4.4 二次曲面的化简与分类

1. 解：$\lambda^3-3\lambda-2=0$.

$\lambda_1=2,\ \lambda_2=\lambda_3=-1$.

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt3}&-\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt3}&0&\frac{2}{\sqrt6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

化简方程得 $y^2+z^2-2x^2=9$：单叶双曲面

2. 解：$\lambda^3-\lambda^2-\lambda+1=0$.

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\-\frac{1}{\sqrt2}&0&\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt2}&0&\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$$

化简得 $-x^2+y^2+z^2+1=0$：双叶双曲面.

3. 解：$\lambda^3-2\lambda^2-3\lambda=0$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt3}&-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt3}&0&-\frac{2}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}+\cancel{\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\0\\-1\end{pmatrix}}\ \cancel{\begin{pmatrix}\frac{1}{8}\\-\frac{1}{4}\\-\frac{9}{8}\end{pmatrix}}\ \begin{pmatrix}0\\-\frac{3}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

化简得 $3z^2-y^2-2=0$：双曲柱面

(15) $\lambda^3-18\lambda^2+99\lambda-162=0$. $\lambda_{1,2,3}=3,6,9$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ①$$

易知其为 $\lambda_1 x^2+\lambda_2 y^2+\lambda_3 z^2+I_4/I_3=0$ 形的化简方程，故不必代入①式而直接可得 $3x^2+6y^2+9z^2-\frac{8}{27}=0$

(16) $\lambda^3+6\lambda^2-216\lambda=0$, $\lambda_1=0$, $\lambda_2=12$, $\lambda_3=-18$

(17) $\lambda^3-7\lambda^2+10\lambda=0$. $\lambda_1=0$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=5$

18) ~~$2x^2+1$~~

$\lambda^3-12\lambda^2+21\lambda-10=0$. $\lambda_1=1$, $\lambda_2=1$, $\lambda_3=10$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

得 $x'^2+y'^2+10z'^2-1=0$. ∴ 椭球面.

19) $\lambda^3-7\lambda^2+14\lambda-6=0$. $\lambda_1=3$, $\lambda_2=2+\sqrt{2}$, $\lambda_3=2-\sqrt{2}$.

简化后的过渡方程略. 因为 $\lambda_1\lambda_2\lambda_3\neq0$. 知化简方程必为椭球面. 知为

$3x^2+(2+\sqrt{2})y^2+(2-\sqrt{2})z^2-11/2=0$

2. 证明: 特征方程为 $\lambda^3-\frac{1}{4}\lambda=0$. $\lambda_1=0$, $\lambda_2=\frac{1}{2}$, $\lambda_3=-\frac{1}{2}$.

又其中心为不存在. 知为(II)类方程

$\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}y^2+d=0$ 的形式.

不论 d 为正或负 都有方程为双曲柱面.

3. 解：取 $\begin{pmatrix} \vec{e_1'} \\ \vec{e_2'} \\ \vec{e_3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e_1} \\ \vec{e_2} \\ \vec{e_3} \end{pmatrix}$ 和三坐标面交点 $(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 为原点 得

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

即

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y+\frac{1}{2} \\ z-\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

得 $O'(0,0,\frac{1}{\sqrt{2}})$. $A'(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{2}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$ $B'(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{6}},0)$.

代入曲线方程，得 $-2x^2+y^2-z^2+\frac{1}{2}=0$.

其余各类型方程不存在.

<u>4.3 节</u>

(3) 特征方程为 $\lambda^3-36\lambda^2+396\lambda-1296=0$（感受到绝望了吗?）

解得 $\lambda_1=6,\ \lambda_2=18,\ \lambda_3=12$.

得 ① $x:y:z=1:1:2$ 为 $x+y+2z=0$.

② $x:y:z=-1:-1:1$ 为 $-x-y+z=0$

③ $x:y:z=1:-1:0$ 为 $x-y+1=0$.

4：略（此题不写答案更佳）.

知所求径面的共轭方向为 $x:y:z=t:t:m$.

得所求径面方程为 $(6t-2m)x+(3t-m)y-(3t-m)z=0$.

（t 与 m 不同时为零）

3 解：参考例4.3.3有对应主方向与主径面三组为

(1) ① $x:y:z=1:-1:0$ 为 $x-y+1=0$

② $x:y:z=0:0:1$ 为 $-5z-2=0$

③ $x:y:z=1:1:0$ 为 $x+y-1=0$.

(2) ① $x:y:z=1:-1:0$ 为 $2x-2y+3=0$.

注：特征根为 $\lambda=0,0,2$.

4.2 节

4. 解: (1) 其中心坐标为 $(0,0,0)$，故其渐近锥面方程为

$\phi(x-0,y-0,z-0)=y^2-2z^2+2xz=0$

(2) 其中心坐标为 $(0,0,0)$，故其渐近锥面方程为

$x^2+y^2+z^2-4xy-4yz-4xz=0$

(3) $I_3=0$，故为非中心二次曲面，故(可能)不存在渐近锥面。

5. 解: (1) $x=y=1$ (2) $x=2y=z$ (3) 没有中心

6. 解: (1) $2x-y+3z+2=0$. (2) $x=\frac{3}{2}y=3(z-2)$

(3)

7. 解: 设锥面 $ax^2+by^2+cz^2=0$.

有 $XF_1(x_0,y_0,z_0)+YF_2(x_0,y_0,z_0)+ZF_3(x_0,y_0,z_0)=aXx_0+bYy_0+cZz_0=0$.

讨论: ① $\phi(X,Y,Z)=aX^2+bY^2+cZ^2\neq0$ 时.

直线与二次曲面相切

② $\phi(X,Y,Z)=0$ 时.

因为恒有 $F(x_0,y_0,z_0)=0$，故直线在二次曲面上.

8. 解：将直线代入方程，整理得

$$7t^2-7t+1=0.$$

解得 $t_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{21}}{14}$

得交点 $\left(\frac{-7+3\sqrt{21}}{7}, \frac{7+\sqrt{21}}{7}, 0\right)$ 或 $\left(\frac{-7-3\sqrt{21}}{7}, \frac{7-\sqrt{21}}{7}, 0\right)$.

9. 解：将直线代入曲面之方程，整理得

$4t-1=0$. 得 $t=\frac{1}{4}$

得交点 $(0,\frac{1}{2},0)$

证明：直线 l 的方向向量为 $(4,2,0)$ 代入 $\varphi(x,y,z)$ 得

$\varphi(x,y,z)=0$. 令 $XF_1(x_0,y_0,z_0)+YF_2(x_0,y_0,z_0)+ZF_3(x_0,y_0,z_0)$

$=F(x_0,y_0,z_0)=0$.

即 $\begin{cases} 4(x_0-y_0+2z_0+\frac{3}{2})+2(-x_0-z_0)=0. & ① \\ x_0^2+z_0^2-2x_0y_0-y_0z_0+4z_0x_0+3x_0-5z_0=0 & ② \end{cases}$

①代入②中，整理得

$z_0(y_0-2z_0-8)=0$. 知 $z_0=0$ 或 $y_0-2z_0-8=0$.

与①联立方程可知

$z_0=x_0-13=\frac{y_0-8}{2}$ 或 $x_0-2y_0+3=z_0=0$

知存在且存在有无数条所求直线. 取 $(-3,0,0)$ 点得其中一条直线为 $\frac{x+3}{4}=\frac{y}{2}=\frac{z}{0}$.

4.1节

3. 解：取 $\pi_1\cap\pi_2\cap\pi_3=(-\frac{1}{2},1,\frac{1}{2})$ 为原点

$\vec{n_1^0}=\pm(\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3})$ 为x轴方向，

$\vec{n_2^0}=\pm(\frac{1}{\sqrt2},0,-\frac{1}{\sqrt2})$ 为y轴方向．

$\vec{n_3^0}=\pm(\frac{1}{\sqrt6},-\frac{2}{\sqrt6},\frac{1}{\sqrt6})$ 为z轴方向．

控制正负号使原点落在新坐标系的第一卦限

则坐标变换公式为

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\left(\pm\vec{n_1^0}^T,\pm\vec{n_2^0}^T,\pm\vec{n_3^0}^T\right)\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}. \quad ①$$

由于过渡矩阵是正交矩阵，所以①即为

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\pm\vec{n_1^0}\\\pm\vec{n_2^0}\\\pm\vec{n_3^0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x+\frac{1}{2}\\y-1\\z-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$ 代入(0,0,0).得

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mp\frac{1}{\sqrt3}\\\mp\frac{1}{\sqrt2}\\\pm\frac{2}{\sqrt6}\end{pmatrix},$$ 知取 $-\vec{n_1^0}$ 为x轴正方向单位向量，

取 $+\vec{n_2^0}$ 为y轴正方向单位向量

$\vec{n_3^0}$ 为z轴正方向单位向量．

同时，$(\vec{n_1^0},\vec{n_2^0},\vec{n_3^0})>0$，知为右手系，得坐标变换公式．

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}\\-\frac{1}{\sqrt3}&0&-\frac{2}{\sqrt6}\\-\frac{1}{\sqrt3}&-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

4. D. 解：$x^2+y^2=2xy$，即 $(x^2-2xy+y^2)=(x-y)^2=0$.

5. 可以这样：$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

另外有个高等解法：视 $2x+3y+4z+5=0$ 为二次方程

$(2x+3y+4z+5)^2=4x^2+9y^2+16z^2+12xy+16xz+24yz+20x+30y+40z+25=0$.

特征方程为：$\lambda^3-29\lambda^2=0$.

求变换公式为 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{29}} & \frac{3}{\sqrt{22}} & \frac{-17}{\sqrt{638}} \\ \frac{3}{\sqrt{29}} & \frac{2}{\sqrt{22}} & \frac{18}{\sqrt{638}} \\ \frac{4}{\sqrt{29}} & -\frac{-3}{\sqrt{22}} & \frac{5}{\sqrt{638}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$.

6. 其特征方程为 $\lambda^3-625\lambda=0$，$\lambda_1=0$，$\lambda_2=\lambda_3=25$. 且其为无心二次曲面.
知为椭圆抛物面.

7. 设 $\vec{e_1}=(\cos\theta\sin\varphi, \sin\theta, \cos\theta\cos\varphi)$.

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

令 $\vec{e_1}\cdot(1,1,1)=(0,0,1)(1,1,1)$.

且 $\dfrac{[\vec{e_1}\times(1,1,1)]\cdot[(0,0,1)\times(1,1,1)]}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cdot1\cdot1}=\cos\frac{2}{3}\pi$.

得 $\vec{e_1}=(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3})$. 同理得 $\vec{e_2}, \vec{e_3}$ 及坐标变换公式为

3.5 节

3.5 直纹面

1. 证明：设单叶双曲面方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$，$a,b,c\in R^+$.

方程改写为 $\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\left(1+\frac{y}{b}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right)$.

得 u 族直母线
$$\begin{cases}\frac{x}{a}-\frac{z}{c}=u\left(1+\frac{y}{b}\right)\\ u\cdot\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=1-\frac{y}{b}\end{cases}$$

v 族直母线
$$\begin{cases}\frac{x}{a}-\frac{z}{c}=v\left(1-\frac{y}{b}\right)\\ v\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=1+\frac{y}{b}\end{cases}$$

对同族中任意两条直母线，其显然不平行，则下证其任意不相交。联立方程，得

$$\begin{cases}\frac{1}{a}x-\frac{1}{b}u_1y-\frac{1}{c}z-u_1=0\\ \frac{u_1}{a}x+\frac{1}{b}y+\frac{u_1}{c}z-1=0\\ \frac{1}{a}x-\frac{u_2}{b}y-\frac{1}{c}z-u_2=0\\ \frac{u_2}{a}x+\frac{1}{b}y+\frac{u_2}{c}z-1=0\end{cases}$$

其判别式
$$\begin{vmatrix}\frac{1}{a} & -\frac{u_1}{b} & -\frac{1}{c} & -u_1\\ \frac{u_1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{u_1}{c} & -1\\ \frac{1}{a} & -\frac{u_2}{b} & -\frac{1}{c} & -u_2\\ \frac{u_2}{a} & \frac{1}{b} & \frac{u_2}{c} & -1\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c}\begin{vmatrix}1 & -u_1 & -1 & -u_1\\ u_1 & 1 & u_1 & -1\\ 1 & -u_2 & -1 & -u_2\\ u_2 & 1 & u_2 & -1\end{vmatrix}=\frac{4}{abc}u_2(u_2-u_1).$$

因为其中 $u_1\neq u_2$，故其判别式不为零，故两条直母线异面，u 族得证。

v 族同理。

对异族的任意两条直母线，同理，得增广矩阵

$$A=\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{1}{b}u & -\frac{1}{c} & -u \\ \frac{1}{a}u & \frac{1}{b} & \frac{1}{c}u & -1 \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b}v & -\frac{1}{c} & -v \\ \frac{1}{a}v & -\frac{1}{b} & \frac{1}{c}v & -1 \end{pmatrix} \quad \det A=\frac{1}{abc}\begin{vmatrix} 1 & -u & 1 & u \\ u & 1 & -u & 1 \\ 1 & v & 1 & v \\ v & -1 & -v & 1 \end{vmatrix}=0$$

知异族的任意两条直母线共面.

u族直母线的方向向量 $\vec{u}=(\frac{1}{a},-\frac{1}{b}u,-\frac{1}{c})\times(\frac{1}{a}u,\frac{1}{b},\frac{1}{c}u)$

$$=(-\frac{1}{bc}u^2+\frac{1}{bc},-\frac{2}{ac}u,\frac{1}{ab}u^2+\frac{1}{ab})$$

v族直母线的方向向量 $\vec{v}=(\frac{1}{a},\frac{1}{b}v,-\frac{1}{c})\times(\frac{1}{a}v,-\frac{1}{b},\frac{1}{c}v)$

$$\cancel{=(-\frac{1}{ab}v^2-\frac{1}{ab},-\frac{2}{ac}v,-\frac{1}{ab}v^2-\frac{1}{ab})}$$

$$=(\frac{1}{bc}v^2-\frac{1}{bc},-\frac{2}{ac}v,-\frac{1}{ab}v^2-\frac{1}{ab}).$$

令 $\vec{v}\parallel\vec{u}$，则对应数成比例，即

$$\frac{-u^2+1}{v^2-1}=\frac{-u}{-v}=\frac{u^2+1}{-(v^2+1)}$$ 当且仅当 $\frac{u}{v}=-1$ 时成立，

则u族的任一直母线，在v族直母线中有且只有一条直母线与之平行.

2. 证明：由P84页定理3.5.1证法2，得

u族直母线：$\begin{cases} \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2u \\ u\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=z \end{cases}$ ； v族直母线 $\begin{cases} \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=2v \\ v\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=z \end{cases}$

对1同理，联立方程，其增广矩阵

$$A=\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & 0 & -2u_1 \\ \frac{1}{a}u_1 & -\frac{1}{b}u_1 & -1 & 0 \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & 0 & -2u_2 \\ \frac{1}{a}u_2 & -\frac{1}{b}u_2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \det A=\frac{-2}{ab}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -u_1 \\ u_1 & -u_1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -u_2 \\ u_2 & -u_2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=-\frac{4}{ab}(u_1-u_2)^2. \quad (u_1\neq u_2).$$

知同族的任意两条直母线异面.（v族同理）

联立任意两条异族直母线方程，同理，其增广矩阵

$$A=\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & 0 & -2u \\ \frac{1}{a}u & -\frac{1}{b}u & -1 & 0 \\ \frac{1}{a} & -\frac{1}{b} & 0 & -2v \\ \frac{1}{a}v & \frac{1}{b}v & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \det A=\frac{2}{ab}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & u \\ u & -u & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & v \\ v & v & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=0$$

知异族的任意两条直母线相交.

u族直母线方向向量为 $\vec{v}=\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b},0\right)\times\left(\frac{1}{a}u,-\frac{1}{b}u,-1\right)$

$$=\left(-\frac{1}{b},\frac{1}{a},-\frac{2}{ab}u\right)$$

易知其平行于平面 $\frac{1}{a}x+\frac{1}{b}y=0$. 对$v$族同理，

知同族的全体直母线平行于同一平面.

3. 解:

(1) $\begin{cases} x+z=uy \\ -y=u(x-z) \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x+z=-vy \\ y=v(x-z) \end{cases}$.

(2) $\begin{cases} 1=aux \\ y=uz \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 1=vay \\ x=vz \end{cases}$

4. 证明: (1) $(x+z)^2=(1+y)(1-y)$

~~其直母线族方程~~为 $\begin{cases} x+z=u(1+y) \\ u(x+z)=1-y \end{cases}$

其方向向量为 $(1,-u,1)\times(u,1,u)=(-u^2-1,0,1+u^2)$.

$=(u^2+1)(-1,0,1)\,//\,(1,-1,1)$.

方向为定向 知为柱面.

(2) $(y+z)^2=(1+x)(1-x)$.

得 $\begin{cases} y+z=u(1+x) \\ u(y+z)=1-x \end{cases}$, 其方向向量为 $(-u,-1,-1)\times(1,u,u)$

$=(0,-1-u^2,u^2+1)\,//\,(0,-1,1)$

知为柱面.

(3) $\begin{cases} x+y=u(x+2y+z) \\ u(y+z)=1 \end{cases}$

得其方向向量为 $(1-u,1-2u,-u)\times(0,u,u)$

$=(-2u^2+u,u^2-u,u-u^2)\,//\,(-1,1,-1)$

知为柱面.

(4) $\begin{cases} x+y+z=u(x-y-z) \\ u(x+y+z)=x-y-z \end{cases}$ 得方向向量 $(1-u,1+u,1+u)\times(u-1,u+1,u+1)$

$=(0,-2(1+u),2(1+u))\,//\,(0,-1,1)$.

故为柱面.

5. 解：(1) 其直母线的方程 $\begin{cases} x+2y=16u \\ u(x-2y)=z \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x+2y=vz \\ v(x-2y)=16 \end{cases}$

令其方向向量 $(1,2,0)\times(u,-2u,-1)\cdot(3,2,-4)=0$.

得直线的方程 $\frac{x}{-2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{-1}$

同理解得另一条直线 $\frac{x}{2}=y+4=\frac{z+4}{2}$

(2) $\frac{x}{-2}=\frac{y-16}{1}=\frac{z+32}{-4}$ 或 $\frac{x}{2}=\frac{y+32}{1}=\frac{z+128}{8}$

(3) $\frac{x-2}{2}=\frac{y-3}{3}=\frac{z}{0}$ 或 $\frac{x}{2}=\frac{y-6}{-3}=\frac{z+4}{4}$

6. 解：(1) $\frac{x-6}{3}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-8}{4}$ 或 $\frac{x-3}{0}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{2}$.

(2) $\theta=\arccos\frac{8}{25\sqrt{5}}$

7. 略

8. 解：参考文末参考文献[29]（注：原题标注有误）.

http://www.mathcurve.com/surfaces/cayley/cayley.shtml.

Cayley三次直纹面方程可整理为

$$\frac{x^2}{1-z}+\frac{y^2}{1+z}=1.$$

故其参数方程可写为 $\begin{cases} x=\sqrt{1-u}\cos\theta \\ y=\sqrt{1+u}\sin\theta \\ z=u \end{cases}$

Forme 1

Équation homogène dite *tétraédrique* :

$\frac{1}{X_1}+\frac{1}{X_2}+\frac{1}{X_3}+\frac{1}{X_4}=0$, soit $\sum_{1\le i<j<k\le 4} X_i X_j X_k = 0$.

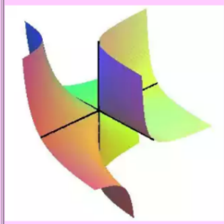
Surface cubique.

Les 4 points coniques sont $A_1(1,0,0,0),\ldots,A_4(0,0,0,1)$.

Les 9 droites sont les 6 $D_{ij} : X_i = X_j = 0$ pour $1 \le i < j \le 4$ (la droite D_{ij} joint A_k à A_l)

et les 3 $\Delta_i : X_4 + X_i = X_j + X_k = 0$ pour $\{i,j,k\} = \{1,2,3\}$.

Dans la version affine associée, d'équation $xyz + a(xy + yz + zx) = 0$, ne subsistent à distance finie qu'un point conique A_4 et 3 droites incluses (les 3 axes, en noir ci-contre) .



La *surface de Cayley* est la surface définie (à homographie près) par l'équation ci-dessus.

C'est la seule surface cubique dont le groupe des homographies la laissant invariante est le groupe S_4 des permutations de 4 objets (cf. l' invariance par les 24 permutations des coordonnées X_1, X_2, X_3, X_4) et c'est aussi la seule surface cubique à posséder 4 points coniques (maximum possible pour une surface cubique).
Cette surface cubique non lisse possède 9 droites, qui sont réelles : les arêtes du tétraèdre formé par les points coniques et 3 autres droites, qui sont coplanaires.

Une première transformation projective permet de "voir" les 9 droites à distance finie :

Forme 2

Le changement de coordonnées défini par $\begin{cases} X_1 = X \\ X_2 = Y \\ X_3 = Z \\ kX_4 = T - (X+Y+Z) \end{cases}$ donne l'

Équation homogène 2 :

$(X+Y+Z-T)(XY+YZ+ZX) = kXYZ$.

Les points coniques sont

$A_1(1,0,0,1), A_2(0,1,0,1), A_3(0,0,1,1), A_4(0,0,0,1)$.

Les 9 droites sont les 6 arêtes du tétraèdre formé par les points coniques, plus

$\Delta_1 : \begin{cases} T = (1-k)X \\ Y + Z = 0 \end{cases}$, $\Delta_2 : \begin{cases} T = (1-k)Y \\ X + Z = 0 \end{cases}$,

$\Delta_3 : \begin{cases} T = (1-k)Z \\ X + Y = 0 \end{cases}$.

Équation cartésienne affine associée :

$(x+y+z-a)(xy+yz+zx) = kxyz$.

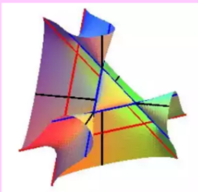
Les points coniques sont

$A_1(a,0,0), A_2(0,a,0), A_3(0,0,a), A_4(0,0,0)$

Les 9 droites sont les 6 arêtes du tétraèdre des points coniques, plus :

$\Delta_1 : \begin{cases} x = a/(1-k) \\ y + z = 0 \end{cases}$, $\Delta_2 : \begin{cases} y = a/(1-k) \\ x + z = 0 \end{cases}$,

$\Delta_3 : \begin{cases} z = a/(1-k) \\ x + y = 0 \end{cases}$.



Les axes du repère sont en noir, les trois autres arêtes du tétraèdre en bleu, et les 3 droites Δ_i en rouge.

Nous avons choisi ici k = 2 (pour k = 1 les droites Δ_i sont rejetées à l'infini).

Dans ce cas, on montre que la surface de Cayley est le lieu des points dont les projetés sur les quatre plans-faces du tétraèdre des points coniques sont coplanaires. C'est en quelque sorte la généralisation à l'espace du problème du lieu des points dont les projetés sur les côtés du triangle sont alignés, lieu qui est, lui, le cercle circonscrit au triangle (cf droite de Simson).

Une deuxième transformation projective permet d'obtenir une vue affine où la surface est invariante par les 24 isométries du tétraèdre régulier (mais 3 des 9 droites sont rejetées à l'infini) :

Forme 3

Le changement de coordonnées défini par $\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ T \end{bmatrix}$ donne l'

Équation homogène 3 : $(X^2+Y^2+Z^2)T + 2XYZ = T^3$;

Les points coniques sont

$A_1(-1,1,1,1), A_2(1,-1,1,1), A_3(1,1,-1,1), A_4(-1,-1,-1,1)$.

Les neuf droites sont les 6 arêtes du tétraèdre et

$\Delta_1 : X = T = 0, \Delta_2 : Y = T = 0, \Delta_3 : Z = T = 0$.

Équation cartésienne affine associée :

$2xyz + a(x^2+y^2+z^2) = a^3$ (voir à surface du sinus une paramétrisation simple)

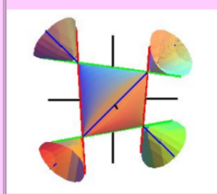
Les points coniques sont

$A_1(-1,1,1), A_2(1,-1,1), A_3(1,1,-1), A_4(-1,-1,-1)$,

formant un tétraèdre régulier dont les 6 arêtes sont les droites D_{ij} (les droites Δ_i sont rejetées à l'infini dans ce modèle).

La rotation d'un huitième de tour définie par $x := \frac{x+y}{\sqrt{2}}, y := \frac{x-y}{\sqrt{2}}$ donne pour équation cartésienne : $(x^2-y^2)z + a(x^2+y^2+z^2) = a^3$, se simplifiant en $\frac{x^2}{a-z} + \frac{y^2}{a+z} = a$

Le volume de la partie tétraédrique vaut $\frac{\pi^2 a^3}{2}$.
Sous cette forme, la surface de cayley est une surface tétraédrique de Goursat.



Vue avec les 3 axes de coordonnées (en noir) et les 6 droites incluses.

9. 证明：u族直母线族为 $\begin{cases} x+3z=u(1+y) \\ u(x-3z)=1-y \end{cases}$

消去z，得直线在xoy平面上的投影为

$$2ux+(1-u^2)y=u^2+1$$

即 $\frac{2u}{1+u^2}x+\frac{1-u^2}{1+u^2}y=1$ ①

又其腰椭圆为 $x^2+y^2=1$ ②

①中 $\left(\frac{2u}{1+u^2}\right)^2+\left(\frac{1-u^2}{1+u^2}\right)^2=1$

易知①是②的切线，证毕.

3.4 节

3.4 二次曲面.

1. 解：设所求平面为 $Ay+Bz=0$. 联立椭球面方程，得

$$\begin{cases} Ay+Bz=0. \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \end{cases}$$

所以得 ① $A=0$ 时，显然不满足要求

② $A\neq 0$ 时有 $\frac{x^2}{a^2}+\left(\frac{B^2}{A^2b^2}+\frac{1}{c^2}\right)z^2=1$.

显然 $\frac{1}{a^2}=\frac{B^2}{A^2b^2}+\frac{1}{c^2}$.

知所求平面为 $y=\pm\sqrt{\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2}\right)b^2}\,z$

2. 解：由题 $(x+4)^2+y^2+z^2=4[(x-2)^2+y^2+z^2]$

得 $3x^2+3y^2+3z^2-24x=0$.

3. 解：设所求椭球面为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. 所以题设，得

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{36}=1$$

4. 解：$\frac{x^2}{4}=\frac{z^2}{9}$，即 $\frac{x}{2}=\pm\frac{z}{3}$，为两条交叉直线

5. 解：$(1-k^2)x^2+y^2=1$.

形状为
- 圆，$k=0$
- 椭圆，$-1<k<1$
- 两条平行直线，$k=\pm 1$
- 双曲线，$|k|>1$

Ch082 95 2007 11

6. 解：(1) 双曲抛物面，讨论略. (2) $\begin{cases} z=ky \\ x=k \end{cases}$ 利用平行截割法，知为直纹面，讨论略

(3) 单叶双曲面，讨论略 (4) 双叶双曲面，讨论略.

7. 解：$A,B,C>\lambda$ 时为椭球面. ~~$\lambda=C$ 时为~~

$A>B>\lambda>C$ 时为单叶双曲面

$A>\lambda>B>C$ 时为双叶双曲面.

$\lambda>A,B,C$ 时不存在图形

8. 解：$\lambda>9$，不存在；$\lambda=9$，不存在；$9>\lambda>4$，双叶双曲面；$\lambda=4$，椭圆柱面；$4>\lambda>1$ 单叶双曲面；$\lambda=1$，椭圆柱面；$\lambda<1$，椭球面.

9. 解：设其方程为 $\frac{z^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2x$，代入两点坐标，解得

$$\frac{3}{5}z^2+\frac{18}{5}y^2=x.$$

10. 解：显然为 $x=\pm2$ 或 $y=\pm3$