# DE LA FORCE DE PERCUSSION

## ET DE SA VERITABLE MESURE,

par *Mr. EULER.*

Traduit du Latin.

---

TOUT CORPS, conformément au premier principe de la Méchanique, perſevérant naturellement dans ſon etat, ſoit de repos, ſoit de mouvement uniforme & rectiligne; toutes les fois qu'un corps quelconque, ou commence à ſe mouvoir ayant été auparavant en repos, ou a un mouvement qui n'eſt point uniforme, ni direct, la cauſe de ce changement, quelle qu'elle ſoit s'appelle ordinairement FORCE. Tant que le Corps demeure dans le même etat, c'eſt à dire, en repos, ou dans un mouvement uniforme & rectiligne, la cauſe de cette conſervation d'etat eſt dans la nature même du Corps, & l'on ne ſauroit dire qu'aucune force extrinſeque ait agi ſur lui. C'eſt ce principe interne qu'on appelle INERTIE. En effet l'etat de chaque corps ſe conſervant en vertu de ſa propre conſtitution, il eſt néceſſaire que la cauſe de tout changement ſoit externe, parce qu'il ſeroit abſurde d'attribuer à un même corps un effort à conſerver ſon etat, & en meme tems à le changer. Si donc l'on ne donne le nom de Force qu'aux cauſes, qui peuvent changer l'etat des corps, l'inertie par laquelle tout corps demeure dans ſon etat, ne peut etre appellée proprement Force, quoiqu'une veritable force puiſſe quelquefois en réſulter. Car lorsque l'inertie maintient un corps dans ſon etat de repos, ou de progreſſion uniforme & directe, la meme inertie peut etre cauſe que l'etat d'autres corps ſoit changé. Ainſi quoique le nom de force ne lui convienne pas, eu égard au corps où elle réſide, cependant elle peut paſſer en force quant à d'autres corps. Il ſemble méme trés vraiſemblable, que tous les changemens qui arrivent dans le monde, naiſſent ſans exception de l'inertie, & qu'il n'y a point d'autres forces dans la nature, que celles que l'inertie y excite. Il faut montrer en peu de mots comment cela ſe paſſe, & nous arriverons par ce moyen à une idée plus exacte des forces.

*Fig.* 1. II. CONSIDERONS le Corps A qui ſe meuve avec une viteſſe donnée ſuivant la direction AC. Tant qu'il ne rencontre aucun obſtacle, il continuera ſon mouvement avec la meme viteſſe, & ſuivant la même direction AC, & ainſi il perſevérera dans ſon etat, la cauſe de cette perſéverance etant l'inertie même de ce corps. Mais poſons qu'il y ait en B un autre corps en repos, & que le Corps A ſe ſoit deja tellement approché de B que leurs extremités *a* & *b* ſe touchent; il s'agit de decouvrir ce qui doit arriver dans ce cas. Et d'abord, les deux corps etant impénétrables, il eſt manifeſte que le Corps A ne ſauroit demeurer dans ſon etat, ſans troubler celui de B. Car, pour que le corps A put continuer ſon mouvement, il ſeroit néceſſaire qu'il chaſsât devant lui le corps B avec une viteſſe egale ou plus grande, ou bien qu'il ſe detournat de coté. Enſuite ſi nous faiſons attention au corps B, il ne pourra demeurer dans ſon etat de

repos

rèpos, à moins que le corps A ne rentre dans le repos, ou qu'il ne rebrouſſe, où qu'il ne ſe détourne à coté. Tout cela montre clairement, que les deux corps à la fois ne ſauroient conſerver l'etat où ils ſe trouvoient. Or comme la continuation du mouvement eſt l'effet de l'inertie du Corps A, & la persévérance dans le repos l'effet de l'inertie du Corps B, l'une & l'autre de ces cauſes ne pourront produire enſemble l'effet auquel elles tendent. Aprés donc que le corps A aura touché l'autre Corps B, il faut que l'etat de l'un, ou celui de tous les deux ſoit changé, ou puis que l'un & l'autre Corps fait egalement effort pour conſerver ſon etat, & par conſequent qu'il ne peut y avoir de raiſon, pourquoi l'un ſouffriroit du changement plutot que l'autre, il eſt evident que l'etat de tous les deux doit etre troublé. Mais quelque changement qui arrive dans l'un & dans l'autre, on infére des obſervations précedentes, qu'il doit proceder de la force d'inertie. Car lorsque l'etat de repos du corps B ſe change en mouvement, la cauſe en eſt dans l'inertie du corps A, ſans l'arrivée duquel B ſeroit demeuré dans un repos perpetuel; & pareillement la cauſe du changement qui arrive dans le mouvement du Corps A ne peut etre que l'inertie de B, ſans laquelle A auroit conſervé ſon mouvement ſans alteration.

III. POUR EXPLIQUER tout cela plus clairement, il eſt à propos d'examiner un peu plus attentivement l'idée de l'inertie. Puis qu'elle eſt dans tout corps la cauſe qui le fait perſeverer dans ſon etat, on ne peut la concevoir que comme un principe de réſiſtence à tout changement d'etat. Car on ne pourroit dire que le Corps a la faculté de demeurer dans ſon etat, s'il obeïſſoit ſans aucune réſiſtence à une cauſe quelconque qui feroit effort pour l'en tirer. C'eſt ce qui autoriſe à donner à l'inertie le nom de Force, en prenant ce terme dans une ſignification plus etendüe. Lors donc que le Corps A

tend

tend par ſon inertie à conſerver ſon mouvement uniforme rectiligne, il a en meme tems la force de reſiſter à tous les obſtacles; & le Corps B, dont l'inertie s'exerce à la conſervation de ſon repos, a une force par laquelle il reſiſte à toutes les cauſes qui voudroient l'en tirer. Ainſi dans le choc de ces deux corps, tous deux ne pouvant conſerver enſemble leur etat à cauſe de leur impenetrabilité, & l'inertie de l'un & de l'autre reſiſtant au changement, il faut que l'inertie de l'un produiſe du changement dans celle de l'autre. C'eſt pourquoi, bien que l'inertie ne puiſſe etre reputée force à l'egard du Corps où elle ſe trouve, parce qu'elle n'y produit que la conſervation de ſon etat, cependant elle peut devenir quant aux autres Corps une veritable force, par laquelle leur etat eſt changé. Or comme il arrive continuellement dans ce Monde parfaitement plein de corps diverſement mus & agités, que pluſieurs corps ſe choquent, & que les uns en empêchent d'autres de perſeverer dans leur etat, il eſt neceſſaire que l'etat de tous ces Corps ſouffre de perpetuels changemens, & la cauſe de tous ces changemens ſera la même, ſavoir l'inertie, par laquelle tous les Corps tendent à conſerver leur etat. Les changemens que nous voyons arriver ſans ceſſe dans le Monde ne nous obligent donc pas à attribuer aux Corps des forces motrices differentes de l'inertie, puis que celle-ci ſeule, dont chaque Corps eſt pourvu, peut & doit produire tous les changemens qu'on y obſerve.

IV. Tout corps, par là même qu'il eſt composé de matiere, a en partage l'inertie, & ainſi l'inertie, de même que l'etendüe & l'impenetrabilité, ſera une proprieté générale de toute matiere. Plus donc il y aura de matiere dans un Corps, & plus grande ſera ſon inertie, comme reciproquement de la quantité d'inertie d'un Corps on ſera en droit de conclurre la quantité de ſa matiere. Et comme la quantité de matiere qui compoſe un Corps s'appelle ſa maſſe, l'inertie

tie de chaque Corps sera proportionnelle à sa masse. Ainsi le même Corps, soit en repos, soit en mouvement, a la même inertie ou la même force de perseverer dans son etat, En effet la même force, par laquelle un corps en repos y demeure, fait que ce Corps mis en mouvement par une cause quelconque, tend à conserver ce mouvement d'une maniere uniforme & directe. L'inertie conservant ainsi dans un corps mu deux choses, savoir sa vitesse & sa direction, elle déploye aussi son effet d'une double maniere, car elle résiste, tant au changement de vitesse, qu'à celui de direction. De là vient que le Corps en mouvement peut rencontrer deux sortes d'obstacles, dont les uns s'opposent à la seule vîtesse, & les autres à la seule direction. Dans l'un & dans l'autre cas le Corps exerce sa force sur ces obstacles. Quand il n'y a que la vitesse du corps qui soit changée par l'obstacle, comme cela arrive lorsque deux corps heurtent directement l'un contre l'autre, alors le changement qui en résulte est dit arriver par le choc ou la collision. Que si l'obstacle est de nature à n'attaquer que la direction, comme dans la gyration d'un corps par une fronde, ou dans le mouvement d'un corps par un tuyau courbe, alors c'est en pressant que cet obstacle agit, & l'on nomme cette pression, force centrifuge. Il naît donc de l'inertie des corps une double force, dont l'une produite par l'empêchement de la vitesse, s'appelle force de percussion, & l'autre née du changement de direction, est dite force de pression.

V. On a toujours distingué ces deux sortes de forces, d'où naissent tous les changemens qui se passent dans le Monde, & l'on est effectivement fondé à mettre de la distinction entre elles, eu égard à la differente maniere dont la forçe d'inertie s'y deploye. Ces deux sortes de forces ne sont néanmoins que des effets de l'inertie, & procédent de la même cause. Mais quoique l'inertie réside perpetuellement dans le Corps, ces forces n'en naissent pourtant, que quand l'etat du Corps eſt changé, & ne durent qu'auſſi long tems que le changement. Car le Corps en vertu de l'inertie reſiſtant à tout dérangement dans ſon etat, n'exerce ſa force ſur les obſtacles qui s'oppoſent à ſon mouvement qu'autant que ſon etat eſt changé ; & dés qu'il arrive à un etat, où l'obſtacle ne l'arrete plus, il conſerve par la force d'inertie cet etat, jusqu'à ce que de nouveaux obſtacles viennent encore l'en tirer. On comprend par là que plus l'etat d'un corps eſt changé, & plus ſon inertie doit déployer de force, ſoit que ce changement ſe faſſe dans la vîteſſe, ou dans la direction, ou dans l'un & dans l'autre.* Car tant que le Corps demeure dans le même etat de mouvement ou de repos, la force d'inertie ſe conſume à conſerver ſon etat, & par conséquent ſe déploye toute entiere au dedans du corps, ſans produire rien au dehors. Mais quand des obſtacles externes empéchent le corps de perſéverer dans ſon etat, & qu'ainſi ſa force d'inertie ne ſauroit produire ſon effet au dedans du corps, alors elle ſe déploye au dehors, & agit ſur les obſtacles externes, en ſorte que le déchet que ſon effet ſouffre dans le corps, eſt exactement compensé par ſon action externe. Par tout donc où nous appercevons des forces dans le monde, nous pouvons hardiment conclurre qu'il y eſt arrivé quelque changement d'etat dans les corps, comme reciproquement de tout changement d'etat réſulte l'exiſtence des forces.

VI. Ainsi quand quelque Corps eſt dans un etat, en vertu duquel les autres Corps qui lui ſont contigus ne ſauroient perſeverer dans leur etat, ce Corps ſera exposé à l'action de forces qui changeront ſon etat, à moins que ces forces ne ſe détruiſent mutuellement; & c'eſt de ſemblables forces que procedent tous les changegemens du Monde. Toute force donc qui s'exerce ſur un Corps, & en change l'etat, ſera ou percuſſion, ou preſſion, ſuivant qu'elle nait du changement de viteſſe, ou de direction des Corps, qui viennent

à ſa

à sa rencontre. La seconde espece de cette double force, savoir la pression, est ordinairement traitée dans la Statique, où l'on definit sa quantité, & où l'on compare entre elles les diverses pressions. La Mechanique d'un autre coté enseigne, combien l'etat de chaque Corps doit etre changé par une force quelconque qui le presse, de sorte que la Theorie des Presions est presque complette. Mais il en est tout autrement de celle des Percussions, ou Chocs, en quoi consiste l'autre espece de forces; car la veritable quantité de ces forces n'est pas encore determinée avec une evidence à l'abri de toute contradiction, & l'on n'a point trouvé de regle certaine de comparaison entre les divers Chocs, quoi qu'il ne reste presque plus aucun doute sur leur effet pour le dérangement de l'etat des Corps. *Leibnitz*, & ceux qui l'ont suivi, mettent une si grande difference entre ces deux sortes de forces, qu'ils appellent les pressions des forces mortes, & les percussions des forces vives. Ils ont voulu montrer par cette opposition de noms, non seulement qu'il y a une trés grande difference entre ces forces, mais même qu'on ne sauroit les comparer ensemble. Ainsi quoiqu'on eut une mesure assez exacte des pressions, ils ont inventé de nouvelles régles pour mesurer les percussions, & les comparer entre elles, ce qui a causé de trés grandes controverses parmi les Mathematiciens, & meme parmi les Philosophes.

VII. Pour ramener à des idées certaines & fixes cette Question, que les Philosophes proposent pour l'ordinaire d'une maniere trop vague, considerons le corps B en repos, contre lequel un autre Corps A vienne heurter avec une vitesse donnée directement suivant la ligne *a b*; il est manifeste que le Corps B, lorsque le Corps A le choque, souffre l'action d'une certaine force qui trouble son etat. Ce cas etant donc proposé, on demande combien grande sera cette force que soutiendra le Corps B? Les Philosophes à la verité paroissent s'etre mis peu en peine de determiner la veritable mesure de cette force, & ils se sont bornés à comparer entre elles les diverses forces de même genre. Mais en estimant la quantité de la force par la quantité du changement, qui arrive dans l'etat du Corps B, ils ont aisément reconnu qu'il arriveroit un plus grand changement dans le Corps B, si le Corps A qui le choque avoit plus de masse, ou de vitesse; d'où ils ont inferé qu'il faloit mesurer les forces, que deployent les Corps qui choquent par leurs masses & par leurs vitesses, de maniere que de plus grandes masses, ou un mouvement plus vîte, donnent de plus grandes forces. Mais les partisans de *Newton*, ou plutot ceux de *Descartes* & de *Leibnitz*, ne sont pas encore d'accord, de quelle formule on doit se servir, pour exprimer ce produit, tant de la masse que de la vîtesse du corps qui choque. Les premiers veulent que ces forces soient exprimées en donnant le produit de la masse du corps qui choque par sa vîtesse. *Leibnitz* pretend au contraire que la mesure de cette force se trouve dans le produit de la masse par le quarré de la vîtesse. On sait assez avec quelle chaleur cette dispute a été poussée de part & d'autre, & je ne crois pas avoir besoin de rapporter les Argumens sur lesquels chaque parti fonde sa These. Car n'ayant jamais convenu entr'eux de l'effet, par la grandeur duquel il faloit mesurer cette force, leurs disputes ont degeneré le plus souvent en Logomachies, qui s'evanouïront, je pense, d'elles mêmes, dés qu'on aura trouvé la vraye maniere d'estimer & de mesurer les forces, dont les corps quelconques soutiennent l'action, lorsqu'ils se choquent reciproquement.

VIII. Au reste on voit manifestement que ni l'une ni l'autre de ces deux opinions n'admet aucune comparaison entre les forces de percussion & les pressions; car ni le produit de la masse par la vîtesse, ni le produit de la masse par le quarré de la vîtesse ne peuvent etre comparés avec aucune pression. C'est surtout là dessus que les Leibnitiens se fondent pour nier fortement que les forces vives

ves & les forces mortes ſoient homogenes, & que l'on puiſſe ramener ces deux ſortes de forces à aucune comparaiſon. Ils mettent presque la meme difference entre la force vive & la force morte qu'on reconnoit entre les lignes & les ſurfaces, & regardent les forces vives, comme infiniment plus grandes que les forces mortes. Il leur ſemble meme que l'Experience confirme cette pensée, un coup trés leger produiſant ſouvent un effet ſuperieur à celui de la plus grande presſion. C'eſt ainſi que nous voyons un coup mediocre de marteau enfoncer un clou dans la muraille, tandis que la plus grande preſſion y auroit à peine ſuffi, ſurtout ſi le même effet avoit du etre produit dans un auſſi court eſpace de tems. Mais ceux qui s'appuyent ſur cet exemple font bien voir qu'ils croyent que l'effet de la percuſſion ſe produit dans un moment de tems, & comme dans un inſtant. Si cette circonſtance etoit veritable, il ne reſteroit aucun doute que les forces vives & les forces mortes ne duſſent etre regardées comme tout à fait heterogenes. Car on ne ſauroit concevoir aucune presſion, quelque grande qu'elle ſoit, qui puiſſe dans un inſtant produire le moindre effet ſenſible ; & ſuivant cette hypotheſe la force vive ſeroit effectivement à la force morte, comme la ſurface à la ligne. D'ailleurs, quand même le coup n'agiroit pas dans un inſtant, il paroit toujours y avoir une ſi grande difference entre les effets des coups & ceux des preſſions, que quand on etabliroit la proportionalité des forces de percuſſion avec leurs vîteſſes, ou avec les quarrez de ces vîteſſes, ou avec une autre dignité quelconque, cependant on n'en pourroit jamais déduire aucune veritable preſſion équivalente à une percuſſion. Tout cela affermit les Leibnitiens dans la penſée qu'ils concluent juſte, en diſant qu'on ne ſauroit faire aucune comparaiſon entre les forces vives & les forces mortes.

IX. Pour dire ce que je penſe ſur cette diſpute au ſujet de la meſure des forces vives, je remarque d'abord qu'on ne ſauroit ab-

ſolument attribuer aucune force au corps mu, ſoit qu'on la regarde comme proportionnelle aux viteſſes, ou qu'on la compare aux quarrés de ces vîteſſes. Car quand même la force qu'exerce un Corps, quand il en choque un autre qui eſt en repos ſeroit proportionnelle à ſa vîteſſe, ou à ſon quarré, on ne pourroit pourtant la lui attribuer telle que dans ce cas, puis qu'il exerceroit une toute autre force, s'il choquoit un Corps mu. Ainſi cette force, de quelque maniere qu'on l'enviſage, ne ſauroit etre attribuée à aucun Corps conſideré en ſoi, mais elle ſe rapporte uniquement à la relation où ce Corps ſe rencontre avec d'autres. En effet dans un Corps mu conſideré en ſoi, il n'y a d'autre force que ſon inertie, par laquelle il conſerve ſon etat, & cette force eſt toujours la même, ſoit que ce Corps demeure en repos, ou qu'il ſe meuve. Mais ſi ce Corps eſt forcé par d'autres Corps contigus à changer d'etat, alors l'inertie même ſe déploye en force proprement dite, qui ne ſauroit etre abſolument determinée, parce qu'elle depend du changement qui arrive dans ce Corps. Pour répandre du jour là deſſus, examinons le cas dans
*Fig.* 2. lequel le Corps A en mouvement eſt forcé de continuer ſa route par un tuyau recourbé, ou ſuivant la ſurface courbe E*a*F, car dans ce cas le corps preſſera la ſurface, partout où il la touchera en *a*, ſuivant la direction normale *a*, &.avec une certaine force qu'on a coutume de déterminer en Méchanique tant par la maſſe du corps, que par ſa viteſſe, & par le rayon de la courbure *Oa*. Quoique dans ce cas le corps exerce une preſſion, ou une force morte, il ſeroit pourtant abſurde d'attribuer à ce corps conſideré en ſoi une force de preſſion certaine & determinée, puisque cette force ne s'y trouve que dans de ſemblables cas, & que ſa quantité peut ſouffrir de grandes variations relatives à la differente courbure E *a* F. Donc il ſeroit pareillement déraiſonnable de mettre dans les Corps une certaine force abſolüe de preſſion, quoiqu'on voye ces Corps l'exercer dans certains

certains cas; beaucoup moins encore peut-on définir la quantité de cette force, qui dépend principalement des circonſtances externes, qui accompagnent le choc.

X. Une seconde Obſervation, que de trés grands hommes ont déja faite, c'eſt que le principal fondement, ſur lequel repoſe la meſure des forces vives, eſt non ſeulement chancelant, mais tombe même entierement en ruïne; car il eſt demontré que l'effet du choc de deux ou de pluſieurs Corps n'eſt pas produit dans un inſtant, mais qu'il demande un certain intervalle de tems. Dés que la choſe eſt ainſi, l'heterogeneité entre les forces vives & les forces mortes ceſſe, puis qu'on peut toujours asſigner une presſion, qui dans le meme tems, quelque petit qu'il ſoit, produira le meme effet. Si donc les forces vives ſont homogenes aux forces mortes, puisque l'on a la meſure & une connoiſſance parfaite de celles-ci, on n'eſt pas fondé à demander une autre meſure des forces vives, que celle qui dérive des forces mortes qui leur ſont égales; & c'eſt en quoi je m'aſſure que les partiſans des deux ſentimens s'accorderont aiſément. Or que le changement d'etat qui nait du choc de deux corps ne ſe faſſe pas dans un inſtant, c'eſt ce que montrent de la maniére la plus claire les experiences faites ſur les corps qui ont quelque molleſſe. Dans ceux-ci le choc imprime à chaque corps un petit creux, qui eſt encore viſible aprés le choc, à moins que les corps ne ſoient doüés d'elaſticité. Une ſemblable impresſion ne ſauroit aſſurément ſe faire dans un inſtant. Mais ſi le choc des corps moûs demande un tems donné, il en faudra dire autant de celui des corps les plus durs, quoique dans ceux-ci ce tems puiſſe etre ſi petit, qu'il échape à toutes nos idées. Le choc inſtantané ne ſauroit non plus s'accorder avec la Loi ſouverainement conſtante de la Nature, en vertu de laquelle rien ne s'execute ſubitement, & comme par ſaut. Suivant cette Loi un ausſi grand changement, que l'eſt quelque fois celui que le choc de deux

corps

corps apporte à l'etat de l'un & de l'autre, ne fauroit arriver fans correfpondre à aucun tems. • Mais comme ce Phénomene n'a jamais été attaqué par aucun argument folide, & que l'extrême vîteffe avec laquelle nous voyons arriver la plupart des chocs, ne fait aucune difficulté confiderable, il feroit fuperflu de s'y etendre davantage, d'autant plus qu'on peut determiner le tems de la durée de chaque choc par une Theorie fondée fur les principes les plus certains.•

XI. Comme les creux que les corps s'impriment reciproquement dans le choc, donnent droit de conclure que le choc ne s'execute pas dans un inftant, il eft reciproquement néceffaire, fi le choc ne fe fait pas dans un inftant, que les corps fe faffent des impreffions mutuelles. Car puifqu'au premier moment que les Corps A & B ont commencé à fe toucher, l'etat de l'un & de l'autre n'etoit pas encore fenfiblement changé, ni l'un ni l'autre de ces Corps ne fauroit continuer fon mouvement, fans qu'une petite portion de l'un penetre dans l'autre & y produife ce creux. Car pour que deux corps contigus s'avançaffent, fans que la figure d'aucun fut changée, il faudroit qu'ils allaffent d'un mouvement egal & commun; mais avant que leur mouvement foit ramené à cette égalité, un corps fe plongera, pour ainfi dire, tant foit peu dans l'autre, & les particules placées aux extremités feront forcées de ceder au contact. En effet deux
*Fig. 5.* boules A & B, lors qu'elles s'entrechoquent fe compriment tellement l'une l'autre dans le contact, que la portion convexe *eaf* de la boule A fe change en la furface applatie *eof*, & que pareillement la convexité *ebf* de l'autre boule devient *eof*, en forte que le contact a lieu par tout l'espace *eof*. Or ces impreffions que les Corps font les uns fur les autres dans le choc, feront plus grandes, à proportion que ces Corps feront plus mous, toutes chofes etans d'ailleurs égales; au lieu que dans les corps tout à fait durs, les impreffions feront trés petites. Il réfulte donc de là qu'une parfaite dureté, qui n'admette abfolument

ment aucune impreſſion ne ſauroit s'accorder avec les Loix de la nature. Car s'il y avoit des corps parfaitement durs, leur colliſion devroit réellement s'executer dans un inſtant, & le changement de leur etat ſeroit ſubit & arriveroit par ſaut, ce qui répugne à l'ordre de la nature. Puis qu'il ne ſauroit donc y avoir de choc, ſans qu'il ſe faſſe quelque impreſſion ſur les Corps, tant que le choc dure, les corps agiſſent en ſe preſſant réciproquement, & c'eſt cette preſſion mutuelle qui change leur etat. Par conséquent les forces que les Corps exercent les uns ſur les autres dans la percuſſion, appartiennent au genre des preſſions, & ſont de veritables forces mortes, ſi tant eſt que l'on veüille employer cette expreſſion, qui n'eſt plus convenable, puisque cette pretenduë difference infinie entre les forces vives & les forces mortes doit ceſſer, dés qu'on les range toutes deux ſous le genre commun des preſſions.

XII. La force de percuſſion réſultant ainſi des preſſions que les corps exercent les uns ſur les autres, tant que le choc dure, on la connoitra parfaitement, ſi l'on determine ces preſſions pour chaque moment du choc; car par ce moyen on découvrira quelle preſſion l'un & l'autre éprouve pendant le choc. Or il eſt manifeſte, qu'avec quelque viteſſe que le choc s'acheve, ces preſſions ne laiſſent pas d'etre extrémement inégales entr'elles. Car au premier moment que ces Corps ſe touchent, & commencent à agir l'un ſur l'autre, cette preſſion eſt la plus petite, aprés quoi elle va continuellement en croiſſant, & devient la plus grande, lorsque les impreſſions reciproques ſont les plus fortes. Enſuite, ſi les Corps n'ont aucune elaſticité, & que les impreſſions reçües demeurent, les forces ceſſent auſſitot; mais ſi les Corps ſont élaſtiques, & que les parties comprimées ſe reſtituent dans leur premier etat, alors les Corps continueront à ſe preſſer reciproquement, jusqu'à ce qu'ils s'eloignent l'un de l'autre. C'eſt pourquoi il eſt requis, pour comprendre parfaitement la force de percuſſion, de définir premierement le tems de la durée du choc, enſuite d'asſigner la preſſion qui répond à chaque moment de ce tems; & comme on connoit l'effet des preſſions pour changer l'etat d'un corps quelconque, on arrivera par ce moyen à la veritable cauſe du changement de mouvement, qui arrive dans le choc. Ainſi la force de percuſſion n'eſt autre choſe que l'operation d'une preſſion variable qui dure pendant un eſpace de tems donné, & pour la meſurer il faut avoir egard à ce tems, & aux variations, ſuivant lesquelles cette preſſion croît & decroît. On ne ſauroit donc bien eſtimer la force de percuſſion par le ſeul effet, qui conſiſte dans le changement de l'etat du Corps, un même changement pouvant naître de forces trés differentes, dés qu'on néglige de faire attention au tems; & il eſt d'ailleurs d'une extreme importance de connoître la quantité de la force qu'endure réellement un Corps qui eſt frappé. C'eſt ainſi qu'une bale de fuſil tirée contre un tronc d'arbre ne lui imprime qu'un trés petit mouvement, quoique cette percuſſion produiſe une trés grande preſſion. Pareillement quand la tete d'un homme eſt percée par une ſemblable bale, on eſtimeroit mal la force qu'elle exerce ſur la tete par le mouvement qui eſt imprimé à tout le corps, puisqu'un effet égal auroit pu proceder d'autres cauſes, qui n'auroient point du tout été mortelles.

XIII. Pour definir exactement cet effet de la percuſſion, il faut examiner l'impreſſion que les Corps doivent ſouffrir d'une preſſion quelconque. Et d'abord il eſt evident que plus le corps eſt dur, & moins la même force y fait d'impreſſion, & que par conſequent pour produire dans le meme corps une plus grande impreſſion, il eſt requis qu'une plus grande force ſe déploye. Mais il faut remarquer avant toutes choſes qu'il ne ſauroit y avoir de corps ſi dur qu'il ne reçoive quelque impreſſion, même de la moindre force. Car une dureté parfaite dans les corps etant contraire à la nature, il n'y a de difference entr'eux à cet égard qu'en degrés. Or la moindre force

faiſant

faisant une impréssiòn assez considerable sur les corps assez mous, il est necessaire qu'elle fasse une impression quelconque sur les corps même les plus durs, qui puisse etre comparée avec l'autre. Un corps souffre impression, lorsque celles de ses parties qui sont placées aux extremités, & qui soutiennent la force, cedent en dedans, & laissent un creux que le corps qui presse puisse occuper. La figure du corps reçoit donc un changement par la force qui le presse, & le corps est réduit en même tems à un moindre volume, à moins qu'il ne s'étende autant d'un autre coté qu'il est comprimé dans le lieu du contact. Lequel des deux qui arrive, c'est la même chose par rapport au but que nous nous proposons, de considerer seulement les plus petites impressions. Il sera donc convenable de mesurer les impressions par la capacité du creux, que forme la retraitte des particules pressées. Ainsi le corps A avoit avant le choc la figure *eaf*, mais à présent cette extremité etant reduite en *eof*, la portion de la boule comprise entre *eaf* & *eof* mesurera la quantité de l'impression, en cas que le Corps ait été exactement sphérique. Dans le même corps, & dans d'autres corps egalement durs, il paroit vraisemblable que les impresſions sont proportionnelles aux forces qui pressent, ensorte qu'elles croissent en raison de la force avec laquelle deux Corps s'appliquent l'un contre l'autre. Il ne peut au reste demeurer aucun doute, quand ces impresſions sont les plus petites, puisqu'une impresſion le double plus grande peut etre considerée comme divisée en deux parties, dont l'une & l'autre requiert la même force pour sa formation.

XIV. Puisqu'on n'a point encore établi de mesure certaine pour la dureté, il semble qu'on ne peut rien faire de mieux que de l'estimer proportionnelle à la force qui est requise pour y faire une impresſion donnée. Ainsi la force par laquelle une impresſion donnée est faite sur un corps sera en raison composée de la dureté de ce Corps & de la quantité de l'impresſion. Par exemple, si la force qui presse le Corps est $= P$, l'impression $= V$ & la dureté $= D$, P sera comme DV, & reciproquement l'impression V comme $\frac{P}{D}$ c'est à dire, directement comme la force qui presse, & reciproquement comme la dureté; pareillement la dureté sera directement comme la force, & reciproquement comme l'impression faite; d'où naît un moyen fort convenable de déterminer & de comparer entr'elles les duretés de differens Corps. Cependant il faut aussi avoir égard à la grandeur des corps, une impression aussi grande ne pouvant se faire dans les plus petits corps que dans les plus grands, à cause du défaut d'espace dans lequel les particules puissent etre chassées. Cest pourquoi, comme nous ne considerons ici que les moindres impressions, nous attribuons aussi au Corps un volume tel qu'à son égard ces impressions puissent etre comptées pour rien. Par ce moyen donc on connoîtra exactement la difference entre la dureté & la mollesse, puis qu'on appelle les corps d'autant plus mous, qu'une moindre force est requise pour y faire la même impression; & d'un autre coté les corps sont censés d'autant plus durs qu'une plus grande force est requise pour cet effet. Ce jugement ne renferme pourtant l'élasticité ni son défaut, car il nait de là une nouvelle division des Corps en élastiques & non élastiques. Or l'elasticité s'éstime par la restitution de l'impression, aprés que la force a cessé de presser, & elle est dite parfaite, si le corps recouvre entierement sa premiere figure, imparfaite, si la restitution ne se fait qu'en partie, & qu'il reste une trace de l'impression. On regarde comme entierement denués d'elasticité les corps, qui aprés avoir reçu une impression, la conservent sans aucan changement, lorsque la force a cessé d'agir. Les Corps mous donc, tout comme les durs, peuvent etre doüés, ou privés d'elasticité, de maniere que la dureté ni la mollesse n'emportent pas avec elles l'elasticité ni sa privation.

XV. Con-

XV. CONSIDERONS d'abord à présent le cas dans lequel le Corps A va heurter directement avec une vitesse donnée contre le Corps B immobile, & posons que le Corps B soit retenu fixe par une cause quelconque, en sorte qu'aucune force ne puisse l'ebranler de sa place. Que les deux Corps encore ayent des bases, par lesquelles ils se touchent mutuellement, planes & mêmes égales, afin que les impressions puissent etre plus aisément calculées, alors l'impression diminuera la longueur de l'un & de l'autre de ces deux corps. Soit la masse du Corps A $=$ A, laquelle masse le poids du corps indique & que sa vitesse avant le choc, ait été produite de la hauteur $=$ A; quand il a commencé à toucher le corps B, posons que la distance ait été EG $= f$, laquelle distance diminuera dans le choc, parceque l'un & l'autre des deux Corps se compriment. Que le choc ait duré pendant le tems $t$, & que les corps soient dans l'etat que représente la figure; que la vitesse du corps A, soit düe à la hauteur $v$, & la distance EG soit à present égale à Z, ensorte que les deux corps soient comprimés ensemble dans l'espace $f - z$. Nous définissons le mouvement, quant à la partie posterieure du corps EF, parce que l'anterieure MN est continuellement changée par la compresion. Que dans un tems infiniment petit $dt$ ces deux corps se pressent davantage, & que la derniere base EF parvienne en $ef$, alors la vitesse du corps A sera duë à la hauteur $v + dv$, & comme $e$G $=$ Z $+ dz$, E$e$ ou F$f$ sera $= -dz$, lequel élement de l'espace etant décrit par la vitesse $\sqrt{v}$, $dt$ sera $= \frac{-dz}{\sqrt{v}}$. Donc la compression de l'un & l'autre corps vaudra à présent $f - z - dz$. Car si l'on ajoute l'espace auquel la surface anterieure MN du corps A est réduite vers EF à l'espace racourci que le corps B a reçu par la compression, la somme sera $= f - z$, & le petit tems $dt$ etant ecoulé par dessus, elle sera $= f - z - dz$. Fig. 4.



XVI. Com-

XVI. COMME LES Corps en ſe comprimant mutuellement agiſſent l'un ſur l'autre, que P ſoit la force avec laquelle les Corps dans cet etat s'appliquent l'un à l'autre, en ſorte que le Corps A qu'on préſume avancer encore ſuivant la direction E G ſoit repouſſé directement par la force P. Par conſéquent en vertu des principes méchaniques $A\,d\,v$ ſera $= -\,P. - d\,z = P\,d\,z$. Si donc la diminution $f\,z$ de l'intervalle E G cauſée par la compreſſion eſt poſée $= x$, $d\,z$ ſera $= -\,d\,x$. Et comme la presſion P dépend de la comprèsſion, P ſera une certaine fonction de $x$ meme, que ſera determinée tout à l'heure. C'eſt pourquoi ſi $\int P\,d\,x$ eſt pris de maniere qu'il evanouïſſe, en poſant $x = o$, $A\,v$ ſera $= A\,a - \int P\,dx$. De plus comme $-\,d\,z$ eſt $= d\,x = d\,t \surd v$, la compreſſion dure jusqu'à ce que $d\,t \surd v$, c'eſt à dire la viteſſe du Corps A evanouïſſe; d'où l'on pourra inferer la plus grande compresſion par l'equation $A\,a = \int P\,d\,x$, & connoitre en même tems la plus grande force, avec laquelle les Corps A & B ſe compriment mutuellement dans le choc. Les deux Corps etant reduits dans cet etat, & le Corps ayant ainſi perdu tout mouvement, alors on prend en conſideration l'elaſticité, s'il s'en trouve quelque degré dans les Corps. Car ſi les deux Corps ſont dépourvus de toute elaſticité, l'impresſion faite de part & d'autre ſubſiſtera, & comme il n'y aura plus de force qui ſollicite ces Corps, ils demeureront tous deux dans cet etat, & le Corps A conſervera perpetuellement ſa plus grande compresſion. Mais ſi les deux Corps ſont parfaitement elaſtiques, & qu'ainſi la compresſion ait pour ſe reſtituer une force égale à celle qui l'a produite, le Corps A ſera repouſſé avec une force egale à celle avec laquelle il s'etoit approché, & retournant de l'etat de la plus grande compresſion à l'etat E G, il ſera repouſſé avec la même force P, & ainſi l'équation $A\,v = A\,a - \int P\,d\,x$ indiquera le mouvement du corps A, jusqu'à ce que la valeur de la formule $S\,P\,d\,x$ evanouïſſe de nouveau

nouveau, ce qui arrivant, si $x = o$, il est manifeste que le Corps A reflechit avec une vitesse égale à celle du choc, & cela en direction contraire, s'il avoit heurté directement. Enfin si les deux Corps ne sont pas parfaitement elastiques, & que les parties comprimées se restituent avec une moindre force, & seulement en partie, alors le mouvement du Corps A doit etre soumis à un calcul particulier; mais il est toujours manifeste dans ce cas que le Corps A doit etre reflêchi avec une vitesse moindre que celle qu'il avoit en s'approchant.

XVII. POUR DETERMINER la pression P, appellons au secours un cas connu par l'experience. Posons donc que dans un Corps, dont la dureté soit $= L$, la force pressante V produise une impression, dont la profondeur soit $= k^3$, & $k^3$ sera comme $\frac{V}{L}$. Que la dureté du Corps A soit $= M$ & celle du corps $B = N$, & l'amplitude de la base $MN = cc$, suivant laquelle l'impression se fasse dans l'un & dans l'autre corps. Puis donc que la force avec laquelle les deux Corps se compriment reciproquement, est $= P$, que la surface anterieure MN du Corps A soit entrée à la profondeur $= r$ & la surface MN du Corps B à la profondeur $=$ on aura $r + s = x = f - z$, & l'impression du Corps A sera $= ccr$, celle du Corps B B $= ccs$. Or etant $\frac{V}{L} : k^3 = \frac{P}{M} : ccr = \frac{P}{N} : ccs$, on trouve $r = \frac{LPk^3}{MVcc}$ & $s = \frac{LPk^3}{NVcc}$ d'où vient $\frac{LPk^3}{Vcc}$ $\left(\frac{1}{M} + \frac{1}{N}\right) = x$ & $P = \frac{MNVccx}{(M+N)Lk^3}$, & ainsi par la compression donnée $x$ on connoit la force P avec laquelle les deux Corps se compriment mutuellement. $\int P\,dx$ sera donc

$= MN$

$= \frac{MNVccxx}{2(M+N)Lk^3}$ & $Av = Aa - \frac{MNVccxx}{2(M+N)Lk^3}$. Et comme la compresſion croit jusqu'à ce que le Corps A ait perdu tout mouvement, la force de compresſion ſera la plus grande, quand $v = o$, c'eſt à dire, quand $Aa = \frac{MNVccxx}{2(M+N)Lk^3}$ ou $x = \sqrt{\frac{2Aa(M+N)Lk^3}{MNVcc}}$. Or cette valeur ſubſtituée dans l'expresſion ſuperieure à la force P donnera $P = \sqrt{\frac{2AaMNVcc}{(M+N)Lk^3}}$ ou $P = \sqrt{\frac{2V}{Lk^3} \cdot \frac{MNcc}{M+N} Aa}$. En conſéquence la plus grande impresſion de chaque Corps peut etre asſignée. Car la ſurface anterieure MN du Corps A ſera presſée en dedans jusqu'à la profondeur $r = \sqrt{\frac{2Lk^3}{V} \cdot \frac{N}{(M+N)Mcc} \cdot Aa}$, & le corps B ſouffrira une impresſion jusqu'à la profondeur $s = \sqrt{\frac{2Lk^3}{V} \cdot \frac{M}{(M+N)Ncc} \cdot Aa}$.

XVIII. C'EST DONC ainſi qu'on parvient à déterminer la plus grande force que ſoutiennent dans le choc les Corps A & B, dont B eſt reputé immobile, & les impresſions qu'ils ſe font reciproquement. Mais il faut prendre garde de ne pas attacher aux formules que nous venons de trouver un ſens plus etendu, que celui que nous leur avons attribué. En effet nous ſuppoſons des Corps d'une telle Conſtitution, qu'ils puiſſent non ſeulement reçevoir les impresſions des forces qui les preſſent, mais ausſi que de plus grandes forces

forces ſoient requiſes pour y faire de plus grandes impresſions. Cela donne donc l'excluſion aux corps fluides & à tous ceux dans lesquels la même force peut penetrer toujours plus en avant, pourvu qu'elle en ait le tems, ſans que jamais elle parvienne à ſe trouver en équilibre avec la réſiſtance. Ainſi un Corps pesant qui descend dans un fluide, s'enfonce continuellement davantage, & ne demeure en repos qu'aprés avoir atteint le fonds. De même un corps penetre toujours ulterieurement dans de la boue ou de la cire molle, quoique la force qui l'y pouſſe n'augmente pas; & ſi un boulet de fer eſt pouſſé avec aſſez de force, pour entrer dans un rempart, il continuë à s'y inſinuer plus profondement, tant que la même force dure. Donc dans tous ces cas il ne faut pas plus de force, mais il n'eſt beſoin que de plus de tems pour pénétrer à une plus grande profondeur. En effet il ne s'agit ici que de ſurmonter les premiers obſtacles, lesquels etant une fois ecartés, & la liaiſon des parties rompüe dans cet endroit, le corps pénétrant avance toujours, rencontre les mêmes obſtacles qu'au commencement, & les detruit par conſéquent au moyen d'une force égale. Mais dans le ſujet que nous conſiderons à préſent, nous ne faiſons attention qu'aux premiers obſtacles, qui exiſtent avant toute ſolution de parties, & qui ſont ſans doute tels qu'une plus grande impresſion demande ausſi une plus grande force. C'eſt ce qui a principalement lieu à l'egard des Corps elaſtiques, dans lesquels une force donnée produit ausſi une impresſion donnée, de maniere que cette force continuant à preſſer, il n'en réſulte pourtant pas une plus grande impresſion. Cette même proprieté ſemble avoir lieu dans tous les Corps, tant que les impresſions ſont les plus petites, & que la liaiſon des parties n'eſt point alterée. Or ce ſont les ſeuls cas que nous conſiderons ici, car dés que la ſtructure des Corps eſt alterée, on ne peut plus faire avec le même ſuccés l'eſtimation des forces qu'ils ſoutiennent.

XIX. Ce qui vient d'etre dit nous met en état d'aſſigner le tems, auquel le choc eſt réduit à la plus grande compreſſion; par ce moyen la force que le Corps B ſoutient à chaque moment ſera connuë, & l'on découvrira la veritable force de percuſſion. L'Elément du tems etant donc $dt = \frac{dx}{\sqrt{v}}$, ſi pour abréger nous poſons $\frac{2A(M+N)Lk^3}{MNVcc} = g$, à cauſe de $v = a - \frac{xx}{g}$ on aura $dt = \frac{dx\sqrt{g}}{\sqrt{(ag - xx)}}$ & $t = \sqrt{g}$. A ſin $\frac{x}{\sqrt{ag}}$. Le tems donc où la compreſſion eſt la plus grande, & où le choc s'acheve, ſi les deux Corps ſont denués d'elaſticité, ce tems, dis-je, ſe manifeſtera, en poſant $v = o$ ou $x = \sqrt{ag}$. En poſant donc $\pi$ pour la circonference du cercle, dont le diametre eſt $= 1$, ce tems ſera $= \frac{1}{2}\pi\sqrt{g}$, lequel tems ſe reduira en ſecondes, ſi la longueur $g$ s'exprime par des milliémes d'un pied Rhenan & que l'on diviſe le nombre $\frac{1}{2}\pi\sqrt{g}$ par 250. Ou même ce tems pourra etre egalé à l'aſcenſion ou à la deſcente d'un pendule ſimple, dont la longueur ſoit $= \frac{1}{2}g = \frac{A(M+N)\ Lk^3}{MNVcc}$, laquelle expreſſion etant pour l'ordinaire la plus petite, indique qu'un pareil choc s'achéve dans le tems le plus petit. Or ce tems étant connu, la compreſſion $x$ peut etre determinée pour chaque moment, car $x$ ſera $= \sqrt{ag}$ ſin $\frac{t}{\sqrt{g}}$ & la preſſion pendant ce tems $P = \frac{MNVcc\sqrt{ag}}{(M+N)Lk^3}$ ſin $\frac{t}{\sqrt{g}} = \frac{\sqrt{2AaMNVcc}}{\sqrt{(M+N)Lk^3}}$ ſin. $\frac{t}{\sqrt{g}}$. Il eſt donc certain par là qu'on a la

force

force, que les Corps ſoutiennent à chaque moment du choc, & toutes ces forces momentanées etant conſiderées enſemble, on connoîtra l'effet de toute la percuſſion. Si les Corps n'ont point d'elaſticité, le choc ne durera que jusqu'à l'etat de la plus grande compreſſion, dont le tems ſera $= \frac{1}{2} \pi \sqrt{g}$; mais ſi les Corps ſont parfaitement elaſtiques, le choc ne ceſſera point que les impreſſions ne ſoient parfaitement reſtituées, & s'achevera ainſi dans un tems double $\pi \sqrt{g}$, qui ſera égal au tems d'une oscillation d'un pendule, dont la longueur eſt $= \frac{1}{4} g = \frac{A(M+N)Lk^3}{MNVcc}$.

XX. Mais pour connoitre plus clairement cette force ſi étonnante de la percuſſion, developons en un exemple. Que les deux corps A & B ſoient egalement durs, ou $M = N$, & que ſur ces deux Corps on faſſe une experience, qui apprenne qu'en les appliquant l'un contre l'autre par un poids de 100 ℔, l'un & l'autre ſouffriront dans le contact une impreſſion jusqu'à la profondeur de $\frac{1}{1000}$ de pied; ce qui eſt un degré de dureté encore fort mediocre. On aura donc $L = M = N$; $V = 100$ ℔. & $k^3 = \frac{cc}{1000}$ d'où nait $\frac{2VMNcc}{(M+N)Lk^3} = 1000\,V = 100000$; & $\frac{Lk^3}{MVcc} = \frac{Lk^3}{NVcc} = \frac{1}{100000}$. Ainſi la plus grande compreſſion des Corps dans le choc ſe fera avec une force $= \sqrt{100000\,Aa}$ livres, ſi l'on exprime A en livres, & $a$ en pieds Rhenans, & l'un & l'autre Corps feront impreſſion jusq'à la profondeur $\sqrt{\frac{Aa}{100000}}$ de pied. D'où la plus



grande

grande compresſion auſſi bien que la plus grande impresſion ſera comme la racine quarrée de $Aa$, c'eſt à dire en raiſon ſousdoublée de la force vive avec laquelle le Corps A heurte. Poſons que le Corps A ſoit d'une livre, & vienne heurter avec une vîteſſe qui lui faſſe parcourir avant le choc 100 pieds dans une ſeconde, en ſorte que $\frac{\sqrt{1000\,a}}{4}$ ſoit $=100$, on aura $a = 160$ pieds & $Aa = 160$. Donc on trouvera la plus grande force de compresſion $P = \sqrt{16000000} = 4000$ livres, en ſorte que ces deux corps ſoutiennent dans le choc la même force que s'ils etoient preſſés l'un contre l'autre par un poids de 4000 livres. Or cette force produira dans chacun de ces Corps une impresſion à la profondeur de $\sqrt{\frac{160}{10000}} = \frac{1}{23}$ de pied. C'eſt pourquoi ſi ces Corps ne peuvent recevoir une pareille impresſion ſans ſe rompre, ce choc les fera éclater tous deux. Cet exemple rend donc manifeſte la quantité de la force qui eſt jointe à la percusſion, & l'experience journaliere confirme pleinement la même choſe.

XXI. Mais voyons auſſi avec quelle promtitude le choc arrive jusqu'à la plus grande compresſion. Pour cet effet il faut chercher la valeur de la longueur $g = \frac{2A(M+N)Lk^3}{MNVcc}$ qui en lui ſubſtituant les valeurs priſes ci-deſſus ſe change en $g = \frac{4}{100000}$ de pied, qui par conſéquent dans les milliemes de pied eſt $= \frac{4}{100} = \frac{1}{25}$, dont la racine quarrée $\frac{1}{5}$ multipliée par $\frac{1}{2}\pi = 1,570796$ donne $\frac{1}{2}\pi\sqrt{g} = 0,314159$, lequel nombre diviſé par 250 donne 0, 001256, & montre

montre que ce choc s'execute dans le tems de $\frac{'1256}{1000000}$ Secondes, c'eſt à dire environ la $\frac{1}{800}$ partie d'une Seconde, moment ſi petit, qu'il eſt entierement imperceptible, ce qui fait qu'on doit moins s'etonner que la plupart des Philoſophes ayent crû que le choc ſe faiſoit dans un inſtant. Au reſte il faut remarquer ici que la vîteſſe du Corps $a$ qui heurte, n'entre point dans l'expreſſion du tems, d'où réſulte qu'avec quelque vîteſſe que le même Corps heurtât, le choc s'acheveroit dans le meme petit tems, pourvû que la dureté du Corps, & la baſe où ſe fait le contact ſoient la même. Car à proportion que la baſe $MN = cc$ par laquelle les Corps ſe touchent, ſeroit moindre, le choc dureroit plus long tems en raiſon ſousdoublée & la force de compreſſion diminueroit ſuivant la même raiſon; mais les impreſſions qui ſont faites aux Corps, croîtront en même raiſon, en ſorte que plus le Corps A qui heurte ſera aigu, & plus il penétréra avant dans le corps B. Mais dans les cas où l'impreſſion eſt ſi grande, que les particules des Corps ſont privées de leur liaiſon naturelle, les formules précedentes perdent leur force; car auſſitot que le lien des Corps eſt rompu, la reſiſtance ne croit plus en raiſon de la penetration, mais il faut conſiderer à chaque moment une action mutuelle, comme ſi le choc commençoit de nouveau. En effet la réſiſtance ſera presque conſtante, & ainſi la penétration ne ſera plus en raiſon ſousdoublée de la force vive A a, mais elle ſera dans la raiſon ſimple.

XXII. TANT QUE la liaiſon des particules n'eſt pas détruite par le choc, on peut connoitre exactement la force de la percuſſion par les formules ci deſſus proposées, pourvu que la figure anterieure du Corps A qui penétre dans l'autre ſoit cylindrique ou prismatique.

Dans ces cas, comme $\frac{2V}{Lk^3}$ eſt une quantité conſtante, la plus grande compresſion ſe fera avec une force qui eſt comme $\sqrt{\frac{MNcc}{M+N}}$. $Aa$, & ainſi ſi la dureté des deux Corps, & le plan du contact $cc$ demeurent les mêmes, cette force ſera comme $\sqrt{Aa}$, ou comme la racine quarrée de la force vive du Corps A qui heurte. De là puisque $\sqrt{a}$ eſt proportionelle à la vîteſſe même du Corps, la force de percusſion ſera en raiſon compoſée de la raiſon ſimple de vîteſſe, & de la raiſon ſousdoublée de la maſſe du Corps qui heurte. Donc dans ce cas ni la proportion de Leibnitz, ni celle de Descartes n'ont point lieu. Mais cette force de percuſſion dépend principalement alors de la dureté de chaque Corps M & N, en ſorte que plus les Corps ſont durs, & plus la force de percusſion eſt grande. Ainſi ſi la dureté des deux Corps eſt égale, ou $M = N$, alors la force ſera comme $\sqrt{Mcc.\,Aa}$, c'eſt à dire, en raiſon ſousdoublée compoſée de la force vive du Corps qui heurte, de la dureté & du plan de contact. Mais ſi la dureté M d'un des Corps eſt infinie, alors la force du coup ſera comme $\sqrt{Ncc.\,Aa}$, tandis que ſuivant la même formule, ſi M eſt $= N$, cette force devient comme $\sqrt{\tfrac{1}{2}\,Ncc\,Aa}$. Tout le reſte etant donc égal, la force de percusſion, ſi le Corps qui heurte eſt infiniment dur, ſera à la force percutiente, ſi le Corps A qui heurte eſt ausſi dur que l'autre B, comme $\sqrt{2}$ à 1. Enſuite pour ce qui regarde les impresſions faites dans l'un & dans l'autre Corps, celle que reçoit le Corps A ſera comme $\sqrt{\frac{N.\,Aa}{(M+N)\,Mcc}}$, & celle qu'eprouve le Corps B comme $\sqrt{\frac{M.\,Aa}{(M+N)\,Ncc}}$. Si donc la dureté du Corps A, ſavoir M, eſt infinie, il ne ſouffrira aucune pénétration, au lieu que le Corps B en ſouffrira jusqu'à la profondeur

$\sqrt{\frac{Aa}{Ncc}}$; mais si la dureté des deux Corps est la même $M = N$, ils recevront tous deux des impressions egales, & elles se feront à la profondeur $\sqrt{\frac{Aa}{2Ncc}}$, en sorte que l'impression du Corps B dans ce cas sera à l'impression dans l'autre cas comme 1 à $\sqrt{2}$.

XXIII. Il se presente une autre différence des Corps à considerer, quant à l'impression, & cette difference consiste dans la tenacité ou fragilité. Les Corps que nous appellons tenaces, sont ceux qui peuvent soutenir une mediocre impression, avant que de se rompre; au lieu que les Corps fragiles sont rompus par la moindre impression. Une proprieté ordinaire des Corps tenaces, c'est aussi qu'ils ne se brisent pas si subitement, quoiqu'ils reçoivent une impression assez grande, mais qu'un certain tems est requis pour cet effet; d'où il arrive que le plus souvent ces Corps soutiennent la force de percussion sans en etre endommagés. Au contraire les Corps fragiles se brisent aisement par la percussion, puis qu'il ne faut qu'une légere impression pour produire cet effet, & qu'il s'execute dans le plus petit tems. L'extreme dureté des Corps fragiles est cause que la moindre percussion y produit une force qui egale la plus grande pression, & peut en conséquence opérer la rupture. Cet effet se remarque sur tout dans le verre subitement refroidi, dont la fragilité augmente beaucoup par ce moyen. On a coutume de faire avec de semblable verre des phioles, de la forme que represente la figure AEGFB; le fonds DG en *Fig. 5.* est fort épais, & sa forme de voute en augmentant la consistance, il peut resister à la plus grande force externe. Mais si l'on jette en dedans un petit morceau de caillou C, sa chute brise toute la phiole, tandis qu'une bale de plomb beaucoup plus pesante jettée de la méme maniere ne produit aucun effet. Cette expérience renverse de fond en comble l'opinion de ceux qui prétendent qu'on doit estimer

la

la force de percusſion par la force vive. Mais les principes que nous avons proposés jusqu'à preſent donnent une explication claire de ce Phenomene. Car en les ſuivant on remarque d'abord l'extreme dureté du caillou, qui etant eſtimée par l'impresſion que fait la force donnée, paroit au delà de mille fois plus grande que celle du plomb, ou de quelque autre métal; ajoutez qu'un pareil morceau a pluſieurs angles, en ſorte que lorsqu'il frappe le fonds, l'espace $cc$ du contact eſt trés petit; en conſéquence de quoi un coup leger doit produire une impresſion aſſez profonde, pour que le verre fragile ne puisſe la ſoutenir, ſans eclater. Et ſi nous conſultons les formules ci-deſſus proposées, nous comprendrons aisément que les impresſions faites par le plomb, ou par quelque autre métal doivent etre beaucoup moindres.

XXIV. Nous n'avons conſideré jusqu'à preſent que les percusſions, dans lesquelles le Corps qui heurte, le fait avec une baſe plane, dont il penétre l'autre. Suppoſons à preſent que le Corps A, dont la figure anterieure ſoit MON, convexe de toutes parts, aille heurter le Corps immobile B, dont la partie anterieure IK ſoit plane. Poſons encore que la dureté du Corps A ſoit incomparablement plus grande que celle du Corps B, en ſorte que la reſiſtance qu'il éprouve, en pénétrant par ſa portion MON dans l'autre, puiſſe etre comptée pour rien au prix de l'impresſion que ſouffre le Corps B. Soit A la maſſe du Corps qui heurte, & $a$ la hauteur duë à la vîteſſe, avec laquelle il aura choqué, que la lettre N enfin expoſe la dureté du Corps B. Le tems $t$ etant ecoulé, que le Corps A ait penetré à la profondeur $AO = x$, que ſa vîteſſe duë à la hauteur ſoit $v$, & la presſion avec laquelle les deux Corps ſont comprimés $= P$, on aura $Adv = -Pdx$ & $dt = \frac{dx}{\sqrt{v}}$. L'impresſion même MON ſera proportio-

nelle

nelle à quelque puiſſance de $AO = x$, puiſqu'elle eſt la plus petite. En effet ſi O eſt une pointe pyramidale ou conique, l'impresſion ſera comme $x^3$, & ſi c'eſt la pointe d'un conoïde parabolique, elle ſera comme $x^2$. Soit donc, pour donner plus d'etenduë à la détermination, l'impreſſion $= \alpha x^n$, on aura $\frac{V}{L} : k^3 = \frac{P}{N} : \alpha x^n$, & par conſequent $P = \frac{NV\alpha x^n}{Lk^3}$; d'où naît $Av = Aa - \frac{NV\alpha x^{n+1}}{(n+1)Lk^3}$.

Quand donc le mouvement du Corps A ceſſe, & que la compresſion devient la plus grande, $\alpha x^{n+1}$ ſera $= \frac{(n+1)AaLk^3}{NV}$ & $x = \sqrt[n+1]{\frac{(n+1)AaLk^3}{\alpha NV}}$, qui eſt la profondeur de l'impresſion la plus grande. Ainſi la plus grande force de percusſion P ſera

$$= \frac{NV\alpha}{Lk^3}\left(\frac{(n+1)AaLk^3}{\alpha NV}\right)^{\frac{n}{n+1}} = \sqrt[n+1]{\frac{\alpha NV}{Lk^3}(n+1)^n A^n a^n}.$$

Si donc la pointe eſt conique ou pyramidale, comme quand on enfonce un clou dans la muraille, $n$ ſera $= 3$, & le clou au premier coup pénétrera à la profondeur $x = \sqrt[4]{\frac{4Lk^3}{V} \cdot \frac{Aa}{\alpha N}}$, & la force ſera $= \sqrt[4]{\frac{64V}{Lk^3}\alpha NA^3a^3}$, à moins, comme nous en avons déja ſouvent averti, que la liaiſon des parties du Corps B ne ſe rompe.

XXV. Nous avons conſideré jusqu'à preſent l'autre Corps B comme immobile, parce que c'eſt principalement dans ce cas qu'on a coutume d'examiner & de meſurer la force de percusſion. Cependant

dant, par la même methode, on peut determiner les forces & les impressions qui ont lieu, si l'un & l'autre Corps est en mouvement; & quand nous l'aurons fait, nous aurons déduit des premiers principes toutes les régles, suivant lesquelles le mouvement des Corps est troublé dans la collision. Considerons donc deux Corps A & B, dont les masses soient désignées par les mêmes Lettres A & B, & la dureté par M & N. Que ces Corps soient mûs avant le choc suivant la même direction VZ, le Corps A avec une vîtesse duë à la hauteur $a$, & B avec une vîtesse duë à la hauteur $b$. Que le Corps A se meuve avec plus de vîtesse que B, en sorte qu'il l'atteigne, & qu'il se fasse un choc, qui commence lorsque le centre de gravité du Corps A est au point A. Ensuite, le tems $t$ etant ecoulé, que les deux Corps soient dans l'etat, que représente la figure, & qu'en tirant du centre de gravité de chacun les lignes A$a$, B$b$, perpendiculaires sur la droite VZ, on appelle $Va = p$, $Vb = q$, en sorte que si l'intervalle AB est posé $= z$, $z$ soit $= q - p$. De plus que la vîtesse du Corps A soit duë à la hauteur $v$, & celle du Corps B à la hauteur $u$, on aura $dt = \frac{dp}{\sqrt{v}} = \frac{dq}{\sqrt{u}}$, Qu'au commencement du choc la distance des centres de gravité soit AB $= f$, laquelle distance pendant la durée du choc sera moindre à cause des impressions faites dans les deux Corps. Que ces Corps se touchent reciproquement par le plan MN normal à la droite AB, en sorte que la moyenne direction des forces, avec lesquelles les deux Corps agissent mutuellement l'un sur l'autre, passe par le centre de gravité A & B des deux Corps. Car si cela n'arrivoit pas, outre le changement de vîtesse de l'un & de l'autre Corps, l'un des deux ou tous les deux aquerroient un mouvement gyratoire, dont il ne convient pas de traiter ici. Comme on a donc $f > z$, soit $x = f - z$, & $x$ exprimera la somme des impressions, qui ont été faites sur l'un & l'autre Corps.

XXVI.

XXVI. EN POSANT donc $t = o$, on aura $p = o$, $q = f$; $z = f$ & $x = o$, auxquelles valeurs les intégrations ſuivantes doivent etre accommodées. Poſons à préſent que la force avec laquelle les deux Corps ſe compriment reciproquement ſoit $= P$, & comme par cette force le mouvement du Corps A eſt retardé, & celui du Corps B acceleré, cela nous fournira les deux équations ſuivantes

$$\text{I. } A\,dv = -P\,dp \text{ \& II. } B\,du = P\,dq.$$

Mais parce que $q$ eſt $= p + z = p + f - x$, on aura $dq = dp - dx$, & par conſequent l'autre equation ſe change en $B\,du = P\,dp - P\,dx$, d'où l'on déduit $A\,dv + B\,du = -P\,dx$, & en intégrant $Av + Bu = Aa + Bb - \int P\,dx$, puisque l'intégrale $\int P\,dx$ ſe prend de maniere qu'elle evanouït en poſant $x = o$. Enſuite à cauſe de $dp = dt\,\sqrt{v}$ & de $dq = dt\,\sqrt{u}$, on fera

$$\text{I. } \frac{A\,dv}{\sqrt{v}} = -P\,dt \text{ \& II. } \frac{B\,du}{\sqrt{u}} = P\,dt$$

& par conſequent $\dfrac{A\,dv}{\sqrt{v}} + \dfrac{B\,du}{\sqrt{u}} = o$, dont l'integrale eſt

$$A\sqrt{v} + B\sqrt{u} = A\sqrt{a} + B\sqrt{b}.$$

Que ſi les Corps ſont denués de toute elaſticité, le choc durera jusqu'à ce que la plus grande impreſſion ſoit faite de part & d'autre, ou $dx = o$. Dans ce cas donc $dq$ ſera $= dp$, & $\sqrt{v} = \sqrt{u}$, à quoi ſi l'on a égard dans la derniere équation, cela fera

$$\sqrt{v} = \sqrt{u} = \frac{A\sqrt{a} + B\sqrt{b}}{A + B}$$

qui eſt la régle connuë pour les Corps non élaſtiques. Mais quant aux Corps elaſtiques, leur choc ne ceſſera point, que les impreſſions ne ſoient evanouïes de nouveau, & que $x$ ſoit devenu $= o$. Or dans ce cas $\int P\,dx$ eſt $= o$, & ainſi aprés le choc on aura $A\,v + B\,u =$



Aa+

$Aa + Bb$, qui joint avec l'equation donne $A\sqrt{v} + B\sqrt{u} = A\sqrt{a} + B\sqrt{b}$; d'où l'on fait $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \sqrt{u} - \sqrt{v}$ & $\sqrt{v} = \sqrt{a} - \frac{2B(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{A+B}$ & $\sqrt{u} = \sqrt{b} + \frac{2A(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{A+B}$ qui sont les régles trés connuës pour les collisions des Corps élastiques.

XXVII. Mais pour definir la pression P elle même, posons, comme ci dessus, qu'un Corps dont la dureté est $= L$ reçoit de la force V une impression $= k^3$. Si donc le plan MN, par lequel les Corps se touchent mutuellement est $= cc$, que le Corps A reçoive une impression à la profondeur $r$, & le Corps B à la profondeur $s$, l'impression du premier sera $= ccr$, & celle du second $= ccs$. De là résultera comme auparavant $\frac{V}{L} : k^3 = \frac{P}{M} : ccr = \frac{P}{N} : ccs$; & $r = \frac{LPk^3}{MVcc}$ & $s = \frac{LPk^3}{NVcc}$. Mais $x$ est $= r + s$, & par conséquent $x = \frac{LPk^3(M+N)}{MNVcc}$, & la pression elle meme $P = \frac{MNVccx}{L(M+N)k^3}$. C'est pourquoi on aura $\int P\,dx = \frac{MNVccxx}{2(M+N)Lk^3}$. Que si nous voulons à présent chercher la plus grande pression, qui a lieu, lorsque $\sqrt{v} = \sqrt{u} = \frac{A\sqrt{a} + B\sqrt{b}}{A+B}$, cela sera en substituant ces valeurs,

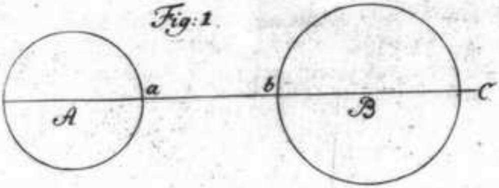
$$\frac{AB(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{A+B} = \int P\,dx = \frac{MNVccxx}{2(M+N)Lk^3},$$

par où l'on trouve, $x = \sqrt{\frac{2Lk^3(M+N)AB(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{VMNcc(A+B)}}$.

Par

Tab. IV. ad p. 53.

Fig: 1.



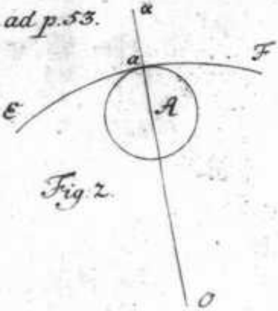
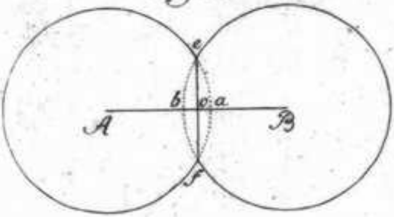




Fig. 2.

Fig: 3.



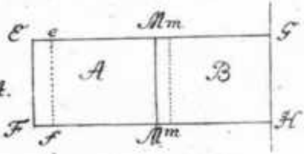




Fig: 4.

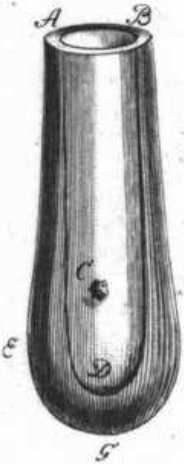



Fig: 5.

Fig: 6.

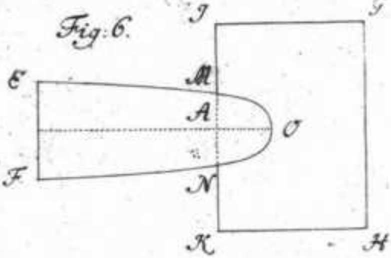
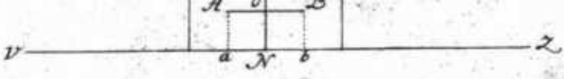



Fig: 7.




F. H. Frisch sc.

Par ce moyen on connoit premierement l'impreſſion faite à chaque Corps, qui ſera $r = \frac{Nx}{M+N}$ & $s = \frac{Mx}{M+N}$. Et la preſſion la plus grande ſera

$$P = \sqrt{\frac{2VMNccAB(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{Lk^3(M+N)(A+B)}}.$$

Si donc le Corps B etoit en repos avant le choc, la force de compreſion ſera $P = \sqrt{\frac{2VMNcc.\ ABa}{Lk^3(M+N)(A+B)}}$; qui etant pour le Corps B tout à fait immobile, $\sqrt{\frac{2VMNcc.Aa}{Lk^3(M+N)}}$, la compreſſion dans le cas de la mobilité ſera à la compreſion dans le cas de l'immobilité comme $\sqrt{B}$ à $\sqrt{(A+B)}$. Je paſſe ſous ſilence pluſieurs autres proprietés conſiderables, qu'on peut encore déduire aiſément de ces formules.