第三章
行列式

3.1 矩陣的行列式

3.2 使用基本運算求行列式

3.3 行列式的性質

3.4 特徵值介紹

3.5 行列式的應用

投影片設計製作者
淡江大學 電機系 翁慶昌 教授

3.1 矩陣的行列式

- 2×2 矩陣的行列式 (determinant)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(A) \; = \; |A| \; = \; a_{11}a_{22} \; - \; a_{21}a_{12}$$

- 注意：

$$\left| \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

- 範例 1：二階矩陣的行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2(2) - 1(-3) \quad = 4 + 3 \quad = 7$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2(2) - 4(1) \quad = 4 - 4 \quad = 0$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0(4) - 2(3) \quad = 0 - 6 \quad = -6$$

- 注意： 矩陣的行列式可以為正、零或負值。

- a_{ij} 的子行列式 (minor)
- 由A消去第i列和第j行所形成矩陣的行列式

$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(j-1)} & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \\ a_{(i-1)1} & & \cdots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)(j+1)} & \cdots & a_{(i-1)n} \\ a_{(i+1)1} & & \cdots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)(j+1)} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & & \cdots & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

- a_{ij} 餘因子 (cofactor)

$$C_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$$

- 範例 2：

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow M_{21}=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad M_{22}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow C_{21}=(-1)^{2+1}M_{21}=-M_{21} \qquad C_{22}=(-1)^{2+2}M_{22}=M_{22}$$

- 注意:餘因子的符號型式

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} + & - & + & - & + & \cdots \\ - & + & - & + & - & \cdots \\ + & - & + & - & + & \cdots \\ - & + & - & + & - & \cdots \\ + & - & + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

3×3 矩陣　　4×4 矩陣　　$n \times n$ 矩陣

- 注意：

  奇數位置($i+j$是奇數)為負號，並且

  偶數位置($i+j$為偶數)為正號。

- 範例 2：求A所有的子行列式和餘因子

$$A=\begin{bmatrix}0 & 2 & 1\\ 3 & -1 & 2\\ 4 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

解：(1) 所有A的子行列式

$$\Rightarrow M_{11}=\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-1,\ M_{12}=\begin{vmatrix}3 & 2\\ 4 & 1\end{vmatrix}=-5,\ M_{13}=\begin{vmatrix}3 & -1\\ 4 & 0\end{vmatrix}=4$$

$$M_{21}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=2,\quad M_{22}=\begin{vmatrix}0 & 1\\ 4 & 1\end{vmatrix}=-4,\ M_{23}=\begin{vmatrix}0 & 2\\ 4 & 1\end{vmatrix}=-8$$

$$M_{31}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=5,\quad M_{32}=\begin{vmatrix}0 & 1\\ 3 & 2\end{vmatrix}=-3,\quad M_{33}=\begin{vmatrix}0 & 2\\ 3 & -1\end{vmatrix}=-6$$

解：(2) 所有A的餘因子.

$$\because \quad C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

$$\Rightarrow C_{11} = +\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad C_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 5, \quad C_{13} = +\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 4$$

$$C_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2, \quad C_{22} = +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -4, \quad C_{23} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 8$$

$$C_{31} = +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5, \quad C_{32} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 3, \quad C_{33} = +\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -6$$

- 定理 3.1： 餘因子展開 (expansion by cofactors)

令A是n階方陣，則A的行列式為

$$(a)\quad \det(A)=|A|=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}C_{ij}=a_{i1}C_{i1}+a_{i2}C_{i2}+\cdots+a_{in}C_{in}$$

（第 i 列展開） $i=1,\ 2,\ldots,\ n$

或

$$(b)\quad \det(A)=|A|=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}C_{ij}=a_{1j}C_{1j}+a_{2j}C_{2j}+\cdots+a_{nj}C_{nj}$$

（第 j 行展開） $j=1,\ 2,\ldots,\ n$

- 範例：3階矩陣的行列式

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \det(A) &= a_{11}C_{11}+a_{12}C_{12}+a_{13}C_{13} \\
&= a_{21}C_{21}+a_{22}C_{22}+a_{23}C_{23} \\
&= a_{31}C_{31}+a_{32}C_{32}+a_{33}C_{33} \\
&= a_{11}C_{11}+a_{21}C_{21}+a_{31}C_{31} \\
&= a_{12}C_{12}+a_{22}C_{22}+a_{32}C_{32} \\
&= a_{13}C_{13}+a_{23}C_{23}+a_{33}C_{33}
\end{aligned}$$

- 範例3：3階矩陣的行列式

$$A=\begin{bmatrix}0 & 2 & 1\\ 3 & -1 & 2\\ 4 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\overset{\text{Ex}\,2}{\Rightarrow} C_{11}=-1,\ C_{12}=5,\quad C_{13}=4$$
$$C_{21}=-2,\ C_{22}=-4,\ C_{23}=8$$
$$C_{31}=5,\quad C_{32}=3,\quad C_{33}=-6$$

解：

$$\begin{aligned}\Rightarrow \det(A) &= a_{11}C_{11}+a_{12}C_{12}+a_{13}C_{13}=(0)(-1)+(2)(5)+(1)(4)=14\\ &= a_{21}C_{21}+a_{22}C_{22}+a_{23}C_{23}=(3)(-2)+(-1)(-4)+(2)(8)=14\\ &= a_{31}C_{31}+a_{32}C_{32}+a_{33}C_{33}=(4)(5)+(0)(3)+(1)(-6)=14\\ &= a_{11}C_{11}+a_{21}C_{21}+a_{31}C_{31}=(0)(-1)+(3)(-2)+(4)(5)=14\\ &= a_{12}C_{12}+a_{22}C_{22}+a_{32}C_{32}=(2)(5)+(-1)(-4)+(0)(3)=14\\ &= a_{13}C_{13}+a_{23}C_{23}+a_{33}C_{33}=(1)(4)+(2)(8)+(1)(-6)=14\end{aligned}$$

- 範例5：(3階矩陣的行列式)

$$A=\begin{bmatrix}0 & 2 & 1\\ 3 & -1 & 2\\ 4 & -4 & 1\end{bmatrix} \Rightarrow \det(A)=?$$

解：

$$C_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 4 & 1\end{vmatrix}=-9 \quad C_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}3 & 2\\ 4 & 1\end{vmatrix}=(-1)(-5)=5$$

$$C_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}3 & -1\\ 4 & -4\end{vmatrix}=-8$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \det(A)&=a_{11}C_{11}+a_{12}C_{12}+a_{13}C_{13}\\ &=(0)(-9)+(2)(5)+(1)(-8)\\ &=2\end{aligned}$$

- 注意：

  包含較多0的列(或行)通常是餘因子展開的最佳選擇。

- 例題4：(4階矩陣的行列式)

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 0 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A)=?$$

解：

$$\det(A) = (3)(C_{13}) + (0)(C_{23}) + (0)(C_{33}) + (0)(C_{43})$$

$$= 3C_{13}$$

$$= 3(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 3\left[(0)(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + (2)(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + (3)(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \right]$$

$$= 3[0 + (2)(1)(-4) + (3)(-1)(-7)]$$

$$= (3)(13)$$

$$= 39$$

- 3x3矩陣的行列式

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

減這三個乘積

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

加這三個乘積

$$\Rightarrow \det(A)=|A|=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{31}a_{22}a_{13}$$
$$-a_{32}a_{23}a_{11}-a_{33}a_{21}a_{12}$$

- 範例 5：

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & & -4 & 0 & 6 \\
A = & \left[\begin{array}{ccc} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & -4 & 1 \end{array}\right] & \begin{array}{cc} 0 & 2 \\ 3 & -1 \\ 4 & -4 \end{array} & & & \\
 & & & 0 & 16 & -12
\end{array}
$$

$$\Rightarrow \det(A) = |A| = 0 + 16 - 12 - (-4) - 0 - 6 = 2$$

- 上三角矩陣 (upper triangular matrix)

  矩陣之主對角線下方的元素都為零

- 下三角矩陣 (lower triangular matrix)

  矩陣之主對角線上方的元素都為零

- 對角矩陣 (diagonal matrix)

  矩陣之主對角線上方和下方的元素皆為零

- 注意：

  一個矩陣同時為上三角與下三角被稱為對角(diagonal)

- 範例：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

上三角矩陣　　下三角矩陣　　對角矩陣

- 定理 3.2： 三角矩陣的行列式

若 A 是 n 階三角矩陣，則它的行列式為主對角線上元素的乘積。即

$$\det(A) = |A| = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$$

- 範例 6： 求下列矩陣的行列式

$$\text{(a)}\quad A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 0 \\ -5 & 6 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \end{bmatrix} \qquad \text{(b)}\quad B=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

解：

(a) $|A|=(2)(-2)(1)(3)=-12$

(b) $|B|=(-1)(3)(2)(4)(-2)=48$

摘要與複習 (3.1節之關鍵詞)

- determinant : 行列式
- minor : 子行列式
- cofactor : 餘因子
- expansion by cofactors : 餘因子展開
- upper triangular matrix: 上三角矩陣
- lower triangular matrix: 下三角矩陣
- diagonal matrix: 對角矩陣

3.2 使用基本運算求行列式

- 定理 3.3：基本列運算和行列式

令 A 和 B 是方形矩陣

$$(a)\quad B = r_{ij}(A) \quad \Rightarrow \quad \det(B) = -\det(A) \qquad (\text{i.e. } |r_{ij}(A)| = -|A|)$$

$$(b)\quad B = r_i^{(k)}(A) \quad \Rightarrow \quad \det(B) = k\det(A) \qquad (\text{i.e. } |r_i^{(k)}(A)| = k|A|)$$

$$(c)\quad B = r_{ij}^{(k)}(A) \quad \Rightarrow \quad \det(B) = \det(A) \qquad (\text{i.e. } |r_{ij}^{(k)}(A)| = |A|)$$

- 範例：

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 4\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix} \qquad \det(A)=-2$$

$$A_1=\begin{bmatrix}4 & 8 & 12\\ 0 & 1 & 4\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix} \quad A_2=\begin{bmatrix}0 & 1 & 4\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix} \quad A_3=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ -2 & -3 & -2\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

$$A_1=r_1^{(4)}(A) \quad \Rightarrow \det(A_1)=\det(r_1^{(4)}(A))=4\det(A)=(4)(-2)=-8$$

$$A_2=r_{12}(A) \quad \Rightarrow \det(A_2)=\det(r_{12}(A))=-\det(A)=-(-2)=2$$

$$A_3=r_{12}^{(-2)}(A) \quad \Rightarrow \det(A_3)=\det(r_{12}^{(-2)}(A))=\det(A)=-2$$

- 注意：

$$\det(r_{ij}(A)) = -\det(A) \quad \Rightarrow \quad \det(A) = -\det(r_{ij}(A))$$

$$\det(r_i^{(k)}(A)) = k\det(A) \quad \Rightarrow \quad \det(A) = \frac{1}{k}\det(r_i^{(k)}(A))$$

$$\det(r_{ij}^{(k)}(A)) = \det(A) \quad \Rightarrow \quad \det(A) = \det(r_{ij}^{(k)}(A))$$

注意：

方陣的列梯形形式為上三角矩陣

範例 2：使用基本列運算求行列式值

$$A=\begin{bmatrix}2 & -3 & 10\\ 1 & 2 & -2\\ 0 & 1 & -3\end{bmatrix}\Rightarrow \det(A)=?$$

解：

$$\det(A)=\begin{vmatrix}2 & -3 & 10\\ 1 & 2 & -2\\ 0 & 1 & -3\end{vmatrix}\overset{r_{12}}{=}-\begin{vmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & -3 & 10\\ 0 & 1 & -3\end{vmatrix}$$

$$\overset{r_{12}^{(-2)}}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -7 & 14 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} \overset{r_{2}^{(-\frac{1}{7})}}{=} (-1)\left(\frac{1}{\frac{-1}{7}}\right)\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_{23}^{(-1)}}{=} 7\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (7)(1)(1)(-1) = -7$$

- 注意：

$$|EA| = |E||A|$$

$$(1) \quad E = R_{ij} \quad \Rightarrow |E| = |R_{ij}| = -1$$

$$\Rightarrow |EA| = |r_{ij}(A)| = -|A| = |R_{ij}||A| = |E||A|$$

$$(2) \quad E = R_i^{(k)} \quad \Rightarrow |E| = |R_i^{(k)}| = k$$

$$\Rightarrow |EA| = |r_i^{(k)}(A)| = k|A| = |R_i^{(k)}||A| = |E||A|$$

$$(3) \quad E = R_{ij}^{(k)} \quad \Rightarrow |E| = |R_{ij}^{(k)}| = 1$$

$$\Rightarrow |EA| = |r_{ij}^{(k)}(A)| = 1|A| = |R_{ij}^{(k)}||A| = |E||A|$$

- 行列式與基本列運算

- 定理：(基本列運算與行列式)

令 A 和 B 是方形矩陣

$$(a)\quad B = c_{ij}(A) \quad \Rightarrow \quad \det(B) = -\det(A) \qquad (\text{i.e. } |c_{ij}(A)| = -|A|)$$

$$(b)\quad B = c_i^{(k)}(A) \quad \Rightarrow \quad \det(B) = k\det(A) \qquad (\text{i.e. } |c_i^{(k)}(A)| = k|A|)$$

$$(c)\quad B = c_{ij}^{(k)}(A) \quad \Rightarrow \quad \det(B) = \det(A) \qquad (\text{i.e. } |c_{ij}^{(k)}(A)| = |A|)$$

- 範例：

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \det(A) = -8$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = c_1^{(\frac{1}{2})}(A) \quad \Rightarrow \det(A_1) = \det(c_1^{(4)}(A)) = \frac{1}{2}\det(A) = (\frac{1}{2})(-8) = -4$$

$$A_2 = c_{12}(A) \quad \Rightarrow \det(A_2) = \det(c_{12}(A)) = -\det(A) = -(-8) = 8$$

$$A_3 = c_{23}^{(3)}(A) \quad \Rightarrow \det(A_3) = \det(c_{23}^{(3)}(A)) = \det(A) = -8$$

- 定理 3.4： 產生零行列式的條件

若A是方陣並且下列任何的條件是成立的，則det (A) = 0

(a) 一整列(或一整行)全為零

(b) 兩列(或行)是相等的

(c) 某一列(或行)是另一列(或行)的倍數

- 範例：

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \boxed{0 \quad 0 \quad 0} \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} \boxed{1 \quad 1 \quad 1} \\ \boxed{2 \quad 2 \quad 2} \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} \boxed{1 \quad 2 \quad 3} \\ 4 & 5 & 6 \\ \boxed{-2 \quad -4 \quad -6} \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 2 & 10 & 5 \\ 3 & 12 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

- 注意：

n階	餘因子展開		列簡化	
	加法	乘法	加法	乘法
3	5	9	5	10
5	119	205	30	45
10	3628799	6235300	285	339

- 範例 5：求行列式

$$A=\begin{bmatrix}-3 & 5 & 2\\ 2 & -4 & -1\\ -3 & 0 & 6\end{bmatrix}$$

解：

$$\det(A)=\begin{vmatrix}-3 & 5 & 2\\ 2 & -4 & -1\\ -3 & 0 & 6\end{vmatrix}\overset{C_{13}^{(2)}}{=}\begin{vmatrix}-3 & 5 & -4\\ 2 & -4 & 3\\ -3 & 0 & 0\end{vmatrix}=(-3)(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}5 & -4\\ -4 & 3\end{vmatrix}=(-3)(-1)=3$$

$$\det(A)=\begin{vmatrix}-3 & 5 & 2\\ 2 & -4 & -1\\ -3 & 0 & 6\end{vmatrix}\overset{C_{12}^{(\frac{4}{5})}}{=}\begin{vmatrix}-3 & 5 & 2\\ \frac{-2}{5} & 0 & \frac{3}{5}\\ -3 & 0 & 6\end{vmatrix}=(5)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}\frac{-2}{5} & \frac{3}{5}\\ -3 & 6\end{vmatrix}=(-5)(-\frac{3}{5})=3$$

- 範例 6：求行列式

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 4 & -3 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

解：

$$\det(A)=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 4 & -3 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} \underset{\substack{r_{24}^{(1)} \\ r_{25}^{(-1)}}}{=} \begin{vmatrix} 2 & \boxed{0} & 1 & 3 & -2 \\ -2 & \boxed{1} & 3 & 2 & -1 \\ 1 & \boxed{0} & -1 & 2 & 3 \\ 1 & \boxed{0} & 5 & 6 & -4 \\ 3 & \boxed{0} & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1)(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 6 & -4 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$
\overset{C_{41}^{(-3)}}{=}
\begin{vmatrix}
8 & 1 & 3 & -2 \\
-8 & -1 & 2 & 3 \\
13 & 5 & 6 & -4 \\
\boxed{0 \quad 0 \quad 0 \quad 1}
\end{vmatrix}
= (1)(-1)^{4+4}
\begin{vmatrix}
8 & 1 & 3 \\
-8 & -1 & 2 \\
13 & 5 & 6
\end{vmatrix}
\underset{r_{21}^{(1)}}{=}
\begin{vmatrix}
\boxed{0 \quad 0 \quad 5} \\
-8 \quad -1 \quad 2 \\
13 \quad 5 \quad 6
\end{vmatrix}
$$

$$
= 5(-1)^{1+3}
\begin{vmatrix}
-8 & -1 \\
13 & 5
\end{vmatrix}
$$

$$
= (5)(-27)
$$

$$
= -135
$$

3.3 行列式的性質

- 定理 3.5：矩陣相乘的行列式

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

- 注意:

(1) $\det(EA) = \det(E)\det(A)$

(2) $\det(A+B) \neq \det(A)+\det(B)$

(3)

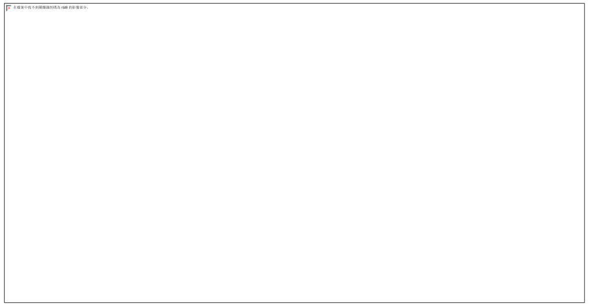
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

- 範例 1: 矩陣相乘的行列式

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 2\\ 0 & 3 & 2\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & -1 & -2\\ 3 & 1 & -2\end{bmatrix}$$

求 |A|、|B| 與 |AB|

解：



$$|B|=\begin{vmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & -1 & -2\\ 3 & 1 & -2\end{vmatrix}=11$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 1 \\ 6 & -1 & -10 \\ 5 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |AB| = \begin{vmatrix} 8 & 4 & 1 \\ 6 & -1 & -10 \\ 5 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -77$$

- 檢查: $|AB| = |A|\,|B|$

- 定理 3.6：矩陣純量積的行列式

若A是一個$n \times n$矩陣並且c是一個純量，則

$$\det(cA) = c^n \det(A)$$

- 範例 2：

$$A = \begin{bmatrix} 10 & -20 & 40 \\ 30 & 0 & 50 \\ -20 & -30 & 10 \end{bmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

求 $|A|$

解：

$$A = 10\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 10^3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = (1000)(5) = 5000$$

- 定理 3.7：可逆矩陣的行列式

方陣A是可逆(非奇異)若且唯若 det (A) ≠ 0

- 範例 3：下列兩個矩陣那一個是可逆?

$$A=\begin{bmatrix}0 & 2 & -1\\ 3 & -2 & 1\\ 3 & 2 & -1\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}0 & 2 & -1\\ 3 & -2 & 1\\ 3 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

解：

$|A|=0 \quad \Rightarrow$ A是不可逆(奇異)

$|B|=-12\neq 0 \quad \Rightarrow$ B是可逆(非奇異)

- 定理 3.8：反矩陣的行列式

$$\text{若}A\text{是可逆，則 } \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

- 定理 3.9：轉置的行列式

$$\text{若}A\text{是一方陣，則 } \det(A^{T}) = \det(A)$$

- 範例 4：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(a) } \left|A^{-1}\right| = ? \qquad \text{(b) } \left|A^{T}\right| = ?$$

解：

$$\because \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4$$

$$\therefore \quad \left|A^{-1}\right| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{4}$$

$$\left|A^{T}\right| = |A| = 4$$

- 非奇異矩陣的等價條件

若A是一個$n \times n$矩陣，下列敘述是等價的

(1) A是可逆

(2) 對每一個$n \times 1$矩陣$\mathbf{b}$，$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 具有唯一解

(3) $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 只有顯然解

(4) A列等價於I_n

(5) A可以寫為一些基本矩陣的相乘

(6) $\det(A) \neq 0$

- 範例 5：下列系統何者有唯一解?

(a)

$$\begin{array}{rcrcrcr} & & 2x_2 & - & x_3 & = & -1 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 4 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & -4 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rcrcrcr} & & 2x_2 & - & x_3 & = & -1 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 4 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & -4 \end{array}$$

解：

(a) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

$\because$ $|A| = 0$

$\therefore$ 這個系統沒有唯一解

(b) $B\mathbf{x} = \mathbf{b}$

$\because$ $|B| = -12 \neq 0$

$\therefore$ 這個系統有唯一解

3.4 特徵值的介紹

- 特徵值問題 (eigenvalue problem)

  若A為一$n \times n$矩陣，在R^n中是否存在著非零向量$\mathbf{x}$，使得$A\mathbf{x}$與$\mathbf{x}$之間存在著倍數關係？

- 特徵值(eigenvalue)與特徵向量(eigenvector)

  A：$n \times n$ 矩陣

  λ：純量

  $\mathbf{x}$： R^n中的非零向量

$$\underbrace{A\mathbf{x}}_{\text{特徵向量}} = \overbrace{\lambda}^{\text{特徵值}} \underbrace{\mathbf{x}}_{\text{特徵向量}}$$

（特徵值問題的基本方程式）

- 範例 1： 證明特徵值與特徵向量

$$A=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 2 & 3\end{bmatrix} \qquad x_1=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix} \qquad x_2=\begin{bmatrix}2\\ -1\end{bmatrix}$$

$$Ax_1=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\ 5\end{bmatrix}=\overset{\text{特徵值}}{5}\underset{\text{特徵向量}}{\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}}=5x_1$$

$$Ax_2=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\ 1\end{bmatrix}=\overset{\text{特徵值}}{-1}\underset{\text{特徵向量}}{\begin{bmatrix}2\\ -1\end{bmatrix}}=(-1)x_2$$

- 問題：

  給予一個 $n \times n$ 矩陣A，

  如何求其特徵值與其對應之特徵向量？

- 注意：

  $$Ax = \lambda x \;\Rightarrow\; (\lambda \mathrm{I} - A)x = 0$$ （齊次系統）

  當 $(\lambda \mathrm{I} - A)x = 0$ 時有非零解，若且唯若 $\det(\lambda \mathrm{I} - A) = 0$

- A的特徵方程式 (characteristic equation) $A \in M_{n \times n}$:

  $$\det(\lambda \mathrm{I} - A) = |(\lambda \mathrm{I} - A)| = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0 = 0$$

- 範例 2： 求特徵值與特徵向量

$$A=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 2 & 3\end{bmatrix}$$

解：特徵方程式：

$$(\lambda \mathrm{I}-A)=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -4\\ -2 & \lambda-3\end{vmatrix}$$

$$=\lambda^2-4\lambda-5=(\lambda-5)(\lambda+1)=0$$

$$\Rightarrow \lambda=5,-1$$

特徵值： $\lambda_1=5, \lambda_2=-1$

$$(1)\lambda_1 = 5 \qquad \Rightarrow (\lambda_1 \mathrm{I} - A)x = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ t \neq 0$$

$$(2)\lambda_2 = -1 \qquad \Rightarrow (\lambda_2 \mathrm{I} - A)x = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2t \\ -t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \ t \neq 0$$

- 範例3： 求特徵值與特徵向量

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

解：特徵方程式：

$$|\lambda \mathrm{I} - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & 2 \\ -1 & \lambda - 2 & -1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - 3) = 0$$

特徵值： $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 3$

$$\lambda_1 = 1$$

$$\Rightarrow \lambda_1 \mathrm{I} - A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2t \\ t \\ t \end{bmatrix} \Rightarrow \text{特徵向量:} \quad t\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = -1$$

$$\Rightarrow \lambda_2 \mathrm{I} - A = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -1 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2t \\ -t \\ t \end{bmatrix} \Rightarrow \text{特徵向量:} \quad t\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_3 = 3 \qquad \Rightarrow \lambda_3 \mathrm{I} - A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2t \\ -t \\ t \end{bmatrix} \Rightarrow \text{特徵向量：} \quad t\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3.5 行列式的應用

- A的餘因子矩陣 (matrix of cofactors of A)

$$[C_{ij}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix} \qquad C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

- A的伴隨矩陣 (adjoint matrix of A)

$$adj(A) = [C_{ij}]^T = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

- 定理 3.10：矩陣之伴隨矩陣所表示的反矩陣

若A是一個 n × n 可逆矩陣，則

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A)$$

- 範例：

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(A) = ad - bc \qquad \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A)$$

$$adj(A) = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \qquad = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

- 範例1 及 範例2：

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 3 & 2\\ 0 & -2 & 1\\ 1 & 0 & -2\end{bmatrix}$$

(a)求A的伴隨矩陣

(b)使用A的伴隨矩陣來求 A^{-1}

解： $\because \quad C_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$

$$\Rightarrow C_{11}=+\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 0 & -2\end{vmatrix}=4,\quad C_{12}=-\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix}=1,\quad C_{13}=+\begin{vmatrix}0 & -2\\ 1 & 0\end{vmatrix}=2$$

$$C_{21}=-\begin{vmatrix}3 & 2\\ 0 & 2\end{vmatrix}=6,\quad C_{22}=+\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 1 & 2\end{vmatrix}=0,\quad C_{23}=-\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 1 & 0\end{vmatrix}=3$$

$$C_{31}=+\begin{vmatrix}3 & 2\\ -2 & 1\end{vmatrix}=7,\quad C_{32}=-\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1,\quad C_{33}=+\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 0 & -2\end{vmatrix}=2$$

$\Rightarrow$ A的餘因子矩陣

$$[C_{ij}] = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 3 \\ 7 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ A的伴隨矩陣

$$adj(A) = [C_{ij}]^T = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 7 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ A的反矩陣

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A) \qquad \because \det(A) = 3$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 4 & 6 & 7 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & 2 & \frac{7}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & 1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

- 檢查： $AA^{-1} = I$

- 定理 3.11： Cramer 法則 (Cramer's Rule)

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}
\qquad A\mathbf{x} = \mathbf{b}
$$

$$A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n} = \left[A^{(1)}, A^{(2)}, \cdots, A^{(n)}\right] \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{（系統有唯一解）}$$

$$A_j = \left[A^{(1)}, A^{(2)}, \cdots, A^{(j-1)}, b, A^{(j+1)}, \cdots, A^{(n)}\right]$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(j-1)} & b_1 & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2(j-1)} & b_2 & a_{2(j+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(j-1)} & b_n & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$(\text{ i.e. } \det(A_j) = b_1 C_{1j} + b_2 C_{2j} + \cdots + b_n C_{nj})$$

$$\Rightarrow x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}, \qquad j = 1, 2, \cdots, n$$

- 證明：

$$A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}, \qquad \det(A) \neq 0$$

$$\Rightarrow \mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} \quad = \frac{1}{\det(A)} adj(A)\mathbf{b}$$

$$= \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} b_1C_{11} & + & b_2C_{21} & + & \cdots & + & b_nC_{n1} \\ b_1C_{12} & + & b_2C_{22} & + & \cdots & + & b_nC_{n2} \\ & \vdots & & \vdots & & & \\ b_1C_{1n} & + & b_2C_{2n} & + & \cdots & + & b_nC_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x_j = \frac{1}{\det(A)}(b_1C_{1j} + b_2C_{2j} + \cdots + b_nC_{nj})$$

$$= \frac{\det(A_j)}{\det(A)} \qquad j = 1,2,\cdots,n$$

- 範例4： 使用Cramer法則對下列線性方程式系統求解

$$\begin{array}{rcrcrcl} -x & + & 2y & - & 3z & = & 1 \\ 2x & & & + & z & = & 0 \\ 3x & - & 4y & + & 4z & = & 2 \end{array}$$

解：

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & 4 \end{vmatrix} = 10 \qquad \det(A_1) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 4 \end{vmatrix} = 8$$

$$\det(A_2) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -15, \qquad \det(A_3) = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix} = -16$$

$$x = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{4}{5} \qquad y = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{-3}{2} \qquad z = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{-8}{5}$$

面積、體積和線與平面的方程式

行列式在解析幾何有很多的應用。這裡提出幾個應用。第一個應用為在 xy-平面上求三角形的面積。

在 xy-平面上三角形的面積

頂點為 (x_1, y_1)、(x_2, y_2) 和 (x_3, y_3) 所形成三角形的面積為

$$\text{面積} = \pm\frac{1}{2}\det\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}$$

其中符號 $(\pm)$ 被用來使得面積為正。

證明： 證明 $y_i > 0$ 的情況，假設 $x_1 \leq x_3 \leq x_2$ 並且 (x_3, y_3) 在連接 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) 線段的上方。如圖 3.1 所示。考慮三個不等邊四邊形它的頂點如下。

不等邊四邊形#1：$(x_1, 0), (x_1, y_1), (x_3, y_3), (x_3, 0)$

不等邊四邊形#2：$(x_3, 0), (x_3, y_3), (x_2, y_2), (x_2, 0)$

不等邊四邊形#3：$(x_1, 0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_2, 0)$

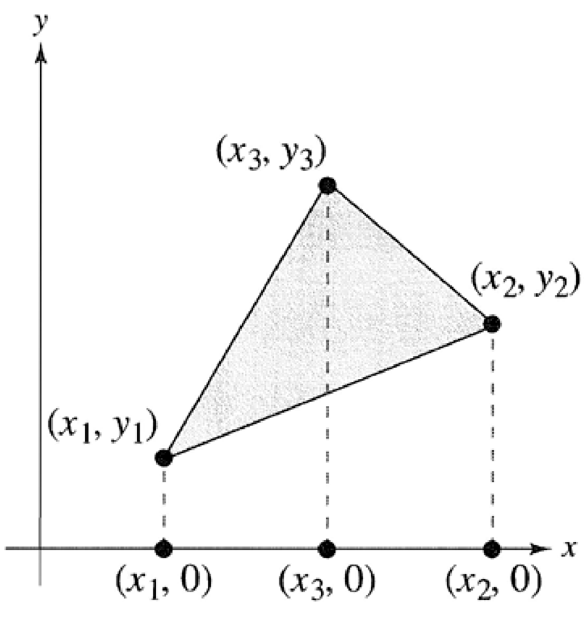


圖 3.1

所給三角形的面積相等於首兩個不等邊四邊形之面積和減掉第三個的面積。因此

$$\begin{aligned}
\text{面積} &= \tfrac{1}{2}(y_1 + y_3)(x_3 - x_1) + \tfrac{1}{2}(y_3 + y_2)(x_2 - x_3) - \tfrac{1}{2}(y_1 + y_2)(x_2 - x_1) \\
&= \tfrac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_1y_3 - x_2y_1 - x_3y_2) \\
&= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

若頂點發生的順序不是 $x_1 \le x_3 \le x_2$ 或者頂點 (x_3, y_3) 不在連接另二個頂點線段的上方，則公式可能得到負的面積。

範例 5　求三角形的面積

求頂點為 (1, 0)、(2, 2) 和 (4, 3) 所形成三角形的面積。

解： 不需知道這三個頂點的相對位置。只需簡單地計算這個行列式

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 2 & 1\\ 4 & 3 & 1\end{vmatrix} = -\frac{3}{2}$$

如此可得三角形面積為 $\frac{3}{2}$。

假設在範例 5 的三個點是在同一條線上。我們應用公式計算這三個點將會發生什麼事？答案是行列式將為零。例如，考慮在同一直線的點 (0, 1)、(2, 2) 和 (4, 3)，如圖 3.2 所示。列式表示這三個點為頂點的“三角形”面積為

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

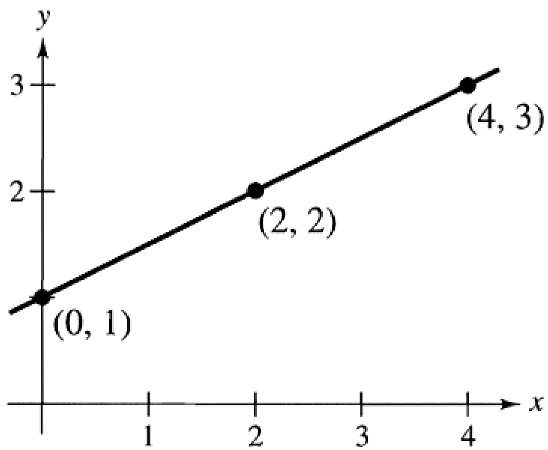


圖 3.2

因此，假設在 xy-平面上的三個點在同一條直線上，則三角形的面積公式的行列式為零。這個結果擴展為下列的測試。

在 xy-平面上共線點的測試

三點 (x_1, y_1)、(x_2, y_2) 和 (x_3, y_3) 是在同一條直線上若且唯若

$$\det\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

由共線點測試法中可以推導下列行列式來表示在 xy-平面上通過兩點的直線方程式。

兩點形成一條直線的方程式

直線通過不同點 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) 的方程式可表示為

$$\det\begin{bmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

範例 6　求通過兩點的直線方程式

求通過點 (2, 4) 和 (－1, 3) 的直線方程式。

解： 應用行列式公式對通過這兩點的直線方程式可得

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

沿最上列做餘因子展開來求得這個行列式為

$$x\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$x - 3y + 10 = 0$$

因此，這條直線的方程式為 $x-3y=-10$。

四面體體積　頂點為 (x_1, y_1, z_1)、(x_2, y_2, z_2)、(x_3, y_3, z_3) 和 (x_4, y_4, z_4) 的四面體的體積為

$$\text{體積} = \pm\frac{1}{6}\det\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{bmatrix}$$

其中符號 $(\pm)$ 被用來使得體積為正。

範例 7　求四面體的體積

如圖 3.3 所示，求頂點為 (0, 4, 1)、(4, 0, 0)、(3, 5, 2) 和 (2, 2, 5) 之四面體的體積。

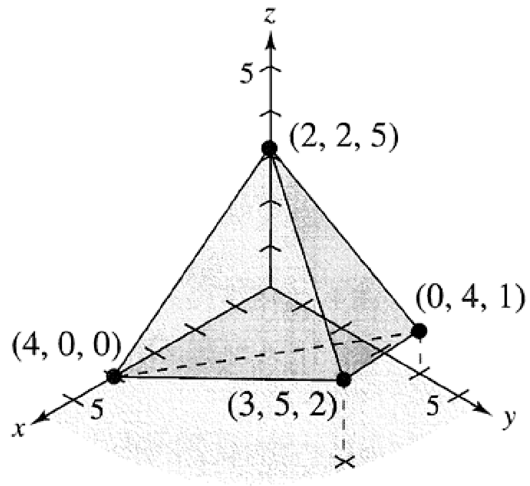


圖 3.3

解： 使用體積的行列式公式可得

$$\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}(-72) = -12$$

因此四面體的體積為 12。

- 若三維空間上的四點在同一個平面上，則體積的公式中的行列式為零。因此我們有下列的測試。

在空間中共平面點的測試 四點 (x_1, y_1, z_1)、(x_2, y_2, z_2)、(x_3, y_3, z_3) 和 (x_4, y_4, z_4) 是共平面若且唯若

$$\det\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

這個測試可以對在空間中通過三點的平面方程式提出下列行列式形式。

三點形成一個平面的方程式 平面通過不同點 (x_1, y_1, z_1)、(x_2, y_2, z_2) 和 (x_3, y_3, z_3) 的方程式可表示為

$$\det\begin{bmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

範例 8　求平面通過三點的方程式

求平面通過點 (0, 1, 0), (−1, 3, 2) 和 (−2, 0, 1) 的方程式。

解：對在空間中平面通過三點的方程式使用行列式形式可得

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

為了計算這個行列式，從第二行減第四行可得

$$\begin{vmatrix} x & y-1 & z & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

現在，沿第二列做餘因子展開可得

$$x\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - (y-1)\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}$$

其產生方程式 $4x - 3y + 5z = -3$

Keywords in Section 3.5:

- matrix of cofactors : 餘因子矩陣
- adjoint matrix : 伴隨矩陣
- Cramer’s rule : Cramer 法則