第四章

向量空間

4.1 R^n上的向量
4.2 向量空間
4.3 向量空間的子空間
4.4 生成集合與線性獨立
4.5 基底與維度
4.6 矩陣的秩與線性方程式系統
4.7 座標和基底變換
4.8 向量空間的應用

投影片設計製作者
淡江大學 電機系 翁慶昌 教授

4.1 R^n上的向量

- 有序的n項 (ordered n-tuple)

  n個實數的序列 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

- n維空間 (n-space)： R^n

  所有有序的n項所構成的集合

▪範例： $n=1 \Rightarrow$ 一個實數 x

$$\Rightarrow R^1 = 1\text{維空間}$$
$$= \text{所有實數所構成的集合}$$

$n=2 \Rightarrow$ 一個有序的對 (x_1, x_2)

$$\Rightarrow R^2 = 2\text{維空間}$$
$$= \text{所有有序成對實數}(x_1, x_2)\text{所構成的集合}$$

$n=3 \Rightarrow$ 一個有序的三項 (x_1, x_2, x_3)

$$\Rightarrow R^3 = 3\text{維空間}$$
$$= \text{所有有序三項實數}(x_1, x_2, x_3)\text{所構成的集合}$$

$n=4 \Rightarrow$ 一個有序的四項 (x_1, x_2, x_3, x_4)

$$\Rightarrow R^4 = 4\text{維空間}$$
$$= \text{所有有序四項實數}(x_1, x_2, x_3, x_4)\text{所構成的集合}$$

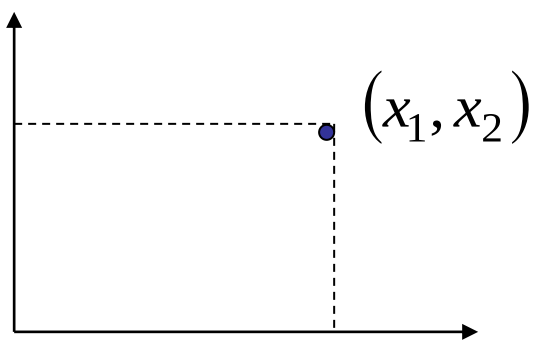
- 注意：

(1) n項 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 可以被視為R^n上的一個點，其中x_i為它的座標值

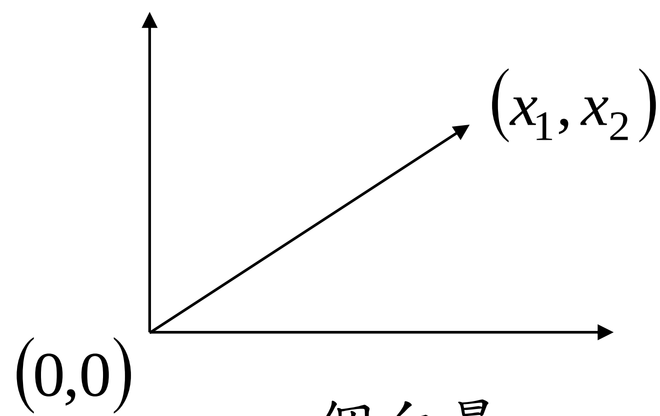
(2) n項 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 可以被視為R^n上的一個向量

$$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

- 範例：



一個點



一個向量

$$\mathbf{u}=(u_1,u_2,\cdots,u_n),\ \ \mathbf{v}=(v_1,v_2,\cdots,v_n)$$ (R^n上兩個向量)

- 相等 (equal)

$$\mathbf{u}=\mathbf{v}\text{若且唯若 } u_1=v_1,\ u_2=v_2,\cdots,u_n=v_n$$

- 向量加法 (vector addition)

$$\mathbf{u}+\mathbf{v}=(u_1+v_1,u_2+v_2,\cdots,u_n+v_n)$$

- 純量乘法 (scalar multiplication)

$$c\mathbf{u}=(cu_1,cu_2,\cdots,cu_n)$$

- 注意：

上述所定義的向量加法與純量乘法二者被稱為在R^n上的標準運算(standard operations in R^n)

- 負向量 (negative)

$$-\mathbf{u} = (-u_1, -u_2, -u_3, \ldots, -u_n)$$

- 向量差 (difference)

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = (u_1 - v_1, u_2 - v_2, u_3 - v_3, \ldots, u_n - v_n)$$

- 零向量 (zero vector)

$$\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$$

- 注意：

(1) 零向量**0**被稱為加法單位元素(additive identity)

(2) 向量**-v**被稱為**v**的加法反元素(additive inverse)

- 定理 4.2：向量加法與純量乘法的性質

令 **u**, **v**, 與**w**為在R^n中之向量，及c,d為純量

(1) **u**+**v**為R^n中之向量

(2) **u**+**v**=**v**+**u**

(3) (**u**+**v**)+**w**=**u**+(**v**+**w**)

(4) **u**+**0**=**u**

(5) **u**+(-**u**)=**0**

(6) c**u**為在R^n中之向量

(7) c(**u**+**v**)=c**u**+c**v**

(8) (c+d)**u**=c**u**+d**u**

(9) c(d**u**)=(cd)**u**

(10) 1(**u**)=**u**

- 範例 5： R^4 中的向量運算

令**u**=(2,-1,5,0)，**v**=(4,3,1,-1)，與**w**=(-6,2,0,3)為R^4中的向量，求解下列中的每個 **x**

(a) **x** = 2**u** - (**v** + 3**w**)

(b) 3(**x**+**w**)= 2**u**-**v**+**x**

解：(a)

$$\begin{aligned} x &= 2u-(v+3w) \\ &= 2u-v-3w \\ &= (4,-2,10,0)-(4,3,1,-1)-(-18,6,0,9) \\ &= (4-4+18,-2-3-6,10-1-0,0+1-9) \\ &= (18,-11,9,-8). \end{aligned}$$

(b)

$$
\begin{aligned}
3(x+w) &= 2u - v + x \\
3x + 3w &= 2u - v + x \\
3x - x &= 2u - v - 3w \\
2x &= 2u - v - 3w \\
x &= u - \tfrac{1}{2}v - \tfrac{3}{2}w \\
&= (2,1,5,0) + \left(-2, \tfrac{-3}{2}, \tfrac{-1}{2}, \tfrac{1}{2}\right) + \left(9, -3, 0, \tfrac{-9}{2}\right) \\
&= \left(9, \tfrac{-11}{2}, \tfrac{9}{2}, -4\right)
\end{aligned}
$$

- 定理 4.3：加法單位元素與加法反元素的性質

令$\mathbf{v}$為R^n中的向量，c為純量。則下列性質為真

(1) 加法單位元素具有唯一性，也就是若$\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}$，則$\mathbf{u}=\mathbf{0}$

(2) 加法反元素具有唯一性，也就是若 $\mathbf{v}+\mathbf{u}=\mathbf{0}$，則$\mathbf{u}=-\mathbf{v}$

(3) $0\mathbf{v}=\mathbf{0}$

(4) $c\mathbf{0}=\mathbf{0}$

(5) 若$c\mathbf{v}=\mathbf{0}$，則$c=0$或$\mathbf{v}=\mathbf{0}$

(6) $-(-\mathbf{v})=\mathbf{v}$

- 線性組合 (linear combination)

向量**x**被稱為$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$的線性組合，若它可以被表示為

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n \qquad c_1, c_2, \cdots, c_n : \text{純量}$$

- 範例 6：

在R^3中 $\mathbf{x}=(-1,-2,-2)$，$\mathbf{u}=(0,1,4)$，$\mathbf{v}=(-1,1,2)$，以及 $\mathbf{w}=(3,1,2)$。求 a, b 與 c 使得 $\mathbf{x}=a\mathbf{u}+b\mathbf{v}+c\mathbf{w}$

解：

$$\Rightarrow \begin{array}{rcrcrcr} & & -b & + & 3c & = & -1 \\ a & + & b & + & c & = & -2 \\ 4a & + & 2b & + & 2c & = & -2 \end{array}$$

$$\Rightarrow a = 1,\ b = -2,\ c = -1$$

所以 $\mathbf{x} = \mathbf{u} - 2\mathbf{v} - \mathbf{w}$

- 注意：

在 R^n 的一個向量 $\mathbf{u}=(u_1,u_2,\ldots,u_n)$ 可以被表示成

一個1xn的列矩陣(列向量) $\mathbf{u}=[u_1,\ u_2,\cdots,u_n]$

或

一個nx1的行矩陣(行向量) $\mathbf{u}=\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$

(因為加法與純量乘法的矩陣運算所得到的結果與相對應的向量運算的結果一樣)

向量加法

$$\mathbf{u}+\mathbf{v}=(u_1,u_2,\cdots,u_n)+(v_1,v_2,\cdots,v_n)$$
$$=(u_1+v_1,u_2+v_2,\cdots,u_n+v_n)$$

$$\mathbf{u}+\mathbf{v}=[u_1,u_2,\cdots,u_n]+[v_1,v_2,\cdots,v_n]$$
$$=[u_1+v_1,u_2+v_2,\cdots,u_n+v_n]$$

$$\mathbf{u}+\mathbf{v}=\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\\vdots\\u_n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\\vdots\\v_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u_1+v_1\\u_2+v_2\\\vdots\\u_n+v_n\end{bmatrix}$$

純量乘法

$$c\mathbf{u}=c(u_1,\ u_2,\cdots,\ u_n)$$
$$=(cu_1,cu_2,\cdots,\ cu_n)$$

$$c\mathbf{u}=c[u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_n]$$
$$=[cu_1,cu_2,\ \cdots,\ cu_n]$$

$$c\mathbf{u}=c\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\\vdots\\u_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}cu_1\\cu_2\\\vdots\\cu_n\end{bmatrix}$$

摘要與複習 (4.1節之關鍵詞)

- ordered n-tuple：有序的n項
- n-space：n維空間
- equal：相等
- vector：向量加法
- scalar multiplication：純量乘法
- negative：負向量
- difference：向量差
- zero vector：零向量
- additive identity：加法單位元素
- additive inverse：加法反元素

4.2 向量空間

- 向量空間 (vector space)

令V為一集合且在V上定義了兩個運算(向量加法與純量乘法)。若對V在上的每個向量**u**, **v**與**w**及每個純量c與d都符合下列的公理時，則稱V為向量空間

加法：

(1) **u**+**v** 屬於V 加法封閉

(2) **u**+**v**=**v**+**u** 交換性

(3) **u**+(**v**+**w**)=(**u**+**v**)+**w** 結合性

(4) 對在V中所有的**u**，V有零向量**0**使得**u**+**0**=**u** 加法單位元素

(5) 對在V中所有的**u**，在V中存在一向量使得**u**+(-**u**)=**0** 加法反元素

純量乘法：

(6) $c\mathbf{u}$ 屬於 V 純量乘法封閉

(7) $c(\mathbf{u}+\mathbf{v})=c\mathbf{u}+c\mathbf{v}$ 分配性

(8) $(c+d)\mathbf{u}=c\mathbf{u}+d\mathbf{u}$ 分配性

(9) $c(d\mathbf{u})=(cd)\mathbf{u}$ 結合性

(10) $1(\mathbf{u})=\mathbf{u}$ 純量單位元素

- 注意：

(1) 一個向量空間包含四個部分：

一個向量集合、一個純量集合、與兩個運算

V：非空集合

c：純量

$+(\mathbf{u},\mathbf{v})=\mathbf{u}+\mathbf{v}$： 向量加法

$\bullet(c,\mathbf{u})=c\mathbf{u}$： 純量乘法

$(V,\ \ +,\ \ \bullet)$ 被稱為一個向量空間

(2) 純量集合為實數集合 $\Rightarrow$ 實數向量空間

純量集合為複數集合 $\Rightarrow$ 複數向量空間

(3) $V=\{\mathbf{0}\}$： 零向量空間

- 常見的向量空間

(1)n維空間： R^n

$$(u_1, u_2, \cdots u_n) + (v_1, v_2, \cdots v_2) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \cdots u_n + v_n) \quad \text{向量加法}$$

$$k(u_1, u_2, \cdots u_n) = (ku_1, ku_2, \cdots ku_n) \quad \text{純量乘法}$$

(2)矩陣空間：$V = M_{m \times n}$（所有具有實數項的 $m \times n$矩陣集合）

範例：(m=n=2)

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11}+v_{11} & u_{12}+v_{12} \\ u_{21}+v_{21} & u_{22}+v_{22} \end{bmatrix} \quad \text{向量加法}$$

$$k\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ku_{11} & ku_{12} \\ ku_{21} & ku_{22} \end{bmatrix} \quad \text{純量乘法}$$

(3) n次多項式空間： $V=P_n(x)$

(所有小於或等於n次之多項式的集合)

$$p(x)+q(x)=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+\cdots+(a_n+b_n)x^n$$

$$kp(x)=ka_0+ka_1x+\cdots+ka_nx^n$$

(4) 函數空間： $V=c(-\infty,\infty)$

（定義在實數線上所有連續函數的集合）

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$

$$(kf)(x)=kf(x)$$

- 定理 4.4： 純量乘法的性質

令$\mathbf{v}$是向量空間中的任意元素，c是任意純量，則以下的性質成立

(1) $0\mathbf{v} = \mathbf{0}$

(2) $c\mathbf{0} = \mathbf{0}$

(3) 若$c\mathbf{v} = \mathbf{0}$，則$c = 0$或$\mathbf{v} = \mathbf{0}$

(4) $(-1)\mathbf{v} = -\mathbf{v}$

(1) $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ 屬於V 加法封閉

(2) $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$ 交換性

(3) $\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})=(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}$ 結合性

(4) 對在V中所有的$\mathbf{u}$，V有零向量$\mathbf{0}$使得$\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{u}$ 加法單位元素

(5) 對在V中所有的$\mathbf{u}$，在V中存在一向量使得$\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=\mathbf{0}$ 加法反元素

(6) $c\mathbf{u}$ 屬於 V 純量乘法封閉

(7) $c(\mathbf{u}+\mathbf{v})=c\mathbf{u}+c\mathbf{v}$ 分配性

(8) $(c+d)\mathbf{u}=c\mathbf{u}+d\mathbf{u}$ 分配性

(9) $c(d\mathbf{u})=(cd)\mathbf{u}$ 結合性

(10) $1(\mathbf{u})=\mathbf{u}$ 純量單位元素

- **注意：** 只要找到一個公理不符合就可以證明這集合不是向量空間。

- **範例 6：** 整數集合不是一個向量空間

  證明：

$$1 \in V, \tfrac{1}{2} \in R$$

$$(\tfrac{1}{2})(1) = \tfrac{1}{2} \notin V$$ （在純量相乘下並沒有封閉）

純量 整數 非整數

- **範例 7：** 二次多項式集合不是向量空間

  證明： 令 $p(x) = x^2$ 和 $q(x) = -x^2 + x + 1$

$$\Rightarrow p(x) + q(x) = x + 1 \notin V$$

在向量加法下不封閉

- 範例 8：一個不是向量空間的集合

$V=R^2$=所有實數有序對的集合

向量加法：$(u_1,u_2)+(v_1,v_2)=(u_1+v_1,u_2+v_2)$

純量乘法：$c(u_1,u_2)=(cu_1,0)$

證明V不是向量空間

解：

$\because 1(1,1)=(1,0)\neq(1,1)$

$\therefore$ 這集合(與兩個給定的運算)不是一個向量空間

摘要與複習 (4.2節之關鍵詞)

- vector space：向量空間
- n-space：n維空間
- matrix space：矩陣空間
- polynomial space：多項式空間
- function space：函數空間

4.3 向量空間的子空間

- 子空間 (subspace)

$(V,+,\bullet)$ ：一個向量空間

$$\left.\begin{array}{l} W \neq \phi \\ W \subseteq V \end{array}\right\}$$ 一個非空子集合

$(W,+,\bullet)$ ：一個向量空間(在V的加法和純量乘法的運算定義下)

$\Rightarrow$ W是一個V的子空間

- 顯然子空間 (trivial subspace)

每個向量空間V至少有兩個子空間

(1)零子空間$\{\mathbf{0}\}$是V的子空間

(2) V是V的子空間

- 定理 4.5：子空間的測試

若W是向量空間V的非空子集合，則W是V的子空間若且唯若下列的封閉條件成立

(1) 若 $\mathbf{u}$ 與 $\mathbf{v}$ 都在W上，則 $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ 也是在W上

(2) 若 $\mathbf{u}$ 在W上且 c 是任意純量，則 $c\mathbf{u}$ 也是在W上

- 範例： R^2 的子空間

  (1) $\{\mathbf{0}\}$ $\qquad \mathbf{0}=(0,0)$

  (2) 通過原點的直線

  (3) R^2

- 範例： R^3 的子空間

  (1) $\{\mathbf{0}\}$ $\qquad \mathbf{0}=(0,0,0)$

  (2) 通過原點的直線

  (3) 通過原點的平面

  (4) R^3

- 範例 2：對稱矩陣集合是$M_{2\times 2}$的子空間

  $M_{2\times 2}$為具有矩陣加法及純量乘法標準運算的向量空間

  W為所有2x2對稱矩陣的集合

  在標準運算下證明W是向量空間$M_{2\times 2}$的子空間

解：

$$\because W \subseteq M_{2\times 2} \qquad M_{2\times 2}:\text{向量空間}$$

$$\text{令 } A_1, A_2 \in W \quad (A_1^T = A_1, A_2^T = A_2)$$

$$A_1 \in W, A_2 \in W \Rightarrow (A_1 + A_2)^T = A_1^T + A_2^T = A_1 + A_2 \quad (A_1 + A_2 \in W)$$

$$k \in R, A \in W \Rightarrow (kA)^T = kA^T = kA \qquad (kA \in W)$$

$$\therefore W\text{是}M_{2\times 2}\text{的子空間}$$

- 範例 3：奇異矩陣集合不是$M_{2\times2}$的子空間

  $M_{2\times2}$為具有矩陣加法及純量乘法標準運算的向量空間

  W為二階奇異矩陣的集合

  在標準運算下證明W不是向量空間$M_{2\times2}$的子空間

解：

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\in W, B=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\in W$$

$$\therefore A+B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\notin W$$

$$\therefore W_2\text{不是}M_{2\times2}\text{的子空間}$$

- 範例 4：第一象限的集合不是R^2的子空間

證明在標準運算下的 $W=\{(x_1,x_2):x_1\geq 0$與$x_2\geq 0\}$
不是R^2的子空間

解：

令 $\mathbf{u}=(1,1)\in W$

$\because (-1)\mathbf{u}=(-1)(1,1)=(-1,-1)\notin W$ (純量相乘不封閉)

$\therefore W$ 不是 R^2 的子空間

- 範例 6：判斷R^2的子空間

下列兩個子集合中，何者是R^2的子空間

(a) 在直線 $x+2y=0$ 上點的集合

(b) 在直線 $x+2y=1$ 上點的集合

解：

(a) $W=\{(x,y) \mid x+2y=0\}=\{(-2t,t) \mid t\in R\}$

令 $v_1=(-2t_1,t_1)\in W \qquad v_2=(-2t_2,t_2)\in W$

$\because v_1+v_2=(-2(t_1+t_2),t_1+t_2)\in W$ (加法封閉)

$kv_1=(-2(kt_1),kt_1)\in W$ (乘法封閉)

$\therefore W$是R^2的子空間

(b) $W=\{(x,y)\mid x+2y=1\}$ (注意:零向量不在線上)

令 $v=(1,0)\in W$

$\because (-1)v=(-1,0)\notin W$

$\therefore W$ 不是 R^2 的子空間。

- 範例 8：判斷R^3的子空間

下列子集中，何者是 R^3 的子空間?

(a) $W=\{(x_1,x_2,1)\mid x_1,x_2\in R\}$

(b) $W=\{(x_1,x_1+x_3,x_3)\mid x_1,x_3\in R\}$

解：(a) 令 $\mathbf{v}=(0,0,1)\in W$

$$\Rightarrow(-1)\mathbf{v}=(0,0,-1)\notin W$$

$\therefore W$ 不是 R^3 的子空間

(b) 令 $\mathbf{v}=(\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_1+\mathrm{v}_3,\mathrm{v}_3)\in W$, $\mathbf{u}=(\mathrm{u}_1,\mathrm{u}_1+\mathrm{u}_3,\mathrm{u}_3)\in W$

$$\because\ \mathbf{v}+\mathbf{u}=\left(\mathrm{v}_1+\mathrm{u}_1,\left(\mathrm{v}_1+\mathrm{u}_1\right)+\left(\mathrm{v}_3+\mathrm{u}_3\right),\mathrm{v}_3+\mathrm{u}_3\right)\in \mathrm{W}$$

$$k\mathbf{v}=\left(k\mathrm{v}_1,\left(k\mathrm{v}_1\right)+\left(k\mathrm{v}_3\right),k\mathrm{v}_3\right)\in \mathrm{W}$$

$\therefore W$是R^3的子空間

- 定理 4.6：兩個子空間的交集也是子空間

若V和W都是向量空間U的子空間，則V與W的交集(表示成V∩U)也是U的子空間。

摘要與複習 (4.3節之關鍵詞)

- subspace：子空間
- trivial subspace：顯然子空間

4.4 生成集合與線性獨立

- 線性組合 (linear combination)

若向量$\mathbf{v}$可被表示成下列的形式

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \ldots + c_k\mathbf{u}_k \qquad c_1, c_2, \cdots, c_k：\text{純量}$$

則向量$\mathbf{v}$稱為向量$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_k$的線性組合。

- 範例 2：

$$\mathbf{v}_1 = (1,2,3) \quad \mathbf{v}_2 = (0,1,2) \quad \mathbf{v}_3 = (-1,0,1)$$

$\Rightarrow$ (a) $\mathbf{w} = (1,1,1)$ 是 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ 的線性組合。

(b) $\mathbf{w} = (1,-2,2)$ 不是 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ 的線性組合。

解：

(a) $\mathbf{w} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3$

$$(1,1,1) = c_1(1,2,3) + c_2(0,1,2) + c_3(-1,0,1)$$

$$= (c_1 - c_3, 2c_1 + c_2, 3c_1 + 2c_2 + c_3)$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} c_1 \qquad\quad - c_3 &= 1 \\ 2c_1 + c_2 \qquad\quad &= 1 \\ 3c_1 + 2c_2 + c_3 &= 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{G.-J.} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow c_1 = 1 + t\,,\; c_2 = -1 - 2t\,,\; c_3 = t$$

此系統有無線多組解

$$\overset{t=1}{\Rightarrow} \mathbf{w} = 2\mathbf{v}_1 - 3\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$$

(b)

$$\mathbf{w} = c_1\mathbf{v_1} + c_2\mathbf{v_2} + c_3\mathbf{v_3}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{Guass}-\text{Jordan Elimination}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{array}\right]$$

$\Rightarrow$此系統無解

$$\Rightarrow \mathbf{w} \neq c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3$$

- 生成集合 (spanning set)

令$S=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\cdots,\mathbf{v}_k\}$為向量空間$V$的子集合，若在$V$中的向量均可以寫成集合$S$中向量的線性組合，則稱$S$為$V$的生成集合

$$span(S)=\{c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2+\cdots+c_k\mathbf{v}_k \mid \forall c_i\in R\}$$

(S中所有向量之線性組合所構成的集合)

- 注意：

$$span(S)=V$$

$$\Rightarrow S\text{生成}V\ (S\ \ spans\ \ V)$$

$$V\text{ 被 }S\text{ 生成}$$

$$S\text{ 是}V\text{ 的生成集}$$

- 注意：

$$(1)\quad span(\phi)=\{0\}$$

$$(2)\quad S\subseteq span(S)$$

$$(3)\quad S_1,S_2\subseteq V$$

$$S_1\subseteq S_2\Rightarrow span(S_1)\subseteq span(S_2)$$

- 範例 5：

證明集合 $S=\{(1,2,3),(0,1,2),(-2,0,1)\}$ 生成 R^3。

解：

我們必須確定在 R^3 中任意一個向量 $\mathbf{u}=(\mathrm{u}_1,\mathrm{u}_2,\mathrm{u}_3)$ 是否可以為 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ 的線性組合。

$$\mathbf{u}\in \mathrm{R}^3 \Rightarrow \mathbf{u}=c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2+c_3\mathbf{v}_3$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow\ c_1 \qquad\qquad - 2c_3 &= \mathbf{u}_1\\ 2c_1 + \ c_2 \qquad\qquad &= \mathbf{u}_2\\ 3c_1 + 2c_2 + \ c_3 &= \mathbf{u}_3\end{aligned}$$

問題因此被化簡來確定這個系統是否和 $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3$ 所有的值一致。

$$\because |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$\Rightarrow$ 對所有的 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 均有唯一解

$$\Rightarrow span(S) = R^3$$

- 定理 4.7： span(S)為V的子空間

V為一向量空間

若 $S=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\cdots,\mathbf{v}_k\}$ 為向量空間V的一個向量集合，則

(a) $span(S)$為V的子空間

(b) $span(S)$是V中包含 S 的最小子空間

(包含S之其他V的子空間一定包含span(S))

- 線性獨立 (linear independent)
- 線性相依 (linear dependent)

$$S=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\cdots,\mathbf{v}_k\}$$

$$c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2+\cdots+c_k\mathbf{v}_k=\mathbf{0}$$

(1) 若方程式只有顯然解 ($c_1=c_2=\cdots=c_k=0$)
則 S 稱為線性獨立。

(2) 若方程式有非顯然解 則 S 稱為線性相依

- 注意：

(1) ϕ是線性獨立

(2) $\mathbf{0} \in S \Rightarrow S$ 為線性相依

(3) $\mathbf{v} \neq \mathbf{0} \Rightarrow \{\mathbf{v}\}$為線性獨立

(4) $S_1 \subseteq S_2$

S_1 為線性相依 $\Rightarrow S_2$ 為線性相依

S_2 為線性獨立 $\Rightarrow S_1$ 為線性獨立

- 範例 8：線性獨立的測試

確定下列在R^3中的向量集合是線性獨立或線性相依

$$S=\{\underset{\mathbf{v}_1}{(1,2,3)},\underset{\mathbf{v}_2}{(0,1,2)},\underset{\mathbf{v}_3}{(-2,0,1)}\}$$

解：

$$c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2+c_3\mathbf{v}_3=0 \Rightarrow \begin{aligned} c_1 \qquad\quad -2c_3 &= 0 \\ 2c_1+\ c_2+\qquad\ &= 0 \\ 3c_1+2c_2+\ c_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan Elimination}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow c_1=c_2=c_3=0 \quad (\text{只有顯然解})$$

$$\Rightarrow S\text{為線性獨立}$$

- 範例 9：線性獨立的測試

判斷下列在P_2中的向量集合是線性獨立或線性相依

$$S = \{\underbrace{1+x-2x^2}_{\mathbf{v}_1},\ \underbrace{2+5x+x^2}_{\mathbf{v}_2},\ \underbrace{x+x^2}_{\mathbf{v}_3}\}$$

解：

$$c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2+c_3\mathbf{v}_3 = 0$$

即 $c_1(1+x-2x^2) + c_2(2+5x+x^2) + c_3(x+x^2) = 0+0x+0x^2$

$$\Rightarrow \begin{aligned} c_1+2c_2 \quad\ &= 0 \\ c_1+5c_2+c_3 &= 0 \\ -2c_1+\ c_2+c_3 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{高斯消去法}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$\Rightarrow$系統有無限多組解 (系統有非顯然解)

$\Rightarrow$ S是線性相依 (例如 $c_1=2$, $c_2=-1$, $c_3=3$)

- 範例 10：線性獨立的測試

判斷在下列2×2矩陣空間的向量集合是線性獨立或線性相依

$$S=\left\{\underset{\mathbf{v}_1}{\begin{bmatrix}2&1\\0&1\end{bmatrix}},\underset{\mathbf{v}_2}{\begin{bmatrix}3&0\\2&1\end{bmatrix}},\underset{\mathbf{v}_3}{\begin{bmatrix}1&0\\2&0\end{bmatrix}}\right\}$$

解：

$$c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2+c_3\mathbf{v}_3=0$$

$$\mathrm{c}_1\begin{bmatrix}2&1\\0&1\end{bmatrix}+\mathrm{c}_2\begin{bmatrix}3&0\\2&1\end{bmatrix}+\mathrm{c}_3\begin{bmatrix}1&0\\2&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} 2c_1+3c_2+\ c_3 &= 0 \\ c_1 \qquad\qquad\quad &= 0 \\ 2c_2+2c_3 &= 0 \\ c_1+c_2 \qquad &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{高斯消去法}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$\Rightarrow c_1 = c_2 = c_3 = 0$ (系統只有顯然解)

$\Rightarrow S$是線性獨立

- 定理 4.8：

  集合 $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$, $(k \geq 2)$ 是線性相依若且唯若至少有一個向量$\mathbf{v}_i$可以寫在S中其他向量的線性組合

證明：

$(\Rightarrow)$ $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$

$\because$ 線性相依

$\Rightarrow c_i \neq 0$ 不是全為零

$$\Rightarrow \mathbf{v}_i = -\left(\frac{c_1}{c_i}\mathbf{v}_1 + \cdots + \frac{c_{i-1}}{c_i}\mathbf{v}_{i-1} + \frac{c_{i+1}}{c_i}\mathbf{v}_{i+1} + \cdots + \frac{c_k}{c_i}\mathbf{v}_k\right)$$

$(\Leftarrow)$

假設 $\mathbf{v}_i = d_1\mathbf{v}_1+\ldots+d_{i\text{-}1}\mathbf{v}_{i\text{-}1}+d_{i+1}\mathbf{v}_{i+1}+\ldots+d_k\mathbf{v}_k$

$\Rightarrow d_1\mathbf{v}_1+\ldots+d_{\mathrm{i}\text{-}1}\mathbf{v}_{\mathrm{i}\text{-}1}-\mathbf{v}_{\mathrm{i}}+d_{\mathrm{i}+1}\mathbf{v}_{\mathrm{i}+1}+\ldots+d_{\mathrm{k}}\mathbf{v}_{\mathrm{k}} = 0$

$\Rightarrow c_1=d_1\ ,\ c_2=d_2\ ,\ldots,\ c_{\mathrm{i}}=-1\ ,\ldots,\ c_{\mathrm{k}}=d_{\mathrm{k}}$ (非顯然解)

$\Rightarrow S$是線性相依

- 定理 4.8 的推論：

  在向量空間V中的兩個向量**u**和**v**是線性相依

  若且唯若其中一個是另一個向量的倍數。

摘要與複習 (4.4節之關鍵詞)

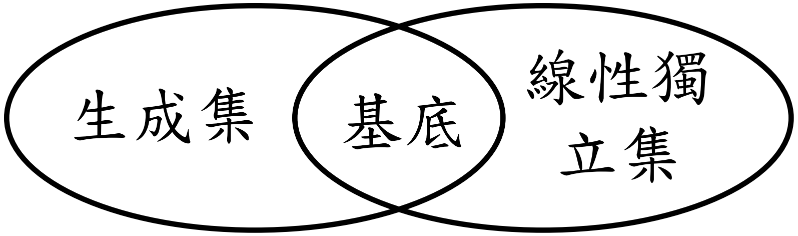
- linear combination：線性組合
- spanning set：生成集合
- trivial solution：顯然解
- linear independent：線性獨立
- linear dependent：線性相依

4.5 基底與維度

- 基底 (basis)

V：向量空間

$S=\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}\subseteq V$



$$\begin{cases} (a)\ S\text{生成}V\ (\text{即 }\mathrm{span}(S)=V\,) \\ (b)\ S\text{為線性獨立} \end{cases}$$

$\Rightarrow S$被稱為V的基底

- 注意：

(1) $\varnothing$是$\{\mathbf{0}\}$的基底

(2) R^3的標準基底：

$\{i, j, k\}\quad i=(1, 0, 0),\ j=(0, 1, 0),\ k=(0, 0, 1)$

(3) R^n的標準基底

$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ $\mathbf{e}_1=(1,0,\ldots,0)$, $\mathbf{e}_2=(0,1,\ldots,0)$, $\mathbf{e}_n=(0,0,\ldots,1)$

範例：R^4 $\{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\}$

(4) m×n 矩陣空間的標準基底

$\{ E_{ij} \mid 1\le i\le m , 1\le j\le n \}$

範例： 2×2 矩陣空間

$$\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\right\}$$

(5) $P_n(x)$的標準基底

$\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$

範例：$P_3(x)$ $\{1, x, x^2, x^3\}$

- 範例： 令$\mathbf{v}_1=(1,0)$, $\mathbf{v}_2=(0,1)$, $\mathbf{v}_3=(1,1)$, $\mathbf{v}_4=(2,0)$

集合	生成集	線性獨立集	基底
$\varnothing$	×	O	×
$\{\mathbf{v}_1\}\{\mathbf{v}_2\}\{\mathbf{v}_3\}\{\mathbf{v}_4\}$	×	O	×
$\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\}\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_3\}\{\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\}\{\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_4\}\{\mathbf{v}_3,\mathbf{v}_4\}$	O	O	O
$\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_4\}$	×	×	×
$\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\}\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_4\}\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_3,\mathbf{v}_4\}\{\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3,\mathbf{v}_4\}$	O	×	×
$\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3,\mathbf{v}_4\}$	O	×	×

- 定理 4.9：基底表示的唯一性

  若 $S=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\cdots,\mathbf{v}_n\}$ 是向量空間V的基底，則在V中的每一個向量可被寫成唯一的一種在S中向量的線性組合方式。

證明：

$$\because S\text{是一個基底} \Rightarrow \begin{cases} 1. & \text{span}(S)=V \\ 2. & S\text{是線性獨立} \end{cases}$$

$$\because \text{span}(S)=V$$

假設 $\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2+\ldots+c_n\mathbf{v}_n$

$$\mathbf{v} = b_1\mathbf{v}_1+b_2\mathbf{v}_2+\ldots+b_n\mathbf{v}_n$$

$$\Rightarrow \mathbf{0} = (c_1-b_1)\mathbf{v}_1+(c_2-b_2)\mathbf{v}_2+\ldots+(c_n-b_n)\mathbf{v}_n$$

$$\because S\text{是線性獨立}$$

$$\Rightarrow c_1=b_1\ ,\ c_2=b_2\ ,\ldots,\ c_n=b_n \qquad \text{(即唯一性)}$$

- 定理 4.10：基底與線性相依

若 $S=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\cdots,\mathbf{v}_n\}$ 是向量空間V的基底，則在V中包含n個向量以上的每個集合是為線性相依。

證明：

令 $S_1 = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m\}$, $m>n$

$\because span(S)=V$

$$\mathbf{u}_i\in V \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= c_{11}\mathbf{v}_1 + c_{21}\mathbf{v}_2 + \cdots + c_{n1}\mathbf{v}_n \\ \mathbf{u}_2 &= c_{12}\mathbf{v}_1 + c_{22}\mathbf{v}_2 + \cdots + c_{n2}\mathbf{v}_n \\ &\vdots \\ \mathbf{u}_m &= c_{1m}\mathbf{v}_1 + c_{2m}\mathbf{v}_2 + \cdots + c_{nm}\mathbf{v}_n \end{aligned}$$

令 $k_1\mathbf{u}_1+k_2\mathbf{u}_2+\ldots+k_\mathrm{m}\mathbf{u}_\mathrm{m}=\mathbf{0}$

可得 $d_1\mathbf{v}_1+d_2\mathbf{v}_2+\ldots+d_\mathrm{m}\mathbf{v}_\mathrm{n}=\mathbf{0}$ $\quad (d_i=c_{i1}k_1+c_{i2}k_2+\ldots+c_{im}k_m)$

$\because S$是線性獨立 $\quad\Rightarrow d_i=0 \quad \forall i$

即
$$\begin{aligned}
c_{11}k_1+c_{12}k_2+\cdots+c_{1\mathrm{m}}k_\mathrm{m}&=0\\
c_{21}k_1+c_{22}k_2+\cdots+c_{2\mathrm{m}}k_\mathrm{m}&=0\\
&\vdots\\
c_{\mathrm{n}1}k_1+c_{\mathrm{n}2}k_2+\cdots+c_{\mathrm{nm}}k_\mathrm{m}&=0
\end{aligned}$$

$\because$ 定理 1.1：當齊次系統的方程式比變數還少，此系統必定會有無限多組解

$m>n \Rightarrow k_1\mathbf{u}_1+k_2\mathbf{u}_2+\ldots+k_\mathrm{m}\mathbf{u}_\mathrm{m}=\mathbf{0}$ 有非顯然解

$\Rightarrow S_1$是線性相依

- 定理 4.11：基底的向量數

若向量空間V有一個具有n個向量的基底，則對於V的每一個基底都有n個向量(對於一個有限維度向量空間內的所有基底具有同樣n個向量)

證明：

$S=\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$
$S'=\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m\}$ 向量空間中的兩個基底

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}S\text{是一個基底}\\ S'\text{是線性獨立}\end{array}\right\}\Rightarrow n\geq m\\ \left.\begin{array}{l}S\text{是線性獨立}\\ S'\text{是一個基底}\end{array}\right\}\Rightarrow n\leq m\end{array}\right\}\Rightarrow n=m$$

- 有限維度(finite dimension)

  當向量空間V之基底的元素是有限的，則稱V為有限維度

- 無限維度 (infinite dimension)

  當向量空間V不是有限維度，則稱V為無限維度

- 維度 (dimension)

  一個有限維度的向量空間V的基底有n個向量，

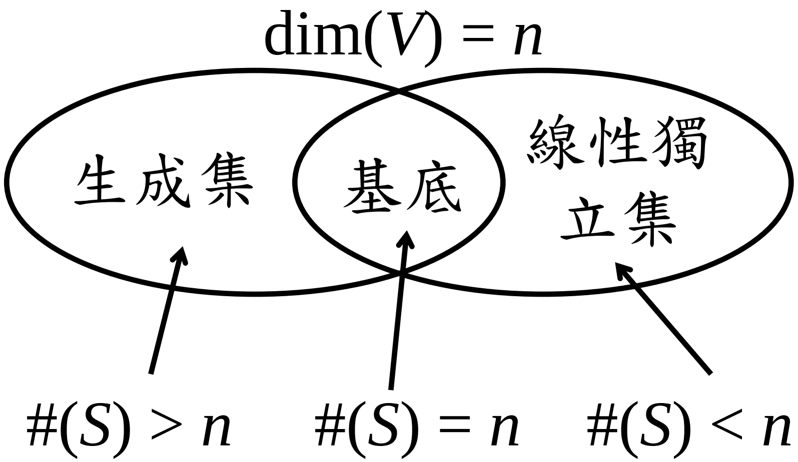
  則向量空間V的維度為 n

V：向量空間 S：V的一個基底

$\Rightarrow \dim(V) = \#(S)$ (S中向量的數目)

- 注意：

(1) $\dim(\{\mathbf{0}\}) = 0 = \#(\varnothing)$



(2) $\dim(V) = n$, $S \subseteq V$

S：生成集 $\Rightarrow \#(S) \geq \mathrm{n}$

S：線性獨立集 $\Rightarrow \#(S) \leq \mathrm{n}$

S：基底 $\Rightarrow \#(S) = \mathrm{n}$

(3) $\dim(V) = n$, W是V的子空間 $\Rightarrow$ $\dim(W) \leq n$

- 範例：

(1) 向量空間 R^n $\Rightarrow$ 基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ $\Rightarrow \dim(R^n) = n$

(2) 向量空間 $M_{m\times n}$ $\Rightarrow$ 基底 $\{E_{ij} \mid 1\le i\le m,\ 1\le j\le n\}$ $\Rightarrow \dim(M_{m\times n})=mn$

(3) 向量空間 $P_n(x)$ $\Rightarrow$ 基底 $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ $\Rightarrow \dim(P_n(x)) = n+1$

(4) 向量空間 $P(x)$ $\Rightarrow$ 基底 $\{1, x, x^2, \ldots\}$ $\Rightarrow \dim(P(x)) = \infty$

- 範例 9：求子空間的維度

(a) $W=\{(d, c-d, c)$：c與d為實數$\}$

(b) $W=\{(2b, b, 0)$：b為實數$\}$

解：(找出能生成子空間的一個線性獨立的向量集合)

(a) $(d, c-d, c) = c(0, 1, 1) + d(1, -1, 0)$

$\Rightarrow S = \{(0, 1, 1), (1, -1, 0)\}$ (S是線性獨立 且 S生成W)

$\Rightarrow S$是W的基底

$\Rightarrow \dim(W) = \#(S) = 2$

(b) $\because (2b, b, 0) = b(2, 1, 0)$

$\Rightarrow S = \{(2, 1, 0)\}$生成$W$ 且 S是線性獨立

$\Rightarrow S$是W的基底

$\Rightarrow \dim(W) = \#(S) = 1$

- 範例 11：

  令W是$M_{2\times 2}$中所有對稱矩陣所形成的子空間，
  求W的維度

解：

$$W=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\middle|\, a,b,c\in R\right\}$$

$$\because \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}=a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}+b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}+c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow S=\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$$ 生成W且S是線性獨立

$\Rightarrow S$是W的基底

$\Rightarrow \dim(W)=\#(S)=3$

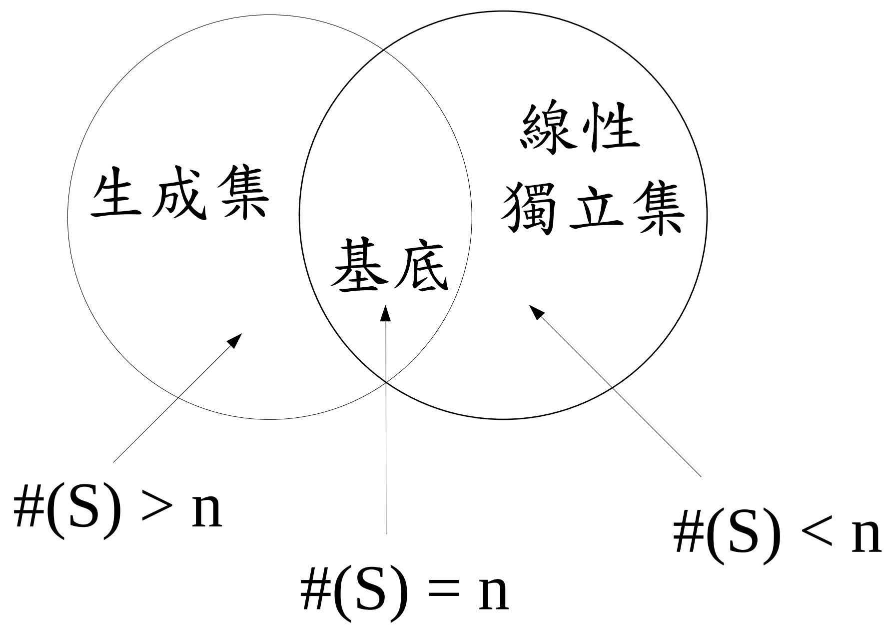
- 定理 4.12：n維空間的基底測試

令V是一個n維的向量空間

(1) 若 $S=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\cdots,\mathbf{v}_n\}$是一個在V中的線性獨立集合，則 S是V的基底。

(2) 若 $S=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\cdots,\mathbf{v}_n\}$ 生成V，則S是V的基底。

dim(V) = n



摘要與複習 (4.5節之關鍵詞)

- basis：基底
- dimension：維度
- finite dimension：有限維度
- infinite dimension：無限維度

令A為一 $m\times n$ 的矩陣

- 列空間(row space)

  A的列空間是由A的列向量所生成的，其為R^n的子空間

$$RS(A)=\{\alpha_1 A_{(1)}+\alpha_2 A_{(2)}+\ldots+\alpha_m A_{(m)} \mid \alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m \in R\}$$

- 行空間 (column space)

  A的行空間是由A行向量所生成的，其為R^m的子空間

$$CS(A)=\{\beta_1 \mathrm{A}^{(1)}+\beta_2 \mathrm{A}^{(2)}+\cdots+\beta_n \mathrm{A}^{(n)} \mid \beta_1,\beta_2,\cdots\beta_n \in \mathrm{R}\}$$

- 零空間 (null space)

  A的零空間是$A\mathbf{x}=\mathbf{0}$的所有解的集合，其為R^n的子空間

$$NS(A)=\{\mathbf{x}\in R^n \mid A\mathbf{x}=\mathbf{0}\}$$

4.6 矩陣的秩與線性方程式系統

- 列向量 (row vectors)

A的列向量

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_{(1)} \\ A_{(2)} \\ \vdots \\ A_{(m)} \end{bmatrix}$$

$$(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}) = \mathrm{A}_{(1)}$$
$$(a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}) = \mathrm{A}_{(2)}$$
$$\vdots$$
$$(a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn}) = \mathrm{A}_{(\mathrm{n})}$$

- 行向量 (column vectors)

A的行向量

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}=\left[A^{(1)} \vdots A^{(2)} \vdots \cdots \vdots A^{(n)}\right]$$

$$\underset{\mathrm{A}^{(1)}}{\underset{\|}{\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}}} \underset{\mathrm{A}^{(2)}}{\underset{\|}{\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}}} \cdots \underset{\mathrm{A}^{(\mathrm{n})}}{\underset{\|}{\begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}}}$$

- 定理 4.13：列等價矩陣有相同的列空間

  若一個$m \times n$的矩陣A列等價於一個$m \times n$的矩陣B，

  則A的列空間會相等於B的列空間

- 注意：

  (1) 矩陣的列空間不會因為基本列運算而改變

  $RS(r(A)) = RS(A)$　　　　r: 基本列運算元

  (2) 基本列運算會改變行空間

- 定理 4.14：矩陣列空間的基底

  若矩陣A列等價於一個具有列梯形形式的矩陣B，

  則B的非零列向量形成A的列空間的基底

- 範例2： 求一列空間的基底

求A的列空間的基底 $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 6 & -1 \\ 3 & 4 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -4 & 2 \end{bmatrix}$

解:

$$A=\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 6 & -1 \\ 3 & 4 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -4 & 2 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cccc} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_4 \end{array} \end{array} \xrightarrow{\text{G.E.}} B=\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cccc} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_3 & \mathbf{b}_4 \end{array} \end{array} \begin{array}{l} \mathbf{w}_1 \\ \mathbf{w}_2 \\ \mathbf{w}_3 \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

RS(A)的基底 = {B的非零列向量} (定理4.14)

$= \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\} = \{(1, 3, 1, 3), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$

- 注意：

(1) $\mathbf{b}_3 = -2\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 \Rightarrow \mathbf{a}_3 = -2\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$

(2) $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_4\}$線性獨立 $\Rightarrow \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4\}$線性獨立

- 範例 3：求一子空間的基底

求一R^3子空間的基底，此子空間由下列集合所生成

$$S=\{(-1,\overset{\mathbf{v}_1}{2},5),(3,\overset{\mathbf{v}_2}{0},3),(5,\overset{\mathbf{v}_3}{1},8)\}$$

解：

$$A=\begin{array}{c}\begin{bmatrix}-1 & 2 & 5\\ 3 & 0 & 3\\ 5 & 1 & 8\end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{c}\mathbf{v}_1\\ \mathbf{v}_2\\ \mathbf{v}_3\end{array}\xrightarrow{\text{G.E.}}B=\begin{bmatrix}1 & -2 & 5\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

span({$\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$})的基底

= RS(A)的基底

= {B的非零列向量} (定理4.14)

= {$\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$}

= {(1, -2, -5) , (0, 1, 3)}

- 範例 4：求矩陣的行空間的基底

求在範例2中的矩陣A的行空間的基底

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 6 & -1 \\ 3 & 4 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -4 & -2 \end{bmatrix}$$

解1：將A轉置並使用基本列運算來將寫成列梯形形式

$$A^T=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 6 & -2 & -4 \\ 3 & 0 & -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{G.E.} B=\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 9 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}\begin{array}{l} \boldsymbol{w}_1 \\ \boldsymbol{w}_2 \\ \boldsymbol{w}_3 \\ \\ \end{array}$$

$\because$ CS(A)=RS(A^T)

$\therefore$ CS(A)的基底

= RS(A^T)的基底

= {B的非零列向量}

= $\{\mathbf{w}_{1}, \mathbf{w}_{2}, \mathbf{w}_{3}\}$

$$=\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\-3\\3\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\9\\-5\\-6\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\\-1\\-1\end{bmatrix}\right\}$$ (A的行空間的基底)

- 解 2：

$$
\begin{array}{c}
A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 6 & -1 \\ 3 & 4 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -4 & -2 \end{bmatrix} \\
\quad \mathbf{c}_1 \quad \mathbf{c}_2 \quad \mathbf{c}_3 \quad \mathbf{c}_4
\end{array}
\xrightarrow{G.E.}
\begin{array}{c}
B=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\quad \mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \mathbf{v}_3 \quad \mathbf{v}_4
\end{array}
$$

領先1 => $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4\}$是$CS(B)$的基底

$\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_4\}$是$CS(B)$的基底

- 注意：

(1) 解1所求的基底不是$\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3, \mathbf{c}_4\}$的子集合

(2) 解2所求的基底是$\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3, \mathbf{c}_4\}$的子集合

(3) 因為 $\mathbf{v}_3 = -2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$，所以$\mathbf{c}_3 = -2\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2$

- 定理 4.16：齊次系統的解

若A是一個$m \times n$的矩陣，則齊次線性方程式系統

$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$的所有解的集合是的R^n子空間

證明:

$$NS(A) = \{x \in R^n \mid Ax = 0\}$$

$$NS(A) \in R^n$$

$$NS(A) \neq \phi \quad (\because A\mathbf{0} = \mathbf{0})$$

令$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in NS(A)$ （即$A\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}, A\mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$）

則 $(1) A(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = A\mathbf{x}_1 + A\mathbf{x}_2 = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$ 加法

$(2) A(c\mathbf{x}_1) = c(A\mathbf{x}_1) = c(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ 純量乘法

所以 $NS(A)$是R^n的子空間

- 注意：A的零空間也被稱為系統$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$的解空間

- 範例 6：求齊次系統的解空間

求矩陣A的零空間 $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -2 & 1\\ 3 & 6 & -5 & 4\\ 1 & 2 & 0 & 3\end{bmatrix}$

解： A的零空間是齊次系統 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$的解空間

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -2 & 1\\ 3 & 6 & -5 & 4\\ 1 & 2 & 0 & 3\end{bmatrix}\xrightarrow{G.J.E}\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x_1=-2s-3t,\ x_2=s,\ x_3=-t,\ x_4=t$$

$$\Rightarrow \mathbf{x}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2s-3t\\ s\\ -t\\ t\end{bmatrix}=s\begin{bmatrix}-2\\ 1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}-3\\ 0\\ -1\\ 1\end{bmatrix}=s\mathbf{v}_1+t\mathbf{v}_2$$

$$\Rightarrow NS(A)=\{s\mathbf{v}_1+t\mathbf{v}_2 \mid s,t\in R\}$$

- 定理 4.15：列與行空間有相同的維度

若A為$m\times n$的矩陣，則A的列空間與行空間有相同的維度

$$\dim(RS(A)) = \dim(CS(A))$$

- 矩陣的秩 (rank)

矩陣A的列(或行)空間的維度被稱為A的秩

$$\text{rank}(A) = \dim(RS(A)) = \dim(CS(A))$$

- 矩陣的核次數(nullity)

矩陣A之零空間的維度稱為A的核次數

$$\text{nullity}(A) = \dim(NS(A))$$

- 注意： $\text{rank}(A^T) = \text{rank}(A)$

證明： $\text{rank}(A^T)=\dim(RS(A^T))=\dim(CS(A))=\text{rank}(A)$

- 定理 4.17：解空間的維度

  若A是一個秩為 r 的 $m \times n$ 矩陣，

  則$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$的解空間的維度為n – r，也就是

  $$n = \text{rank}(A) + \text{nullity}(A)$$

- 注意：

  (1) rank(A) ：在$A\mathbf{x}=\mathbf{0}$之解中領先變數的數目

  (在矩陣A之列梯形形式中非零列的數目)

  (2) nullity (A) ：在A$\mathbf{x}$=$\mathbf{0}$之解中自由變數的數目

- 注意:

若A為 $m \times n$ 矩陣且rank(A)=r，則

基本子空間	維度
$RS(A)=CS(A^T)$	r
$CS(A)=RS(A^T)$	r
$NS(A)$	n-r
$NS(A^T)$	m-r

- 範例 7：矩陣的秩與核次數

令矩陣 A 的行向量表示為 $\mathbf{a}_1$，$\mathbf{a}_2$，$\mathbf{a}_3$，$\mathbf{a}_4$與$\mathbf{a}_5$。

$$A = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \left[\begin{array}{rrrrr} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 9 & 0 & -12 \end{array}\right] \\ \begin{array}{ccccc} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_4 & \mathbf{a}_5 \end{array} \end{array}$$

(a) 求 A 的秩與核次數

(b) 求 A 之行向量所形成的集合，此集合為 A 的行空間的基底

(c) 若可能，將 A 的第三行寫成前兩行之線性組合

解：令B為A的簡化的列梯形形式

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 9 & 0 & -12 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \mathbf{a}_3 \quad \mathbf{a}_4 \quad \mathbf{a}_5 \qquad\qquad \mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2 \quad \mathbf{b}_3 \quad \mathbf{b}_4 \quad \mathbf{b}_5$$

(a) $rank(A)=3$ (因為B有三個非零列)

$$nuillity(A)=n-rank(A)=5-3=2$$

(b) 領先1

$\Rightarrow \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_4\}$為$CS(B)$的基底

$\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4\}$為$CS(A)$的基底

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \text{ 與 } \mathbf{a}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

(c) $\mathbf{b}_3 = -2\mathbf{b}_1 + 3\mathbf{b}_2 \Rightarrow \ \mathbf{a}_3 = -2\mathbf{a}_1 + 3\mathbf{a}_2$

- 定理 4.18：非齊次線性系統的解

若$\mathbf{x}_p$是非齊次系統 $A\mathbf{x} = \mathrm{b}$的特殊解，則這系統的每一個解可寫成$\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + \mathbf{x}_h$的形式，其中$\mathbf{x}_h$是所相對的齊次系統$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$的解

證明：

令 $\mathbf{x}$ 是$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$的任意解

$$\Rightarrow A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) = A\mathbf{x} - A\mathbf{x}_p = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

$\Rightarrow (\mathbf{x} - \mathbf{x}_p)$是齊次系統 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$的解

令 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_p + \boldsymbol{x}_h$

$$\Rightarrow \boldsymbol{x}_h = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_p$$

- 範例 8：求非齊次系統的解集合

求下列線性方程式系統之所有解向量的集合

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & & & - & 2x_3 & + & x_4 & = & 5 \\ 3x_1 & + & x_2 & - & 5x_3 & & & = & 8 \\ x_1 & + & 2x_2 & & & - & 5x_4 & = & -9 \end{array}$$

解：

$A\mathbf{x}=\mathbf{b}$的增廣矩陣可化簡為

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & -2 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & -5 & 0 & 8 \\ 1 & 2 & 0 & -5 & -9 \end{array}\right] \xrightarrow{G.J.E} \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \\ \begin{array}{ccccc} & & s & t & \end{array} \end{array}$$

$$\Rightarrow \mathbf{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2s & - & t & + & 5 \\ -s & + & 3t & - & 7 \\ s & + & 0t & + & 0 \\ 0s & + & t & + & 0 \end{bmatrix}=s\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}+t\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 5 \\ -7 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$=s\mathbf{u}_1+t\mathbf{u}_2+\mathbf{x}_p$$

即 $\mathbf{x}_p=\begin{bmatrix} 5 \\ -7 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 是 $A\mathbf{x}=\boldsymbol{b}$ 的一個特殊解

$\mathbf{x}_\mathrm{h}=s\mathbf{u}_1+t\mathbf{u}_2$ 是 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的解

- 定理 4.19： 線性方程式系統的解

線性方程式系統$A\mathbf{x}=\mathbf{b}$為一致性若且唯若$\mathbf{b}$在A的行空間

證明：

假設

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},\quad \mathbf{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},\quad \text{與}\quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

分別為$A\mathbf{x}=\mathbf{b}$的係數矩陣、未知數的行矩陣及右半部

則

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n \end{bmatrix}$$

$$= x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}.$$

因此，$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$為一致性的若且唯若$\mathbf{b}$為A的行向量之線性組合。也就是說，系統為一致性系統若且唯若$\mathbf{b}$在A的行向量所生成的子空間中。

- 注意:

 若rank([A|**b**])=rank(A) (係數矩陣的秩等於增廣矩陣的秩)

 則系統 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$是一致性

- 範例 9：線性方程式系統的一致性

 判斷下列線性方程式系統是否為一致性

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= -1 \\ x_1 + x_3 &= 3 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1 \end{aligned}$$

解:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{G.J.E.} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[A \vdots \mathbf{b}] = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right] \\ \begin{array}{cccc} \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \mathbf{c}_3 & \mathbf{b} \end{array} \end{array} \xrightarrow{G.J.E.} \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \\ \begin{array}{cccc} \mathbf{w}_1 & \mathbf{w}_2 & \mathbf{w}_3 & \mathbf{v} \end{array} \end{array}$$

$\because \mathbf{v} = 3\mathbf{w}_1 - 4\mathbf{w}_2$

$\Rightarrow \mathbf{b} = 3\mathbf{c}_1 - 4\mathbf{c}_2 + 0\mathbf{c}_3$ ($\mathbf{b}$在A的行空間)

$\Rightarrow$ 線性方程式系統為一致性的

- 檢查:

$$rank(A) = rank([A \vdots \mathbf{b}]) = 2$$

- 可逆矩陣之一些等價條件的總結

若A是一個 n×n 的矩陣，則下列條件是等價的

(1) A為可逆

(2) $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$對於任何 n×1 的矩陣$\mathbf{b}$均有唯一解

(3) $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$只有一個顯然解

(4) A列等價於I_n

(5) $|A|\neq 0$

(6) $\text{rank}(A)=n$

(7) A的n個列向量為線性獨立

(8) A的n個行向量為線性獨立

摘要與複習 (4.6節之關鍵詞)

- row space : 列空間
- column space : 行空間
- null space: 零空間
- solution space : 解空間
- rank: 秩
- nullity : 核次數

4.7節 座標和基底變換

- 對於基底的座標表示方式

令$B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$是向量空間$V$的一個有序基底

與$\mathbf{x}$是在V中的向量，其可表示為

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n.$$

純量$c_1, c_2, \ldots, c_n$稱為$\mathbf{x}$相對於基底B的座標(coordinates of **x** relative to the basis B)。

$\mathbf{x}$相對於B的座標矩陣(coordinate matrix)(或座標向量 (coordinate vector))為在R^n中的行向量，其構成元素為$\mathbf{x}$的座標。

$$[\mathbf{x}]_B = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

- 範例 1：在R^n中的座標和元素

求在R^3中向量 $\mathbf{x}$=(-2, 1, 3) 相對於標準基底 $S = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$的座標矩陣

解：

$$\because \mathbf{x} = (-2, 1, 3) = -2(1, 0, 0) + 1(0, 1, 0) + 3(0, 0, 1),$$

$$\therefore [\mathbf{x}]_S = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

- 範例 3：求相對位於非標準基底的座標矩陣

求在R^3中的$\mathbf{x}$=(1, 2, -1)相對於(非標準)基底

B' = {$\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$}={(1,0,1), (0,-1,2), (2,3,-5)}的座標矩陣

解： $\mathbf{x} = c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + c_3\mathbf{u}_3$

$$(1, 2, -1) = c_1(1, 0, 1) + c_2(0, -1, 2) + c_3(2, 3, -5)$$

$$\begin{array}{rcrcrcr} c_1 & & & + & 2c_3 & = & 1 \\ - & & -c_2 & + & 3c_3 & = & 2 \\ c_1 & + & 2c_2 & - & 5c_3 & = & -1 \end{array} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -5 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{G.J.E.}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow [\boldsymbol{x}]_{B'} = \begin{bmatrix} 5 \\ -8 \\ -2 \end{bmatrix}$$

- 基底變換問題 (change of basis problem)

在知道一個向量相對於基底B的座標矩陣的情形下

如何去找此向量相對於另一個基底B’的座標矩陣

- 範例：基底互換

考慮一向量空間V的兩個基底

$$B=\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2\},\ B'=\{\mathbf{u}'_1,\mathbf{u}'_2\}$$

若 $[\mathbf{u}'_1]_B=\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix},\ [\mathbf{u}'_2]_B=\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$

即 $\mathbf{u}'_1=a\mathbf{u}_1+b\mathbf{u}_2,\quad \mathbf{u}'_2=c\mathbf{u}_1+d\mathbf{u}_2$

令 $\mathbf{v} \in V,\ [\mathbf{v}]_{B'} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \mathbf{v} &= k_1\mathbf{u}_1' + k_2\mathbf{u}_2' \\
&= k_1(a\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_2) + k_2(c\mathbf{u}_1 + d\mathbf{u}_2) \\
&= (k_1a + k_2c)\mathbf{u}_1 + (k_1b + k_2d)\mathbf{u}_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow [\mathbf{v}]_B &= \begin{bmatrix} k_1a + k_2c \\ k_1b + k_2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} \\
&= \big[[\mathbf{u}_1']_B\ [\mathbf{u}_2']_B\big]\ [\mathbf{v}]_{B'}
\end{aligned}$$

- 從B'到B的轉移矩陣 (transition matrix)

令 $B=\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_n\}$ 與 $B'=\{\mathbf{u}'_1,\mathbf{u}'_2\ldots,\mathbf{u}'_n\}$ 為向量空間 V 的兩個基底

若 $[\mathbf{v}]_B$ 是v相對於B的座標矩陣

$[\mathbf{v}]_{B'}$ 是v相對於B'的座標矩陣

則 $[\mathbf{v}]_B = P[\mathbf{v}]_{B'}$

$$= \left[[\mathbf{u}'_1]_B, [\mathbf{u}'_2]_B, \ldots, [\mathbf{u}'_n]_B \right] [v]_{B'}$$

其中

$P = \left[[\mathbf{u}'_1]_B, [\mathbf{u}'_2]_B, \ldots, [\mathbf{u}'_n]_B \right]$ 被稱為從 B' 到 B 的轉換矩陣

- 定理 4.20：轉移矩陣的反矩陣

若P是在R^n中從基底B'到基底B的轉移矩陣，則

(1) P是可逆

(2) 從B到 B'的轉移矩陣為 P^{-1}

- 注意：

$$B=\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_n\},\quad B'=\{\mathbf{u}'_1,\mathbf{u}'_2,\ldots,\mathbf{u}'_n\}$$

$$[\mathbf{v}]_B=\left[[\mathbf{u}'_1]_B,[\mathbf{u}'_2]_B,\ldots,[\mathbf{u}'_n]_B\right][\mathbf{v}]_{B'}=P[\mathbf{v}]_{B'}$$

$$[\mathbf{v}]_{B'}=\left[[\mathbf{u}_1]_{B'},[\mathbf{u}_2]_{B'},\ldots,[\mathbf{u}_n]_{B'}\right][\mathbf{v}]_B=P^{-1}[\mathbf{v}]_B$$

- 定理 4.21：從B到B'的轉移矩陣

令$B=\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots , \mathbf{v}_n\}$及$B'=\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots , \mathbf{u}_n\}$為$R^n$的兩個基底，則使用高斯-喬登消去法在 n×2n 矩陣 $[B' \vdots B]$中將可以找到從B 到B'的轉移矩陣P^{-1}，其可表示如下

$$[B' \vdots B] \longrightarrow [I_n \vdots P^{-1}]$$

- 範例 5：求轉移矩陣

$B=\{(-3, 2), (4,-2)\}$ 與 $B'=\{(-1, 2), (2,-2)\}$是R^2 的二個基底

(a) 求從基底B'到基底B的轉移矩陣

(b) 令$[\mathbf{v}]_{B'}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$, 求$[\mathbf{v}]_{B}=?$

(c) 求從基底B到基底B'的轉移矩陣

解：

(a) $$\left[\begin{array}{cc:cc} -3 & 4 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{G.J.E.}} \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right]$$

B'　　B　　　　I　　P^{-1}

$$[I_2 : P] = \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right] \quad \therefore P = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$ （從B'到B的轉移矩陣）

(b) $$[\mathbf{v}]_B = P[\mathbf{v}]_{B'} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- 檢查：

$$[\mathbf{v}]_{B'} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{v} = (1)(-1,2) + (2)(2,-2) = (3,-2)$$

$$[\mathbf{v}]_{B} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{v} = (-1)(3,-2) + (0)(4,-2) = (3,-2)$$

(c)

$$\left[\begin{array}{cc:cc} -1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & -2 & 2 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{G.J.E.}} \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right]$$

B' B I P^{-1}

$$\therefore P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

（從B 到B'的轉移矩陣）

- 檢查：

$$PP^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

- 範例 6：

(a)求 $\mathrm{p} = 3x^3 - 2x^2 + 4$ 相對於P_3之基底$S = \{1, x, x^2, x^3\}$ 的座標矩陣

(b)求 $\mathrm{p} = 3x^3 - 2x^2 + 4$ 相對於P_3之基底$S = \{1, 1+x, 1+x^2, 1+x^3\}$ 的座標矩陣

解：

(a) $\mathrm{p} = 4(1) + 0(x) + (-2)(x^2) + 3(x^3)$, $[\mathrm{p}]_S = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$

(b) $\mathrm{p} = 3(1) + 0(1+x) + (-2)(1+x^2) + 3(1+x^3)$, $[\mathrm{p}]_S = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$

- 範例：

求 $x=\begin{bmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{bmatrix}$相對於基底B的座標矩陣

$$B=\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right\}$$

解：

$$x=\begin{bmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{bmatrix}=5\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}+6\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}+7\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}+8\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow [x]_B=\begin{bmatrix}5\\ 6\\ 7\\ 8\end{bmatrix}$$

摘要與複習 (4.7節之關鍵詞)

- coordinates of **x** relative to B：**x**相對於B的座標
- coordinate matrix：座標矩陣
- coordinate vector：座標向量
- change of basis problem：基底變換問題
- transition matrix from B’ to B：從B’ 到B的轉移矩陣

4.8節 向量空間的應用

線性微分方程式 (微積分)

一個 n **階線性微分方程式 (linear differential equation of order n)** 的形式如下

$$y^{(n)} + g_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + g_1(x)y' + g_0(x)y = f(x)$$

若 $g_0, g_1, \dots, g_{n-1}$ 和 f 是在共同論域下 x 的函數。若 $f(x)=0$，則此方程式為**齊次 (homogeneous)**。否則為**非齊次 (nonhomogeneous)**。若當 y 和它的前 n 個微分代入方程式中能滿足此方程式時，則函數 y 被稱為此線性微分方程式的**解 (solution)**。

範例 1　二階線性微分方程式

證明 $y_1=e^x$ 和 $y_2=e^{-x}$ 皆為二階線性微分方程式 $y''-y=0$ 的解。

解： 對函數 $y_1=e^x$，我們可得 $y_1'=e^x$ 和 $y_1''=e^x$。因此

$$y_1''-y_1=e^x-e^x=0$$

所以 $y_1=e^x$ 是已知線性微分方程式的一個解。同樣地，對 $y_2=e^{-x}$ 可得到

$$y_2'=-e^{-x} \qquad \text{與} \qquad y_2''=e^{-x}$$

這表示

$$y_2''-y_2=e^{-x}-e^{-x}=0$$

因此 $y_2=e^{-x}$ 也是已知線性微分方程式的一解。

從範例 1 中我們可以看出兩個重點。第一點是在定義於整個實線上的所有二次可微分函數所構成的向量空間 $C''(-\infty, \infty)$ 中，這兩個解 $y_1=e^x$ 和 $y_2=e^{-x}$ 是線性獨立。這表示

$$C_1y_1 + C_2y_2 = 0$$

唯一對所有 x 都成立的解是 $C_1=C_2=0$。第二點是所有 y_1 和 y_2 的線性組合也是這個線性微分方程式的解。要了解這一點，令 $y=C_1y_1+C_2y_2$，則

$$\begin{aligned} y &= C_1e^x + C_2e^{-x} \\ y' &= C_1e^x - C_2e^{-x} \\ y'' &= C_1e^x + C_2e^{-x} \end{aligned}$$

將其代入微分方程式 $y''-y=0$ 可得

$$y'' - y = (C_1e^x + C_2e^{-x}) - (C_1e^x + C_2e^{-x}) = 0$$

因此，$y = C_1e^x + C_2e^{-x}$ 是一個解。

這兩點可被一般化為下列的定理，在此只做敘述而不證明。

線性齊次微分方程式的解

所有的 n 階線性齊次微分方程式

$$y^{(n)}+g_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+g_1(x)y'+g_0(x)y=0$$

有 n 個線性獨立的解。此外，若 $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ 是一組線性獨立解的集合，則所有的解都會是以下的形式

$$y=C_1y_1+C_2y_2+\cdots+C_ny_n$$

其中 $C_1, C_2, \ldots$ 與 C_n 是實數。

注意 $y=C_1y_1+C_2y_2+\cdots+C_ny_n$ 這個解稱為微分方程式的**一般解 (general solution)**。

由先前定理的觀點，我們知道能夠決定一組解是否為線性獨立的重要性。在描述測試線性獨立的方法前，我們可以先給予一個初步的定義。

函數集合的 Wronskian 定義

令 $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ 為一個函數集合，這些函數在區間 I 中均有 $n-1$ 階微分。下列行列式

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

被稱為此函數集合的 **Wronskian**。

注意　函數集合的 Wronskian 是以波蘭的數學家 Josef Maria Wronski (1778-1853) 之名命名的。

範例 2 **求函數集合的 Wronskian**

(a) 集合 $\{1-x, 1+x, 2-x\}$ 的 Wronskian 為

$$W = \begin{vmatrix} 1-x & 1+x & 2-x \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

(b) 集合 $\{x, x^2, x^3\}$ 的 Wronskian 為

$$W = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix} = 2x^3$$

在範例 2 (a) 中的 Wronskian 被稱為**全等於零 (identically equal to zero)**，因為它對於任何 x 值皆為零，在 (b) 中的 Wronskian 不全等於零，因為有令此 Wronskian 不為零的 x 值存在。

下面的定理證明函數集合的 Wronskian 如何用來試驗線性獨立性。

以 Wronskian 測試線性獨立

令 $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ 為 n 階線性齊次微分方程式的 n 個解之集合。這個集合為線性獨立若且唯若此 Wronskian 不全等於零。

注意 此測試法不可應用於任意函數集合。$y_1, y_2, \ldots$ 和 y_n 中的每個函數必須為相同的 n 階線性齊次微分方程式的解。

範例 3　測試一個解集合是否為線性獨立

判斷 $\{1, \cos x, \text{xin } x\}$ 是否為下列線性齊次微分方程式的一個線性獨立的解集合。

$$y''' + y' = 0$$

解： 首先觀察所給予的函數是否為 $y''' + y' = 0$ 的解。(試著確認這一項。) 接著，計算此三個函數的 Wronskian 以測試其是否為線性獨立。

$$W = \begin{vmatrix} 1 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \\ 0 & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix}$$

$$= \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

因為 W 不全等於零，我們由此可得知集合 $\{1, \cos x, \sin x\}$ 為線性獨立。此外，因為此集合是由一個三階線性齊次微分方程式的三個線性獨立解所組成的，所以其一般解為：

$$y = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x$$

圓錐部分與旋轉

每一種在 xy-平面上圓錐曲線都有以下形式的方程式

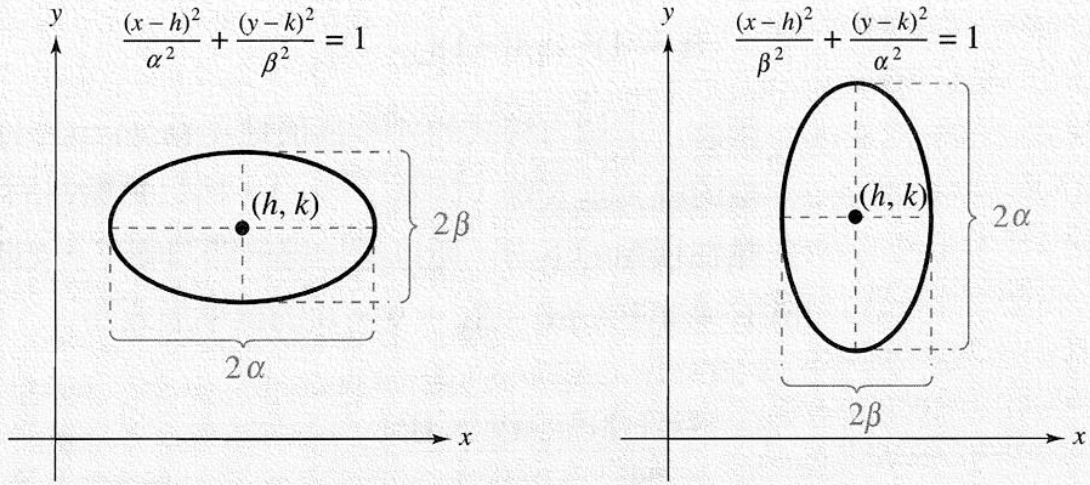
$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

只要 xy 項係數 b 為零，要分辨此方程式的圖形是非常簡單的。在此情形下，圓錐曲線的軸平行於座標平面軸，藉由將方程式寫成標準(完全平方) 形式就可以分辨了。四種基本圓錐曲線方程式的標準形式被列在下面的總結。對於圓、橢圓與雙曲線，點 (h, k) 為中心點。對拋物線，點 (h, k) 為頂點。

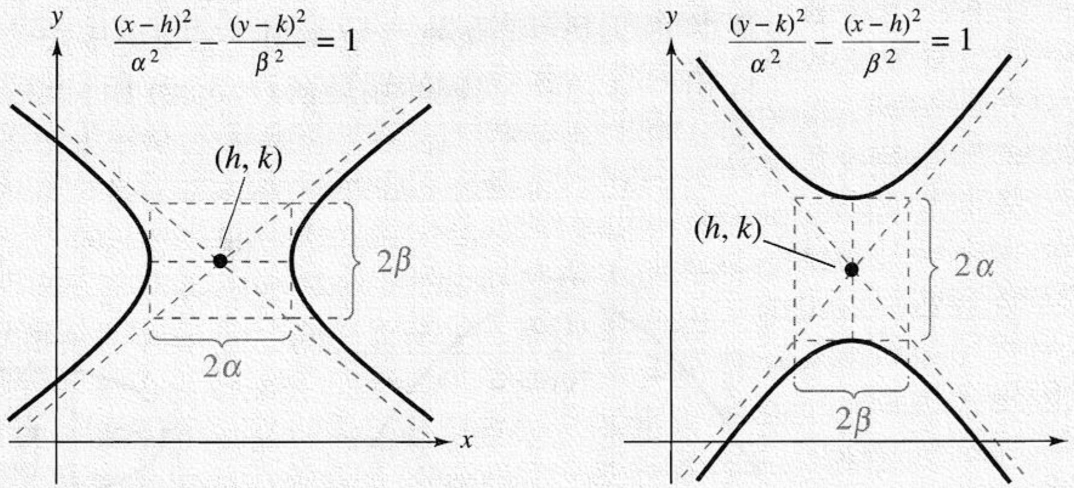
圓錐曲線方程式的標準形式

圓 (r＝半徑)：$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

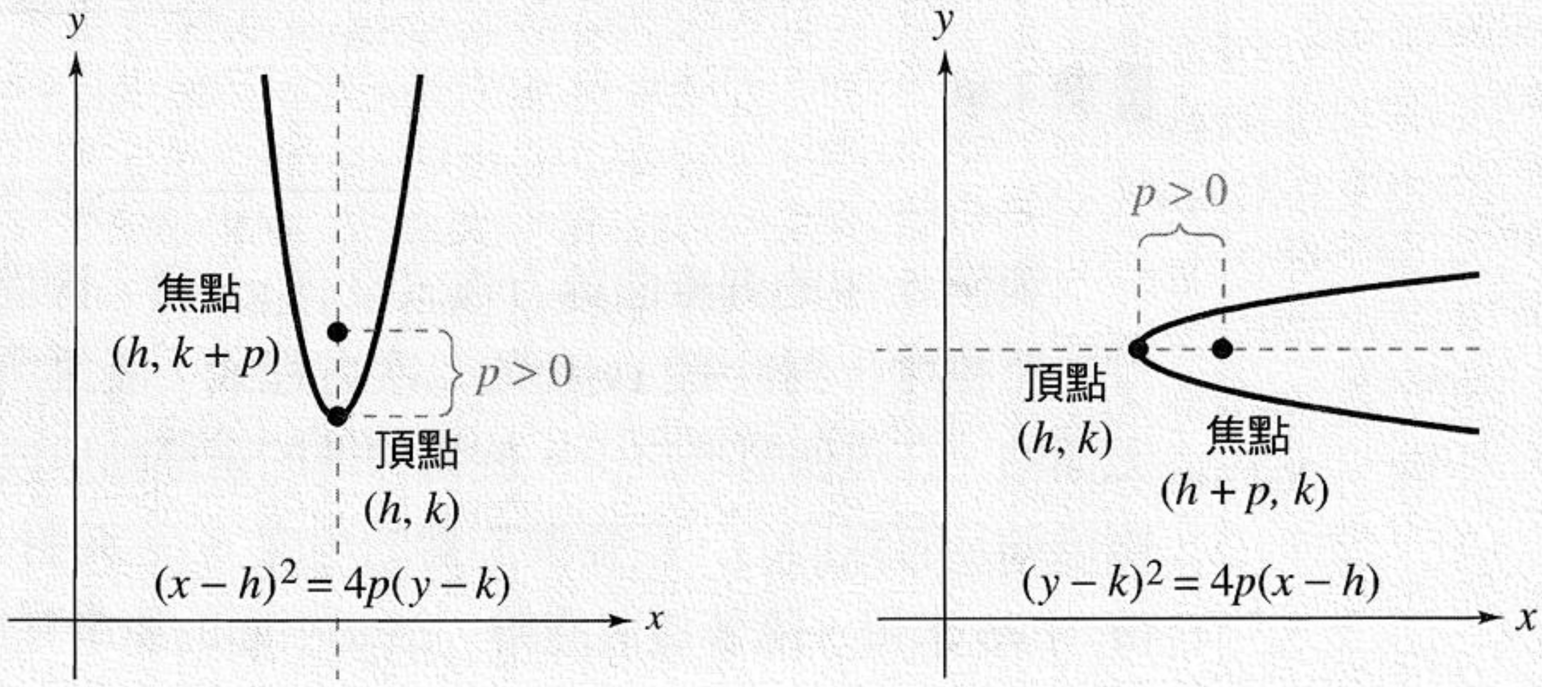
橢圓 (2α＝主軸長度，2β＝次軸長度)：



雙曲線 (2α＝橫截軸長度，2β＝次軸長度)：



抛物線 (P＝頂點到焦點的距離)：



範例 5　確認圓錐曲線

(a) $x^2 - 2x + 4y - 3 = 0$ 的標準形式為

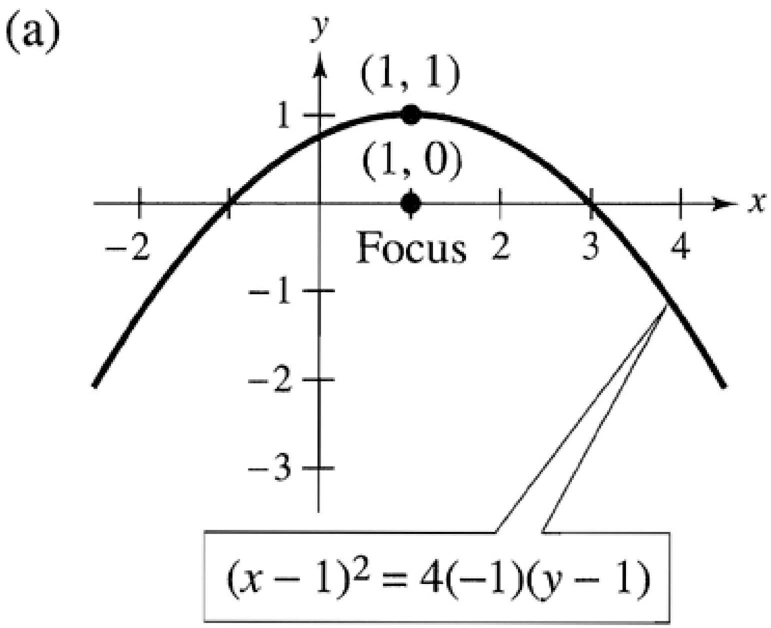
$$(x-1)^2 = 4(-1)(y-1)$$

因此，這個方程式的外形為頂點在 $(h, k)=(1, 1)$ 的拋物線。此拋物線的軸為垂直線，因為 $p=-1$，所以焦點在 $(1, 0)$。最後，因為焦點在頂點的下方，所以拋物線的開口朝下，如圖 4.20(a) 所示。

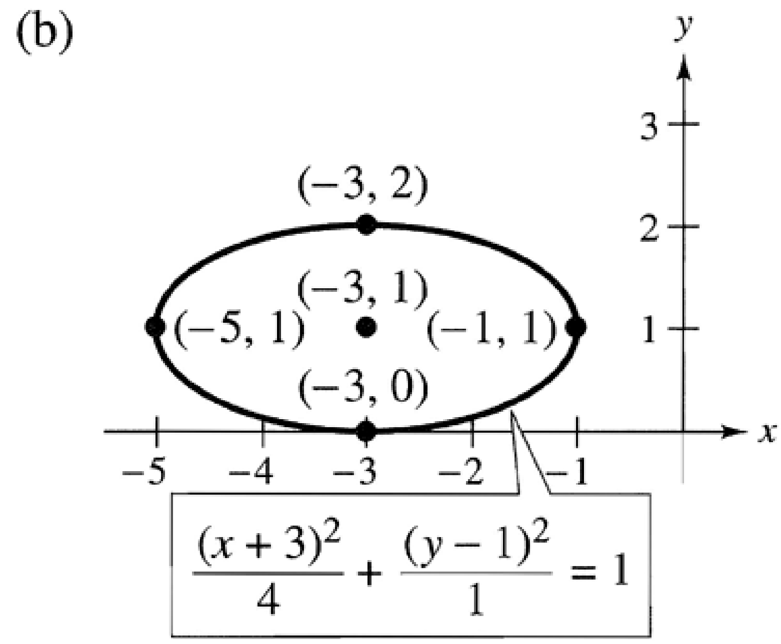
(b) $x^2 + 4y^2 + 6x - 8y + 9 = 0$ 的標準形式為

$$\frac{(x+3)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{1} = 1$$

因此，這個方程式的外形是中心點在 $(h, k)=(-3, 1)$ 的橢圓，主軸為水平的且長度為 $2\alpha=4$，次軸長度為 $2\beta=2$。橢圓的頂點在 $(-5, 1)$ 和 $(-1, 1)$，次軸的端點在 $(-3, 2)$ 和 $(-3, 0)$，如圖 4.20(b) 所示。



(a)
y
x
(1, 1)
(1, 0)
Focus
1
−1
−2
−3
−2
2
3
4
$(x-1)^2 = 4(-1)(y-1)$



(b)
y
x
(−3, 2)
(−3, 1)
(−5, 1)
(−1, 1)
(−3, 0)
3
2
1
−5
−4
−3
−2
−1
$\frac{(x+3)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{1} = 1$

圖 4.20

範例 5 中的圓錐曲線方程式沒有 xy-項。因此圓錐所對應的軸平行於座標軸。對於有 xy-項的二次方程式，圓錐所對應的軸不平行於座標軸。在這個情形之下，旋轉標準的座標軸形成一個新的 x'- 和 y'-座標軸是有幫助的。所需要旋轉的角度 θ (逆時針方向) 可由 $\cot 2\theta=(a-c)/b$ 求得。隨著這個旋轉，這個平面的標準基底

$$B=\{(1,0),(0,1)\}$$

也被旋轉成一個新的基底

$$B' = \{(\cos\theta, \sin\theta), (-\sin\theta, \cos\theta)\}$$

如圖 4.21 所示。

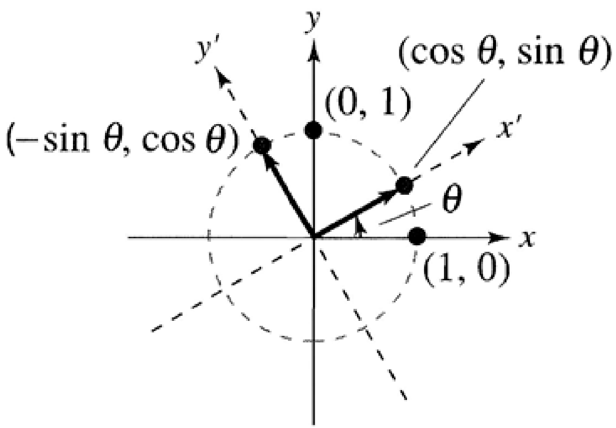


圖 4.21

要找到點 (x, y) 相對於這個新基底的座標，我們可以使用轉移矩陣，就如同範例 6 中所示。

範例 6　在平面上旋轉的轉移矩陣

求點 (x, y) 在 R^2 中相對於基底

$$B' = \{(\cos\theta, \sin\theta), (-\sin\theta, \cos\theta)\}$$

的座標。

解： 由定理 4.21 可得

$$[B' \,\vdots\, B] = \left[\begin{array}{cc:cc} \cos\theta & -\sin\theta & 1 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 1 \end{array}\right]$$

由於 B 為在 R^2 中的標準基底，P^{-1} 可由 $(B')^{-1}$ 求得。我們可以由定理 3.10 得到 $(B')^{-1}$。此結果如下。

$$[I \,\vdots\, P^{-1}] = \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 1 & -\sin\theta & \cos\theta \end{array}\right]$$

藉由讓 $[x', y']^T$ 為 (x, y) 相對於 B' 的座標，我們可以使用如下的轉移矩陣 P^{-1}。

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

因此，x' 和 y' 的座標可由下式求得

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\theta + y\sin\theta \\ y' &= -x\sin\theta + y\cos\theta \end{aligned}$$

範例 6 中最後的兩個方程式由 xy-座標項得出 $x'y'$-座標。為了表示二次多項式的座標旋轉，將 xy-座標由 $x'y'$-座標項表示是有益的。為此，解出範例 6 中最後的兩個方程式的 x 和 y 得到

$$x = x'\cos\theta - y'\sin\theta \qquad 及 \qquad y = x'\sin\theta + y'\cos\theta$$

將 x 和 y 的表示式代入所給的二次方程式，得到一個沒有 $x'y'$-項的 x' 和 y' 二次多項方程式。

座標軸的旋轉　二次方程式 $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ 可以被寫成

$$a'(x')^2 + c'(y')^2 + d'x' + e'y' + f' = 0$$

的形式，藉由座標軸逆時針旋轉一個角度 θ，而 θ 是由 $\cot 2\theta = (a-c)/b$ 所定義。新方程式的係數可由下式求得

$$x = x'\cos\theta - y'\sin\theta$$
$$y = x'\sin\theta + y'\cos\theta$$

注意　通常在我們欲求得 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 值時，三角恆等式

$\cot 2\theta = \dfrac{\cot^2\theta - 1}{2\cot\theta}$ 很有幫助。

範例 7 說明如何由旋轉座標軸去得到一個二次多項式的圖形。

範例 7 圓錐部分的旋轉

由座標軸的旋轉消掉

$$5x^2 - 6xy + 5y^2 + 14\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}y + 18 = 0$$

中的 xy-項，並且在 $x'y'$-平面上畫出所產生方程式的圖形。

解： 旋轉的角度由

$$\cot 2\theta = \frac{a-c}{b} = \frac{5-5}{-6} = 0$$

求得。這意味著 $\theta = \pi/4$。因此

$$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \text{和} \qquad \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

由代入

$$x = x'\cos\theta - y'\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y')$$

和

$$y = x' \sin\theta + y' \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y')$$

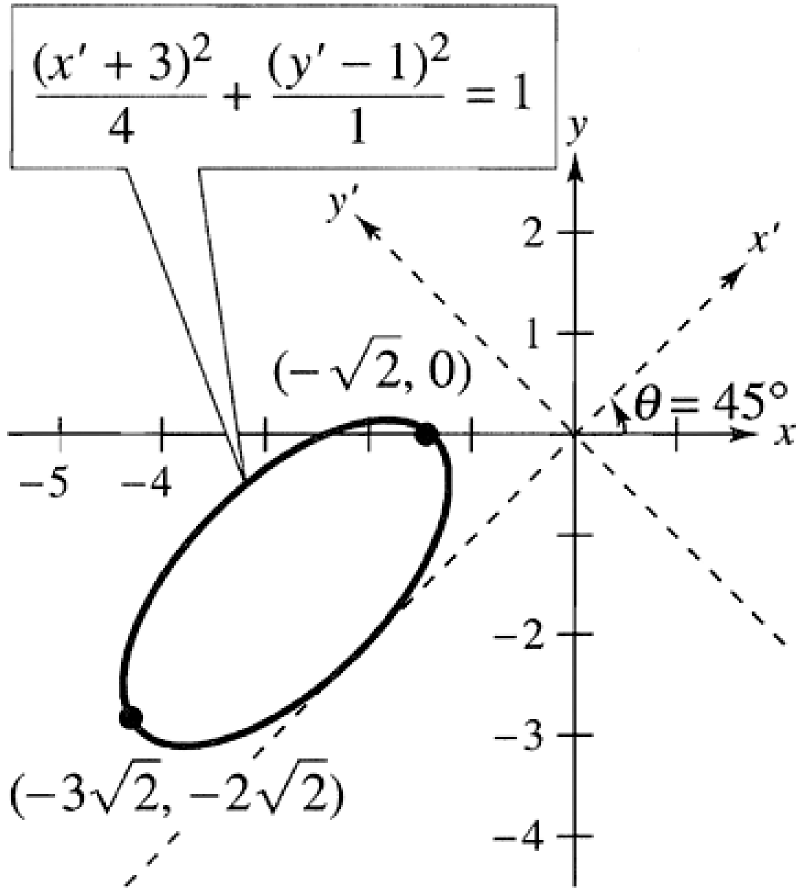
到原先的方程式及化簡，我們得到

$$(x')^2 + 4(y')^2 + 6x' - 8y' + 9 = 0$$

最後，經過完全平方，我們可以從這個方程式得到一標準式

$$\frac{(x'+3)^2}{2^2} + \frac{(y'-1)^2}{1^2} = \frac{(x'+3)^2}{4} + \frac{(y'-1)^2}{1} = 1$$

這是一個橢圓的方程式，如圖 4.22 所示。



$\frac{(x'+3)^2}{4} + \frac{(y'-1)^2}{1} = 1$
y
y'
x'
2
1
$(-\sqrt{2}, 0)$
$\theta = 45°$
x
−5
−4
−2
−3
−4
$(-3\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$

圖 4.22

在範例 7 中 R^2 的新 (旋轉後的) 基底是

$$B' = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$$

且橢圓頂點相對於 B' 之座標是 $[-5, 1]^T$ 與 $[-1, 1]^T$。

要求出頂點相對於標準基底 $B=\{(0, 1), (0, 1)\}$ 的座標，我們利用下列方程式

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y')$$

和

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y')$$

得到

$$\left(-3\sqrt{2}, -2\sqrt{2}\right) \quad 和 \quad \left(-\sqrt{2}, 0\right)$$

如圖 4.22 所示。