第六章
線性轉換

CENGAGE Learning
Elementary Linear Algebra
R. Larsen et al. (6 Edition)

投影片設計編製者
淡江大學 電機系 翁慶昌 教授

6.1 線性轉換介紹

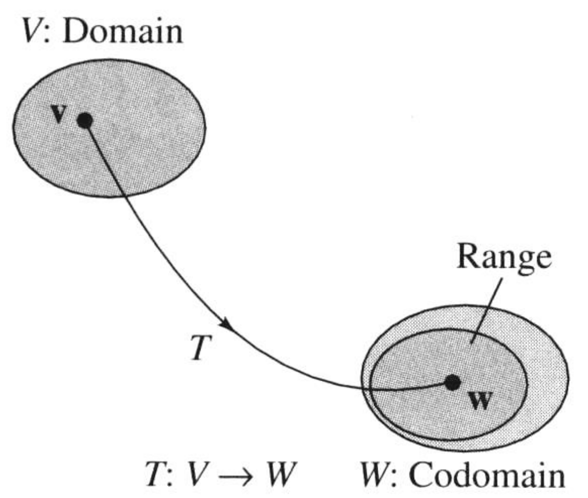
- 函數 (function)

函數T映射一個向量空間到另一個向量空間

$$T:V\xrightarrow{\text{映射}}W,\quad V,W:\text{向量空間}$$

$$V:T\text{的論域(domain)}$$

$$W:T\text{的對應論域(codomain)}$$



■ 像、值域與反像

若向量$\mathbf{v}$在向量空間V中，向量$\mathbf{w}$在向量空間W中使得

$$T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$$

則

(1) $\mathbf{w}$ 稱為在 T 映射下 $\mathbf{v}$ 的像(image)

(2) 在 V 中所有向量的像的集合稱為 T 的值域(range)

(3) 在 V 中所有可以使得 $T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$ 之向量$\mathbf{v}$的集合稱為向量 $\mathbf{w}$ 的反像(preimage)

- 範例 1：從R^2映射到R^2的函數

$$T: R^2 \rightarrow R^2 \qquad \mathbf{v} = (v_1, v_2) \in R^2$$

$$T(v_1, v_2) = (v_1 - v_2, v_1 + 2v_2)$$

(a)求$\mathbf{v} = (-1, 2)$的像 (b)求$\mathbf{w} = (-1, 11)$的反像

解：

$$(a)\ \ \mathbf{v} = (-1, 2)$$

$$\Rightarrow T(\mathbf{v}) = T(-1, 2) = (-1 - 2, -1 + 2(2)) = (-3, 3)$$

$$(b)\ \ T(\mathbf{v}) = \mathbf{w},\ \ \mathbf{w} = (-1, 11)$$

$$T(v_1, v_2) = (v_1 - v_2, v_1 + 2v_2) = (-1, 11)$$

$$\Rightarrow v_1 - v_2 = -1$$

$$v_1 + 2v_2 = 11$$

$$\Rightarrow v_1 = 3,\ \ v_2 = 4 \qquad \therefore \{(3,4)\}$$為$\mathbf{w} = (-1, 11)$的反像

- 線性轉換 (linear transformation)

V, W：向量空間

$T: V \rightarrow W$：V到W的線性轉換

$$(1)\ \ T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$$

$$(2)\ \ T(c\mathbf{u}) = cT(\mathbf{u}), \quad \forall c \in R$$

- 注意：

(1) 向量加法及純量乘法運算子無論在線性轉換之前或之後做運算均產生相同的結果

$$T(\mathbf{u}\underset{\substack{\uparrow\\ \text{在}V\text{上的加法}}}{+}\mathbf{v})=T(\mathbf{u})\underset{\substack{\uparrow\\ \text{在}W\text{上的加法}}}{+}T(\mathbf{v}) \qquad T(\underset{\substack{\uparrow\\ \text{在}V\text{上的純量相乘}}}{c\mathbf{u}})=\underset{\substack{\uparrow\\ \text{在}W\text{上的純量相乘}}}{cT}(\mathbf{u})$$

(2) 從一個向量空間映射到自己本身的線性轉換 $T:V\rightarrow V$ 被稱為線性運算子(linear operator)

- 範例 2：證明T是從R^2映射到R^2的線性轉換

$$T(a,b)=(a-b,a+2b)$$

證明：

$\mathbf{u}=(u_1,u_2),\ \mathbf{v}=(v_1,v_2):R^2$中的向量, $c:$實數

(1)向量加法

$$\mathbf{u}+\mathbf{v}=(u_1,u_2)+(v_1,v_2)=(u_1+v_1,u_2+v_2)$$

$$\begin{aligned}T(\mathbf{u}+\mathbf{v})&=T(u_1+v_1,u_2+v_2)\\&=((u_1+v_1)-(u_2+v_2),(u_1+v_1)+2(u_2+v_2))\\&=((u_1-u_2)+(v_1-v_2),(u_1+2u_2)+(v_1+2v_2))\\&=(u_1-u_2,u_1+2u_2)+(v_1-v_2,v_1+2v_2)\\&=T(\mathbf{u})+T(\mathbf{v})\end{aligned}$$

(2)向量的純量相乘

$$\begin{aligned} c\mathbf{u} &= c(u_1, u_2) = (cu_1, cu_2) \\ T(c\mathbf{u}) &= T(cu_1, cu_2) = (cu_1 - cu_2, cu_1 + 2cu_2) \\ &= c(u_1 - u_2, u_1 + 2u_2) \\ &= cT(\mathbf{u}) \end{aligned}$$

故T為線性轉換

- 範例 3：非線性轉換的函數

$$(a)\ f(x)=\sin x$$

$$\sin(x_1+x_2)\neq\sin(x_1)+\sin(x_2)$$

$$\sin(\tfrac{\pi}{2}+\tfrac{\pi}{3})\neq\sin(\tfrac{\pi}{2})+\sin(\tfrac{\pi}{3})\qquad\Leftarrow f(x)=\sin x\text{不是線性轉換}$$

$$(b)\ f(x)=x^2$$

$$(x_1+x_2)^2\neq x_1^2+x_2^2$$

$$(1+2)^2\neq 1^2+2^2\qquad\Leftarrow f(x)=x^2\text{不是線性轉換}$$

$$(c)\ f(x)=x+1$$

$$f(x_1+x_2)=x_1+x_2+1$$

$$f(x_1)+f(x_2)=(x_1+1)+(x_2+1)=x_1+x_2+2$$

$$f(x_1+x_2)\neq f(x_1)+f(x_2)\qquad\Leftarrow f(x)=x+1\text{不是線性轉換}$$

- 注意：二個關於“線性”的觀念

(1) $f(x)=x+1$ 被稱作是線性函數(linear function)，
因為它在圖形上是一條直線

(2) $f(x)=x+1$ 不是從向量空間R到R的線性轉換，
因為它沒保有向量加法及純量相乘的特性

- 零轉換 (zero transformation)

$$T:V \to W \qquad\qquad T(\mathbf{v}) = 0,\ \ \forall \mathbf{v} \in V$$

- 相等轉換 (identity transformation)

$$T:V \to V \qquad\qquad T(\mathbf{v}) = \mathbf{v},\ \ \forall \mathbf{v} \in V$$

- 定理 6.1： 線性轉換的性質

$$T:V \to W,\ \ \mathbf{u},\mathbf{v} \in V$$

$$(1)\ T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

$$(2)\ T(-\mathbf{v}) = -T(\mathbf{v})$$

$$(3)\ T(\mathbf{u}-\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) - T(\mathbf{v})$$

$$(4)\ \text{若}\ \mathbf{v} = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n$$

$$\text{則}\ T(\mathbf{v}) = T(c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n)$$

$$= c_1 T(v_1) + c_2 T(v_2) + \cdots + c_n T(v_n)$$

- 範例 4：線性轉換與基底

令 $T: R^3 \to R^3$ 為線性轉換，其使得

$$T(1,0,0) = (2,-1,4)$$

$$T(0,1,0) = (1,5,-2)$$

$$T(0,0,1) = (0,3,1)$$

求 $T(2,3,-2)$

解：

$$(2,3,-2) = 2(1,0,0) + 3(0,1,0) - 2(0,0,1)$$

$$\begin{aligned} T(2,3,-2) &= 2T(1,0,0) + 3T(0,1,0) - 2T(0,0,1) \qquad \text{(T為線性轉換)} \\ &= 2(2,-1,4) + 3(1,5,-2) - 2T(0,3,1) \\ &= (7,7,0) \end{aligned}$$

- 範例 5：矩陣定義的線性轉換

函數 $T: R^2 \to R^3$ 被定義為 $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$

(a)求$T(\mathbf{v})$，其中$\mathbf{v} = (2,-1)$ (b)證明T是由R^2到R^3的線性轉換

解：$(a)\mathbf{v} = (2,-1)$　　R^2中的向量　　R^3中的向量

$$T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore T(2,-1) = (6,3,0)$$

$(b)\ T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = A(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v} = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$ (向量相加)

$T(c\mathbf{u}) = A(c\mathbf{u}) = c(A\mathbf{u}) = cT(\mathbf{u})$ (純量相乘)

- 定理 6.2：矩陣之線性轉換

令A為一$m\times n$矩陣，函數T被定義為

$$T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$$

是一從R^n到R^m的線性轉換

- 注意：

R^n中的向量　　R^m中的向量

$$A\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + \cdots + a_{1n}v_n \\ a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + \cdots + a_{2n}v_n \\ \vdots \\ a_{m1}v_1 + a_{m2}v_2 + \cdots + a_{mn}v_n \end{bmatrix}$$

$$T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$$

$$T : R^n \longrightarrow R^m$$

■ 範例 7：平面的旋轉

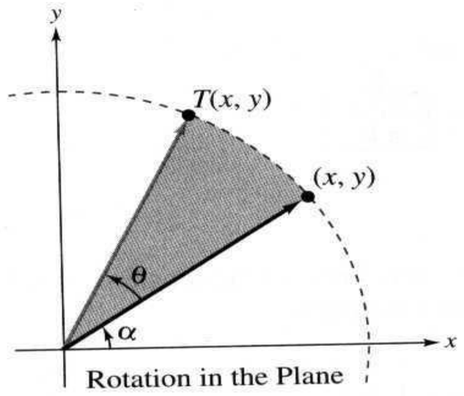
證明矩陣

$$A=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$

所表示的線性轉換 $T:R^2\rightarrow R^2$具有將R^2中的向量以原點為基準逆時針旋轉θ角度的特性

解：

$$v=(x,y)=(r\cos\alpha, r\sin\alpha)$$ (極座標表示法)



r： v的長度

α：從正x軸以逆時針計算到v的角度

$$T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r\cos\alpha \\ r\sin\alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} r\cos\theta\cos\alpha - r\sin\theta\sin\alpha \\ r\sin\theta\cos\alpha + r\cos\theta\sin\alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} r\cos(\theta+\alpha) \\ r\sin(\theta+\alpha) \end{bmatrix}$$

r： $T(v)$的長度

$\theta+\alpha$：從正x軸以逆時針計算到$T(v)$的角度

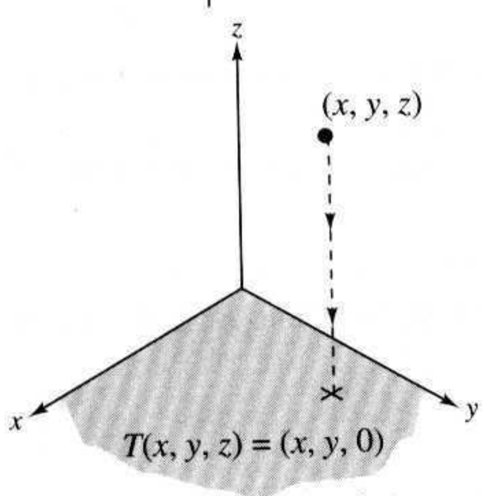
因此，向量$T(v)$和v有相同的長度，除此之外，從正x軸到$T(v)$的角度為$\theta+\alpha$ ，也就是$T(v)$將使v逆時針旋轉θ度

- 範例 8：R^3上的投影

下列矩陣表示的線性轉換 $T: R^3 \rightarrow R^3$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

稱作 R^3上的投影運算子



Projection onto xy-plane

- 範例 9：從 $M_{m\times n}$ 到 $M_{n\times m}$ 的線性轉換

$$T(A)=A^T \quad (T: M_{m\times n}\to M_{n\times m})$$

證明T是線性轉換

解：

$$A, B\in M_{m\times n}$$

$$T(A+B)=(A+B)^T=A^T+B^T=T(A)+T(B)$$

$$T(cA)=(cA)^T=cA^T=cT(A)$$

因此，T是從$M_{m\times n}$到$M_{n\times m}$的線性轉換

摘要與復習 (6.1節之關鍵詞)

- function: 函數
- domain: 論域
- codomain: 對應論域
- image of v under T: 在T映射下v的像
- range of T: T的值域
- preimage of w: w的反像
- linear transformation: 線性轉換
- linear operator: 線性運算子
- zero transformation: 零轉換
- identity transformation: 相等轉換

6.2 線性轉換的核空間及值域

- 線性轉換之核空間 (kernel)

令 $T:V\rightarrow W$ 為一線性轉換

則向量空間V中滿足 $T(\mathbf{v})=0$ 的所有向量所構成的集合稱為T的核空間，並記作ker(T)

$$\ker(T)=\{\mathbf{v}\,|\,T(\mathbf{v})=0,\ \forall\mathbf{v}\in V\}$$

- 範例 1：求線性轉換的核空間

$$T(A) = A^T \quad (T : M_{3\times 2} \to M_{2\times 3})$$

解：

$$\ker(T) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- 範例 2：零轉換及相等轉換的核空間

(a)零轉換 $T:V\rightarrow W$ 的核空間包含了向量空間V中所有向量

$$\ker(T)=V$$

(b)相等轉換 $T:V\rightarrow V$ 的核空間只包含了向量空間V中的零向量

$$\ker(T)=\{0\}$$

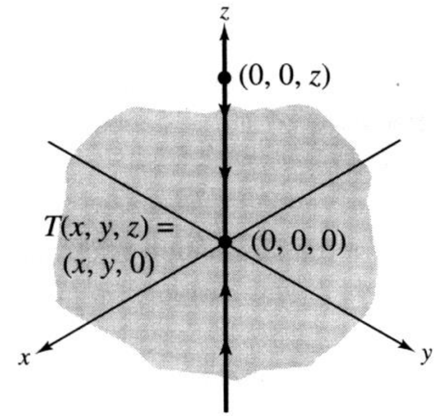
- 範例 3：求線性轉換的核空間

$$T(x,y,z)=(x,y,0) \qquad (T: R^3 \to R^3)$$

$$\ker(T)=?$$

解：

$$\ker(T)=\{(0,0,z) \mid z\text{為實數}\}$$



The kernel of T is the set of all vectors on the z-axis.

- 範例 5：求線性轉換的核空間

$$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad (T: R^3 \to R^2)$$

$$\ker(T) = ?$$

解：

$$\ker(T) = \{(x_1, x_2, x_3) \mid T(x_1, x_2, x_3) = (0,0),\ x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3\}$$

$$T(x_1, x_2, x_3) = (0,0)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{G.J.E} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ -t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \ker(T) = \{t(1,-1,1) \mid t\text{為實數}\}$$
$$= \operatorname{span}\{(1,-1,1)\}$$

- 定理 6.3：核空間為V的子空間

  線性轉換$T:V\rightarrow W$的核空間為V的子空間

  證明：

  $\because T(0)=0$ (定理6.1)

  $\therefore \ker(T)$為V的非空子集合

  令$\mathbf{u}$及$\mathbf{v}$為T的核空間中的向量，則

  $$T(\mathbf{u}+\mathbf{v})=T(\mathbf{u})+T(\mathbf{v})=0+0=0 \quad \Rightarrow \mathbf{u}+\mathbf{v}\in\ker(T)$$

  $$T(c\mathbf{u})=cT(\mathbf{u})=c0=0 \quad \Rightarrow c\mathbf{u}\in\ker(T)$$

  因此，$\ker(T)$為V的子空間

- 注意：

  T的核空間亦可稱為T的零空間(null space)

- 範例 6：求核空間的基底

將$T: R^5 \rightarrow R^4$定義為$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$，其中$x$為$R^5$中的向量

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

求$\ker(T)$的基底

解：

$$[A \mid 0] =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 8 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{G.J.E} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cccccc} & & s & & t & \end{array} \end{array}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2s+t \\ s+2t \\ s \\ -4t \\ t \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$B = \{(-2,1,1,0,0),(1,2,0,-4,1)\}$為$T$的核空間的一組基底

- 定理 6.3 的推論

令$T: R^n \to R^m$為一線性轉換且定義為$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$

則T的核空間等同於$A\mathbf{x} = 0$的解空間

$$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} (\text{線性轉換} T: R^n \to R^m)$$

$$\Rightarrow Ker(T) = NS(A) = \left\{ \mathbf{x} \mid A\mathbf{x} = 0, \forall \mathbf{x} \in R^m \right\} \; (R^m\text{的子空間})$$

- 線性轉換之值域 (range)

令$T: V \rightarrow W$為一線性轉換

則向量空間W中滿足$T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$的所有像$\mathbf{w}$所構成的集合

稱為T的值域，並記作$range(T)$

$$range(T) = \{T(\mathbf{v}) \mid \forall \mathbf{v} \in V\}$$

- 定理 6.4：T的值域為W的子空間

線性轉換$T:V\rightarrow W$的值域為W的子空間

證明：

$\because T(0)=0 \quad$ (定理6.1)

$\therefore range(T)$為W的非空子集合

令$T(\mathbf{u})$與$T(\mathbf{v})$為T的值域裡的向量，則

$$T(\mathbf{u}+\mathbf{v})=T(\mathbf{u})+T(\mathbf{v})\in range(T) \quad (\mathbf{u}\in V, \mathbf{v}\in V \Rightarrow \mathbf{u}+\mathbf{v}\in V)$$

$$T(c\mathbf{u})=cT(\mathbf{u})\in range(T) \quad (\mathbf{u}\in V \Rightarrow c\mathbf{u}\in V)$$

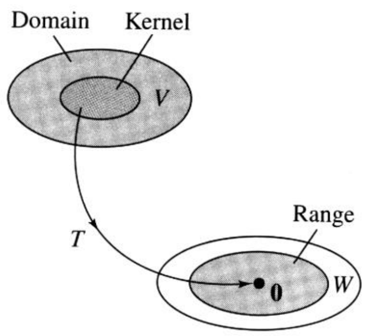
因此，$range(T)$為W的子空間

- 注意：

$T:V \rightarrow W$為一線性轉換，則

(1)$Ker(T)$為V的子空間

(2)$range(T)$為W的子空間



- 定理 6.4 的推論

令$T:R^n \rightarrow R^m$為一線性轉換且定義為$T(x)=Ax$

則T的值域相同於A的行空間

$$range(T)=CS(A)$$

- 範例 7：求線性轉換值域的基底

將$T: R^5 \to R^4$定義為$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$，其中$x$為$R^5$中的向量且

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

求T的值域的一組基底

解：

$$A=\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 8 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \end{matrix} \end{array} \xrightarrow{G.J.E} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & w_5 \end{matrix} \end{array} = B$$

$\Rightarrow \{w_1, w_2, w_4\}$為$CS(B)$的一組基底

$\{c_1, c_2, c_4\}$為$CS(A)$的一組基底

$\Rightarrow \{(1, 2, -1, 0), (2, 1, 0, 0), (1, 1, 0, 2)\}$為$T$的值域的一組基底

- 線性轉換 $T:V\to W$的秩 (rank)

$$rank(T)=T\text{的值域的維度}$$

- 線性轉換 $T:V\to W$的核次數 (nullity)

$$nullity(T)=T\text{的核空間的維度}$$

- 注意：

令$T:R^n\to R^m$為一線性轉換且定義為$T(\mathbf{x})=A\mathbf{x}$，則

$$rank(T)=rank(A)$$

$$nullity(T)=nullity(A)$$

- 定理 6.5：秩與核次數的和

令$T:V\rightarrow W$為一從n維向量空間V到向量空間W的線性轉換，則

$$rank(T)+nullity(T)=n$$

$$\dim(T\text{的值域})+\dim(T\text{的核空間})=\dim(T\text{的論域})$$

證明：

令線性轉換T以一$m\times n$的矩陣A表示

假設$rank(A)=r$

$$(1)\,rank(T)=\dim(T\text{的值域})=\dim(A\text{的行空間})$$

$$=rank(A)=r$$

$$(2)\,nullity(T)=\dim(T\text{的核空間})=\dim(A\mathbf{x}=0\text{的解空間})$$

$$=n-r$$

$$\Rightarrow rank(T)+nullity(T)=r+(n-r)=n$$

- 範例 8：求線性轉換的秩與核次數

求下列矩陣所表示的線性轉換$T: R^3 \rightarrow R^3$的秩與核次數

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

解：

$$rank(T) = rank(A) = 2$$

$$nullity(T) = \dim(T\text{的論域}) - rank(T) = 3 - 2 = 1$$

- 範例 9：求線性轉換的秩與核次數

令$T: R^5 \rightarrow R^7$為一線性轉換

(a)若值域的維度為2，求T的核空間的維度

(b)若T的核次數為4，求T的秩

(c)若$Ker(T)=\{0\}$，求T的秩

解：

$(a)\ \dim(T\text{的論域})=5$

$\dim(T\text{的核空間})=n-\dim(T\text{的值域})=5-2=3$

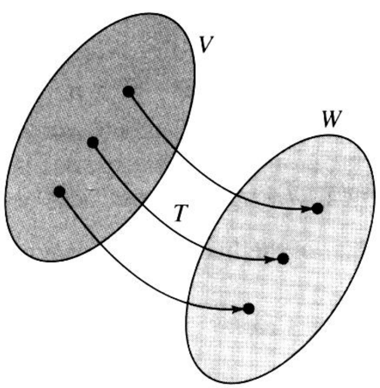
$(b) rank(T)=n-nullity(T)=5-4=1$

$(c) rank(T)=n-nullity(T)=5-0=5$

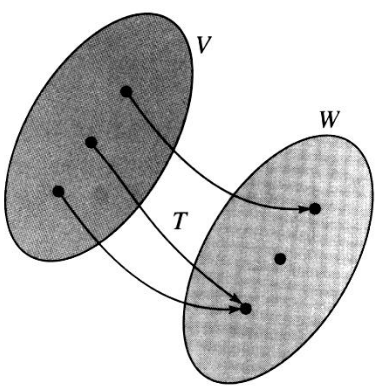
- 一對一 (one-to-one)

若函數$T:V \to W$的值域中的每一個向量$\mathbf{w}$的反像均為單一向量時，則稱函數T為一對一

T為一對一若且唯若對於所有V中的向量$\mathbf{u}$及$\mathbf{v}$
當$T(\mathbf{u})=T(\mathbf{v})$即代表$\mathbf{u}=\mathbf{v}$



一對一



非一對一

- 映成 (onto)

若函數$T: V \rightarrow W$的值域中的每一個向量$\mathbf{w}$均有一個反像在V中，稱函數T為映成

(當T的值域相等於W時，T為映成)

- 定理 6.6：一對一線性轉換

令$T:V\rightarrow W$為一線性轉換，則T為一對一

若且唯若$Ker(T)=\{0\}$

證明：

假設T為一對一

則$T(v)=0$只有唯一解$v=0$

所以$Ker(T)=\{0\}$

假設$Ker(T)=\{0\}$且$T(u)=T(v)$

$T(u-v)=T(u)-T(v)=0$

T為線性轉換

$\because u-v\in Ker(T)\Rightarrow u-v=0$

$\Rightarrow T$為一對一

- 範例 10：線性轉換的一對一與非一對一

(a)表示成$T(A)=A^T$的線性轉換$T:M_{m\times n}\to M_{n\times m}$
為一對一

∵它的核空間只有$m\times n$的零矩陣

(b)零線性轉換$T:R^3\to R^3$不是一對一

∵它的核空間為整個R^3空間

- 定理 6.7：映成線性轉換

令$T:V\rightarrow W$為線性轉換，其中W為有限維度

則T為映成若且唯若T的秩相等於W的維度

- 定理 6.8：一對一與映成線性轉換

令$T:V\rightarrow W$為線性轉換，其中V及W均為n維向量空間

則T為一對一若且唯若T為映成映射

證明：

若T為一對一則$Ker(T)=\{0\}$且$\dim(Ker(T))=0$

$$\dim(Ker(T))=n-\dim(Ker(T))=n=\dim(W)$$

所以T為映成

若T為映成，則$\dim(T\text{的值域})=\dim(W)=n$

$$\dim(Ker(T))=n-\dim(T\text{的值域})=n-n=0$$

所以T為一對一

- 範例 11：

線性轉換$T: R^n \rightarrow R^m$表示成$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$，求$T$的核次數、秩並判斷$T$是否為一對一、映成或兩者都不是

$$(a) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (b) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(c) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad (d) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

解：

$T{:}R^n \rightarrow R^m$	dim(T的論域)	rank(T)	nullity(T)	一對一	映成
$(a) T{:}R^n \rightarrow R^m$	3	3	0	Yes	Yes
$(b) T{:}R^n \rightarrow R^m$	2	2	0	Yes	No
$(c) T{:}R^n \rightarrow R^m$	3	2	1	No	Yes
$(d) T{:}R^n \rightarrow R^m$	3	2	1	No	No

- 同構 (isomorphism)

若線性轉換$T:V\rightarrow W$為一對一且映成，則我們稱之為同構。此外，若向量空間V和W存在一個從V到W的同構，則V和W被稱為彼此互為同構的(isomorphic)

- **定理 6.9：同構的空間及維度**

兩個有限維度的向量空間V和W為同構的若且唯若他們具有相同的維度

證明：

假設從V與W是同構的，且 $\dim(V)=n$

$\Rightarrow$ 存在線性轉換$T:V\rightarrow W$為一對一且映成

$\because T$為一對一

$\Rightarrow \dim(Ker(T))=0$

$\Rightarrow \dim(T\text{的值域})=\dim(T\text{的論域})-\dim(Ker(T))=n-0=n$

$\because T$為映成

$\Rightarrow \dim(T\text{的值域}) = \dim(W) = n$

所以$\dim(V) = \dim(W) = n$

假設V及W的維度均為n

令$\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$及$\{w_1, w_2, \cdots, w_n\}$分別為$V$及$W$的一組基底

則V中的任意向量$\mathbf{v} = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n$

且可定義一線性轉換$T: V \rightarrow W$如下

$T(\mathbf{v}) = c_1 w_1 + c_2 w_2 + \cdots + c_n w_n$

因此得知線性轉換T為一對一且映成

所以V與W為同構的

- 範例 12：同構的向量空間

以下的向量空間互為同構的

$(a)R^4 = 4$維向量空間

$(b)M_{4\times 1} = 4\times 1$矩陣向量空間

$(c)M_{2\times 2} = 2\times 2$矩陣向量空間

$(d)P_3(x) = 3$階以下多項式向量空間

$(e)V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, 0), x_i$為實數$\}$($R^5$的子空間)

摘要與復習 (6.2節之關鍵詞)

- kernel of a linear transformation T: 線性轉換T的核空間
- range of a linear transformation T: 線性轉換T的值域
- rank of a linear transformation T: 線性轉換T的秩
- nullity of a linear transformation T: 線性轉換T的核次數
- one-to-one: 一對一
- onto: 映成
- isomorphism(one-to-one and onto): 同構
- isomorphic space: 同構的空間

6.3 線性轉換矩陣

- 線性轉換 $T:R^3 \rightarrow R^3$ 的二種表示法

$$(1) T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2 - x_3, -x_1 + 3x_2 - 2x_3, 3x_2 + 4x_3)$$

$$(2) T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

- 以矩陣表示線性轉換的三個理由
  - 易寫
  - 易讀
  - 比較適用於電腦

- 定理 6.10：線性轉換的標準矩陣 (standard matrix)

令$T:R^n \rightarrow R^m$為一線性轉換使得

$$T(e_1)=\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix},\quad T(e_2)=\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix},\quad \cdots,\quad T(e_n)=\begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix},$$

則相對於$T(e_i)$的n個行向量所構成的$m\times n$矩陣

$$A=\left[T(e_1)\mid T(e_2)\mid\cdots\mid T(e_n)\right]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

將使得任一R^n中的向量$\mathbf{v}$均能滿足$T(\mathbf{v})=A\mathbf{v}$。矩陣$A$被稱為$T$的標準矩陣

證明：

$$\mathbf{v}=\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}=v_1e_1+v_2e_2+\cdots+v_ne_n$$

$$\begin{aligned} T\text{為線性轉換} \Rightarrow T(\mathbf{v}) &= T(v_1e_1+v_2e_2+\cdots+v_ne_n) \\ &= T(v_1e_1)+T(v_2e_2)+\cdots+T(v_ne_n) \\ &= v_1T(e_1)+v_2T(e_2)+\cdots+v_nT(e_n) \end{aligned}$$

$$A\mathbf{v}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11}v_1+a_{12}v_2+\cdots+a_{1n}v_n \\ a_{21}v_1+a_{22}v_2+\cdots+a_{2n}v_n \\ \vdots \\ a_{m1}v_1+a_{m2}v_2+\cdots+a_{mn}v_n \end{bmatrix}$$

$$= v_1\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + v_2\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + v_n\begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= v_1 T(e_1) + v_2 T(e_2) + \cdots + v_n T(e_n)$$

$\therefore$ 任一R^n中的向量$\mathbf{v}$均能滿足$T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$

- 範例 1：求線性轉換的標準矩陣

找出線性轉換$T: R^3 \to R^2$的標準矩陣

$$T(x, y, z) = (x - 2y, 2x + y)$$

解：

向量表示

$$T(e_1) = T(1, 0, 0) = (1, 2)$$

$$T(e_2) = T(0, 1, 0) = (-2, 1)$$

$$T(e_3) = T(0, 0, 1) = (0, 0)$$

矩陣表示

$$T(e_1) = T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$T(e_2) = T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$T(e_3) = T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \left[T(e_1) \mid T(e_2) \mid T(e_3) \right]$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- 檢查：

$$A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-2y \\ 2x+y \end{bmatrix}$$

即$T(x, y, z) = (x-2y, 2x+y)$

- 注意：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow & 1x-2y+0z \\ \leftarrow & 2x+1y+0z \end{matrix}$$

- **範例 2：求線性轉換的標準矩陣**

  線性轉換$T: R^2 \to R^2$將R^2中的每一個點都投影在x軸上
  求T的標準矩陣

  解：

  $$T(x, y) = (x, 0)$$

  在檔案中找不到關聯識別碼為 rId8 的影像部分。

- **注意：**

  (1)從R^n到R^m的零轉換的標準矩陣為$m \times n$的零矩陣

  (2)從R^n到R^n的相等轉換的標準矩陣為n階的單位矩陣I_n

- $T_1:R^n \rightarrow R^m$ 與 $T_2:R^m \rightarrow R^p$ 的合成 (composition)

$$T(\mathbf{v}) = T_2(T_1(\mathbf{v})), \quad \mathbf{v} \in R^n$$

$$T = T_2 \circ T_1, \quad T\text{的論域} = T_1\text{的論域}$$

- 定理 6.11：線性轉換的合成

令線性轉換$T_1 : R^n \rightarrow R^m$及$T_2 : R^m \rightarrow R^p$的標準矩陣分別為$A_1$與$A_2$，則

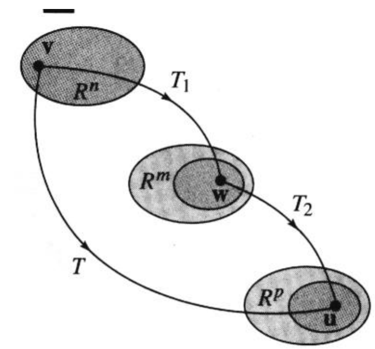
(1)定義為$T(\mathbf{v}) = T_2(T_1(\mathbf{v}))$的合成$T : R^n \rightarrow R^p$為一線性轉換

(2)T的標準矩陣A為兩矩陣的乘積$A = A_2 A_1$

證明：

(1)證明T為線性轉換

令$\mathbf{u}$與$\mathbf{v}$為R^n中的向量，c為任意純量



Composition of Transformations

$$T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T_2(T_1(\mathbf{u}+\mathbf{v})) = T_2(T_1(\mathbf{u})+T_1(\mathbf{v}))$$
$$= T_2(T_1(\mathbf{u}))+T_2(T_1(\mathbf{v})) = T(\mathbf{u})+T(\mathbf{v})$$

$$T(c\mathbf{v}) = T_2(T_1(c\mathbf{v})) = T_2(cT_1(\mathbf{v})) = cT_2(T_1(\mathbf{v})) = cT(\mathbf{v})$$

(2)證明A_2A_1為T的標準矩陣

$$T(\mathbf{v}) = T_2(T_1(\mathbf{v})) = T_2(A_1\mathbf{v}) = A_2A_1\mathbf{v} = (A_2A_1)\mathbf{v}$$

- 注意：

$$T_1 \circ T_2 \neq T_2 \circ T_1$$

- 範例 3：合成的標準矩陣

令T_1及T_2為$R^3 \to R^3$的線性轉換

$$T_1(x, y, z) = (2x + y, 0, x + z)$$

$$T_2(x, y, z) = (x - y, z, y)$$

求合成$T = T_2 \circ T_1$及$T' = T_1 \circ T_2$的標準矩陣

解：

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (T_1\text{的標準矩陣})$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (T_2\text{的標準矩陣})$$

$T = T_2 \circ T_1$的標準矩陣

$$A = A_2 A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$T' = T_1 \circ T_2$的標準矩陣

$$A' = A_1 A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- 反線性轉換 (inverse linear transformation)

若線性轉換$T_1 : R^n \to R^n$及$T_2 : R^n \to R^n$使得R^n中的每一個向量$\mathbf{v}$具有

$$T_2(T_1(\mathbf{v})) = \mathbf{v} \quad \text{且} \quad T_1(T_2(\mathbf{v})) = \mathbf{v}$$

則T_2稱為T_1的反轉換且T_1為可逆

- 注意：

若T為可逆，則其反轉換是唯一的且記作T^{-1}

- 定理 6.12：反線性轉換的存在

令$T: R^n \to R^n$為一線性轉換且其標準矩陣為A，則下列條件互為等價

(1)T為可逆

(2)T為同構

(3)A為可逆

- 注意：

若T為可逆且其標準矩陣為A，則T^{-1}的標準矩陣為A^{-1}

- 範例 4：求線性轉換的反轉換

令線性轉換$T：R^3 \to R^3$定義為

$$T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + 3x_2 + x_3, 3x_1 + 3x_2 + x_3, 2x_1 + 4x_2 + x_3)$$

證明T為可逆，並求其反轉換

解：

T的標準矩陣

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow 2x_1 + 3x_2 + x_3 \\ \leftarrow 3x_1 + 3x_2 + x_3 \\ \leftarrow 2x_1 + 4x_2 + x_3 \end{matrix}$$

$$[A \mid I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{G.J.E}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 6 & -2 & -3\end{array}\right]=\left[I \mid A^{-1}\right]$$

因此，T為可逆且T^{-1}的標準矩陣A^{-1}為

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\\ 6 & -2 & -3\end{bmatrix}$$

$$T^{-1}(\mathbf{v})=A^{-1}\mathbf{v}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\\ 6 & -2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-x_1+x_2\\ -x_1+x_3\\ 6x_1-2x_2-3x_3\end{bmatrix}$$

或者

$$T^{-1}(x_1,x_2,x_3)=(-x_1+x_2,-x_1+x_3,6x_1-2x_2-3x_3)$$

- *T* 相對於基底 *B* 與 *B'* 的轉換矩陣

$T: V \rightarrow W$ (線性轉換)

$B = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ (V的基底)

$B' = \{w_1, w_2, \cdots, w_n\}$ (W的基底)

T相對於基底B與B'的轉換矩陣

$$A = \left[[T(v_1)]_{B'}, [T(v_2)]_{B'}, \cdots, [T(v_n)]_{B'} \right] \in M_{m \times n}$$

- 非標準基底的轉換矩陣

令V及W分別為以B與B'為基底之有限維度的向量空間，其中$B=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$

若$T:V\rightarrow W$為一線性轉換，使得

$$[T(v_1)]_{B'}=\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix},\ [T(v_2)]_{B'}=\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix},\cdots,\ [T(v_n)]_{B'}=\begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

則相對於$[T(v_i)]_{B'}$的n個行向量所形成的$m\times n$矩陣

$$A = \big[[T(v_1)]_{B'} \mid [T(v_2)]_{B'} \mid \cdots \mid [T(v_n)]_{B'}\big] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

將使得每一個V中的向量$\mathbf{v}$滿足$\big[T(\mathbf{v})\big]_{B'} = A[\mathbf{v}]_B$

- 範例 5：求一個相對於非標準基底的轉換矩陣

令線性轉換$T：R^2 \rightarrow R^2$定義為

$$T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 2x_1 - x_2)$$

求T相對於基底$B = \{(1, 2), (-1, 1)\}$及$B' = \{(1, 0), (0, 1)\}$的轉換矩陣

解：

$$T(1, 2) = (3, 0) = 3(1, 0) + 0(0, 1)$$

$$T(-1, 1) = (0, -3) = 0(1, 0) - 3(0, 1)$$

$$[T(1, 2)]_{B'} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [T(-1, 1)]_{B'} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix}$$

T相對於基底B及B'的轉換矩陣為

$$A = \left[[T(1, 2)]_{B'} \quad [T(1, 2)]_{B'} \right] = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

- 範例 6：

  對於範例5中的線性轉換$T: R^2 \to R^2$，以矩陣A表示$T(\mathbf{v})$

  其中$\mathbf{v}=(2,1)$

解：

$$\mathbf{v}=(2,1)=1(1,2)-1(-1,1) \qquad B=\{(1,2),(-1,1)\}$$

$$\Rightarrow [\mathbf{v}]_B=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow [T(\mathbf{v})]_{B'}=A[\mathbf{v}]_B=\begin{bmatrix}3&0\\0&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow T(\mathbf{v})=3(1,0)+3(0,1)=(3,3) \qquad B'=\{(1,0),(0,1)\}$$

- 檢查：

$$T(2,1)=(2+1,2(2)-1)=(3,3)$$

- 注意：

(1)在$V=W$及$B=B'$的特例中，矩陣A被稱為T相對於基底B的轉換矩陣

(2)$T:V\to V$： 相等轉換

$B=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$： V的一組基底

$\Rightarrow T$相對於B的轉換矩陣為

$$A=\left[[T(v_1)]_B,[T(v_2)]_B,\cdots,[T(v_n)]_B\right]=\begin{bmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{bmatrix}=I_n$$

摘要與復習 (6.3節之關鍵詞)

- standard matrix for T: T 的標準矩陣
- composition of linear transformations: 線性轉換的合成
- inverse linear transformation: 反線性轉換
- matrix of T relative to the bases B and B' : T對應於基底B到B'的矩陣
- matrix of T relative to the basis B: T對應於基底B的矩陣

6.4 轉移矩陣及相似性

$T:V\rightarrow V$ (線性轉換)

$B=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ (V的基底)

$B'=\{w_1,w_2,\cdots,w_n\}$ (V的基底)

$A=\left[[T(v_1)]_B,[T(v_2)]_B,\cdots,[T(v_n)]_B\right]$ (T相對於B的矩陣)

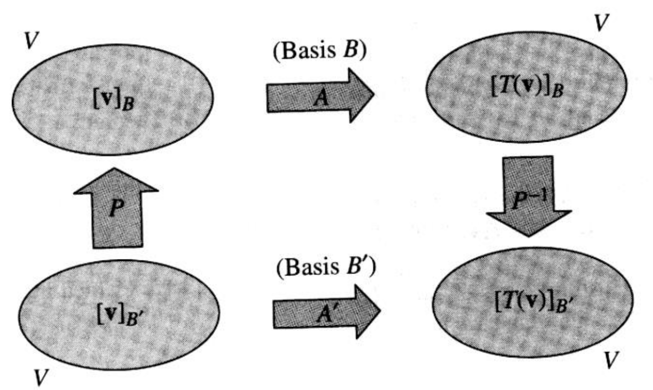
$A'=\left[[T(w_1)]_{B'},[T(w_2)]_{B'},\cdots,[T(w_n)]_{B'}\right]$ (T對應於B'的矩陣)

$P=\left[[w_1]_B,[w_2]_B,\cdots,[w_n]_B\right]$ (B'到B的轉移矩陣)

$P'=\left[[v_1]_{B'},[v_2]_{B'},\cdots,[v_n]_{B'}\right]$ (B到B'的轉移矩陣)

$$\therefore [\mathbf{v}]_B=P[\mathbf{v}]_{B'},\ [\mathbf{v}]_{B'}=P^{-1}[\mathbf{v}]_B$$

$$[T(\mathbf{v})]_B=A[\mathbf{v}]_B$$
$$[T(\mathbf{v})]_{B'}=A'[\mathbf{v}]_{B'}$$



- 兩個從 $[\mathbf{v}]_{B'}$ 到 $[T(\mathbf{v})]_{B'}$ 的方法

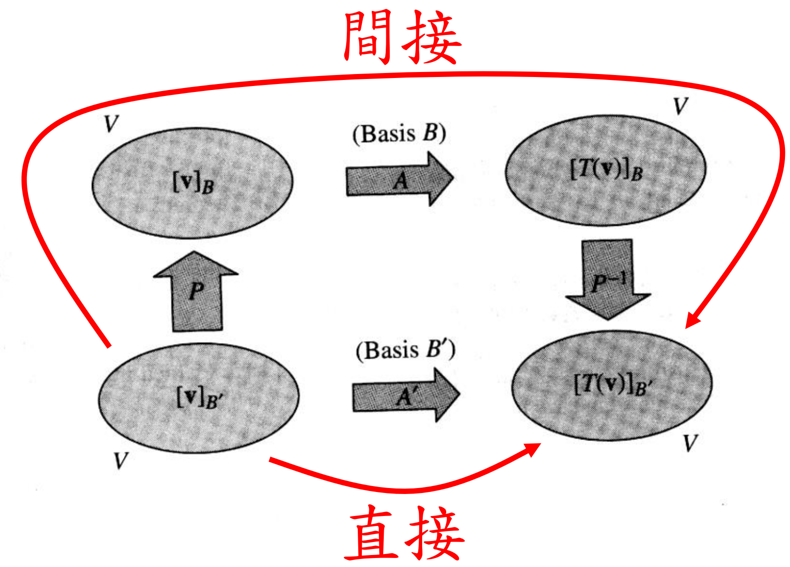
(1)(直接)

$$A'[\mathbf{v}]_{B'} = [T(\mathbf{v})]_{B'}$$

(2)(間接)

$$P^{-1}AP[\mathbf{v}]_{B'} = [T(\mathbf{v})]_{B'}$$

$$\Rightarrow A' = P^{-1}AP$$



- 範例 1：求線性轉換矩陣

對於線性轉換$T: R^2 \rightarrow R^2$

$$T(x_1, x_2) = (2x_1 - 2x_2, -x_1 + 3x_2)$$

求相對於基底$B' = \{(1,0), (1,1)\}$的矩陣

解：

(I) $A' = \left[[T(1,0)]_{B'} \quad [T(1,1)]_{B'} \right]$

$$T(1,0) = (2,-1) = 3(1,0) - 1(1,1) \quad \Rightarrow \quad [T(1,0)]_{B'} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$T(1,1) = (0,2) = -2(1,0) + 2(1,1) \quad \Rightarrow \quad [T(1,1)]_{B'} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A' = \left[[T(1,0)]_{B'} \quad [T(1,1)]_{B'} \right] = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

(II) T的標準矩陣(T相對於$B=\{(1,0),(0,1)\}$的矩陣)

$$A=\begin{bmatrix}T(1,0) & T(0,1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -2\\ -1 & 3\end{bmatrix}$$

B'到B的轉移矩陣

$$P=\begin{bmatrix}[(1,0)]_B & [(1,1)]_B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

B到B'的轉移矩陣

$$P^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

T相對於B'的矩陣

$$A'=P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -2\\ -1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -2\\ -1 & 2\end{bmatrix}$$

- 範例 2：求線性轉換矩陣

令$B=\{(-3,2),(4,-2)\}$及$B'=\{(-1,2),(2,-2)\}$為R^2的基底，

且令$A=\begin{bmatrix}-2 & 7\\ -3 & 7\end{bmatrix}$為$T:R^2\to R^2$相對於$B$的矩陣，求$T$相對於$B'$的矩陣$A'$

解：

B'到B的轉移矩陣 $P=\left[[(-1,2)]_B \quad [(2,-2)]_B\right]=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 2 & -1\end{bmatrix}$

B到B'的轉移矩陣 $P^{-1}=\left[[(-3,2)]_{B'} \quad [(4,-2)]_{B'}\right]=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ -2 & 3\end{bmatrix}$

T相對於B'的矩陣

$$A'=P^{-1}AP=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ -2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & 7\\ -3 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -2\\ 2 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 3\end{bmatrix}$$

- 範例 3：線性轉換矩陣

求範例2中線性轉換$T: R^2 \to R^2$的$[\mathbf{v}]_B$、$[T(\mathbf{v})]_B$及$[T(\mathbf{v})]_{B'}$，

其中向量**v**的座標矩陣為$[\mathbf{v}]_{B'} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}$

解：

$$[\mathbf{v}]_B = P[\mathbf{v}]_{B'} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$[T(\mathbf{v})]_B = A[\mathbf{v}]_B = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -7 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -21 \\ -14 \end{bmatrix}$$

$$[T(\mathbf{v})]_{B'} = P^{-1}[T(\mathbf{v})]_B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -21 \\ -14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 0 \end{bmatrix}$$

或 $[T(\mathbf{v})]_{B'} = A'[\mathbf{v}]_{B'} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 0 \end{bmatrix}$

- 相似矩陣 (similar matrix)

  對於n階方陣A與A'，若存在一可逆矩陣P使得 $A' = P^{-1}AP$

  則稱A'相似於A

- 定理 6.13：相似矩陣的性質

令A、B及C為n階方陣，則下列性質為真

(1) A相似於A

(2) 若A相似於B，則B相似於A

(3) 若A相似於B且B相似於C ，則A相似於C

證明：

$$(1) A = I_n A I_n$$

$$(2) A = P^{-1}BP \;\Rightarrow\; PAP^{-1} = P(P^{-1}BP)P^{-1}$$

$$PAP^{-1} = B \;\Rightarrow\; Q^{-1}AQ = B \;\; (Q = P^{-1})$$

▪ 範例 4：相似矩陣

$$(a)A=\begin{bmatrix}2 & -2\\ -1 & 3\end{bmatrix}\text{及}A'=\begin{bmatrix}3 & -2\\ -1 & 2\end{bmatrix}\text{為相似矩陣}$$

$$\text{因為}A'=P^{-1}AP\text{，}P=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$(b)A=\begin{bmatrix}-2 & 7\\ -3 & 7\end{bmatrix}\text{及}A'=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 3\end{bmatrix}\text{為相似矩陣}$$

$$\text{因為}A'=P^{-1}AP\text{，}P=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 2 & -1\end{bmatrix}$$

- 範例 5：兩個線性轉換矩陣的比較

$$\text{假設}A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 0\\ 3 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}\text{為}T:R^3\rightarrow R^3\text{相對於標準基底的矩陣}$$

求T相對於以下基底的矩陣

$$B'=\{(1,1,0),(1,-1,0),(0,0,1)\}$$

解：

B'到$B=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$的轉移矩陣

$$P=\left[[(1,1,0)]_B \quad [(1,-1,0)]_B \quad [(0,0,1)]_B\right]=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow P^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

T相對於B'的矩陣

$$A' = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

- 注意：

對角矩陣 $D=\begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}$ 在計算上的優點

$$(1)D^k=\begin{bmatrix} d_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n^k \end{bmatrix}$$

$$(2)D^T=D$$

$$(3)D^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{d_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{d_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{d_n} \end{bmatrix},\quad d_i\neq 0$$

摘要與復習 (6.4節之關鍵詞)

- matrix of T relative to B: T 相對於B的矩陣
- matrix of T relative to B' : T 相對於B'的矩陣
- transition matrix from B' to B : 從B'到B的轉移矩陣
- transition matrix from B to B' : 從B到B'的轉移矩陣
- similar matrix: 相似矩陣

6.5 線性轉換的應用

線性轉換在平面上的幾何學

在本節中，我們將說明 2×2 基本矩陣所表示之線性轉換的幾何意義。接著我們以各種不同型式的 2×2 基本矩陣為例來詳細說明之。

平面上的基本線性轉換矩陣

對 y-軸的鏡射

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

對 x-軸的鏡射

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

對直線 $y=x$ 的鏡射

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

水平擴展 $(k > 1)$
或縮減 $(0 < k < 1)$

$$A = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

垂直擴展 $(k > 1)$
或縮減 $(0 < k < 1)$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

水平切變

$$A = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

垂直切變

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$$

範例 1　平面上的鏡射

以下矩陣所定義的轉換被稱為**鏡射 (reflections)**。鏡射具有將 xy-平面上的點映射到其關於某一座標軸或直線 $y=x$ "鏡像" 的效果，如圖 6.11 所示。

(a) 對 y-軸的鏡射：

$$T(x, y) = (-x, y)$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}$$

(b) 對 x-軸的鏡射：

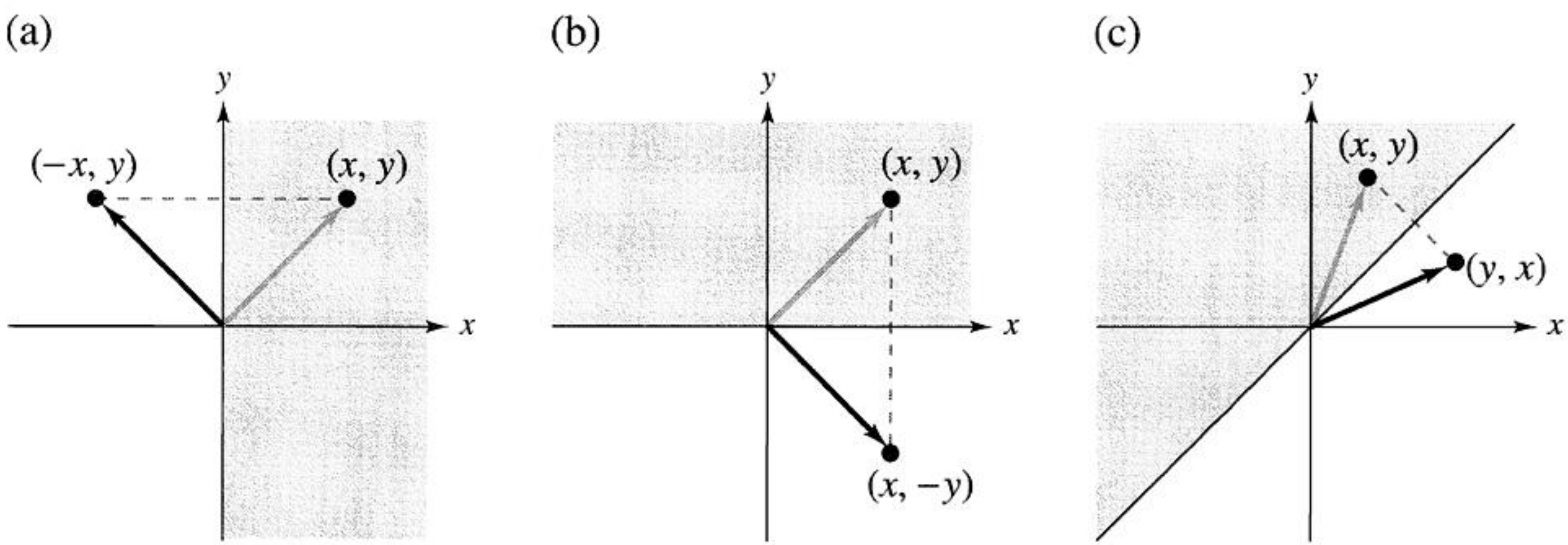
$$T(x, y) = (x, -y)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$$

(c) 對直線 $y=x$ 的鏡射：

$$T(x, y) = (y, x)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$$



平面上的鏡射

圖 6.11

範例 2　平面上的擴展及縮減

以下矩陣所定義的轉換被稱為**擴展 (expansions)** 及**縮減 (contractions)**，其依靠正純量值 k。

(a) 水平縮減及擴展：

$$T(x, y) = (kx, y)$$

$$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kx \\ y \end{bmatrix}$$

(b) 垂直縮減及擴展：

$$T(x, y) = (x, ky)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ ky \end{bmatrix}$$

注意在圖 6.12 及圖 6.13 中，點 (x, y) 藉由縮減或擴展所移動的距離和點到 x-軸或 y-軸的距離成正比。例如：可藉由轉換 $T(x, y)=(2x, y)$，將點 (1, 3) 往右邊移動 1 個單位，及將點 (4, 3) 往右邊移動 4 個單位。

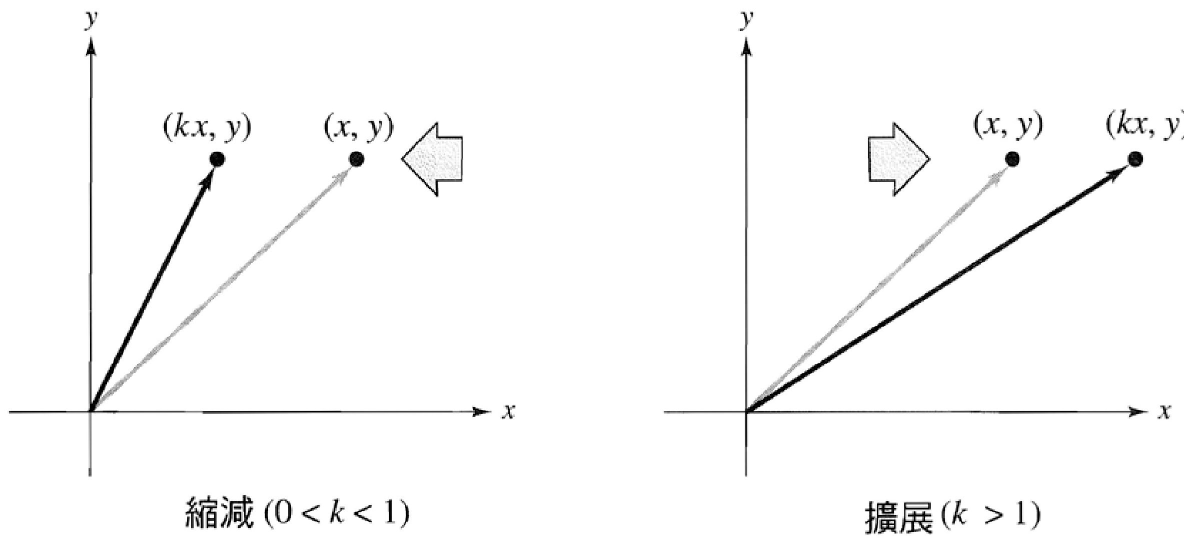


圖 6.12

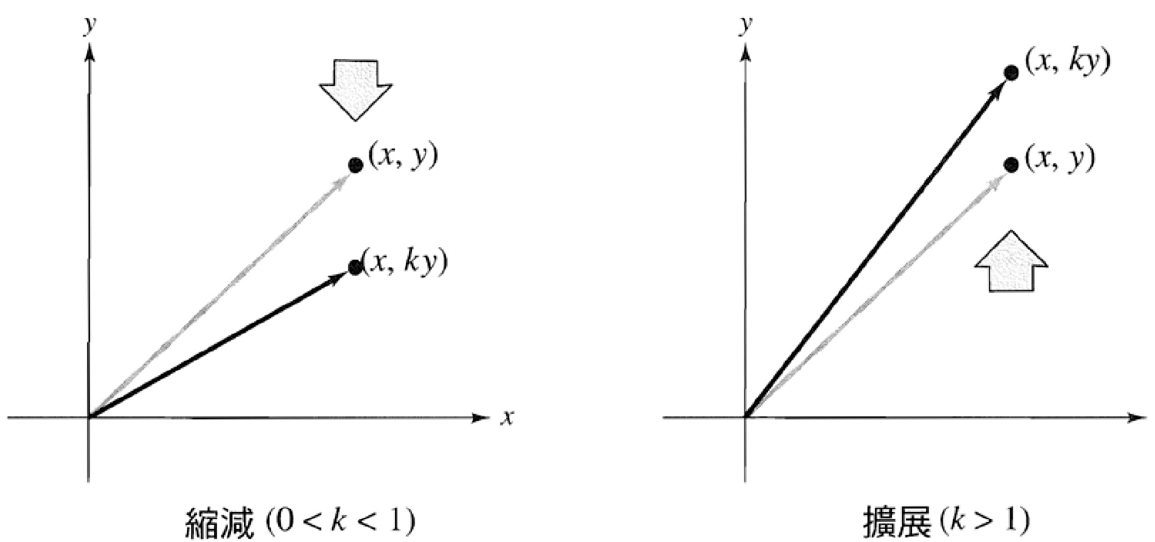


圖 6.13

範例 3　平面上的切變

以下矩陣所定義的轉換為所謂的切變。

$$T(x, y) = (x + ky, y) \qquad\qquad T(x, y) = (x, y + kx)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + ky \\ y \end{bmatrix} \qquad\qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ kx + y \end{bmatrix}$$

(a) 水平切變 $T(x, y)=(x, y+2x)$ 如圖 6.14 所示。在上半平面的點藉由“切變”將點的 x-軸座標以加總的方式往右移動，其移動的距離和到 y-軸的距離成正比。在下半平面的點藉由“切變”將點的 x-軸座標以加總的方式往左移動，其移動的距離和到 y-軸的距離成正比。在 x-軸上的點經由切變轉換，該點將不會移動。

(b) 垂直切變 $T(x, y)=(2x, y)$ 如圖 6.15 所示。在右半平面的點藉由“切變”將點的 y-軸座標以加總的方式往上移動，其移動的距離和到 x-軸的距離成正比。在左半平面的點藉由“切變”將點的 y-軸座標以加總的方式往下移動，其移動的距離和到 x-軸的距離成正比。在 y- 軸上的點經由切變轉換，該點將不會移動。

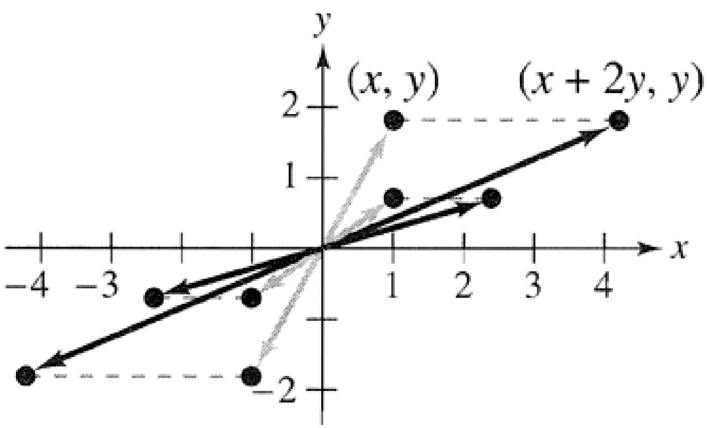


圖 6.14

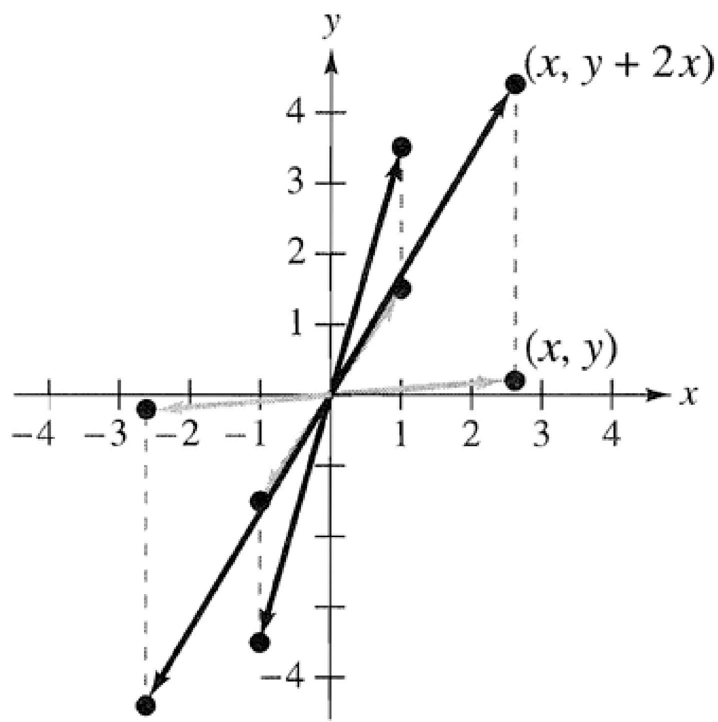


圖 6.15

電腦繪圖

線性轉換在電腦繪圖方面的應用是很有幫助的。在 6.1 節中的範例 7，我們可以了解在平面上線性轉換是如何被用來旋轉圖形。在此我們將了解在 3 維空間上如何利用線性轉換來旋轉圖形。

假設我們要以 z-軸為主軸，將點 (x, y, z) 逆時針旋轉 θ 角度，如圖 6.16 所示。令旋轉後點的座標為 (x', y', z')，我們得到

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \\ z \end{bmatrix}$$

範例 4 說明在 3 維空間上如何用這個矩陣來旋轉圖形。

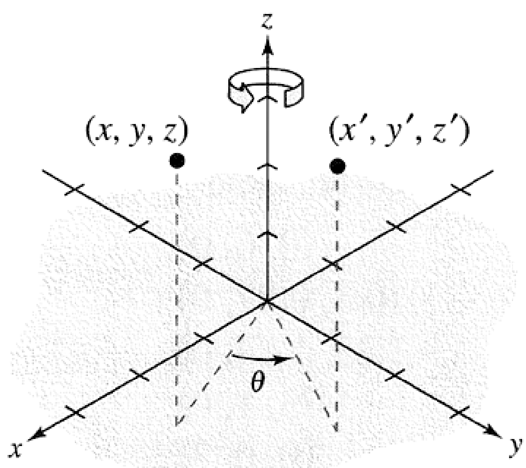


圖 6.16

範例 4 **以 z-軸為主軸的旋轉**

一個具有邊長為 1, 2 及 3 的長方體，其 8 個頂點分別為

$$\begin{array}{llll} V_1 = (0, 0, 0) & V_2 = (1, 0, 0) & V_3 = (1, 2, 0) & V_4 = (0, 2, 0) \\ V_5 = (0, 0, 3) & V_6 = (1, 0, 3) & V_7 = (1, 2, 3) & V_8 = (0, 2, 3) \end{array}$$

當此長方體以 z-軸為主軸分別逆時針旋轉以下的角度後，求出它的座標。

(a) $\theta = 60°$ (b) $\theta = 90°$ (c) $\theta = 120°$

解：原始的長方體如圖 6.17 所示。

(a) 將長方體旋轉 60° 的矩陣為

$$A = \begin{bmatrix} \cos 60° & -\sin 60° & 0 \\ \sin 60° & \cos 60° & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

將這 8 個頂點分別乘上這個矩陣，則可得到以下旋轉後的頂點。

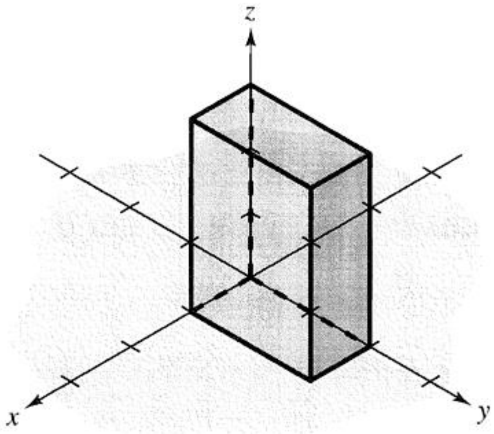


圖 6.17

原始頂點	旋轉後的頂點
$V_1 = (0, 0, 0)$	$(0, 0, 0)$
$V_2 = (1, 0, 0)$	$(0.5, 0.87, 0)$
$V_3 = (1, 2, 0)$	$(-1.23, 1.87, 0)$
$V_4 = (0, 2, 0)$	$(-1.73, 1, 0)$
$V_5 = (0, 0, 3)$	$(0, 0, 3)$
$V_6 = (1, 0, 3)$	$(0.5, 0.87, 3)$
$V_7 = (1, 2, 3)$	$(-1.23, 1.87, 3)$
$V_8 = (0, 2, 3)$	$(-1.73, 1, 3)$

此長方體經由旋轉後所產生的電腦繪圖如圖 6.18(a) 所示。在此必須注意的是長方體中表示邊長的線段經由旋轉後的映射也會是相連的。例如，由於在原始長方體的頂點 V_1 和 V_2 為相連的，則旋轉後所得到的 V_1 和 V_2 的映射也會是相連的。

(b) 將長方體旋轉 90° 的矩陣為

$$A = \begin{bmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ & 0 \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

其長方體旋轉後的圖形如圖 6.18(b) 所示。

(c) 將長方體旋轉 120° 的矩陣為

$$A = \begin{bmatrix} \cos 120^\circ & -\sin 120^\circ & 0 \\ \sin 120^\circ & \cos 120^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

其長方體旋轉後的圖形如圖 6.18(c) 所示。

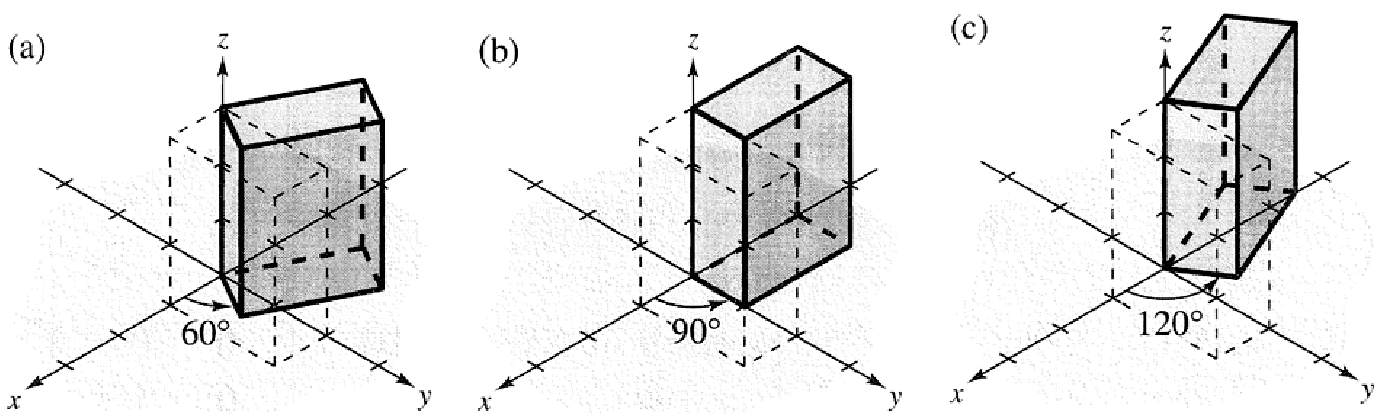
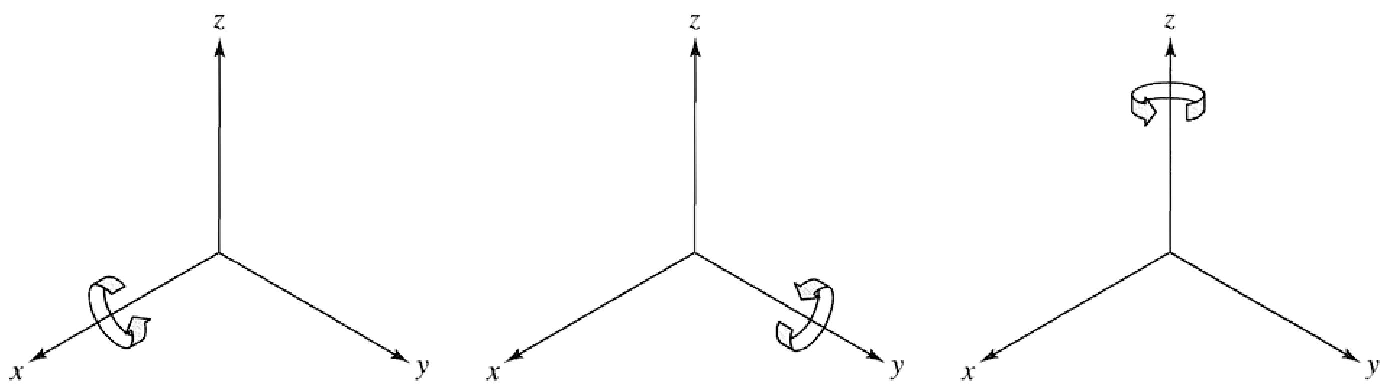


圖 6.18

由範例 4 中可知，矩陣可用來以 z-軸為主軸來旋轉。同理，我們也用矩陣來以 x-軸或 y-軸為主軸來旋轉。這三種旋轉的型式總結如下：

以 x-軸為主軸的旋轉	以 y-軸為主軸的旋轉	以 z-軸為主軸的旋轉
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

在每一種情況下，旋轉的方向為面向所採用的主軸的反方向做逆時針旋轉，如圖 6.19 所示。



以 x-軸為主軸的旋轉　以 y-軸為主軸的旋轉　以 z-軸為主軸的旋轉

圖 6.19

範例 5　以 x-軸和 y-軸為主軸的旋轉

(a) 以 x-軸為主軸，將點旋轉 90° 的矩陣為

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

從範例 4 可知此旋轉盒之圖示如圖 6.20(a) 所示。

(b) 以y-軸為主軸，將點旋轉 90° 的矩陣為

$$A=\begin{bmatrix}\cos\theta & 0 & \sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

從範例 4 可知此旋轉盒之圖示如圖 6.20(b) 所示。

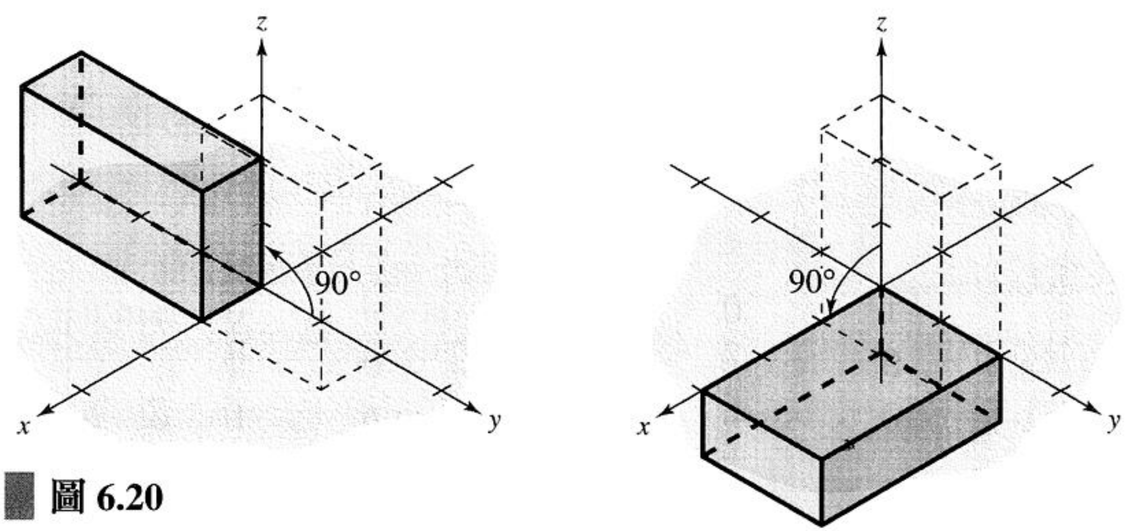


圖 6.20

可結合幾個座標軸為主軸的旋轉，求對圖形產生想要的視野。例如，圖 6.21 說明了先將長方體以 y-軸為主軸旋轉 90° (從範例 4)，之後再更進一步地以 z-軸為主軸來旋轉 120°。

電腦繪圖的應用已經在許多的領域成為設計者常用的工具了。在一個物體被建立之前，若可以概略地將這個物體大概的形狀的座標輸入到電腦，則設計者便可經由電腦的處理來了解這個物體的形狀。以一個由空間中的 27 點所建構的玩具船圖像為例，如圖 6.22 所示。一旦這 27 個點已被存在電腦中，則這個玩具船便可從任何的視野來觀看了。

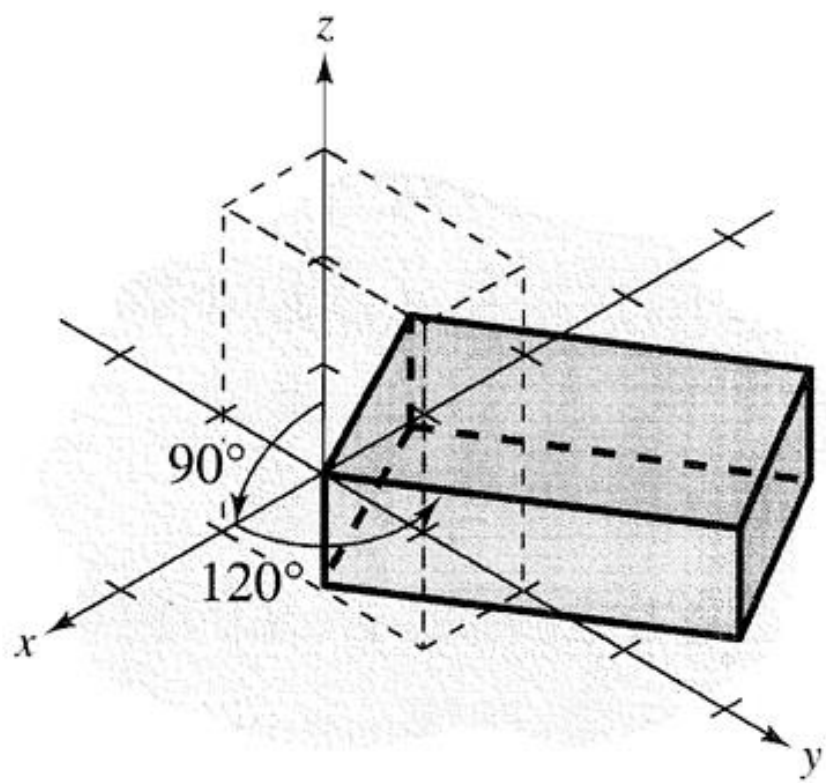


圖 6.21

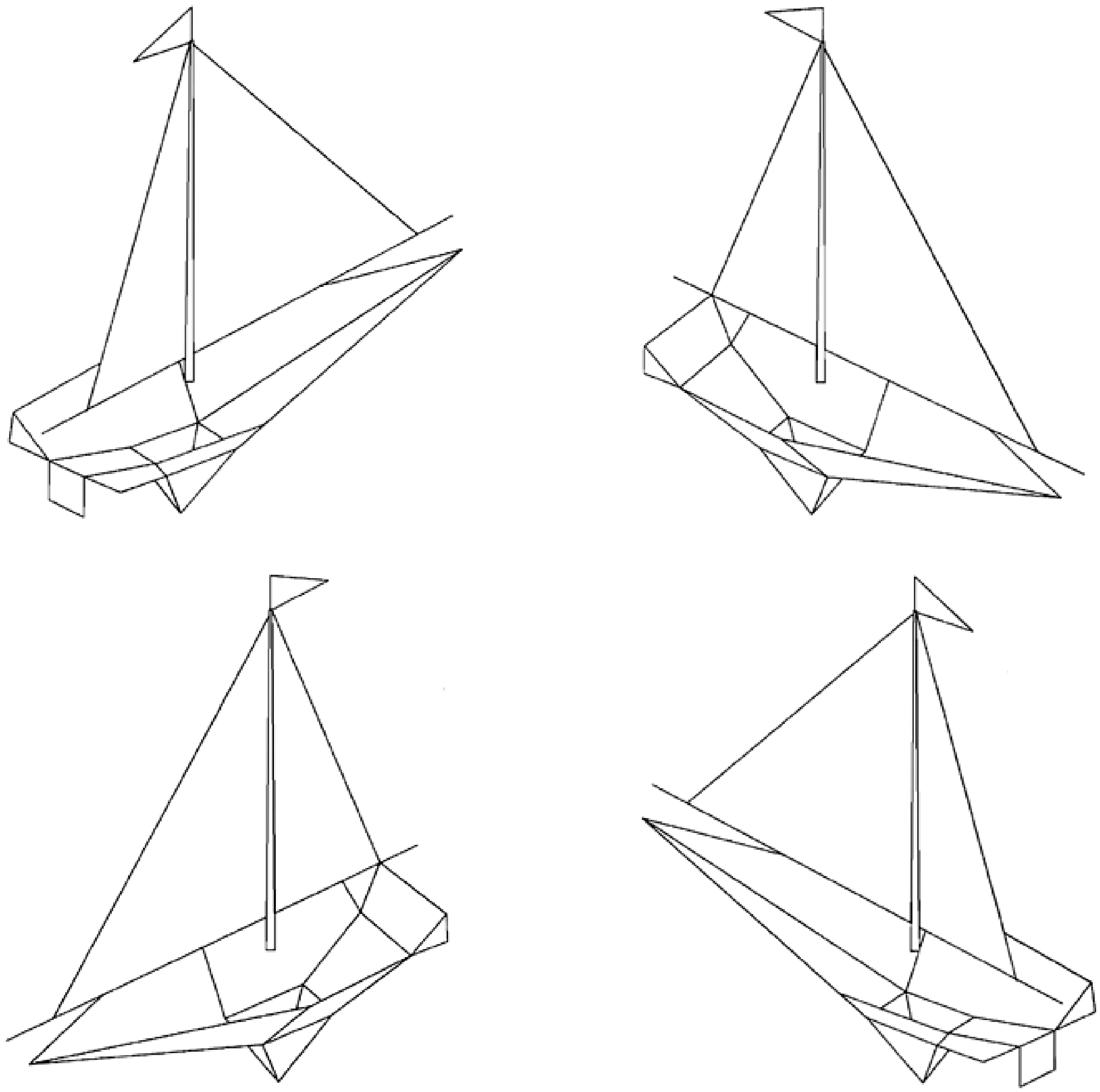


圖 6.22