_2$ 為對應於λ的特徵向量$)$

$$(2)\ A(cx_1) = c(Ax_1) = c(\lambda x_1) = \lambda(cx_1)$$

$(i.e.\ \ cx_1$為對應於λ的特徵向量$)$

- 範例 3：平面中的特徵空間

求下列矩陣的特徵值及所對應的特徵空間

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

解：

假設 $\mathrm{v}=(x, y)$

$$A\mathrm{v}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-x\\ y\end{bmatrix}$$

位於x軸的向量 特徵值為$\lambda_1=-1$

$$\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-x\\ 0\end{bmatrix}=-1\begin{bmatrix}x\\ 0\end{bmatrix}$$

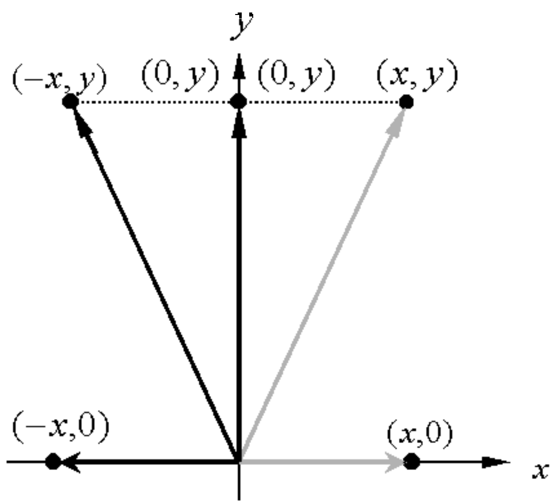
位於y軸的向量　　　　特徵值為$\lambda_2 = 1$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix}$$

就幾何上來說，矩陣A與在R^2中的向量的乘積為對稱於y軸的映射

對應於$\lambda_1 = -1$ 的特徵空間為x軸

對應於$\lambda_2 = 1$ 的特徵空間為y軸



- 定理 7.2：矩陣的特徵值與特徵向量

令A為一個 $n\times n$ 矩陣

(1) A的特徵值為一數值λ，使得 $\det(\lambda I - A) = 0$

(2) A相對應於λ的特徵向量為$\det(\lambda I - A) = 0$ 的非零解

- 注意：

$Ax = \lambda x \quad \Rightarrow \quad (\lambda I - A)x = 0$ (齊次系統)

當$(\lambda I - A)x = 0$ 時有非零解，若且唯若 $\det(\lambda I - A) = 0$

- $A\in M_{n\times n}$的特徵多項式 (characteristic polynomial)

$$\det(\lambda I - A) = \left|(\lambda I - A)\right| = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0$$

- A的特徵方程式 (characteristic equation)

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

- 範例 4：求特徵值與特徵向量

$$A=\begin{bmatrix}2 & -12\\ 1 & -5\end{bmatrix}$$

解：特徵方程式：

$$(\lambda\mathrm{I}-A)=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 12\\ -1 & \lambda+5\end{vmatrix}$$

$$=\lambda^2+3\lambda+2=(\lambda+1)(\lambda+2)=0$$

$$\Rightarrow \lambda=-1,-2$$

特徵值為：$\lambda_1=-1, \lambda_2=-2$

$$(1)\lambda_1 = -1 \Rightarrow (\lambda_1 \mathrm{I} - A)x = \begin{bmatrix} -3 & 12 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\because \begin{bmatrix} -3 & 12 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4t \\ t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix},\ t \neq 0$$

$$(2)\lambda_2 = -2 \Rightarrow (\lambda_2 \mathrm{I} - A)x = \begin{bmatrix} -4 & 12 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\because \begin{bmatrix} -4 & 12 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3t \\ t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix},\ t \neq 0$$

$$\text{Check}:\ Ax = \lambda_i x$$

▪ 範例 5：求特徵值與特徵向量

求特徵值、特徵向量與每個特徵值所對應特徵空間的維度

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

解：特徵方程式：

$$|\lambda \mathrm{I}-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -1 & 0\\ 0 & \lambda-2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)^3=0$$

特徵值為：$\lambda=2$

對應於$\lambda = 2$ 的特徵向量為：

$$(\lambda \mathrm{I} - A)x = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ s,t \neq 0$$

$$\left\{ s\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| s,t \in R \right\}$$為對應於$\lambda = 2$的特徵空間

故特徵空間的維度為2

- 注意：

(1) 若特徵值λ_1為特徵多項式的k個重根，

則λ_1的重數(multiplicity)為k

(2) 特徵值的重數往往會大於或等於其特徵空間的維度

- 範例 6：

  求A之特徵值與其對應特徵空間的一組基底

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&5&-10\\1&0&2&0\\1&0&0&3\end{bmatrix}$$

解：特徵方程式：

$$|\lambda \mathrm{I}-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&0&0\\0&\lambda-1&-5&10\\-1&0&\lambda-2&0\\-1&0&0&\lambda-3\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)^2(\lambda-2)(\lambda-3)=0$$

特徵值為：$\lambda_1=1, \lambda_2=2, \lambda_3=3$

$$(1)\lambda_1 = 1$$

$$\Rightarrow (\lambda_1 \mathrm{I} - A)x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 10 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 10 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2t \\ s \\ 2t \\ t \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad s, t \neq 0$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$ 為 $\lambda = 1$ 時所對應特徵空間的一組基底

$$(2)\lambda_2 = 2$$

$$\Rightarrow (\lambda_2 \mathrm{I} - A)x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 10 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 10 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5t \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ t \neq 0$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

為$\lambda = 2$時所對應特徵空間的一組基底

$$(3)\lambda_3 = 3$$

$$\Rightarrow (\lambda_3 \mathrm{I} - A)x = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 10 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 10 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -5t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ t \neq 0$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$ 為$\lambda = 3$時所對應特徵空間的一組基底

- 定理 7.3：三角矩陣的特徵值

  若A為一個$n \times n$的三角矩陣，則其特徵值為其主對角線上的元素

- 範例 7：求對角矩陣及三角矩陣的特徵值

$$(a) A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & -3 \end{bmatrix} \quad (b) A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

解：

$$(a) \quad |\lambda \mathrm{I} - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda - 1 & 0 \\ -5 & -3 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda - 1)(\lambda + 3)$$

$$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -3$$

$$(b) \ \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 0, \lambda_4 = -4, \lambda_5 = 3$$

- 線性轉換的特徵值與特徵向量

若存在一非零向量$\mathbf{x}$，使得$T(\mathbf{x})=\lambda\mathbf{x}$，則$\lambda$稱為線性轉換$T:V\to V$的特徵值，向量$\mathbf{x}$稱為$T$對應於$\lambda$的一個特徵向量，而所有$\lambda$的特徵向量集合(包含零向量)稱為特徵空間

- 範例 8：求特徵值與特徵空間

求下列矩陣的特徵值與其相對應的特徵空間

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

解：

$$|\lambda I - A| = \begin{bmatrix} \lambda-1 & -3 & 0 \\ -3 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+2 \end{bmatrix} = (\lambda+2)^2(\lambda-4)$$

特徵值為$\lambda_1 = 4, \lambda_2 = -2$

兩個特徵值的特徵空間分別為

$B_1 = \{(1,1,0)\}$ $\lambda_1 = 4$的基底

$B_2 = \{(1,-1,0),(0,0,1)\}$ $\lambda_2 = -2$的基底

- 注意：

(1) 令 B'為$T:R^3 \to R^3$ 的一組非標準基底，則對角矩陣A'為T相對於基底B'的矩陣，且A'主對角線的元素為A的特徵值

$$B' = \{(1,1,0),(1,-1,0),(0,0,1)\}$$

A的特徵向量

$$A' = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

A的特徵值

(2) 矩陣 A'的主對角線元素為 A 的特徵值

摘要與復習 (7.1節之關鍵詞)

- eigenvalue problem: 特徵值問題
- eigenvalue: 特徵值
- eigenvector: 特徵向量
- characteristic polynomial: 特徵多項式
- characteristic equation: 特徵方程式
- eigenspace: 特徵空間
- multiplicity: 重數

7.2 對角化

- 對角化問題 (diagonalization problem)

對於方陣A，是否存在一可逆矩陣P使得$P^{-1}AP$為對角矩陣

- 可對角化矩陣 (diagonalizable matrix)

一方陣A稱為可對角化矩陣，若存在一可逆矩陣P使得$P^{-1}AP$為對角矩陣　　(P對角化A)

- 注意：

(1)若存在一可逆矩P使得 $B = P^{-1}AP$，則A與B兩方陣稱為相似矩陣(similar matrix)

(2)特徵值問題與對角化問題兩者關係密切

▪ 定理 7.4：相似矩陣具有相同的特徵值

若A與B為$n \times n$相似矩陣，則他們具有相同的特徵值

證明：

$$A\text{與}B\text{為相似矩陣} \Rightarrow B = P^{-1}AP$$

$$\begin{aligned}
|\lambda \mathrm{I} - B| &= |\lambda \mathrm{I} - P^{-1}AP| = |P^{-1}\lambda \mathrm{I}P - P^{-1}AP| = |P^{-1}(\lambda \mathrm{I} - A)P| \\
&= |P^{-1}||\lambda \mathrm{I} - A||P| = |P^{-1}||P||\lambda \mathrm{I} - A| = |P^{-1}P||\lambda \mathrm{I} - A| \\
&= |\lambda \mathrm{I} - A|
\end{aligned}$$

A與B具有相同的特徵多項式

故A與B具有相同的特徵值

- 範例 1：可對角化矩陣

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 0\\ 3 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$$

解：特徵方程式：

$$|\lambda \mathrm{I}-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -3 & 0\\ -3 & \lambda-1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda-4)(\lambda+2)^2=0$$

特徵值為：$\lambda_1=4, \lambda_2=-2, \lambda_3=-2$

$$(1)\lambda=4\Rightarrow \text{特徵向量為}\ p_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$$ (見p.501 範例5)

$$(2)\lambda=-2 \Rightarrow \text{特徵向量為 } p_2=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix},\ p_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$ (見p.501 範例5)

$$P=[p_1 \quad p_2 \quad p_3]=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\1 & -1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix} \Rightarrow P^{-1}AP=\begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\0 & -2 & 0\\0 & 0 & -2\end{bmatrix}$$

- 注意：

(1) $$P=[p_2 \quad p_1 \quad p_3]=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\-1 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix} \Rightarrow P^{-1}AP=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\0 & 4 & 0\\0 & 0 & -2\end{bmatrix}$$

(2) $$P=[p_2 \quad p_3 \quad p_1]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\-1 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\end{bmatrix} \Rightarrow P^{-1}AP=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\0 & -2 & 0\\0 & 0 & 4\end{bmatrix}$$

- 定理 7.5：可對角化的條件

  一$n\times n$的矩陣A為可對角化，若且唯若它有n個線性獨立的特徵向量

證明：

$(\Rightarrow)A$可對角化

存在一可逆矩陣P使得$D=P^{-1}AP$為對角矩陣

令$P=[p_1 \mid p_2 \mid \cdots \mid p_n]$及$D=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$

$$PD=[p_1 \mid p_2 \mid \cdots \mid p_n]\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$=[\lambda_1 p_1 \mid \lambda_2 p_2 \mid \cdots \mid \lambda_n p_n]$$

$\because AP = [Ap_1 \mid Ap_2 \mid \cdots \mid Ap_n]$

$\therefore AP = PD$

$Ap_i = \lambda_i p_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$

($i.e.$ P的行向量p_i為A的特徵向量)

$\because P$為可逆矩陣 $\Rightarrow p_1, p_1, \cdots, p_n$線性獨立

故A具有n個線性獨立的特徵向量

($\Leftarrow$)A具有n個線性獨立的特徵向量$p_1, p_2, \cdots p_n$

分別對應於特徵值$\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n$

$Ap_i = \lambda_i p_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$

令$P = [p_1 \mid p_2 \mid \cdots \mid p_n]$

$$AP = A[p_1 \mid p_2 \mid \cdots \mid p_n] = [Ap_1 \mid Ap_2 \mid \cdots \mid Ap_n]$$

$$= [\lambda_1 p_1 \mid \lambda_2 p_2 \mid \cdots \mid \lambda_n p_n]$$

$$= [p_1 \mid p_2 \mid \cdots \mid p_n]\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = PD$$

$\because p_1, p_1, \cdots, p_n$線性獨立$\Rightarrow P$為可逆矩陣

$\therefore P^{-1}AP = D$

$\Rightarrow A$可對角化

- 注意：若不存在n組線性獨立的向量
  則$n \times n$矩陣A不可對角化

- 範例 4：不可對角化

$$證明A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 0\\3 & 1 & 0\\0 & 0 & -2\end{bmatrix}為不可對角化矩陣$$

解：特徵方程式：

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2\\0 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2=0$$

特徵值為：$\lambda_1=1$

$$\lambda I-A=I-A=\begin{bmatrix}0 & -2\\0 & 0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow 特徵向量為p_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

A沒有兩個線性獨立的特徵向量

故A不可對角化

- $n\times n$方陣對角化步驟

步驟一：找出n個線性獨立的特徵向量 $p_1, p_2, \cdots p_n$

步驟二：令 $P=[p_1 \mid p_2 \mid \cdots \mid p_n]$

步驟三：

$$P^{-1}AP = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

其中，$Ap_i = \lambda_i p_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$

- 注意：構成矩陣P中所使用特徵向量的順序將會決定特徵值出現在D之主對角線上的順序

■ 範例 5：矩陣對角化

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

求矩陣P使得$P^{-1}AP$為對角矩陣

解：特徵方程式：

$$|\lambda \mathrm{I}-A|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 & 1 \\ -1 & \lambda-3 & -1 \\ 3 & -1 & \lambda+1 \end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda+2)(\lambda-3)=0$$

特徵值為：$\lambda_1=2, \lambda_2=-2, \lambda_3=3$

$$\lambda_1 = 2$$

$$\Rightarrow \lambda_1 \mathrm{I} - A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{特徵向量} p_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = -2$$

$$\Rightarrow \lambda_2 \mathrm{I} - A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -1 & -5 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} t \\ -\frac{1}{4} t \\ t \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \mathrm{t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{特徵向量} p_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_3 = 3$$

$$\Rightarrow \lambda_3 \mathrm{I} - A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t \\ t \\ t \end{bmatrix} = \mathrm{t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{特徵向量} p_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{令} P = [p_1 \quad p_2 \quad p_3] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

- 注意：k是一個正整數

$$(1)\ D=\begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix} \Rightarrow \quad D^k=\begin{bmatrix} d_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n^k \end{bmatrix}$$

$$(2)\ D=P^{-1}AP$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad D^k &= (P^{-1}AP)^k \\ &= (P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\cdots(P^{-1}AP) \\ &= P^{-1}A(PP^{-1})A(PP^{-1})\cdots(PP^{-1})AP \\ &= P^{-1}AA\cdots AP \\ &= P^{-1}A^kP \end{aligned}$$

$$\therefore A^k = PD^kP^{-1}$$

- 定理 7.6：可對角化的充份條件

若$n\times n$矩陣A有n個不同的特徵值，則對應的特徵向量為線性獨立且A為可對角化矩陣

- 範例 7：判斷A是否可對角化

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -3\end{bmatrix}$$

解：因為A為三角矩陣，其特徵值為

$$\lambda_1=2, \lambda_2=-2, \lambda_3=3$$

因為三個特徵值均不同，故A為可對角化矩陣

(定理7.6)

■ 範例 8：求線性轉換的對角矩陣

線性轉換$T: R^3 \to R^3$為

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 - x_3, x_1 + 3x_2 + x_3, -3x_1 + x_2 - x_3)$$

求R^3中的基底B使得T相對於B的矩陣為一對角矩陣

解：T的標準矩陣為

$$A = [T(e_1) \quad T(e_2) \quad T(e_3)] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

由範例5可知，三個特徵值均不同

$$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 3$$

因此A可對角化(定理7.6)

因此，範例5中三個線性獨立的特徵向量為

$$p_1 = (-1,0,1),\ p_2 = (1,-1,4),\ p_3 = (-1,1,1)$$

能形成一組基底B

$$B = \{(-1, 0, 1), (1, -1, 4), (-1, 1, 1)\}$$

則對於這組基底的矩陣D為一對角矩陣

$$\begin{aligned}
D &= \left[[T(p_1)]_B \ [T(p_2)]_B \ [T(p_3)]_B \right] \\
&= \left[[Ap_1]_B \ [Ap_2]_B \ [Ap_3]_B \right] \\
&= \left[[\lambda_1 p_1]_B \ [\lambda_2 p_2]_B \ [\lambda_3 p_3]_B \right] \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

摘要與復習 (7.2節之關鍵詞)

- diagonalization problem: 對角化問題
- diagonalization: 對角化
- diagonalizable matrix: 可對角化矩陣

7.3 對稱矩陣與正交對角化

- 對稱矩陣 (symmetric matrix)

  方陣A若相等於自己的轉置矩陣，則稱A為對稱矩陣

  即 $A = A^T$

- 範例 1：何者為對稱矩陣

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$ A為對稱矩陣

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$ B為對稱矩陣

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$ C為不對稱矩陣

定理7.7：對稱矩陣的特徵值

若A為一$n \times n$的對稱矩陣，則以下的性質為真

（1）A可對角化

（2）A的所有特徵值均為實數

（3）若A的特徵值λ具有重數k，則λ具有k個線性獨立的特徵向量。亦即λ的特徵空間的維度為k

- 範例 2：證明對稱矩陣為可對角化

$$A=\begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix}$$

證明：特徵方程式：

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a & -c \\ -c & \lambda - b \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a+b)\lambda + ab - c^2 = 0$$

二項式的判斷式：

$$\begin{aligned}(a+b)^2 - 4(ab - c^2) &= a^2 + 2ab + b^2 - 4ab + 4c^2 \\ &= a^2 - 2ab + b^2 + 4c^2 \\ &= \underline{(a-b)^2 + 4c^2} \geq 0\end{aligned}$$

(1) $(a-b)^2+4c^2=0$

$\Rightarrow\ a=b,\ c=0$

$A=\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$ 為對角矩陣

(2) $(a-b)^2+4c^2>0$

二項式$\lambda^2-(a+b)\lambda+ab-c^2=0$會有兩個實數根

A有兩個實數特徵值

$\Rightarrow A$為可對角化矩陣

- 正交矩陣 (orthogonal matrix)

一方陣P為正交若P為可逆且 $P^{-1}=P^T$

- Ex 4：正交矩陣

$$(a)\ P=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\text{為正交，因為}P^{-1}=P^T=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$(b)\ P=\begin{bmatrix}\frac{3}{5} & 0 & \frac{-4}{5}\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5}\end{bmatrix}\text{為正交，因為}P^{-1}=P^T=\begin{bmatrix}\frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5}\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{-4}{5} & 0 & \frac{3}{5}\end{bmatrix}$$

- 定理 7.8： 正交矩陣的性質

  一$n\times n$矩陣P為正交若且唯若它的行向量可形成一單範正交集

■ 範例 5： 證明P為正交矩陣

$$P=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0\\ \frac{-2}{3\sqrt{5}} & \frac{-4}{3\sqrt{5}} & \frac{5}{3\sqrt{5}}\end{bmatrix}$$

解：若P為正交矩陣，則 $P^{-1}=P^{T}\ \Rightarrow\ PP^{T}=\mathrm{I}$

$$PP^{T}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0\\ \frac{-2}{3\sqrt{5}} & \frac{-4}{3\sqrt{5}} & \frac{5}{3\sqrt{5}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{3\sqrt{5}}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-4}{3\sqrt{5}}\\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\mathrm{I}$$

令 $p_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\ \frac{-2}{\sqrt{5}}\\ \frac{-2}{3\sqrt{5}}\end{bmatrix},\ p_2=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\ \frac{1}{\sqrt{5}}\\ \frac{-4}{3\sqrt{5}}\end{bmatrix},\ p_3=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\ 0\\ \frac{5}{3\sqrt{5}}\end{bmatrix}$

則 $p_1 \cdot p_2 = p_1 \cdot p_3 = p_2 \cdot p_3 = 0$

$$\|p_1\| = \|p_2\| = \|p_3\| = 1$$

$\{p_1, p_2, p_3\}$為單範正交集

- 定理 7.9： 對稱矩陣的性質

令A為一$n \times n$的對稱矩陣。若λ_1及λ_2為A的不同特徵值，則其相對的特徵向量x_1與x_2為正交

- 範例 6：對稱矩陣之特徵向量

$$A=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}$$

證明相對於A之不同特徵值的任兩個特徵向量為正交

解： 特徵方程式：

$$|\lambda\mathrm{I}-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3 & -1\\ -1 & \lambda-3\end{vmatrix}=\lambda^2-6\lambda+8=(\lambda-2)(\lambda-4)=0$$

$\Rightarrow$ 特徵值為：$\lambda_1=2,\lambda_2=4$

$$(1)\ \lambda_1=2\Rightarrow\lambda_1\mathrm{I}-A=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ -1 & -1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\ \Rightarrow \mathrm{x}_1=s\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix},\ s\neq 0$$

$$(2)\ \lambda_2=4\Rightarrow\lambda_2\mathrm{I}-A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\ \Rightarrow \mathrm{x}_2=t\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix},\ t\neq 0$$

$$\mathrm{x}_1\cdot\mathrm{x}_2=\begin{bmatrix}-s\\ s\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}t\\ t\end{bmatrix}=st-st=0\ \Rightarrow\ \mathrm{x}_1 \text{ 與 } \mathrm{x}_2 \text{ 為正交}$$

- 定理 7.10： 對稱矩陣的基本定理

  令A為一$n\times n$的矩陣，則A為正交可對角化矩陣且具有實數的特徵值若且唯若 A為對稱矩陣

- 對稱矩陣的正交對角化

  令A為一$n\times n$的對稱矩陣

  1. 求A的特徵值並找出每個特徵值的重數
  2. 對於每一個重數為1的特徵值，求其單位特徵向量
  3. 對於每一個重數為$k\geq 2$的特徵值，求一組有k個線性獨立的特徵向量集。若這個向量集並非單範正交，利用Gram-Schmidt單範正交過程將之單範正交化
  4. 由步驟2與步驟3的結果產生一組有n個特徵向量的單範正交集。利用這些特徵向量來作為矩陣P的行向量。則矩陣 $P^{-1}AP=P^{T}AP=D$ 將會是一個對角矩陣

- 範例 7：判斷哪一個矩陣為正交可對角化

	對稱矩陣	可正交對角化	
$A_1=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&0&1\\1&1&1\end{bmatrix}$	○	○	(定理7.10)
$A_2=\begin{bmatrix}5&2&1\\2&1&8\\-1&8&0\end{bmatrix}$	×	×	(定理7.10)
$A_3=\begin{bmatrix}3&2&0\\2&0&1\end{bmatrix}$	×	×	(定理7.10)
$A_4=\begin{bmatrix}0&0\\0&-2\end{bmatrix}$	○	○	(定理7.10)

- 範例 9： 正交對角化

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \\ -2 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

求正交矩陣P將A對角化

解：

(1) $|\lambda I-A|=(\lambda-3)^2(\lambda+6)=0$

$\lambda_1=-6, \lambda_2=3$(具重數2)

(2) $\lambda_1=-6,\ \ v_1=(1,-2,2)\ \Rightarrow\ u_1=\dfrac{v_1}{\|v_1\|}=(\frac{1}{3},\frac{-2}{3},\frac{2}{3})$

(3) $\lambda_2=3,\ \ v_2=(2,1,0),\ v_3=(-2,0,1)$

線性獨立

Gram-Schmidt 過程

$$w_2 = v_2 = (2, 1, 0), \quad w_3 = v_3 - \frac{v_3 \cdot w_2}{w_2 \cdot w_2} w_2 = (\tfrac{-2}{5}, \tfrac{4}{5}, 1)$$

$$u_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = (\tfrac{2}{\sqrt{5}}, \tfrac{1}{\sqrt{5}}, 0), \quad u_3 = \frac{w_3}{\|w_3\|} = (\tfrac{-2}{3\sqrt{5}}, \tfrac{4}{3\sqrt{5}}, \tfrac{5}{3\sqrt{5}})$$

(4)

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{3\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad P^{-1}AP = P^{T}AP = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

摘要與復習 (7.3節之關鍵詞)

- symmetric matrix: 對稱矩陣
- orthogonal matrix: 正交矩陣
- orthonormal set: 單範正交集
- orthogonal diagonalization: 正交對角化

族群成長

矩陣可以用來建立一個族群成長的模型。在建立過程的第一個步驟，就是要將族群分成幾個相同年齡層的層級。舉例來說，如果成員中的最大年齡為 L 歲，則年齡層可以如下所示的分成 n 個層級。

$$\underset{\substack{\text{第一個}\\\text{年齡層}}}{\left[0, \frac{L}{n}\right)}, \quad \underset{\substack{\text{第二個}\\\text{年齡層}}}{\left[\frac{L}{n}, \frac{2L}{n}\right)}, \quad \ldots \quad , \underset{\substack{\text{第 } n \text{ 個}\\\text{年齡層}}}{\left[\frac{(n-1)L}{n}, L\right]}$$

分佈在每個年齡層的族群數量則可以利用**年齡分佈 (age distribution)** 向量來表示

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{第一個年齡層的數量} \\ \text{第二個年齡層的數量} \\ \\ \text{第 } n \text{ 個年齡層的數量} \end{array}$$

在經過 L/n 年後，第 i 個年齡層中的成員存活，而成為第 $i+1$ 個年齡層成員的機率為 p_i，其中

$$0 \le p_i \le 1,\ i = 1, 2,\ \ldots\ , n-1$$

由第 i 個年齡層中一個成員所產生的子代平均個數為 b_i，其中

$$0 \le b_i,\ i = 1, 2,\ \ldots\ , n$$

這些數字可表示成矩陣形式，如下所示。

$$A = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_{n-1} & b_n \\ p_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & p_{n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

在一段給定的時間中，將此**年齡轉換矩陣 (age transition matrix)** 與年齡分佈向量相乘，將可得到下一個週期的年齡分佈情形。即

$$A\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_{i+1}$$

此過程如範例 1 所述。

範例 1　族群成長模型

在一研究單位中所飼養的兔子族群具有以下的特性。

(a) 有一半的兔子會在第一年存活下來。在第一年存活中的一半會在第二年存活下來。而最長的生命週期為三年。

(b) 在第一年間，兔子不會產生子代。在第二年子代產生的平均數量是 6，而在第三年的平均數量是 8。

研究室的兔子族群包含了 24 隻在第一個年齡層的兔子，24 隻在第二個年齡層，20 隻在第三個年齡層。試問一年之後，每個年齡層的兔子各有多少隻？

- **解**：目前的年齡分佈向量為

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 24 \\ 24 \\ 20 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} 0 \le \text{年齡} < 1 \\ 1 \le \text{年齡} < 2 \\ 2 \le \text{年齡} \le 3 \end{matrix}$$

而年齡轉換矩陣為

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 8 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}$$

一年之後年齡分佈向量將會變成

$$\mathbf{x}_2 = A\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 8 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 24 \\ 24 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 304 \\ 12 \\ 12 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} 0 \le \text{年齡} < 1 \\ 1 \le \text{年齡} < 2 \\ 2 \le \text{年齡} \le 3 \end{matrix}$$

如果以範例 1 中的成長模式再延續到下一年，則兔子族群將會變成

$$\mathbf{x}_3 = A\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 8 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 304 \\ 12 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 168 \\ 152 \\ 6 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} 0 \le \text{年齡} < 1 \\ 1 \le \text{年齡} < 2 \\ 2 \le \text{年齡} \le 3 \end{matrix}$$

由年齡分佈向量 $\mathbf{x}_1$、$\mathbf{x}_2$ 與 $\mathbf{x}_3$ 中，我們可以看出每一年這三個年齡層中兔子的比例都會改變。假設研究單位試圖想要讓族群的成長有一個穩定的模式，則每一年每個年齡層的比例必須維持一定。為了達到穩定成長模式的目標，第 $(n+1)$ 個年齡分佈向量與第 n 個年齡分佈向量之間，必須存在一個整數倍的關係。即 $A\mathbf{x}_n = \mathbf{x}_{n+1} + \lambda \mathbf{x}_n$。因此研究單位可以藉由找到 A 的特徵向量，來得到確保每年每個年齡層的比例相同的成長模式。範例 2 說明了要如何來解決這個問題。

範例 2 求穩定的年齡分佈向量

求範例 1 中族群的穩定年齡分佈向量。

解： 為了解決這個問題，我們找出特徵值 λ 與相對應的特徵向量 $\mathbf{x}$ 以使得

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

A 的特徵多項式為

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -6 & -8 \\ -0.5 & \lambda & 0 \\ 0 & -0.5 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 3\lambda - 2 = (\lambda + 1)^2(\lambda - 2),$$

這意味著特徵值為 -1 與 2。選擇正數，令 $\lambda=2$。為了找到相對應的特徵向量，對矩陣 $2I-A$ 進行列簡化可得

$$\begin{bmatrix} 2 & -6 & -8 \\ -0.5 & 2 & 0 \\ 0 & -0.5 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -16 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

因此得到 $\lambda=2$ 所對應的特徵向量為

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}16t\\4t\\t\end{bmatrix}=t\begin{bmatrix}16\\4\\1\end{bmatrix}$$

舉例來說，若 $t=2$，則初始的年齡分佈向量將是

$$\mathbf{x}_1=\begin{bmatrix}32\\8\\2\end{bmatrix}\quad\begin{array}{l}0\le \text{年齡}<1\\1\le \text{年齡}<2\\2\le \text{年齡}\le 3\end{array}$$

且下一年的年齡分佈向量將會是

$$\mathbf{x}_2=A\mathbf{x}_1=\begin{bmatrix}0&6&8\\0.5&0&0\\0&0.5&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}32\\8\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}64\\16\\4\end{bmatrix}\quad\begin{array}{l}0\le \text{年齡}<1\\1\le \text{年齡}<2\\2\le \text{年齡}\le 3\end{array}$$

注意三個年齡層的比例仍然是 16 : 4 : 1，因此每個年齡層的比例均保持一定。

線性微分方程系統 (微積分)

一階線性微分方程系統 (system of first-order linear differential equations) 可以寫成

$$
\begin{aligned}
y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n \\
y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n \\
&\vdots \\
y_n' &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n
\end{aligned}
$$

其中每個 y_i 為一 t 的函數且 $y_i' = dy_i/dt$。如果我們令

$$
\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad \text{及} \quad \mathbf{y}' = \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{bmatrix}
$$

則系統可以寫成矩陣的形式如 $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$。

範例 3　求解線性微分方程式系統

求解下列的線性微分方程式系統。

$$
\begin{aligned}
y_1' &= 4y_1 \\
y_2' &= -y_2 \\
y_3' &= 2y_3
\end{aligned}
$$

解： 由微積分我們知道微分方程式 $y' = ky$ 的解為

$$y = Ce^{kt}$$

因此上述系統的解為

$$
\begin{aligned}
y_1 &= C_1e^{4t} \\
y_2 &= C_2e^{-t} \\
y_3 &= C_3e^{2t}
\end{aligned}
$$

二次項

在 4.8 節的介紹中，特徵值與特徵向量可以用來解決座標軸旋轉的問題。回想當時對二次方程式

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \qquad \text{二次方程式}$$

只要方程式中沒有 xy 項 (即 $b=0$)，其圖形的分類是十分直接的。要是方程式中包含了 xy 項，只要將軸稍作旋轉，以將 xy 項移除即可輕易地完成這個分類。所產生的方程式 (相對於新的 $x'y'$-軸) 將可以寫成以下的形式

$$a'(x')^2 + c'(y')^2 + d'x' + e'y' + f' = 0.$$

我們將會知道係數 a' 與 c' 是矩陣

$$A = \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix}$$

的特徵值。下列表示式

$$ax^2 + bxy + cy^2 \qquad \text{二次項}$$

被稱為二次方程式 $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ 的**二次項 (quadratic form)**，而矩陣 A 則稱為**二次項矩陣 (the matrix of the quadratic form)**。注意由定義可知，矩陣 A 為對稱矩陣。此外，A 將會是一個對角矩陣若且唯若矩陣 A 的相對二次項沒有 xy 項，如範例 5 所要說明的。

範例 5 求二次項矩陣

求與以下二次方程式相關的二次項矩陣。

(a) $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$

(b) $13x^2 - 10xy + 13y^2 - 72 = 0$

解：(a) 因為 $a=4$，$b=0$ 以及 $c=9$，矩陣為

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

對角矩陣 (沒有 xy 項)

(b) 因為 $a=13$，$b=-10$ 以及 $c=13$，矩陣為

$$A = \begin{bmatrix} 13 & -5 \\ -5 & 13 \end{bmatrix}$$

非對角矩陣 (有 xy 項)

方程式 $4x^2+9y^2-36=0$ 的標準式為

$$\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{2^2}=1$$

為一橢圓的方程式，如圖 7.3 所示。方程式 $13x^2-10xy+13y^2-72=0$ 的圖也同樣是一個橢圓，雖然無法由一些簡單的觀察來獲得證實。事實上，如果我們將 x-軸與 y-軸往反時針方向旋轉 45°，以形成一個新的 $x'y'$ 座標系統，這個方程式即可以寫成

$$\frac{(x')^2}{3^2}+\frac{(y')^2}{2^2}=1$$

亦為一橢圓的方程式，如圖 7.4 所示。

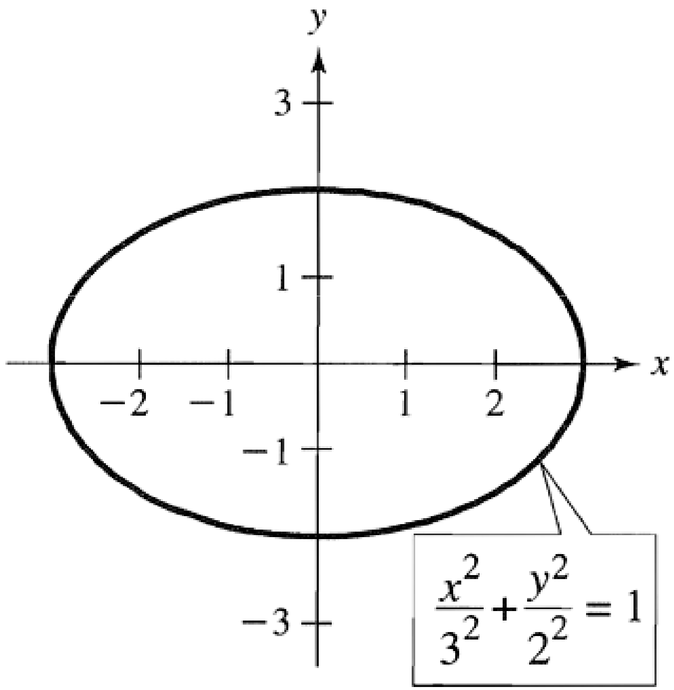

y
x
3
1
−1
−3
−2
−1
1
2
$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$

圖 7.3

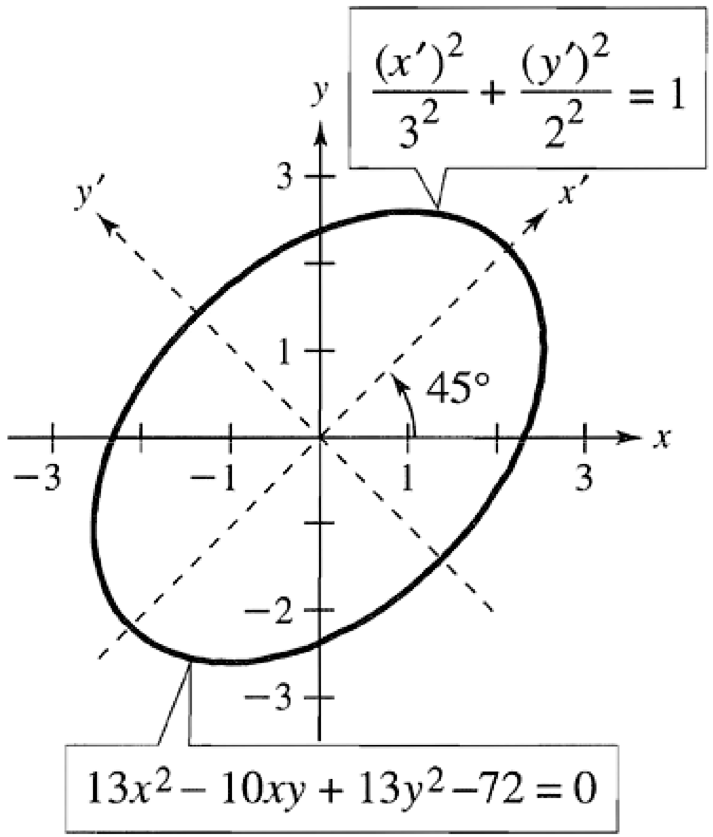

y
x
y′
x′
$\frac{(x')^2}{3^2} + \frac{(y')^2}{2^2} = 1$
3
1
−2
−3
−3
−1
1
3
45°
$13x^2 - 10xy + 13y^2 - 72 = 0$

圖 7.4

為了觀察二次項形式的矩陣如何對座標軸進行旋轉的動作，因此令

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

則二次表示式 $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$ 可以寫成如下的矩陣形式。

$$\begin{aligned} X^TAX + [d \quad e]X + f &= [x \quad y]\begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [d \quad e]\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + f \\ &= ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f \end{aligned}$$

若 $b=0$，則沒有旋轉的必要。但是若 $b\neq 0$，因為 A 為對稱，則我們可以使用定理 7.10 來得知必存在一個正交矩陣 P，使得 $P^TAP=D$ 為對角矩陣。因此，若我們令

$$P^TX = X' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

由 $X=PX'$，我們可以得到

$$\begin{aligned} X^TAX &= (PX')^TA(PX') \\ &= (X')^TP^TAPX' \\ &= (X')^TDX' \end{aligned}$$

在選擇矩陣 P 時必須要小心，因為若 P 為正交，其行列式將為 ± 1 。所以我們可以知道 (見習題 55) 若選擇 P 使得 $|P|=1$，則 P 將會形成底下的形式

$$P = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

其中 θ 為由測量正 x 軸到正 x' 軸之圓錐曲線所旋轉的角度。這個結果為我們導引出以下的定理，**主軸定理 (Principal Axes Theorem)**。

主軸定理

對於一個圓錐曲線的方程式 $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$，如果 P 為一正交矩陣且 $|P| = 1$，則經由 $X = PX'$ 的旋轉轉換可將 xy-項刪除，P 可將 A 對角化，即

$$P^TAP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

其中 λ_1 與 λ_2 為 A 的特徵值。而旋轉後之圓錐曲線的方程式為

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + [d \quad e]PX' + f = 0$$

注意 矩陣乘積 $[d \quad e]PX'$ 具有以下形式

$$[d \quad e]PX' = (d\cos\theta + e\sin\theta)x' + (-d\sin\theta + e\cos\theta)y'$$

範例 6 圓錐曲線的旋轉

利用座標軸的旋轉來將二次方程式 $13x^2-10xy+13y^2-72=0$ 中的 xy-項刪除。

解： 相對於上述方程式的二次項矩陣為

$$A=\begin{bmatrix}13 & -5\\ -5 & 13\end{bmatrix}$$

由於 A 的特徵多項式為

$$\begin{vmatrix}\lambda-13 & 5\\ 5 & \lambda-13\end{vmatrix}=(\lambda-13)^2-25=(\lambda-8)(\lambda-18)$$

所以可以得到 A 的特徵值為 $\lambda_1=8$ 與 $\lambda_2=18$。因此旋轉後的圓錐曲線的方程式為

$$8(x')^2+18(y')^2-72=0$$

若寫成標準式，此方程式

$$\frac{(x')^2}{3^2}+\frac{(y')^2}{2^2}=1$$

為一橢圓的方程式 (見圖 7.4)。

在範例 6 中，A 的特徵向量為

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad 與 \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

我們可以將之單範化以形成 P 的行向量，如下所示。

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

首先要注意 $|P| = 1$，這意味著 P 是一個旋轉量。此外，由於 $\cos 45° = 1/\sqrt{2} = \sin 45°$，我們可以得到 $\theta = 45°$，如圖 7.4 所示。

在主軸定理中正交矩陣 P 的選取並不是唯一的。它主要取決於特徵值 λ_1 與 λ_2 的順序以及接下來特徵向量 $\mathbf{x}_1$ 與 $\mathbf{x}_2$ 的選取。舉例來說，在範例 6 裡，底下任何一個 P 的選擇均可。

$$\begin{array}{cc} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$
$$\lambda_1 = 8,\ \lambda_2 = 18$$
$$\theta = 225°$$

$$\begin{array}{cc} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$
$$\lambda_1 = 18,\ \lambda_2 = 8$$
$$\theta = 135°$$

$$\begin{array}{cc} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$
$$\lambda_1 = 18,\ \lambda_2 = 8$$
$$\theta = 315°$$

對於這些 P 的選擇，當然，所有圓錐曲線旋轉後的圖形都會是一樣的 (見圖 7.5)。

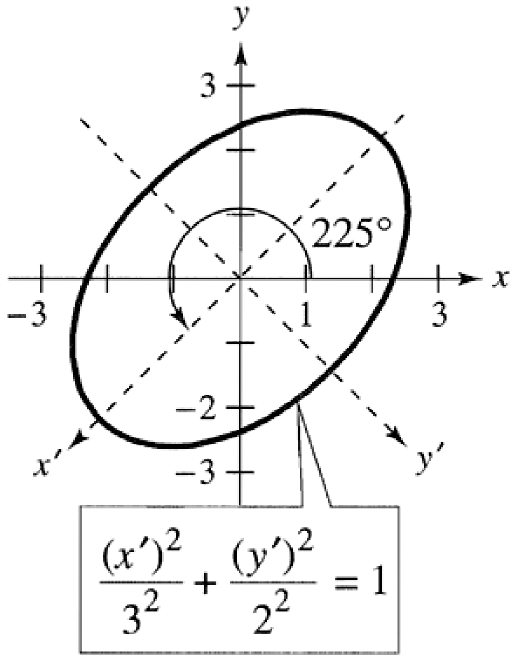


圖 7.5

一般應用主軸定理的步驟摘要如下：

1. 建立矩陣 A 並求其特徵值 λ_1 與 λ_2。
2. 求 λ_1 與 λ_2 相對應的特徵向量，並對特徵向量進行單範化來建立矩陣 P。
3. 若 $|P| = -1$，將 P 的其中一行乘以 -1，以得到下列形式的矩陣

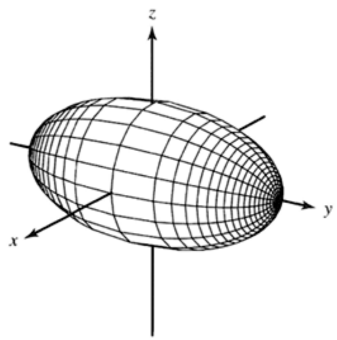
$$P = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

4. 角度 θ 即代表圓錐曲線旋轉的角度。
5. 旋轉後的圓錐曲線的方程式為 $\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + [d \quad e]PX' + f = 0$。

二次項也可以用來分析空間中的二次表面的方程式，二次表面類似於圓錐曲線剖面的三維圖形。這個空間中的二次表面的方程式為一個具有以下形式的二次多項式

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz + j = 0$$

二次表面共有六種基本的型式：橢面 (ellipsoids)、一片的雙曲面 (hyperboloids of one sheet)、兩片的雙曲面 (hyperboloids of two sheets)、橢圓的圓錐 (elliptic cones)、橢圓拋物面 (elliptic paraboloids) 以及雙曲線拋物面 (hyperbolic paraboloids)。表面和平面的交叉點稱為表面在平面上的**軌跡 (trace)**，其能有助於表面圖形在空間中的顯現。六個基本型式的二次表面與它們的軌跡一併展示在下列圖中。

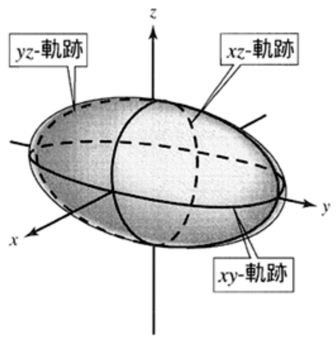


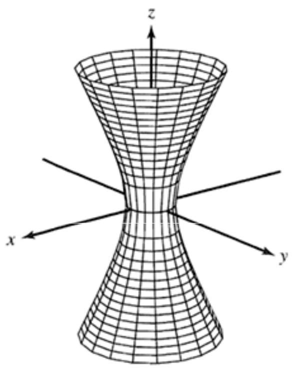
橢面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

軌跡	平面
橢圓	與 xy 平面平行
橢圓	與 xz 平面平行
橢圓	與 yz 平面平行

表面是一球狀體若 $a=b=c\neq 0$。



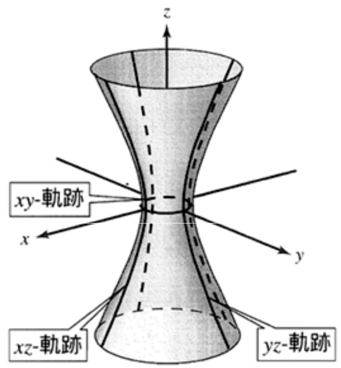


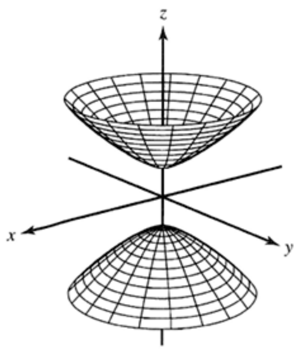
一片的雙曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

軌跡	平面
橢圓	與 xy 平面平行
雙曲線	與 xz 平面平行
雙曲線	與 yz 平面平行

雙曲面的軸相對於負係數的變數。



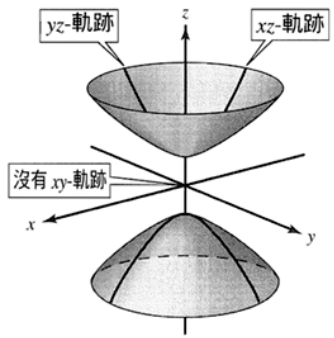


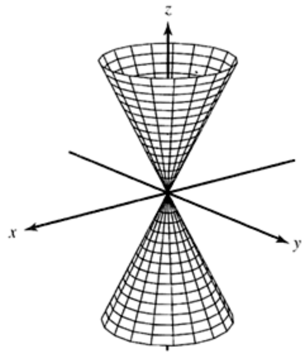
兩片的雙曲面

$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

軌跡	平面
橢圓	與 xy 平面平行
雙曲線	與 xz 平面平行
雙曲線	與 yz 平面平行

雙曲面的軸相對於正係數的變數。在垂直於這個軸的座標平面沒有軌跡。



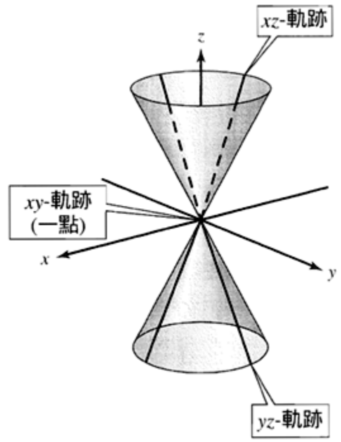


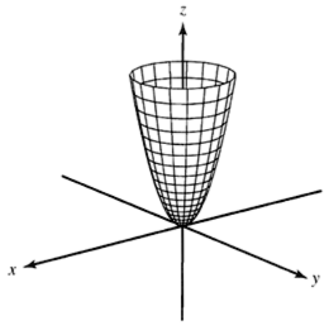
橢圓圓錐

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

軌跡	平面
橢圓	與 xy 平面平行
雙曲線	與 xz 平面平行
雙曲線	與 yz 平面平行

圓錐的軸相對於負係數變數。在平行於這個軸的座標平面的軌跡是相交的直線。



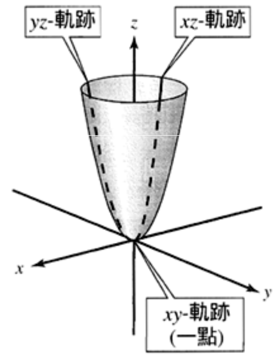


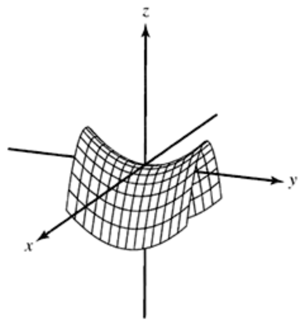
橢圓拋物面

$$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$$

軌跡	平面
橢圓	與 xy 平面平行
拋物線	與 xz 平面平行
拋物線	與 yz 平面平行

拋物面的軸相對於第一冪次的變數。



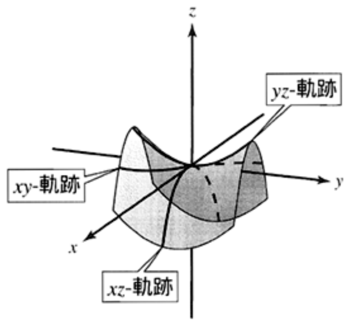


雙曲線拋物面

$$z=\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}$$

軌跡	平面
雙曲線	與 xy 平面平行
拋物線	與 xz 平面平行
拋物線	與 yz 平面平行

拋物面的軸相對於第一冪次的變數。



下列方程式的二次項

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz + j = 0 \qquad \text{二次表面}$$

定義為

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz \qquad \text{二次項}$$

則相對應的矩陣為

$$A = \begin{bmatrix} a & \frac{d}{2} & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & b & \frac{f}{2} \\ \frac{e}{2} & \frac{f}{2} & c \end{bmatrix}$$

以三維的角度看來，主軸定理關係到旋轉表面的公式中所形成 A 矩陣的特徵值與特徵向量，如範例 8。

範例 8 **二次表面的旋轉**

執行一個軸的旋轉來消去下列二次方程式中的 xz 項。

$$5x^2 + 4y^2 + 5z^2 + 8xz - 36 = 0$$

解：相對於這個二次式的矩陣 A 為

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

其特徵值為 $\lambda_1 = 1$、$\lambda_2 = 4$ 以及 $\lambda_3 = 9$。因此，在旋轉的 $x'y'z'$-系統中，二次式為 $(x')^2 + 4(y')^2 + 9(z')^2 - 36 = 0$，以標準式來表示為

$$\frac{(x')^2}{6^2} + \frac{(y')^2}{3^2} + \frac{(z')^2}{2^2} = 1$$

這個方程式的圖形為一橢圓圖形。如圖 7.7 所示，$x'y'z'$-軸代表以 y-軸為旋轉軸反時針旋轉 45° 的結果。此外，以 A 的特徵向量為行向量的正交矩陣

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

具有 P^TAP 為對角矩陣的特性。