关于椭圆的92个二级公式

CjB

2023年10月20日

目录

1 关于椭圆的92个二级公式

1. $|PF_1|+|PF_2|=2a$.

2. 标准方程$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

3. $\dfrac{PF_1}{d_1}=e<1$.

4. 点P处的切线PT平分$\triangle PF_1F_2$在点P处的外角.

5. PT平分$\triangle PF_1F_2$在点P处的外角，则焦点在直线PT上的射影H点的轨迹是以长轴为直径的圆，除去长轴的两个端点.

6. 以焦点弦PQ为直径的圆必与对应准线相离.

7. 以焦点半径PF_1为直径的圆必与以长轴为直径的圆内切.

8. 设A_1、A_2为椭圆的左右顶点，则$\triangle PF_1F_2$在边PF_2（或PF_1）上的旁切圆，必与A_1A_2所在的直线切于A_1（或A_2）.

9. 设椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$的两个顶点为$A_1\,(-a,0)$，$A_2\,(a,0)$，与$y$轴平行的直线交椭圆于点$P_1$、$P_2$时，$A_1P_1$与$A_2P_2$交点的轨迹方程是$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

10. 若$P_0\,(x_0,y_0)$在椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$上，则过$P_0$的椭圆的切线方程是$\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}=1$.

11. 若$P_0\,(x_0,y_0)$在椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$外，则过$P_0$作椭圆的两条切线切点分别为$P_1$、$P_2$，则切点弦$P_1P_2$的直线方程是$\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}=1$.

12. AB是椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$的不平行于对称轴的弦，$M$为$AB$的中点，则$k_{OM}\cdot k_{AB}=-\dfrac{b^2}{a^2}$.

13. 若$P_0\,(x_0,y_0)$在椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$内，则被$P_0\,(x_0,y_0)$所平分的中点弦的方程是$\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}=\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}$.

14. 若$P_0\,(x_0,y_0)$在椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$内，则过$P_0\,(x_0,y_0)$的弦的中点的轨迹方程是$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}$.

15. 若PQ是椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$上对于中心张直角的弦，则$\dfrac{1}{r_1}+\dfrac{1}{r_2}=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\,(r_1=|OP|\,,r_2=|OQ|)$.

16. 若椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$上中心张直角的弦$L$所在的直线方程为$Ax+By=1\,(AB\neq 0)$，则

    （1）$\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=A^2+B^2$

    （2）$L=\dfrac{2\sqrt{a^4A^2+b^4B^2}}{a^2A^2+b^2B^2}$.

17. 给定椭圆$C_1:b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2\,(a>b>0)$，$C_2:b^2x^2+a^2y^2=\left(\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}ab\right)^2$，则

(i) 对C_1上任意给定的点$P\,(x_0,y_0)$，它的任一直角弦必须经过C_2上任一定点$M\left(\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}x_0,-\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}y_0\right)$,

(ii) 对C_2上任意给定的点$P'\,(x_0',y_0')$在C_1上存在唯一的点M'，使得点M'的任意直角弦都经过点P'.

18. 设$P\left(x_0,y_0\right)$为椭圆（或圆）$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>0,b>0\right)$上的一点，$P_1P_2$为曲线$C$的动弦，且弦$PP_1$的斜率$k_1$与$PP_2$的斜率$k_2$都存在，则直线$P_1P_2$通过定点$M\left(mx_0,-my_0\right)\left(m\neq 1\right)$的充要条件是
$$k_1\cdot k_2=-\frac{1+m}{1-m}\cdot\frac{b^2}{a^2}$$
.

19. 过椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>0,b>0\right)$上任一点$A\left(x_0,y_0\right)$任意作两条倾斜角互补的直线交椭圆于$B$、$C$两点，则直线$BC$有固定斜率$k_{BC}=\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}$.

20. 设椭圆$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2\left(a>b>0\right)$的左右焦点分别为$F_1$，$F_2$，点$P$为椭圆上任意一点，满足$\angle F_1PF_2=\gamma$，则椭圆的焦点三角形的面积为$S_{\triangle F_1PF_2}=b^2\tan\dfrac{\gamma}{2}$，且$P$点的坐标为$\left(\pm\dfrac{a}{c}\sqrt{c^2-b^2\tan^2\dfrac{\gamma}{2}},\pm\dfrac{b^2}{c}\tan\dfrac{\gamma}{2}\right)$.

21. 若P为椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$上异于长轴端点的任一点，$F_1$，$F_2$是焦点，$\triangle PF_1F_2=\alpha$，$\triangle PF_2F_1=\beta$，则$\dfrac{a-c}{a+c}=\tan\dfrac{\alpha}{2}\tan\dfrac{\beta}{2}$.

22. 椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$的焦半径公式：$\left|MF_1\right|=a+ex_0$，$\left|MF_2\right|=a-ex_0$，$F_1\left(-c,0\right)$，$F_2\left(c,0\right)$，$M\left(x_0,y_0\right)$.

23. 若椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，左准线为$L$，则当$\sqrt{2}-1<e<1$时，可在椭圆上求一点$P$，使得$PF_1$是$P$到对应准线距离$d$与$PF2$的比例中项.

24. P为椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$上任一点,$F_1$、$F_2$为两焦点，$A$为椭圆内一定点，则$2a-\left|AF_2\right|\leq\left|PA\right|+\left|PF_1\right|\leq 2a+\left|AF_2\right|$，当且仅当$A$，$F_2$，$P$三点共线时，等号成立.

25. 椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$上存在两点关于直线$l:y=k\left(x-x_0\right)$对称的充要条件是
$$x_0^2\leq\frac{\left(a^2-b^2\right)^2}{a^2+b^2k^2}$$
.

26. 过椭圆焦半径的端点作椭圆的切线，与以长轴为直径的圆相交，则相应交点与相应焦点的连线必与切线垂直.

27. 过椭圆焦半径的端点作椭圆的切线交相应准线于一点，则该点与焦点的连线必与焦半径互相垂直.

28. P是椭圆$\begin{cases}x=a\cos\varphi\\ y=b\sin\varphi\end{cases}\left(a>b>0\right)$上一点，则点$P$对椭圆两焦点张直角的充要条件是$e^2=\dfrac{1}{1+\sin^2\varphi}$.

29. 设A，B为椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=k\left(k>0,k\neq 1\right)$上两点，其直线$AB$与椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$相交于$P$、$Q$两点，则$AP=BQ$.

30. 在椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$中，定长为$2m\,(0<m\le a)$的弦中点的轨迹方程为：
$m^2=\left[1-\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\right)\right]\left(a^2\cos^2\alpha+b^2\sin^2\alpha\right)$，其中$\tan\alpha=-\dfrac{bx}{ay}$，当$y=0$时，$\alpha=90°$.

31. 设S为椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$的通径，定长线段$L$的两端点$A$，$B$在椭圆上移动，记$|PF_1AB|=l$，$M\,(x_0,y_0)$是$AB$的中点，则当$l\ge\Phi S$时，有$(x_0)_{max}=\dfrac{a^2}{c}-\dfrac{l}{2e}\left(c^2=a^2-b^2,e=\dfrac{c}{a}\right)$，当$l<\Phi S$时，有$(x_0)_{max}=\dfrac{a}{2b}\sqrt{4b^2-l^2},(x_0)_{min}=0$.

32. 椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$与直线$Ax+By+C=0$有公共点的充要条件是$A^2a^2+B^2b^2\ge C^2$.

33. 椭圆$\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}+\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$与直线$Ax+By+C=0$有公共点的充要条件是
$$A^2a^2+B^2b^2\ge(Ax_0+By_0+C)^2$$
.

34. 设椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$的两个焦点为$F_1$，$F_2$，$P$（异于长轴端点）为椭圆上任意一点，在$\triangle PF_1F_2$中，记$\angle F_1PF_2=\alpha$，$\angle PF_1F_2=\beta$，$\angle F_1F_2P=\gamma$，则有$\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta+\sin\gamma}=\dfrac{c}{a}=e$.

35. 经过椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$的长轴的两端点$A_1$和$A_2$的切线，与椭圆上任一点的切线相交于$P_1$和$P_2$，则 $|P_1A_1|\cdot|P_2A_2|=b^2$.

36. 已知椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$，$O$为坐标原点，$P$、$Q$为椭圆上两动点，且$OP\perp OQ$，则

（1）$\dfrac{1}{|OP|^2}+\dfrac{1}{|OQ|^2}=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}$;

（2）$|OP|^2+|OQ|^2$的最小值是 $\dfrac{4a^2b^2}{a^2+b^2}$;

（3）$S_{\triangle OPQ}$的最小值是$\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}$.

37. MN是经过椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$焦点的任一弦，若$AB$是经过椭圆中心$O$且平行于$MN$的弦，则$|AB|^2=2a\,|MN|$.

38. MN是经过椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$焦点的任一弦，若过椭圆中心$O$的半弦$OP\perp MN$，则
$$\frac{2}{a\,|MN|}+\frac{1}{|OP|^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$$
.

39. 设椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$，$M\,(m,0)$或$(0,m)$为其对称轴上除中心，顶点外的任一点，过$M$引一条直线与椭圆相交于$P$、$Q$两点，则直线$A_1P$、$A_2Q$（$A_1$、$A_2$为对称轴上的两顶点）的交点$N$在直线$l:x=\dfrac{a^2}{m}$或$(y=\dfrac{b^2}{m})$上.

40. 设过椭圆焦点F作直线与椭圆相交P、Q两点，A为椭圆长轴上一个顶点，连结AP和AQ分别交相应于焦点F的椭圆准线于M、N两点，则$NF \perp MF$.

41. 过椭圆一个焦点F的直线与椭圆交于P、Q两点，A_1、A_2为椭圆长轴上的顶点，A_1P和A_2Q交于点M，A_2P和A_1Q交于点N，则$MF \perp NF$.

42. 设椭圆方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，则斜率为$k\,(k \neq 0)$的平行弦的中点必在直线$l: y=kx$的共轭直线$y=k'x$上，而且$kk'=-\frac{b^2}{a^2}$.

43. 设A、B、C、D为椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$上四点，$AB$、$BC$所在直线的倾斜角分别为$\alpha$、$\beta$，直线$AB$与$CD$相交于点$P$，且点$P$不在椭圆上，则$\frac{|PA|\cdot|PB|}{|PC|\cdot|PD|}=\frac{b^2\cos^2\beta+a^2\sin^2\beta}{b^2\cos^2\alpha+a^2\sin^2\alpha}$.

44. 已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$，点$P$为其上一点，$F_1$、$F_2$为椭圆的焦点，$\angle F_1PF_2$的外（内）角平分线为$l$，作$F_1$、$F_2$分别垂直$l$于$R$、$S$，当$P$跑遍整个椭圆时，$R$、$S$形成的轨迹方程是$x^2+y^2=a^2\left(c^2y^2=\frac{\left[a^2y^2+b^2x\,(x\pm c)\right]^2}{a^2y^2+b^2\,(x\pm c)^2}\right)$.

45. 设$\triangle ABC$内接于椭圆Γ，且AB为Γ的直径，l为AB的共轭直径所在的直线，1分别交直线AC、BC于E和F，又D为l上一点，则CD与椭圆Γ相切的充要条件是D为EF的中点.

46. 过椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$的右焦点$F$作直线交椭圆右支于$M$、$N$两点，弦$MN$的垂直平分线交$x$轴于$P$，则$\frac{|PF|}{|MN|}=\frac{e}{2}$.

47. 设$A\,(x_1,y_1)$是椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$上任一点，过$A$作一条斜率为$-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$的直线$L$，又设$d$是原点到直线$L$的距离，$r_1$、$r_2$分别是$A$到椭圆两焦点的距离，则$\sqrt{r_1r_2}d=ab$.

48. 已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$和$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\lambda\,(0<\lambda<1)$，一直线顺次与它们相交于$A$、$B$、$C$、$D$四点，则$|AB|=|CD|$.

49. 已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$，$A$、$B$是椭圆上的两点，线段$AB$的中垂线与$x$轴相交于点$P(x_0,0)$，则$-\frac{a^2-b^2}{a}<x_0<\frac{a^2-b^2}{a}$.

50. 设P点是椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$上异于长轴端点的任一点，$F_1$、$F_2$为其焦点，记$\angle F_1PF_2=\theta$，则

    （1）$|PF_1|\cdot|PF_2|=\frac{2b^2}{1+\cos\theta}$

    （2）$S_{\triangle PF_1F_2}=b^2\tan\frac{\theta}{2}$

51. 设过椭圆的长轴上一点$B(m,0)$作直线与椭圆相交于P、Q两点，A为椭圆长轴的左顶点，连结AP和AQ分别交相应于过H点的直线$MN: x=n$于M，N两点，则

$$\angle MBN=90^\circ \Leftrightarrow \frac{a-m}{a+m}=\frac{a^2\,(n-m)^2}{b^2\,(n+a)^2}$$

.

52. L是经过椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$的长轴顶点$A$且与长轴垂直的直线，$E$、$F$是椭圆两个焦点，$e$是离心率，点$P$在$L$上，若$\angle EPF=\alpha$，则$\alpha$是锐角且$\sin\alpha\le e$或$\alpha\le\arcsin e$（当且仅当$|PH|=b$时取等号）.

53. L是椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$的准线，$A$、$B$是椭圆的长轴两顶点，点$P$在$L$上，$e$是离心率，$\angle EPF=\alpha$，$H$是$L$与$x$轴的交点，$c$是半焦距，则$\alpha$是锐角且$\sin\alpha\le e$或$\alpha\le\arcsin e$（当且仅当$|PH|=\dfrac{ab}{c}$时取等号）.

54. L是椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$的准线，$E$、$F$是两个焦点，$H$是$L$与$x$轴的交点，点$P$在$L$上，$\angle EPF=\alpha$，$e$是离心率，$c$是半焦距，则$\alpha$为锐角且$\sin\alpha\le e^2$或$\alpha\le\arcsin e^2$（当且仅当$|PH|=\dfrac{b}{c}\sqrt{a^2+c^2}$时取等号）.

55. 已知椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$，直线$L$通过其右焦点$F_2$，且与椭圆相交于$A$、$B$两点，将$A$、$B$与椭圆左焦点$F_1$连结起来，则$b^2\le|F_1A|\cdot|F_1B|\le\dfrac{(2a^2-b^2)^2}{a^2}$（当且仅当$AB\perp x$轴时右边不等式取等号，当且仅当$A$、$F_1$、$B$三点共线时左边不等式取等号）.

56. 设A、B是椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$的长轴两端点，$P$是椭圆上一点，$\angle PAB=\alpha$，$\angle PBA=\beta$，$\angle BPA=\gamma$，$c$是椭圆的半焦距，$e$是椭圆的离心率，则有

(1)$|PA|=\dfrac{2ab^2\,|\cos\alpha|}{a^2-c^2\cos^2\alpha}$，(2)$\tan\alpha\tan\beta=1-e^2$，(3)$S_{\triangle PAB}=\dfrac{2a^2b^2}{b^2-a^2}\cot\gamma$.

57. 设A、B是椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$长轴上分别位于椭圆内（异于原点）、外部的两点，且$x$、$x$的横坐标$x_A\cdot x_B=a^2$，

（1)若过A点引直线与这椭圆相交于P、Q两点，则$\angle PBA=\angle QBA$;

（2）若过B引直线与这椭圆相交于P、Q两点，则$\angle PAB+\angle QAB=180^\circ$.

58. 设A、B是椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$长轴上分别位于椭圆内（异于原点）、外部的两点，

(1)若过A点引直线与这椭圆相交于P、Q两点，(若BP交椭圆于两点，则P、Q不关于x轴对称)，且$\angle PBA=\angle QBA$，则点A、B的横坐标x_A、x_B满足$x_A\cdot x_B=a^2$;

（2)若过B点引直线与这椭圆相交于P、Q两点，且$\angle PAB+\angle QAB=180^\circ$，则点$A$、$B$的横坐标满足$x_A\cdot x_B=a^2$.

59. 设A, A'是椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$的长轴的两个端点，$QQ'$是与$AA'$垂直的弦，则直线$AQ$与$A'Q'$的交点$P$的轨迹是双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

60. 过椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$的左焦点$F$作互相垂直的两条弦$AB$、$CD$则

$$\frac{8ab^2}{a^2+b^2}\le|AB|+|CD|\le\frac{2\left(a^2+b^2\right)}{a}$$

.

61. 到椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$两焦点的距离之比等于$\frac{a-c}{b}$（$c$为半焦距）的动点$M$的轨迹是姐妹圆

$$(x\pm a)^2+y^2=b^2$$

e为离心率.

62. 到椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$的长轴两端点的距离之比等于$\frac{a-c}{b}$（$c$为半焦距）的动点$M$的轨迹是姐妹圆

$$\left(x\pm\frac{a}{e}\right)^2+y^2=\left(\frac{b}{e}\right)^2$$

e为离心率.

63. 到椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$的两准线和$x$轴的交点的距离之比为$\frac{a-c}{b}$（$c$为半焦距）的动点的轨迹是姐妹圆

$$\left(x\pm\frac{a}{e^2}\right)^2+y^2=\left(\frac{b}{e^2}\right)^2$$

e为离心率.

64. 已知P是椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$上一个动点，$A$、$A'$是它长轴的两个端点，且$AQ\perp AP$，$A'Q\perp A'P$，则$Q$点的轨迹方程是$\frac{x^2}{a^2}+\frac{b^2y^2}{a^4}=1$.

65. 椭圆的一条直径（过中心的弦）的长，为通过一个焦点且与此直径平行的弦长和长轴之长的比例中项.

66. 设椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$的长轴的端点为$A$、$A'$，$P(x_1,y_1)$是椭圆上的点，过$P$作斜率为$-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$的直线$l$，过$A$、$A'$分别作垂直于长轴的直线交$l$于$M$、$M'$，则

（1）$|AM|\cdot|A'M'|=b^2$;

（2）四边形$MAA'M'$面积的最小值是$2ab$.

67. 已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$的右准线$l$与$x$轴相交于点$E$，过椭圆右焦点$F$的直线与椭圆... ...，点$C$在右准线$l$上，且$BC//x$轴，则直线$AC$经过线段$EF$的中点.

68. OA、OB是椭圆$\frac{(x-a)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>0,b>0)$的两条互相垂直的弦，$O$为坐标原点，则

（1）直线AB必经过一个固定点$(\frac{2ab^2}{a^2+b^2},0)$;

（2）以OA、OB为直径的两圆的另一个交点Q的轨迹方程是$\left(x-\frac{ab^2}{a^2+b^2}\right)^2+y^2=\left(\frac{ab^2}{a^2+b^2}\right)^2(x\neq 0)$.

69. $P(m,n)$是椭圆$\frac{(x-a)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>0,b>0)$上的一个定点，$PA$、$PB$是两条互相垂直的弦，则

（1）直线AB必经过一个固定点$(\frac{2ab^2+m\left(a^2-b^2\right)}{a^2+b^2},\frac{n\left(b^2-a^2\right)}{a^2+b^2})$;

（2）以PA、PB为直径的两圆的另一个交点Q的轨迹方程是

$$\left(x-\frac{ab^2+a^2m}{a^2+b^2}\right)^2+\left(y-\frac{b^2n}{a^2+b^2}\right)^2=\frac{a^2\left[b^4+n^2\left(a^2-b^2\right)\right]}{\left(a^2+b^2\right)^2},x\neq m,y\neq n.$$

70. 如果一个椭圆短半轴长为b，焦点F_1、F_2到直线L的距离分别为d_1、d_2，那么：

 （1）若$d_1d_2=b^2$，且F_1、F_2在L同侧$\Leftrightarrow$直线L和椭圆相切；

 （2）若$d_1d_2>b^2$，且F_1、F_2在L同侧$\Leftrightarrow$直线L和椭圆相离；

 （3）若$d_1d_2<b^2$，或F_1、F_2在L异侧$\Leftrightarrow$直线L和椭圆相交.

71. AB是椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$的长轴，$N$是椭圆上的动点，过$N$的切线与过$A$、$B$的切线交于$C$、$D$两点，则梯形$ABCD$的对角线的交点$M$的轨迹方程是$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{4y^2}{b^2}=1\,(y\neq 0)$.

72. 设点$P(x_0,y_0)$为椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$的内部一定点，$AB$是椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$过定点$P(x_0,y_0)$的任一弦，当弦$AB$平行（或重合）于椭圆长轴所在直线时，有

$$(|PA|\cdot|PB|)_{min}=\frac{a^2b^2-(a^2y_0^2+b^2x_0^2)}{a^2}.$$

73. 椭圆焦点三角形中，以焦半径为直径的圆必与以椭圆长轴为直径的圆相内切.

74. 椭圆焦点三角形的旁切圆必切长轴于非焦顶点同侧的长轴端点.

75. 椭圆两焦点到椭圆焦点三角形旁切圆的切线长为定值$a+c$与$a-c$.

76. 椭圆焦点三角形的非焦顶点到其内切圆的切线长为定值$a-c$.

77. 椭圆焦点三角形中，内点到一焦点的距离与以该焦点为端点的焦半径之比为常数e（离心率）.（注：在椭圆焦点三角形中，非焦顶点的内外角平分线与长轴交点分别称为内、外点）.

78. 椭圆焦点三角形中，内心将内点与非焦顶点连线段分成定比e.

79. 椭圆焦点三角形中，半焦距必为内、外点到椭圆中心的比例中项.

80. 椭圆焦点三角形中，椭圆中心到内点的距离、内点到同侧焦点的距离、半焦距及外点到同侧焦点的距离成比例.

81. 椭圆焦点三角形中，半焦距、外点与椭圆中心连线段、内点与同焦点连线段、外点与同侧焦点连线段成比例.

82. 椭圆焦点三角形中，过任一焦点向非焦顶点的外角平分线引垂线，则椭圆中心与垂足连线必与另一焦半径所在直线平行.

83. 椭圆焦点三角形中，过任一点向非焦顶点的外角平分线引垂线，则椭圆中心与垂足的距离为椭圆长半轴的长.

84. 椭圆焦点三角形中，过任一焦点向非焦顶点的外角平分线引垂线，垂足就是垂足同侧焦半径为直径的圆和椭圆长轴为直径的圆的切点.

85. 椭圆焦点三角形中，非焦顶点的外角平分线与焦半径、长轴所在直线的夹角的余弦的比为定值e.

86. 椭圆焦点三角形中，非焦顶点的法线即为该顶角的内角平分线.

87. 椭圆焦点三角形中，非焦顶点的切线即为该顶角的外角平分线.

88. 椭圆焦点三角形中，过非焦顶点的切线与椭圆长轴两端点处的切线相交，则以两交点为直径的圆必过两焦点.

89. 已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0,b>0$）（包括圆在内）上有一点$P$，过点$P$分别作直线$y=\frac{b}{a}x$及$y=-\frac{b}{a}x$的平行线，与$x$轴分别交于$M$，$N$，交$y$轴于$R$、$Q$，$O$为原点，则：
(1)$|OM|^2+|ON|^2=2a^2$;
(2)$|OQ|^2+|OR|^2=2b^2$.

90. 过平面上的P点作直线$l_1:y=\frac{b}{a}x$及$l_2:y=-\frac{b}{a}x$的平行线，分别交x轴于M、N两点，交y轴于R、Q，
(1)若$|OM|^2+|ON|^2=2a^2$，则P的轨迹方程是$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>0,b>0)$;
(2)若$|OQ|^2+|OR|^2=2b^2$，则P的轨迹方程是$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>0,b>0)$.

91. 点P为椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>0,b>0)$（包括圆在内）在第一象限的弧上任意一点，过$P$引$x$轴、$y$轴的平行线，交$x$轴、$y$轴于$N$、$M$，交直线$y=-\frac{b}{a}x$于$Q$，$R$，记$\triangle OMQ$与$\triangle ONR$的面积为$S_1$、$S_2$，则 $S_1+S_2=\frac{ab}{2}$.

92. 点P为第一象限内的一点，过P引x轴、y轴的平行线，交x轴、y轴于N、M，交直线$y=-\frac{b}{a}x$于Q、R，记$\triangle 0MQ$与$\triangle 0NR$的面积为S_1、S_2，已知$S_1+S_2=\frac{ab}{2}$，则点P的轨迹方程是
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>0,b>0)\,.$$