解析几何答案

陈家宝

jackchen2025@outlook.com

2020 年 1 月 16 日

假如你发现错误或者想要最新的错误更少的版本，或者帮助改进文件，亦或提交问题，这里提供了渠道https://github.com/jackchen2025/KeyAG. 如果你想和作者联系,这是作者的电子邮件:jackchen2025@outlook.com，我会不定期查看邮件内容.

祝阅读愉快!

目录

1 向量与坐标 **2**

1.1 向量的定义、加法和数乘 2

1.2 向量的线性相关性 3

1.3 标架与坐标 5

1.4 数量积 7

1.5 向量积 8

1.6 混合积与双重向量积 9

2 平面与直线 **11**

2.1 平面方程 11

2.2 直线方程 12

2.3 线、面的位置关系 14

2.4 点、线、面之间的距离 18

2.5 线、面间的夹角 20

2.6 平面束 21

3 常见曲面 **22**
3.1 曲面与空间曲线 22
3.2 柱面与投影曲线 24
3.3 锥面和旋转曲面 27
3.4 二次曲面 32
3.5 直纹面 33

4 二次曲面的分类 **38**
4.1 坐标变换 38
4.2 二次曲面的渐进方向和中心 40
4.3 二次曲面的对称面和主径面 43
4.4 二次曲面的化简与分类 43
4.5 二次曲面的切线与切平面 46

1 向量与坐标

1.1 向量的定义、加法和数乘

1. 证明：$\overrightarrow{PA_1}+\overrightarrow{PA_2}+\cdots+\overrightarrow{PA_n}=\left(\overrightarrow{OA_1}-\overrightarrow{OP_1}\right)+\left(\overrightarrow{OA_2}-\overrightarrow{OP_2}\right)+\cdots+\left(\overrightarrow{OA_n}-\overrightarrow{OP_n}\right)=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}-n\overrightarrow{OP}$, 又 $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}=\mathbf{0}$, 故 $\overrightarrow{PA_1}+\overrightarrow{PA_2}+\cdots+\overrightarrow{PA_n}=-n\overrightarrow{OP}=n\overrightarrow{OP}$.

2. (1) $(\mu-\upsilon)(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})-(\mu+\upsilon)(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\mu\boldsymbol{a}-\mu\boldsymbol{b}-\upsilon\boldsymbol{a}+\upsilon\boldsymbol{b}-\mu\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}-\upsilon\boldsymbol{a}+\upsilon\boldsymbol{b}=-2\upsilon\boldsymbol{a}+2\upsilon\boldsymbol{b}$.

   (2) $\mathbf{D}=\begin{vmatrix}3&4\\2&-3\end{vmatrix}=-17,\mathbf{D_x}=\begin{vmatrix}\mathbf{a}&4\\\mathbf{b}&-3\end{vmatrix}=-3\mathbf{a}-4\mathbf{b},\mathbf{D_y}=\begin{vmatrix}3&\mathbf{a}\\3&\mathbf{b}\end{vmatrix},\mathbf{x}=\dfrac{D_x}{D}=\dfrac{3}{17}\mathbf{a}+\dfrac{4}{17}\mathbf{b},\mathbf{y}=\dfrac{D_y}{D}=-\dfrac{3}{17}\mathbf{b}+\dfrac{2}{17}\mathbf{a}$.

3. (1)$\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$, (2)$\mathbf{a},\mathbf{b}$ 同向，(3)$\mathbf{a},\mathbf{b}$ 反向，且 $|\mathbf{a}|\geq|\mathbf{b}|(4)\mathbf{a},\mathbf{b}$ 反向,(5)$\mathbf{a},\mathbf{b}$ 同向，且 $|\mathbf{a}|\geq|\mathbf{b}|$.

4. 证明：若 $\lambda+\mu<0,-\lambda<0$，由情形 1，得 $[(\lambda+\mu)+(-\lambda)]\,\mathbf{a}=(\lambda+\mu)\mathbf{a}+(-\lambda)\mathbf{a}$，即 $\mu\mathbf{a}=(\lambda+\mu)\mathbf{a}-\lambda\mathbf{a}$，从而 $(\lambda+\mu)\mathbf{a}=\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{a}$ 得证.

1.2 向量的线性相关性

1. (1) 错，当 $\mathbf{a}=\mathbf{0}$ 时；(2) 错，当 $\mathbf{a}=\mathbf{0}$ 时.

2. 设 $\lambda\mathbf{c}+\mu\mathbf{d}=\mathbf{0}, \lambda(2\mathbf{a}-\mathbf{b})+\mu(3\mathbf{a}-2\mathbf{b})=\mathbf{0}, (2\lambda+3\mu)\mathbf{a}+(-\lambda-2\mu)\mathbf{b}=\mathbf{0}$. 由于 $\mathbf{a},\mathbf{b}$ 不共线，所以 $\begin{cases}2\lambda+3\mu=0,\\ \lambda+2\mu=0.\end{cases}$ 又 $\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{vmatrix}=1\neq 0$，所以 $\lambda=\mu=0$，即 $\mathbf{c},\mathbf{d}$ 线性无关.

3. 证明: $\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{CD}$，$E$、$F$ 分别为梯形腰 BC、AD 上的中点，连接 EF 交 AC 于点 H，则 H 为 AC 的中点，$\overrightarrow{FH}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{HE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{FE}=\overrightarrow{FH}+\overrightarrow{HE}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AB}\right)$，因为 $\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{CD}$，而 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 方向一致，所以 $\left|\overrightarrow{FE}\right|=\frac{1}{2}\left(\left|\overrightarrow{AB}\right|+\left|\overrightarrow{DC}\right|\right)$.

4. 设 $\mathbf{a}=\lambda\mathbf{b}+\mu\mathbf{c}$，则

$$\mathbf{a}=-\mathbf{e_1}+3\mathbf{e_2}+2\mathbf{e_3}=2\lambda\mathbf{e_1}-6\lambda\mathbf{e_2}+2\lambda\mathbf{e_3}-3\mu\mathbf{e_1}+12\mu\mathbf{e_2}+11\mu\mathbf{e_3},$$

即

$$(-1-4\lambda+3\mu)\,\mathbf{e_1}+(3+6\lambda-12\mu)\,\mathbf{e_2}+(2-2\lambda-11\mu)\,\mathbf{e_3}=\mathbf{0},$$

又 $\mathbf{e_1}$、$\mathbf{e_2}$、$\mathbf{e_3}$ 线性相关，有

$$\begin{cases}-1-4\lambda+3\mu=0\\ 3+6\lambda-12\mu=0\\ 2-2\lambda-11\mu=0.\end{cases}$$

解得 $\lambda=-\frac{1}{10}, \mu=\frac{1}{5}$，所以 $\mathbf{a}=\frac{1}{10}\mathbf{b}+\frac{1}{5}\mathbf{c}$.

5. C.

6. 设 $\overrightarrow{RD}=\lambda\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{RE}=\mu\overrightarrow{BE}$, 则

$$\overrightarrow{RD}=\lambda\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\mu\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{RE}=\overrightarrow{RD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}=\mu\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\mu\overrightarrow{CA},$$

故

$$\overrightarrow{RD}=\left(\frac{2}{3}\mu-\frac{1}{3}\right)\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}(1-\mu)\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\lambda\overrightarrow{BC},$$

推得

$$\begin{cases} \frac{2}{3}\mu - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\lambda, \\ \frac{1}{3}(1-\mu) = \lambda \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} \lambda = \frac{1}{7} \\ \mu = \frac{4}{7} \end{cases}$$

所以 $RD = \frac{1}{7}AD, RE = \frac{4}{7}BE.$

7. 由题得

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{PA}+\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{OP} = \left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}\right)+3\overrightarrow{OP}$,

又 $\overrightarrow{CP} = 2\overrightarrow{PG} = \overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}$, 所以 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC} = \mathbf{0}$, 则 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$ 得证.

8. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD} = 4\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD} = 4\overrightarrow{OP}+2\overrightarrow{PH}+2\overrightarrow{PG} = 4\overrightarrow{OP}$

9. "$\Rightarrow$" 因为 A、B、C 三点共线，所以存在不全为 0 的实数 k、l 满足 $k\overrightarrow{AB}+l\overrightarrow{AC} = \mathbf{0}$, 即 $k\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)+l\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\right) = \mathbf{0}$, 化简得 $-(k+l)\overrightarrow{OA}+k\overrightarrow{OB}+l\overrightarrow{OC} = \mathbf{0}$, 分别取 $\lambda = -(k+l), \mu = k, \gamma = l$, 得证.

"$\Leftarrow$" 因为 $\lambda = -(\mu+\gamma)$，设 $\lambda \neq 0$，则 μ、γ 不全为 0，$-(\mu+\gamma)\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC} = \mathbf{0}$，化简得 $\mu\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)+\gamma\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\right) = \mathbf{0}$，即 $\mu\overrightarrow{AB}+\gamma\overrightarrow{AC} = \mathbf{0}$，故 A、B、C 三点共线.

10. "$\Rightarrow$" 因为 P_1, P_2, P_3, P_4 四点共面，所以 $\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}, \overrightarrow{P_1P_4}$ 线性相关，存在不全为 0 的 m, n, p 使得 $m\overrightarrow{P_1P_2}+n\overrightarrow{P_1P_3}+p\overrightarrow{P_1P_4} = \mathbf{0}$, 即

$$m\left(\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP_1}\right)+n\left(\overrightarrow{OP_3}-\overrightarrow{OP_1}\right)+p\left(\overrightarrow{OP_4}-\overrightarrow{OP_1}\right) = \mathbf{0},$$

即

$$-(m+n+p)\mathbf{n}+m\mathbf{r_2}+n\mathbf{r_3}+p\mathbf{r_4} = \mathbf{0},$$

令 $m+n+p = \lambda_1, \lambda_2 = m, \lambda_3 = n, \lambda_4 = p$, 得证.

"$\Leftarrow$" 设 $\lambda_1 \neq 0$，则 $\lambda_1 = -(\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4)$，所以 $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ 不全为 0,

$$-(\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4)\mathbf{r_1}+\lambda_2\mathbf{r_2}+\lambda_3\mathbf{r_3}+\lambda_4\mathbf{r_4} = \mathbf{0},$$

因此 P_1, P_2, P_3, P_4 四点共面.

11. A, B, C 三点不共线 $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ 不共线 $\Leftrightarrow$ 点 P 在 π 上 $\Leftrightarrow \overrightarrow{AP} = \mu\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC}\,(\mu, \gamma \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = \mu\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right) + \gamma\left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} = (1-\mu-\gamma)\,\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC}$, 取 $\gamma = 1-\mu-\gamma$，得证.

12. (1)$\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\mathbf{e_1} + \frac{1}{3}\mathbf{e_2}, \overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\mathbf{e_1} + \frac{2}{3}\mathbf{e_2}$

    (2) 由角平分线的性质得 $\dfrac{\left|\overrightarrow{BT}\right|}{\left|\overrightarrow{TC}\right|} = \dfrac{\mathbf{e_1}}{\mathbf{e_2}}$，又 $\overrightarrow{BT}$ 与 $\overrightarrow{TC}$ 同向，则 $\overrightarrow{BT} = \dfrac{\mathbf{e_1}}{\mathbf{e_2}}\overrightarrow{TC}, \overrightarrow{BT} = \overrightarrow{AT} - \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{TC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AT}$,因此 $\overrightarrow{AT} - \overrightarrow{AB} = \dfrac{\mathbf{e_1}}{\mathbf{e_2}}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AT}\right)$,
    得 $\overrightarrow{AT} = \dfrac{|e_1| + |e_2|}{|e_1| + |e_2|}\mathbf{e_1}$.

1.3 标架与坐标

1. (1)$(0, 16, -1)$.(2)$(-11, 9, -2)$.

2. 分析：以本书第 25 页推论 1.6.1 作判别式，以本书第 7 页定理 1.21(4)

   (1) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 121 \neq 0$, 故 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 不共面，无线性组合.

   (2) 同理 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 共面，
   设 $\mathbf{c} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$,
   得 $\begin{cases} -3 = 6\lambda - 9\mu \\ 6 = 4\lambda + 6\mu \\ 3 = 2\lambda - 3\mu \end{cases}$
   解得 $\mathbf{c} = \frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{4}{3}\mathbf{b}$.

   (3) 同理 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 共面，但 $\mathbf{a}$ 平行 $\mathbf{b}$，且 $\mathbf{a} \neq \mathbf{c}$, 故显然无法以线性组合表示 $\mathbf{c}$.

3. 证明：设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 中，A_i 所对得面的重心为 G_i，
   欲证 $A_iG_i\,(i = 1, 2, 3, 4)$ 相交于一点,在 A_iG_i 上取一点 P_i 使得 $\overrightarrow{A_iG_i} =$

$3\overrightarrow{P_iG_i}$,

从而 $\overrightarrow{OP_i} = \dfrac{\overrightarrow{OA_i} + 3\overrightarrow{OG_i}}{4}$,

设 A_i 坐标为 $(x_i, y_i, z_i)\,(i = 1, 2, 3, 4)$ 则有

$$G_1\left(\frac{x_2+x_3+x_4}{3}, \frac{y_2+y_3+y_4}{3}, \frac{z_2+z_3+z_4}{3}\right),$$

$$G_2\left(\frac{x_1+x_3+x_4}{3}, \frac{y_1+y_3+y_4}{3}, \frac{z_1+z_3+z_4}{3}\right),$$

$$G_3\left(\frac{x_1+x_2+x_4}{3}, \frac{y_1+y_2+y_4}{3}, \frac{z_1+z_2+z_4}{3}\right),$$

$$G_4\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}, \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right),$$

所以 $P_1\left(\dfrac{x_1+3\dfrac{x_2+x_3+x_4}{3}}{4}, \dfrac{y_1+3\dfrac{y_2+y_3+y_4}{3}}{4}, \dfrac{z_1+3\dfrac{z_2+z_3+z_4}{3}}{4}\right)$,

即 $P_1\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}, \dfrac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}, \dfrac{z_1+z_2+z_3+z_4}{4}\right)$, 同理可得 P_2, P_3, P_4 坐标，可知 P_1, P_2, P_3, P_4 为同一点，故 A_iG_i 交于同一点 P 且点 P 到任一顶点的距离等于此点到对面重心的三倍.

4. 证明：必要性：因为 π 上三点 $p_i\,(x_i, y_i)_{i=1,2,3}$ 共线，故 $\overrightarrow{p_1p_2}$ 平行于 $\overrightarrow{p_1p_3}$，即 $\dfrac{x_2-x_1}{x_3-x_1} = \dfrac{y_2-y_1}{y_3-y_1}$

即 $x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_1y_3 - x_3y_2 - x_2y_1 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$. 充分性：由 $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_1y_3 - x_3y_2 - x_2y_1 = 0$

整理得

$$\frac{x_2-x_1}{x_3-x_1} = \frac{y_2-y_1}{y_3-y_1},$$

即 $\overrightarrow{p_1p_2}$ 平行于 $\overrightarrow{p_1p_3}$，所以 π 上三点 $p_i\,(x_i, y_i)_{i=1,2,3}$ 共线. 综上，π 上三点 $p_i\,(x_i, y_i)_{i=1,2,3}$ 共线当且仅当 $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

5. 证明:建立仿射坐标系 $\left\{\overrightarrow{A}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right\}$, 由 $\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{PB} = \lambda\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AP}\right)$,
得 $\overrightarrow{AP} = \dfrac{\lambda}{\lambda+1}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AP} = \left(\dfrac{\lambda}{\lambda+1}, 0\right)$;
$\overrightarrow{AR} = \dfrac{1}{1+\upsilon}\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AR} = \left(0, \dfrac{1}{1+\upsilon}\right)$;
$\overrightarrow{AQ} = \dfrac{1}{1+\mu}\overrightarrow{AB} + \dfrac{\mu}{1+\mu}\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AQ} = \left(\dfrac{1}{1+\mu}, \dfrac{\mu}{1+\mu}\right)$;
由 P, Q, R 共线当且仅当 $\begin{vmatrix} \dfrac{1}{1+\mu} & 0 & 1 \\ 0 & \dfrac{1}{1+\upsilon} & 1 \\ \dfrac{1}{1+\mu} & \dfrac{\mu}{1+\mu} & 1 \end{vmatrix} = 0$，得 $\lambda\mu\upsilon = -1$，证毕.
（注：事实上，此即平面几何上的梅涅劳斯定理）

1.4 数量积

1. $\mathbf{ab} + \mathbf{bc} + \mathbf{ca} = \dfrac{1}{2}\left[(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}) - (\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})\right] = -13$

2. $(3\mathbf{a}+2\mathbf{b})(2\mathbf{a}-5\mathbf{b}) = 6|\mathbf{a}|^2 - 0|\mathbf{b}|^2 - 11\mathbf{ab} = 14 - 33\sqrt{3}$.

3. 由题，得

$$(\mathbf{a}+3\mathbf{b})(7\mathbf{a}-5\mathbf{b}) = (\mathbf{a}-4\mathbf{b})(7\mathbf{a}-2\mathbf{b}) = 0$$

解得：$\mathbf{ab} = \dfrac{1}{2}|\mathbf{b}|^2$ 且 $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$，知 $\cos\angle(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \dfrac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \dfrac{1}{2}$, 故 $\angle(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \dfrac{\pi}{3}$

4. (1) 错误：数量的概念不等同于向量概念；
(2) 正确；
(3) 错误：向量相等的必要条件是方向相同；
(4) 错误：左边 $= |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos^2\theta$，右边 $= |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$；
(5) 错误：向量相等的必要条件是方向相同；
(6) 错误：左边 $= |\mathbf{c}|\cdot|\mathbf{a}|\cdot\cos\angle(\mathbf{c},\mathbf{a}) \neq |\mathbf{c}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\cos\angle(\mathbf{c},\mathbf{b}) =$ 右边；

5. 证明：左边 $= (\mathbf{a}+\mathbf{b})^2 + (\mathbf{a}-\mathbf{b})^2 = 2\mathbf{a}^2 + 2\mathbf{b}^2 + 2\mathbf{ab} - 2\mathbf{ab} =$ 右边.
（注：几何含义为平行四边形两斜边的平方和等于四条边长的平方和）

6. (1) 证明：由向量乘法交换律得

$$(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}),$$

故 $\mathbf{a}[(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\cdot\mathbf{b}]=0$, 所以两向量垂直.

（注：$(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\cdot\mathbf{b}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=\mathbf{a}\times\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ 不一定成立.）

(2) 证明：因为 $\mathbf{v_1},\mathbf{v_2}$ 不共线，取该平面任意向量 $\mathbf{c}=\lambda\mathbf{v_1}+\mu\mathbf{v_2}$, 则

$$(\mathbf{a}-\mathbf{b})\,\mathbf{c}=(\mathbf{a}-\mathbf{b})(\lambda\mathbf{v_1}+\mu\mathbf{v_2})=\lambda(\mathbf{a}\mathbf{v_1}-\mathbf{b}\mathbf{v_1})+\mu(\mathbf{a}\mathbf{v_2}-\mathbf{b}\mathbf{v_2})=0$$

故 $(\mathbf{a}-\mathbf{b})\perp\mathbf{c}$, 由 $\mathbf{c}$ 的任意性得 $\mathbf{a}-\mathbf{b}=\mathbf{0}$, 所以 $\mathbf{a}=\mathbf{b}$.

(3) 证明：假设 $\mathbf{r}\neq\mathbf{0}$, 由题意，得

$$\mathbf{r}\mathbf{a}-\mathbf{r}\mathbf{b}=0$$

得 $\mathbf{a}=\mathbf{b}$; 同理可得 $\mathbf{a}=\mathbf{c},\mathbf{b}=\mathbf{c}$, 这与 $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ 不共面矛盾，故 $\mathbf{r}=\mathbf{0}$.

1.5 向量积

1. A.

2. A.

3. $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$
$=(2\mathbf{m}-\mathbf{n})\times(4\mathbf{m}-5\mathbf{n})$
$=8(\mathbf{m}\times\mathbf{m})-10\mathbf{m}\times\mathbf{n}-4\mathbf{n}\times\mathbf{m}+5\mathbf{n}\times\mathbf{n}$
$=-6\mathbf{m}\times\mathbf{n}$
得 $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=6|\mathbf{m}\times\mathbf{n}|=3\sqrt{2}$.

4. 因为 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\left(\begin{vmatrix}3&-1\\-2&3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-1&2\\3&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2&3\\1&-2\end{vmatrix}\right)=(7,-7,-7)$.

(1) 令 $\mathbf{m}=(7,-7,-7)$, 则

$$\mathbf{c}=\frac{\mathbf{m}}{|\mathbf{m}|}=\left(\frac{7}{7\sqrt{3}},-\frac{7}{7\sqrt{3}},-\frac{7}{7\sqrt{3}}\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

(2) $\mathbf{c}=\lambda(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=(7\lambda,-7\lambda,-7\lambda)$
$\mathbf{c}\times\mathbf{d}=10$

所以 $\lambda = \dfrac{5}{28}$,

所以 $\mathbf{c} = \left(\dfrac{5}{4}, -\dfrac{5}{4}, -\dfrac{5}{4}\right)$.

5. 易证.

6. $(\mathbf{a}-\mathbf{d}) \times (\mathbf{b}-\mathbf{c})$
$= \mathbf{a} \times (\mathbf{b}-\mathbf{c}) - \mathbf{d} \times (\mathbf{b}-\mathbf{c})$
$= \mathbf{a} \times \mathbf{b} - \mathbf{a} \times \mathbf{c} - \mathbf{d} \times \mathbf{b} + \mathbf{d} \times \mathbf{c}$
$= \mathbf{c} \times \mathbf{d} - \mathbf{b} \times \mathbf{d} - \mathbf{d} \times \mathbf{b} + \mathbf{d} \times \mathbf{c}$
$= \mathbf{0}$
所以 $\mathbf{a}-\mathbf{d}$ 与 $\mathbf{b}-\mathbf{c}$ 共线.

1.6 混合积与双重向量积

1. D.
解：

(A.) $|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos <\mathbf{a},\mathbf{b}>= |\mathbf{a}|\,|\mathbf{c}|\cos <\mathbf{a},\mathbf{c}> (|\mathbf{a}| \neq 0)$.

(B.) 取 $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ 或 $\mathbf{b} = \mathbf{0}$.

(C.) 取 $\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

(D.) 证明：原式左右两边同乘以向量 $\mathbf{c}$, 得

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{c} \times \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = 0$$

由定理 1.6 与命题 1.6.1 得

$$(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = 0$$

由推论 1.6.1，命题得证.

2. C.
解:$\mathbf{a}\left[(\mathbf{c}\cdot\mathbf{b})\,\mathbf{b} - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\,\mathbf{c}\right] = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\,(\mathbf{c}\cdot\mathbf{d}) - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}) = 0$,又 $\mathbf{a},\mathbf{bc} \neq \mathbf{0}$，得证.
（注：定理 1.6.2 不一定成立，一位内向量叉乘只有在 $\mathbb{R}^3$ 情况下才成立.）

3. 解：与例 1.6.1 同理，$V = \dfrac{59}{6}$.

4. (1) 同理，A, B, C, D 四点共面.

   (2) $V = \dfrac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)\right| = \dfrac{58}{3}$,

   $$h_D = \frac{6V}{\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|} = \frac{6V}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{29}{7}$$

5. $\dfrac{8}{25}, \dfrac{5}{2}$

6. (1) 证明：综合运用命题 1.6.1 可证得.

   (2) 证明：左边 $= (\mathbf{a}, \mathbf{b}+\mathbf{c}, \mathbf{c}+\mathbf{a}) + (\mathbf{b}, \mathbf{b}+\mathbf{c}, \mathbf{c}+\mathbf{a})$

   $= (\mathbf{a}, \mathbf{b}+\mathbf{c}, \mathbf{c}) + (\mathbf{a}, \mathbf{b}+\mathbf{c}, \mathbf{a}) + \cdots$

   $= \cdots$

   $= 2\,(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) =$ 右边.

   (3) 证明：同 (2) 理，展开右边即得.

   （注：类比 $(\mathbf{a}-\mathbf{d})(\mathbf{b}-\mathbf{d})(\mathbf{c}-\mathbf{d}) = \mathbf{abc} - \mathbf{abd} - \mathbf{dbc} - \mathbf{adc} + 0\,(\mathbf{add} + \mathbf{bdd} + \mathbf{cdd} - \mathbf{ddd})$）

   (4) 证明：左边 $= (\mathbf{a}+\mathbf{b})(\mathbf{a}\times\mathbf{c} + \mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{a}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{c}) + \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) + \mathbf{b}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) + \mathbf{b}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{c}) =$ 右边.

   (5) 证明：设 $\mathbf{d} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} + \upsilon\mathbf{c}$,

   则 $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\times\mathbf{d}) = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\,[\mathbf{c}\times(\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} + \upsilon\mathbf{c})]$

   $= (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\,[\mathbf{c}\times(\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b})]$

   $= \mathbf{a}\times\mathbf{b}\,(\lambda\mathbf{c}\times\mathbf{a} + \mu\mathbf{c}\times\mathbf{b})$

   $= \lambda\,(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\,(\mathbf{c}\times\mathbf{a}) + \mu\,(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\,(\mathbf{c}\times\mathbf{b})$ ①

   同理展开其余两式，得

   $(\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}\times\mathbf{d}) = \mu\,(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\,(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) + \upsilon\,(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\,(\mathbf{a}\times\mathbf{c})$ ②

   $(\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}\times\mathbf{d}) = \lambda\,(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\,(\mathbf{b}\times\mathbf{a}) + \upsilon\,(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\,(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$③

   ① + ② + ③，整理得

   左边 $= \lambda\,[(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\,(\mathbf{c}\times\mathbf{a}) + (\mathbf{c}\times\mathbf{a})\,(\mathbf{b}\times\mathbf{a})]$

   $+ \mu\,[(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\,(\mathbf{c}\times\mathbf{b}) + (\mathbf{b}\times\mathbf{c})\,(\mathbf{a}\times\mathbf{b})]$

   $+ \upsilon\,[(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\,(\mathbf{a}\times\mathbf{c}) + (\mathbf{c}\times\mathbf{a})\,(\mathbf{b}\times\mathbf{c})]$

   $= \lambda\cdot 0 + \mu\cdot 0 + \upsilon\cdot 0$

   $= 0 =$ 右边.

   等式得证.

7. 证明：显然 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \perp \mathbf{n}$, 则 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 共面. 否则：
   若 $\mathbf{n} = \mathbf{0}$，则 $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{c} = \mathbf{0}$, 仍成立；
   若 $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$，$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 中至少有两个向量共线，则仍成立；
   若 $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$，$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 胡不共线，则 $\mathbf{n}$ 为 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 所确定的平面的法向量，$\mathbf{n} \cdot \mathbf{c} \neq 0$，这与题设相悖.
   故成立.

2 平面与直线

2.1 平面方程

1. (1) 取 $\mathbb{Z}$ 轴上两点和题设点 $(0,0,0), (0,0,1), (3,1,-2)$.
   所求方程为 $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = x - 3y = 0$

   (2) 由平面点法式方程,不妨设所求平面方程为 $3x - 2y + 5 = D\,(D \neq 0)$.
   代入点 $(-1,-5,4)$ 得 $3x - 2y - 7 = 0$.

   (3) 不妨设所求平面法向量为 $\mathbf{n} = (a,b,c)$.
   则 $\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{M_1M_2} = \mathbf{n} \cdot (1,-8,3) = 0$.
   即 $\begin{cases} a + 6b + c = 0 \\ a - 8b + 3c = 0 \end{cases}$，取一组解 $\mathbf{n} = (13,-1,-7)$.
   同 (2) 理可得 $13x - y - 7z = 37$.

2. $\overrightarrow{AB} = (-4,5,-1), \overrightarrow{CD} = (-1,0,2)$.
   由题得平面的法向量为 $\mathbf{n_1} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD} = (11,7,5)$.
   得此平面方程为 $11(x-4) + 7(y-0) + 5(z-6) = 0$
   即 $11x + 7y + 5z = 74$.
   $\overrightarrow{AB} = (-4,5,-1), \overrightarrow{BC} = (-4,-6,2)$.
   由题得平面 ABC 的法向量为 $\mathbf{n_2} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} = (4,3,1)$.
   所以平面的法向量 $\mathbf{n_3} = \mathbf{n_2} \times \overrightarrow{AB} = (-8,0,32)$. 得此平面方程为 $-8(x-5) + 32(z-3) = 0$.
   即 $x - 4z + 7 = 0$.

3. $x + 2y - z + 4 = 0 \Leftrightarrow x + 2y - z = -4 \Leftrightarrow \dfrac{x}{-4} + \dfrac{y}{-2} + \dfrac{z}{4} = 1$
   由此知平面过坐标轴上 $A(-4,0,0), B(0,-2,0), C(0,0,4)$

知道 $\overrightarrow{AB} = (4, -2, 0)$, $\overrightarrow{AC} = (4, 0, 4)$.

得参数方程 $\begin{cases} x = -4 + 2u + v \\ y = -u \\ z = v \end{cases}$

2.2 直线方程

1. (1) 取直线的法向量 $\mathbf{v}$ 使与已知平面的法向量 $\mathbf{n_1}$ 平行，令

$$\mathbf{v} = \lambda \mathbf{n_1} = (6, -3, -5)$$

由 $M(2, -3, -5)$ 得点向式直线标准方程 $\dfrac{x-2}{6} = \dfrac{y+3}{-3} = \dfrac{z+5}{-5}$.

(2) 取所求直线的方向向量 $\mathbf{v} = (x_0, y_0, z_0)$ 与已知两直线的方向向量 $\mathbf{n_1} = (1, 1, -1)$, $\mathbf{n_2} = (1, -1, 0)$ 垂直.

即 $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n_1} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n_2} = 0$, 取 $\mathbf{v}$ 的一组解为 $(1, 1, 2)$，又 $M(1, 0, -2)$

得点向式直线标准方程为 $x - 1 = y = \dfrac{z+2}{2}$.

(3) 解：设所求直线的方向向量为 $\mathbf{v} = (x_0, y_0, z_0)$, 由题得

$$\mathbf{v} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

又 $M(1, -5, 3)$ 得直线点向式标准方程为 $x - 1 = \dfrac{y+5}{\sqrt{2}} = \dfrac{y-3}{-1}$.

(4) 解：设所求直线的方向向量为 $\mathbf{v_0} = (x_0, y_0, z_0)$,

已知平面的法向量为 $\mathbf{n} = (3, -1, 2)$

已知直线的方面向量为 $\mathbf{v} = (4, -2, 1)$

已知直线上的一个点 $Q(1, 3, 0)$, 由题得 $\mathbf{v_0} \cdot \mathbf{n} = 0$, 且 $\left(\overrightarrow{PQ}, \mathbf{v_0}, \mathbf{v}\right) = 0$（注：本书第 41 页命题 2.3.2(2)）

即 $\begin{cases} 3x_0 - y_0 + 2z_0 = 0 \\ \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \end{cases}$

得直线点向式标准方程为 $\dfrac{x-1}{-4} = \dfrac{y}{50} = \dfrac{z+2}{31}$

2. (1) 解：令 $y = 0$ 得一点 $M(-5, 0, -9) \in l$,

已知平面的法向量为 $\mathbf{n_1} = (2, 1, -1)$, $\mathbf{n_2} = (3, -1, -2)$

取所求直线的方向向量 $\mathbf{v} = \mathbf{n_1} \times \mathbf{n_2} = (-3, 1, -5)$，
则该直线点向式方程为 $\dfrac{x+5}{-3} = y = \dfrac{z+9}{-5}$.

(2) 解：从一般方程中消去 z，得 $4y = 3x$，消去 x，得 $4y = -3z + 18$，于是得

$$\frac{x}{4} = \frac{y}{3} = \frac{z-6}{-4}.$$

3. (1) 解：设以 $\begin{cases} 2x - 7y + 4z - 3 = 0 \\ 3x - 5y + 4z + 11 = 0 \end{cases}$ 为轴的平面束是

$$\lambda(2x - 7y + 4z - 3) + \mu(3x - 5y + 4z + 11) = 0$$

代入点 $(-2, 1, 3)$ 得 $\mu/\lambda = -1/6$,
故所求平面方程为 $\dfrac{3}{2}x - \dfrac{37}{6}y + \dfrac{10}{3}z - \dfrac{19}{6} = 0.$

(2) 解：同理，设平面束方程为

$$\lambda(2x - 7y + 4z - 3) + \mu(3x - 5y + 4z + 11) = 0$$

取其法向量 $\mathbf{n_1} = (2\lambda + 3\mu, -7\lambda - 5\mu, 4\lambda + 4\mu)$ 与已知平面法向量 $\mathbf{n_2} = (1, 1, 1)$ 垂直，即 $\mathbf{n_1} \cdot \mathbf{n_2} = 0$, 解得 $\mu/\lambda = -1/2$,
故所求平面方程为 $\dfrac{3}{2}x - \dfrac{3}{2}z + 2 = 0.$

(3) (a) 解法一；任取过直线 $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{-3} = \dfrac{z-2}{x}$ 的平面方程

$$\pi_1 : 2\frac{x-1}{2} - \frac{y+2}{-3} - \frac{z-2}{2} = 0$$

$$\pi_2 : \frac{x-2}{2} + \frac{y+2}{-3} - 2\frac{z-2}{2} = 0$$

化简得

$$\pi_1 : 6x + 2y - 3z + 4 = 0$$

$$\pi_2 : 3x - 2y - 6z + 2 = 0$$

同理，得所求平面方程为 $x - 8y - 13z + 9 = 0.$

(b) 解法二：已知平面的法向量 $\mathbf{n_1} = (3, 2, 1)$
取已知直线上一点 $(1, -2, -2)$ 及其方向向量 $\mathbf{v} = (2, -3, 2)$
则所求平面的法向量 $\mathbf{n_2} = \mathbf{n_1} \times \mathbf{v} = (1, -12, 13)$
又所求平面过点 $(1, -2, 2)$ 得所求平面方程为

$$x - 8y - 13z + 9 = 0.$$

(4) 解：设该平面为 $Ax+By+Cz+D=0$,
因为该平面与直线 $\frac{x-2}{-1}=\frac{y+4}{3}=\frac{z+1}{1}$ 垂直，有 $\mathbf{n}$ 平行 $\mathbf{v}$.
所以 $\mathbf{n}=(-1,3,1)$，则有 $-x+3y+z+D=0$.
又因为该平面过点 $(4,-1,2)$，所以得 $D=5$,
综上，该平面方程为 $-x+3y+z+5=0$.

(5) 解：易得直线 $\begin{cases} 2x-y-z-3=0 \\ x+2y-z-5=0 \end{cases}$ 的方向向量

$$\mathbf{v_0}=(2,-1,-1)\times(1,2,-1)=(3,1,5)$$

记直线 $\frac{x-2}{1}=\frac{y+3}{-5}=\frac{z+1}{-1}$ 的方向向量为 $\mathbf{v}$,得 $\mathbf{v}=(1,-5,-1)$，
设所求平面的法向量为 $\mathbf{n}$，则 $\mathbf{n}\cdot\mathbf{v_0}=\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}=0$.
取 $\mathbf{n}$ 的一组非零解 $(3,1,-2)$
代入直线 $\frac{x-2}{1}=\frac{y+3}{-5}=\frac{z+1}{-1}$ 上一点 $(2,-3,-1)$ 得
所求平面方程为

$$3x+y-2z-5=0$$

.

2.3 线、面的位置关系

1. (1) 解：取 $M_1(-1,1,2)\in\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-2}{1}$,
取 $M_2(0,6,-5)\in\frac{x}{-1}=\frac{y-6}{2}=\frac{z+5}{3}$,
由两已知直线的方向向量分别为 $\mathbf{v_1}=(3,3,1)\,,\mathbf{v_2}=(-1,2,3)$，
根据命题 2.3.2，因为 $\left(\overrightarrow{M_1M_2},\mathbf{v_1},\mathbf{v_2}\right)=106\neq0$ 知两平面异面.

(2) 解：
$\begin{cases} x+y+z=0 \\ y+z+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x-1}{0}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+2}{1}$,
$\begin{cases} x+z+1=0 \\ x+y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x+1}{-1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$,
根据命题 2.3.2，计算三向量的混合积为 3，知两平面异面.

2. (1) 解：$\mathbb{X}$ 轴所在直线方程为 $y=z=0$，则联立方程

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \\ 0\cdot x+0\cdot y+z+0=0 \\ 0\cdot x+y+0\cdot z+0=0 \end{cases}$$

由例 2.3.2 得所求条件为

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0$$

即 $A_1D_2=A_2D_1$

(2) 设所给直线的方向向量 $\mathbf{v}=\mathbf{n_1}\times\mathbf{n_2}=(A_1,B_1,C_1)\times(A_2,B_2,C_2)=(\lambda,0,0)\,,\lambda\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$

得 $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}=0$, 且 $\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}\neq 0$

令直线不与 $\mathbb{X}$ 轴重合，只需令 $(0,0,0)$ 不满足直线方程，即 $D_1=D_2=0$ 无解.

综上,所求条件为 $\begin{cases} \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}=0 \\ \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}\neq 0 \\ D_2\neq 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}=0 \\ \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}\neq 0 \\ D_1\neq 0 \end{cases}$

(3) 同理可得所求条件为 $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}=D_1=D_2=0$

（注:若 $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}=0$ 则 $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$ 不构成直线，两平面平行或重合.）

3. (1) 解：设所给直线方向向量为 $\mathbf{v}=(3,-2,7)$, 所给平面法向量为 $\mathbf{n}=(4,-3,7)$,

$\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\neq 0$，且显然 $\mathbf{v}$ 不平行于 $\mathbf{n}$，则直线与平面相交.

(2) 解:由题,得 $\begin{cases} 5x-3y+2z-5=0 \\ 2x-y-z-1=0 \\ 4x-3y+7z-7=0 \end{cases}$,由克拉默法则 $D=\begin{vmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 4 & -3 & 7 \end{vmatrix}=$ 0 知直线在平面上.

(3) 已知直线方向向量为 $\mathbf{v}=(1,-2,9)$，
已知平面法向量为 $\mathbf{n}=(3,-4,7)$
同 (1) 中理可得直线与平面交于一点.

4. 解：联立方程 $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z=0 \\ (A_1+A_2)\,x+(B_1+B_2)\,y+(C_1+C_2)\,z=0 \end{cases}$
由克拉默法则 $D=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_1+A_2 & B_1+B_2 & C_1+C_2 \end{vmatrix}=0$ 是显然的,
则在直线 $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z=0 \end{cases}$ 上的点必在平面

$$(A_1+A_2)\,x+(B_1+B_2)\,y+(C_1+C_2)\,z=0$$

上，知直线在平面上.

5. (1) 解：令直线的方向向量 $\mathbf{v}$ 与所给平面法向量 $\mathbf{n}$ 垂直，得

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}=(4,3,1)\cdot(k,3,-5)=0$$

得 $k=-1$，经检验，直线不在平面内，故 $k=-1$ 满足题意.

(2) 解：令所给直线的方向向量 $\mathbf{v}=(2,-4,3)$ 与所给平面法向量 $\mathbf{n}=(k,m,6)$ 平行，即

$$(2,-4,3)=\lambda\,(k,m,6)$$

解得 $k=4,m=8$.

6. 解：设所给直线为 l_4，其方向向量为 $\mathbf{v}=(8,7,1)$，则 l_4 与 l_3 所确定的平面的法向量 $\mathbf{n_1}=\mathbf{v_1}\times\mathbf{v_2}=(4,-6,10)$ 代入 l_2 上 $(-13,5,0)$ 得 l_4 与 l_2 所确定的平面

$$x-y+z-17=0$$

知所求直线为 $\begin{cases} 2x-3y+5z+41=0 \\ x-y+z-17=0 \end{cases}$.

7. 解：与例 2.3.3 同理，所求直线为 $\begin{cases} 2x+4y-3z-11=0 \\ 13x-9y+2z-50=0 \end{cases}$

8. 解：由题设可知：设未知直线的方向向量为 $\mathbf{v}=(X,Y,Z)$，l' 的方向向量为 $\mathbf{v}'=(1,5,3)$，平面法向量为 $\mathbf{n}=(2,1,-3)$，所以 $\mathbf{v}\cdot\mathbf{v_1}=\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}=0$，即

$$\begin{cases} X+5Y+3Z=0 \\ 2X+Y-3Z=0 \end{cases}$$

解得 $X=-2Y, Z=-Y$，所以 $X:Y:Z=-2:1:-1$，
又因为未知直线过 l' 与平面 II 的交点 P，所以

$$\begin{cases} 2X+Y-3Z+1=0 \\ \dfrac{x}{1}=\dfrac{y+5}{5}=\dfrac{z+2}{3}=0 \end{cases}$$

所以 $P(1,0,1)$，所以直线方程为 $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$.

9. 解：设所求直线的方向向量为 $\mathbf{v}$，所求平面的法向量为 $\mathbf{n}$，所给直线的方向向量为 $\mathbf{v_0}=(1,0,0)$，则 $\mathbf{v}\cdot\mathbf{v_0}=\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}=0$ 得 $\mathbf{v}=\mathbf{v_0}\times\mathbf{n}=(0,-1,1)$ 取所给直线与平面的交点 $(1,1,-1)$ 代入，得所求直线方程为 $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+1}{1}$.

10. 解：化 l_0 方程为标准方程 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z+\frac{1}{2}}{5}$，设 M_1 在 l_0 上的投影点为 $M_0\left(2t,4t,\dfrac{1}{2}+5t\right)$，
则 $\overrightarrow{M_1M_0}\cdot(2,4,5)=0$ 得 $M_0(3,6,8)$. 由中点坐标公式得 $M_2(2,15,6)$，易得所求直线方程为

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y-15}{4}=\frac{z-6}{5}$$

11. 证明：联立方程得

$$\begin{cases} cy+bz-bc=0 \\ x=0 \\ ax-az-ac=0 \\ y=0 \end{cases}$$

其判别式

$$\begin{vmatrix} 0 & c & b & -bc \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & -a & -ac \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2abc \neq 0$$

由例 2.3.2，l_1, l_2 不交于一点，则 l_1, l_2 异面或平行，而毫无疑问，l_1, l_2 不平行，故得证.

2.4 点、线、面之间的距离

1. $(1) d = \frac{20}{11}\sqrt{2}$，$(2) d = \sqrt{6}$.

2. 证明：由点到平面距离公式 $p = 1 - \frac{11}{\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2 + \left(\frac{1}{c}\right)^2}}$ 整理即得所求证式.

3. 解：显然平面 $x+1=0$ 不满足条件，则设过直线 $\frac{x+1}{0} = \frac{y+\frac{2}{3}}{2} = \frac{z}{-3}$ 的平面为 $(x+1)+m(9y+2z+2)=0$，即 $x+3my+2mz+2m+1=0$. 由点到平面距离公式得

$$3^2 = \frac{(4+3m+4m+2m+1)^2}{1^2+(3m)^2+(2m)^2}$$

解得 $m = d = -\frac{1}{6}$ 或 $d = \frac{8}{3}$ 所以所求平面方程为 $3x+24y+16z+19=0$ 或 $3x-y-z+2=0$.

4. $(1) d = 0, (2) d = \frac{15}{41}\sqrt{41}, (3) d = 0$.

5. 解：

   (1) 证明：由定理 2.4.2 得公垂线段的长 $d = \frac{3}{112}\sqrt{122}$，所以两直线异面，同时其公垂线方程为

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 1 & -3 & 3 \\ 3 & 8 & 7 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 8 & 7 \end{vmatrix} = 0 \end{cases}$$

即 $\begin{cases} -45x+2y+17z+45=0 \\ 23x-20y+13z=0 \end{cases}$

(2) 同理可得其公垂线段的长 $d=\sqrt{54}$，所以两直线异面，同时其公垂线方程为

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} x+2 & y & z-2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 5 & -2 & 5 \end{vmatrix}=0 \\ \begin{vmatrix} x-3 & y+2 & z-7 \\ 1 & 5 & 1 \\ 5 & -2 & 5 \end{vmatrix}=0 \end{cases}$$

即 $\begin{cases} x+5y+z=0 \\ x-y+4=0 \end{cases}$

(3) 同理可得其公垂线段的长 $d=\dfrac{1}{6}$，所以两直线异面，同时其公垂线方程为

$$\begin{cases} x+y+4z-1=0 \\ x-2y-2z+3=0 \end{cases}$$

6. 解：

(1) 整理方程得 $m(x+y)+n(-z-1)=0$

m,n 作为变量，若 x,y 满足 $\begin{cases} x+y=0 \\ -z-1=0 \end{cases}$，则原方程恒成立.

知平面 II 恒过定直线 $l_1:\begin{cases} x+y=0 \\ -z-1=0 \end{cases}$，点 $M_1(0,0,-1)$ 显然在直线 l_1 上.

(2) $l_1: x=-y=\dfrac{z+1}{0}$，l_1,l_2 的判别式 $\Delta=\begin{vmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=-1\neq 0$ 知 l_1,l_2 异面.

(3) 由定理 2.4.2 得 l_1, l_2 间的距离 $d = 2$，其公垂线方程为

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} x & y & z+1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \end{cases}$$

即 $\begin{cases} x+y=0 \\ x-y=0 \end{cases}$

7. 解：过点 M_1 且与平面 II 平行的平面 III 为 $3x-2y+z-6=0$，
过点 M_2 且与平面 II 平行的平面 IV 为 $3x-2y+z-13=0$，
由 $-6<-4, -13<-4$，得 M_1, M_2 在平面 II 的同侧
（注：将方程 $f(x,y,z)=0$ 的图像沿 $\mathbb{Z}$ 轴正方向平移 a 单位长度（若 $a<0$，则沿反方向平移 $|a|$ 单位长），则得到的图像方程为 $f(x,y,z-a)=0$，故若平面在平面 II 的 $\mathbb{Z}$ 轴方向上方，则其标准方程常数项比 II 小，反之同理）

8. (1) 解得下列平面：
过 M 平行 $\pi_1: 3x-y+2z-9=0$
过 M 平行 $\pi_2: x-2y-z-3=0$
过 N 平行 $\pi_1: 3x-y+2z+5=0$
过 N 平行 $\pi_2: x-2y-z=0$
则由第 7 题注，得 M 在 π_1 上，在 π_2 下；N 在 π_1 下，在 π_2 下，知 N, M 两点在相邻的二面角内.

(2) 同理可得，N, M 两点在对顶的二面角内.

9. 证明：假设有两条公垂线，则它们都与异面直线相交，所以公垂线确定一个平面 A，所以四个交点共面，又因为每条异面直线都有四个点在平面 A 上，所以异面直线都在平面 A 上，所以两直线共面，与题设矛盾，假设不成立. 故原命题成立.

2.5 线、面间的夹角

略.

2.6 平面束

1. 证明：l 的方程为 $\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z}{3}$，即

$$\begin{cases} \dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{z}{3} \\ \dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y-1}{4} \end{cases}$$

代入平面方程中则易知恒满足平面方程，知 l 在平面 II 上.

2. 解：

(1) 设所求平面为 $\mu(4x-y+3z-1)+\lambda(x+5y-z+2)=0$，即 $(4\mu+\lambda)x+(-\mu+5\lambda)y+(3\mu-\lambda)z+(-\mu+2\lambda)=0$
令 $(4\mu+\lambda,-\mu+5\lambda,3\mu-\lambda,)\cdot(0,1,0)=0$，得 $5\lambda=\mu$，得所求方程为 $21x+14y-3=0$

(2) 同理，令 $(4\mu+\lambda,-\mu+5\lambda,3\mu-\lambda)\cdot(2,-1,5)=0$
得平面方程为 $7x+14y+5=0$.

3. 解：

(1) 设所求平面为 $\lambda\left(\dfrac{x+1}{2}-\dfrac{y}{-1}\right)+\lambda\left(\dfrac{y}{-1}-\dfrac{z-2}{3}\right)=0$
则 $\mu=1,\lambda=-1$ 得所求平面 $3x+12y+2z-1=0$.

(2) 设所求平面为 $\mu(-5x-y+7)+\lambda(-x-z+1)=0$
令其法向量 $\mathbf{n}$ 满足 $\mathbf{n}\cdot[(2,-1,-1)\times(1,2,-1)]$，得所求平面方程为

$$-3x-y+2z+5=0.$$

(3) 同理，设所求平面为 $\mu(-3x-2y-1)+\lambda(x-z+1)=0$
令其法向量 $\mathbf{n}$ 满足 $\mathbf{n}\cdot(3,2,-1)$，得所求平面 $-x+8y+13z-9=0$.

4. 解：设所求平面为 $x-2y+3z+c=0\,(c\neq-4)$.

(1) 代入 $(0,-3,0)$ 得 $x-2y+3z-6=0$

(2) $d_{O\to\pi}=\dfrac{|c|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+3^2}}=1$，得

$$x-2y+3z\pm\sqrt{14}=0.$$

5. 解：设所求平面方程为 $x+3y+2z=D$
   其在 $\mathbb{X}$ 轴 $\mathbb{Y}$ 轴 $\mathbb{Z}$ 轴上的截距分别为 $D,\dfrac{D}{3},\dfrac{D}{2}$.
   $V=|D|\cdot\left|\dfrac{D}{3}\right|\cdot\left|\dfrac{D}{2}\right|\cdot\dfrac{1}{3}=6$ 解得 $D=\pm3\sqrt[3]{4}$，则所求平面为
   $$x+3y+2z\pm3\sqrt[3]{4}=0$$

6. 解：令 x 项系数与 y 项系数相等，即 $1+\lambda=3-\lambda$，得平面 $2x+2y-2z+9=0$.

7. 解：设所求平面为 $\mu(x+1)+\lambda(-3x-2z-6)=0$
   令 $d_{P\to\pi}=3$，即 $(5\mu+13\lambda)^2=3^2\left[(\mu)^2+(3\lambda)^2+(2\lambda)^2\right]$，解得 $\mu=\lambda=\dfrac{-65\pm18\sqrt{377}}{16}$
   未完待续...

8. 解：设平面 I: $\mu(2x-4y+z)+\lambda(3x-y-9)=0$.
   令 I⊥II 解得 I: $x+3y-z-9=0$
   知所求射影直线方程为 $\begin{cases}x+3y-z-9=0\\4x-y+z-1=0\end{cases}$

9. 证明：由本书第 41 页定理 2.3.2 知要证命题成立，只需证 $l_1//l_2$ 时成立.
   若 $l_1//l_2$ 此时不妨设 $x=\dfrac{a}{d},y=\dfrac{b}{d},z=\dfrac{c}{d}$
   此时已知方程转化为 $A_ia+B_ib+C_ic+D_id=0$
   当 $d=0$ 时，$l_1//l_2$，此时转化为与定理 2.3.2 相同得情形，故原命题成立.

3 常见曲面

3.1 曲面与空间曲线

1. 解：整理得 $(x+1)^2+y^2+(z-2)^2=3^2$，知圆心坐标 $(-1,0,2)$ 半径 $r=3$.

2. 解：

   (1) 方程 $r=3$.

(2) $\begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{3} \\ \theta=\arccos\dfrac{y}{r}=\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ \varphi=\arccos\dfrac{y}{x}=\dfrac{\pi}{4} \end{cases}$，知球面坐标为 $(r,\varphi,\theta)=\left(\sqrt{2},\dfrac{\pi}{4},\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$

$\begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2} \\ \varphi=\arccos\dfrac{y}{x}=\dfrac{\pi}{4} \\ z=z=1 \end{cases}$，知球面坐标为 $(r,\varphi,z)=\left(\sqrt{2},\dfrac{\pi}{4},1\right)$

3. 解：

$\begin{cases} x=a\cos\varphi \\ y=a\sin\varphi \\ z=z_0 \\ \varphi=\omega t \\ z_0=vt \end{cases}$ 得参数方程 $\begin{cases} x=a\cos\omega t \\ y=a\sin\omega t \\ z=vt \end{cases}$

4. 解：椭圆曲线. 证明略.

5. 解：

(1) 原点至平面 $x+y+z-3=0$ 的距离 $d=3$，则所求圆的半径 $r=\sqrt{4-d^2}=1$. 易得过原点且与平面 $x+y+z-3=0$ 垂直的直线为 $x=y=z$，联立平面方程得圆心坐标 $(1,1,1)$

(2) 对原方程组 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=5 \\ x^2+y^2+z^2+x+2y+3z-7=0 \end{cases}$ 整理得 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=5 \\ x+2y+3z-2=0 \end{cases}$

同理可得半径 $r=\dfrac{4}{7}\sqrt{14}$，圆心坐标 $\left(\dfrac{1}{7},\dfrac{2}{7},\dfrac{3}{7}\right)$.

6. 证明：令 $t=0$，得坐标 $(0,0,0)$，令 $t=1$，得坐标 $\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)$，令 $t=-1$，得坐标 $\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3},-\dfrac{1}{3}\right)$，设由此三点决定的球面方程为 π，其球心为 (x_0,y_0,z_0) 令 $\left(\dfrac{1}{3}-x_0\right)^2+\left(\dfrac{1}{3}-y_0\right)^2+\left(\dfrac{1}{3}-z_0\right)^2=\left(-\dfrac{1}{3}-x_0\right)^2+\left(-\dfrac{1}{3}-y_0\right)^2+\left(\dfrac{1}{3}-z_0\right)^2=x_0^2+y_0^2+z_0^2$，

解得 $(x_0,y_0,z_0)=\left(0,\dfrac{1}{2},0\right)$，半径 $r=\dfrac{1}{2}$.

而 $\left(\dfrac{t}{1+t^2+t^4}\right)^2+\left(\dfrac{t^2}{1+t^2+t^4}-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{t^3}{1+t^2+t^4}\right)^2=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$

则曲线在一球面上，且球面方程为 $x^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2+z^2=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$

7. 证明：由题，$\left(\sqrt{x^2+y^2}-a\right)^2+z^2=b^2$，则由本书第 75 页表 3.2 得面 $\left(\sqrt{x^2+y^2}-a\right)^2+z^2=b^2$ 可由 $\begin{cases}(y-a)^2+z^2=b^2\\ x=0\end{cases}$ 绕 $\mathbb{Z}$ 轴旋转得到. 故其为一个环面，其环面方程为 $(y-a)^2+z^2=b^2$.

8. 解：$\begin{cases}x=t\\ y=1-t\\ z=\sqrt{\dfrac{9}{2}-t^2-(1-t)^2}\end{cases}$

9. 解：C 到平面 $2x-y-3z+11=0$ 的距离 $d=\dfrac{16}{\sqrt{14}}$，

故所求方程为 $(x-3)^2+(y+5)^2+(z-2)^2=\dfrac{128}{\sqrt{7}}$

3.2 柱面与投影曲线

1. (1) 椭圆柱面，图形略;(2) 双曲柱面，图形略;(3) 抛物柱面，图形略;(4) 抛物柱面，图形略;(5) 平面，图形略;(6) 两个互相垂直的平面，图形略;(7) 两个互相垂直的平面，图形略;(8) 三个互相垂直的平面，图形略;

2. 解：

(1)$\begin{cases}z^2+4y+4z=0\\ x^2+z^2-4z=0\\ x^2+4y=0\end{cases}$ (2)$\begin{cases}x^2-x+y^2-1=0\\ z-x-1=0\\ z^2-3z+y^2+1=0\end{cases}$ (3)$\begin{cases}x^2-2x-2z^2+6z-3=0\\ y-z+1=0\\ x^2-2x+y^2+2y+1=0\end{cases}$

(4)$\begin{cases}x-z-3=0\\ 2y+7z-2=0\\ 7x+2y-18=0\end{cases}$ (5)$\begin{cases}z^2+x-1=0\\ (1-z^2)^2+z^2+y^2-1=0\\ x^2+y^2-x=0\end{cases}$

3. 解：$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\ x^2+y^2=2z\end{cases}$ 消去 x^2+y^2 得 $z^2+2z=1$，解得 $z=-1\pm\sqrt{2}$

代入原方程中，得 $x^2+y^2=-2\pm2\sqrt{2}$，由于 $x^2+y^2\geq0$，故 $x^2+y^2=-2-2\sqrt{2}$ 舍去.

知曲线方程为 $\begin{cases} x^2+y^2=2\left(\sqrt{2}-1\right) \\ z=\sqrt{2}-1 \end{cases}$，其形状为一个半径 $r=\sqrt{2\left(\sqrt{2}-1\right)}$ 的圆.

4. 解：整理方程组得 $\begin{cases} (z-2)^2=4\left(y+1\right) \\ x^2=-4y \end{cases}$ 知其图形为一个在 $\mathbb{X}O\mathbb{Y}$ 平面有相同形状的投影曲线的曲线，其两个投影曲线都为抛物线形.

5. 解：

(1) 设 $M_0\left(x_0,y_0,z_0\right)$ 为曲线 Γ 上的点，则
柱面上的点有 $x=x_0-t-1,y=y_0,z=z_0$，且

$$\begin{cases} \left(x_0-1\right)^2+\left(y_0+3\right)^2+\left(z_0-2\right)^2+=25 \\ x_0+y_0-z_0+2=0 \end{cases}$$

消去 x_0,y_0,z_0 得

$$\begin{cases} \left(x+t\right)^2+\left(y+3\right)^2+\left(z-2\right)^2+=25 \\ x+y-z+t+3=0 \end{cases} \quad ①$$

消去参数 t，得

$$\left(z-y-3\right)^2+\left(y+3\right)^2+\left(z-2\right)^2=25$$

(2) 设 $M_0\left(x_0,y_0,z_0\right)$ 为曲线 Γ 上的点，由直线的方向向量为 $(0,1,1)$ 得柱面上的点有 $x=x_0,=y_0+t,z=z_0+t$，且满足①式，消去 x_0,y_0,z_0 得

$$\begin{cases} \left(x-1\right)^2+\left(y-t+3\right)^2+\left(z-t-2\right)^2+=25 \\ x+y-z+2=0 \end{cases}$$

无视参数 t 得

$$x+y-z+2=0$$

.

(3) 设 $M_0\left(x_0,y_0,z_0\right)$ 为曲线 Γ 上的点，则柱面上的点有 $x=x_0-t,y=y_0+t,z=z_0+t$，且

$$x_0^2+y_0^2-z_0+1=02x_0^2+2y_0^2+z_0-4=0$$

消去参数 t，得

$$(x+z-2)^2+(y-z+2)^2-1=0$$

.

(4) 取准线上的三个点 $A(0,0,0), B(2,1,1), C(2,-1,1)$ 取其母线方向 $\mathbf{v}=\lambda\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(-1,0,2), \left(\lambda=\frac{1}{2}\right)$
设 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 在准线上，则对所求柱面上的点有

$$x=x_0-t, y=y_0, z=z_0+2t$$

且

$$x_0=y_0^2+z_0^2=2z_0$$

消去 x_0,y_0,z_0 得

$$x+t=y^2+(z-2t)^2=2(z-2t)$$

消去参数 t，得

$$25y^2+(z+2x)^2-20x-10z=0$$

6. 解：

(1) 点到轴的距离 $d=\frac{\sqrt{41}}{3}$，故圆柱面半径为 $r=\frac{\sqrt{41}}{3}$，由定理 2.3.2，得圆柱面方程

$$2x^2+\frac{5}{4}y^2+\frac{5}{4}z^2+xy-2xz-2yz-2x-\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}z-\frac{39}{4}=0$$

即

$$(2y-2z)^2+(z+2x-1)^2+(2x+y-1)^2=41$$

(2) 任取对称轴上的点 (x,y,z) 到三条母线的距离相等，所以

$$|(x,y,z)\times(1,1,1)|=|(x+1,y,z-1)\times(1,1,1)|=|(x,y+1,z-2)\times(1,1,1)|$$

化简得对称轴方程为 $x=y+2=z-1$，圆柱面上的点到对称轴的距离等于对称轴上的点 $(0,-2,1)$ 到母线 $x=y=z$ 的距离，故

$$|(0,-2,1)\times(1,1,1)|=|(x,y+2,z-1)\times(1,1,1)|$$

即

$$(z-y-3)^2+(x-z+1)^2+(y-x+2)^2=14$$

于是圆周面的方程为

$$x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz-x+5y-4z=0$$

(3) 圆柱面平行于 $\mathbb{Z}$ 轴，其方程明显为

$$(x-1)^2+(y-1)^2=2$$

(4) 圆柱面平行于 $\mathbb{Z}$ 轴，故设所求圆柱面方程为

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

代入 $(0,0),(4,2),(6,-3)$ 三个点解得

$$\left(x-\frac{25}{8}\right)^2+\left(y+\frac{5}{4}\right)^2=\frac{34}{3}$$

.

(5) 圆柱面平行于 $\mathbb{Z}$ 轴，同理可得

$$(x+4)^2+(y-b3)^2=25$$

7. 证明：由定理 3.2.2，由柱面方程为

$$(py-nz)^2+(px-mz)^2+(nx-my)^2=r^2\left(m^2+n^2+p^2\right)$$

展开即所得.

3.3 锥面和旋转曲面

1. 解：

(1) 任取锥面上一点 (x,y,z),设母线 OM 与准线相交于 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，则

$$\frac{x_1-0}{x-0}=\frac{y_1-0}{y-0}=\frac{z_1-0}{z-0}$$

，令比值为 t，则

$$x_1=xt,y_1=yt,z_1=zt$$

. 将其代入准线方程并消去参数 t，整理得所求锥面方程为

$$36x^2+9y^2-4z^2=0$$

.

(2) 同理，所求曲面方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

.

(3) 同理，所求曲面方程为

$$F\left(\frac{hx}{z},\frac{hy}{z}\right)=0$$

.

(4) 先讨论当 $x=y=z$ 为圆锥曲面的轴时，取圆锥面上一点 (x,y,z)，设原点为 $O\,(0,0,0)$，轴上一点 $B\,(a,a,a)\,(a\neq 0)$ 令 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OB}=\left|\overrightarrow{OM}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OB}\right|=\cos\alpha$，再令 $\mathbb{Z}$ 轴上一点 $A\,(0,0,1)$ 为圆锥面上一点，则得以下两个方程：

$$\begin{cases}(x,y,z)\cdot(a,a,a)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}a\sqrt{3}\cos\alpha\\(0,0,1)\cdot(a,a,a)=\sqrt{3}a\sqrt{3}\cos\alpha\end{cases}$$

解得所求圆锥面方程为

$$xy+yz+xz=0.$$

同理得其余情况下方程为

$$xy-yz+xz3=0$$

或

$$xy-yz-xz=0$$

或

$$xy+yz-xz$$

.

(5) 同理，所求曲面方程为

$$5x^2+13y^2+25z^2-10xy-30yz+22xz+4x-4y+4z-4=0$$

(6) 同理，所求曲面方程为

?

(7) 其轴方程为 $x=y=z$，且由题得

$$(3,2,1)(1,1,1)=\sqrt{3^2+2^2+1^2}\sqrt{1^2+1^2+1^2}\cdot\cos\alpha$$

知 $\cos^2\alpha=\dfrac{6}{7}$，由本书第 78 页第 7 题讨论，得所求曲面方程为

$$(x+y+z)^2=\frac{6}{7}\left(1^2+1^2+1^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)$$

即

$$11x^2+11y^2+11z^2-14xy-14xz-14yz=0$$

2. 解：

(1) 由命题 3.3.1，其曲面为锥面，且是圆锥面，顶点为 $(0,0,0)$

(2) 观察方程的形态，利用 $x=x'+a$ 线性变换将其配凑成一个齐次方程，为此，令

$$\begin{cases} y+z-x-1=0 \\ z+x-y-1=0 \\ x+y-z-1=0 \end{cases}$$

解得 $x=y=z=1$，则令 $x'=x-1,y'=y-1,z'=z-1$ 代入原方程整理得

$$(y'+z'-x')^3=(z'+x'-y')^2(x'+y'-z')$$

由于这样的变换不改变曲面的形状，因此原方程为锥面方程，其顶点为 $(1,1,1)$

3. 证明：整理方程得

$$x^2+y^2+z^2-2xy-2yz-2xz=0$$

显然其为一个锥面方程且原点是其顶点. 再整理得

$$(x+y+z)^2=\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2\left(1^2+1^2+1^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)$$

由本书第 7 题知，$\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z}=0$ 表示一个半顶角为 $\arccos\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ 的圆锥面.

4. (1)

$$\frac{(y-1)^2}{b^2}+\frac{x^2+z^2}{c^2}=1$$

(2)

$$z-\tan\left(x^2+y^2\right)=0$$

(3)

$$4(x-1)^2+y^2+z^2=1$$

(4) 设 $x=\frac{1}{3}(t-2), y=\frac{1}{2}(t+1), z=t$ 得其旋转曲面方程为

$$\begin{cases} x=\sqrt{\frac{(t-2)^2}{9}+\frac{(t+1)^2}{4}}\cos\theta \\ y=\sqrt{\frac{(t-2)^2}{9}+\frac{(t+1)^2}{4}}\sin\theta \\ z=t \end{cases}$$

消去参数得

$$x^2+y^2=\frac{(z-2)^2}{9}+\frac{(z+1)^2}{4}$$

(5) 两直线平行，故得圆柱面方程

$$5x^2+5y^2+2z^2+2xy+4xz+4yz+4x-4y-4z-6=0$$

(6) 取曲面上一点 $M(x',y',z')$，则 $x'^2+y'^2+z'^2=x^2+y^2+z^2$，有

$$\begin{cases} (x-x',y-y',z-z')(1,2,1)=0 \\ x'^2=y \\ x'+z'=0 \end{cases}$$

消去 x',y',z' 得

$$3x^2+3y^2-4xy-2xz-4yz-4x-8y-4z=0$$

5. 解：

(1) 得 $\frac{x^2+y^2}{9-\lambda}+\frac{z^2}{4-\lambda}=1$，其形状为 (1) 椭球面，$\lambda<4$；(2) 单叶双曲面，$4<\lambda<9$；(3) 不存在，$\lambda>9$.

(2) 取 $(x,y,z)=(at,b,t)$,得旋转参数方程为 $(x,y,z)=\left(\sqrt{(at)^2+b^2}\cos\theta,\sqrt{(at)^2+b^2}\sin\theta,t\right)$.
即

$$x^2+y^2-a^2z^2-b^2=0$$

讨论略.

6. 证明：整理得

$$4x^2-9\left(y^2+z^2\right)=36$$

可取母线为 $\begin{cases}4x^2-9y^2=36\\ z=0\end{cases}$，转轴为 $\mathbb{X}$ 轴，故其为旋转曲面.

7. 证明：取 l 上一点 (m,n,p)，圆周面上一点 (x,y,z)，则由于夹角为 α，得

$$\frac{(m,n,p)(x,y,z)}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\cos\alpha$$

整理即得所求为

$$(mx+ny+pz)^2=\cos^2\alpha\left(m^2+n^2+p^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)$$

8. 解：

(1) 柱面. 说明:对于任一满足方程的点 (x_0,y_0,z_0),都显然会有 $\left(x_0+\frac{t}{k},y_0,z_0+t\right)$ 满足方程，消去 t，得直线

$$\begin{cases}kx-z-kx_0+z_0=0\\ y=y_0\end{cases}$$

知所得点解会张成一条方向固定的直线，又由于本书只讨论代数曲面，故所得点解是连续的，可构成连续的图形，知为柱面.

(2) 锥面. 说明:对任一满足方程的点 (x_0,y_0,z_0),都显然会有 (tx_0,ty_0,tz_0) 满足方程，又由于是代数曲面，故为锥面.

(3) 柱面. 同理 (x_0,y_0,z_0) 解张为直线解

$$x-x_0=\frac{y-y_0}{a}=\frac{z-z_0}{b}$$

.

(4) 锥面. 说明略.

3.4 二次曲面

1. 解：设所求平面方程为 $Ax+Bz=0$，联立椭球面方程得

$$\begin{cases} Ax+Bz=0 \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1 \end{cases}$$

代入得 (1)$A=0$ 时，显然不满足要求；(2)$A\neq 0$ 时，有 $\dfrac{x^2}{a^2}+\left(\dfrac{B^2}{A^2b^2}+\dfrac{1}{c^2}\right)z^2=1$，显然 $\dfrac{1}{a^2}=\dfrac{B^2}{A^2b^2}+\dfrac{1}{c^2}$，知所求平面为

$$y=\pm z\sqrt{\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2}\right)b^2}$$

2. 解：由题

$$(x+4)^2+y^2+z^2=4\left[(x-2)^2+y^2+z^2\right]$$

得

$$3x^2+3y^2+3z^2-24x=0$$

3. 解：设所求椭球面为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

代入题设得

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{36}=1$$

4. 解：$\dfrac{x^2}{4}=\dfrac{z^2}{9}$，即 $\dfrac{x}{2}=\pm\dfrac{z}{3}$，为两条交叉直线.

5. 解：$(1-k^2)\,x^2+y^2=1$，形状为 (1) 圆，$k=0$；(2) 椭圆，$-1<k<1$；(3) 两条平行直线，$k=\pm 1$；(4) 双曲线，$|k|>1$；

6. 解：(1) 双曲抛物面，讨论略；(2)$\begin{cases} z=ky \\ x=k \end{cases}$，利用平行截割法，知为直纹面，讨论略；(3) 单叶双曲面，讨论略；(4) 双叶双曲面，讨论略；

7. 解：$A,B,C>\lambda$ 时为椭圆面；
$A>B>\lambda>C$ 时为单叶双曲面；
$A>\lambda>B>C$ 时为双叶双曲面；
$\lambda>A,B,C$ 时不存在图形.

8. 解：$\lambda > 9$，不存在；$\lambda = 9$，不存在；$9 > \lambda > 4$，双叶双曲面；$\lambda = 4$，椭柱面；$4 > \lambda > 1$，单叶双曲面；$\lambda = 1$，椭柱面；$\lambda < 1$，椭球面.

9. 解：设其方程为 $\dfrac{z^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 2x$，代入两点坐标解得
$$\frac{3}{5}z^2 + \frac{18}{5}y^2 = x$$
.

10. 解：显然为 $x = \pm 2$ 或 $y = \pm 3$.

3.5 直纹面

1. (1) 设单叶双曲面方程为
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \left(a, b, c \in \mathbb{R}^+\right)$$
方程改写为
$$\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \left(1 + \frac{y}{b}\right)\left(1 - \frac{y}{b}\right)$$
得 u 族直母线
$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c} = u\left(1 + \dfrac{y}{b}\right) \\ u\left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c}\right) = 1 - \dfrac{y}{b} \end{cases}$$
得 v 族直母线
$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c} = v\left(1 - \dfrac{y}{b}\right) \\ v\left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c}\right) = 1 + \dfrac{y}{b} \end{cases}$$
对同族中任意两条直母线，其显然不平行，则下证其任意不相交，联立方程得
$$\begin{cases} \dfrac{1}{a}x - \dfrac{1}{b}u_1 y - \dfrac{1}{c}z - u_1 = 0 \\ \dfrac{u_1}{a}x + \dfrac{1}{b}y + \dfrac{u_1}{c}z - 1 = 0 \\ \dfrac{1}{a}x - \dfrac{u_2}{b}y - \dfrac{1}{c}z - u_2 = 0 \\ \dfrac{u_2}{a}x + \dfrac{1}{b}y + \dfrac{u_2}{c}z - 1 = 0 \end{cases}$$

其判别式

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{u_1}{b} & -\frac{1}{c} & -u_1 \\ \frac{u_1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{u_1}{c} & -1 \\ \frac{1}{a} & -\frac{u_2}{b} & -\frac{1}{c} & -u_2 \\ \frac{u_2}{a} & \frac{1}{b} & \frac{u_2}{c} & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{a}\frac{1}{b}\frac{1}{c}\begin{vmatrix} 1 & -u_1 & -1 & -u_1 \\ u_1 & 1 & u_1 & -1 \\ 1 & -u_2 & -1 & -u_2 \\ u_2 & 1 & u_2 & -1 \end{vmatrix} = \frac{4}{abc}u_2\left(u_2-u_1\right)$$

因为其中 $u_1 \neq u_2$，故其判别式非零，故两条直线异面，同理 v 族异面，(1) 得证.

(2) 对异族中任意两条直母线，同理，得增广矩阵

$$A=\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{u}{b} & -\frac{1}{c} & -u \\ \frac{u}{a} & \frac{1}{b} & \frac{u}{c} & -1 \\ \frac{1}{a} & \frac{v}{b} & -\frac{1}{c} & -v \\ \frac{v}{a} & -\frac{1}{b} & \frac{v}{c} & -1 \end{pmatrix}$$

得

$$detA=\frac{1}{abc}\begin{vmatrix} 1 & -u & 1 & u \\ u & 1 & -u & 1 \\ 1 & v & 1 & v \\ v & -1 & -v & 1 \end{vmatrix}=0$$

知异族两条直母线共面.

u 族直母线的方向向量 $\mathbf{u}=\left(\frac{1}{a},-\frac{u}{b},-\frac{1}{c}\right)\times\left(\frac{u}{a},\frac{1}{b},\frac{u}{c}\right)=\left(\frac{u^2}{bc}+\frac{1}{bc},-\frac{2u}{ac},\frac{u^2}{ab}+\frac{1}{ab}\right)$

v 族直母线的方向向量 $\mathbf{v}=\left(\frac{1}{a},\frac{v}{b},-\frac{1}{c}\right)\times\left(\frac{v}{a},-\frac{1}{b},\frac{v}{c}\right)=\left(\frac{v^2}{bc}-\frac{1}{bc},-\frac{2v}{ac},-\frac{v^2}{ab}-\frac{1}{ab}\right)$

令 $\mathbf{v}$ 平行 $\mathbf{u}$，则对应数成比例，即

$$\frac{-u^2+1}{v^2-1}=\frac{-u}{-v}=\frac{u^2+1}{-\left(v_2+1\right)}$$

当且仅当 $u=-v$ 时成立，则 u 族的任一直母线，在 v 族直母线中有且仅有一条直母线与之平行.

2. 证明：由本书第 84 页定理 3.5.1 证法 2 得

得 u 族直母线：$\begin{cases} \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2u \\ u\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=z \end{cases}$ v 族直母线：$\begin{cases} \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=2v \\ v\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=z \end{cases}$

与 1 中同理，联立方程其增广矩阵

$$A=\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & 0 & -2u_1 \\ \frac{u_1}{a} & \frac{u_1}{b} & -1 & 0 \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & 0 & -2u_2 \\ \frac{u_2}{a} & -\frac{u_2}{b} & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

知

$$detA=\frac{-2}{ab}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & u_1 \\ u_1 & -u_1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & u_2 \\ u_2 & -u_2 & -1 & 0 \end{vmatrix}=-\frac{4}{ab}\left(u_1-u_2\right)^2,\left(u_1\neq u_2\right)$$

知同族的任意两条直母线异面 (v 族同理)

联立任意两条异族直母线方程，同理其增广矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & 0 & -2u \\ \frac{u}{a} & -\frac{u}{b} & -1 & 0 \\ \frac{1}{a} & -\frac{1}{b} & 0 & -2v \\ \frac{v}{a} & \frac{v}{b} & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

知

$$detA=\frac{2}{ab}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & u \\ u & -u & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & v \\ v & v & 1 & 0 \end{vmatrix}=0$$

知异族的任意两条直母线相交.

u 族直母线的方向向量 $\mathbf{u}=\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b},0\right)\times\left(\frac{u}{a},\frac{u}{b},-1\right)=\left(-\frac{1}{b},\frac{1}{a},-\frac{2u}{ab}\right)$

知其平行于平面 $\frac{1}{a}x+\frac{1}{b}y=0$，对 v 族同理.

知同族的全体直母线平行于同一平面.

3. (1) $\begin{cases} x+z=uy \\ -y=u\left(x-z\right) \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x+z=-vy \\ y=v\left(x-z\right) \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 1=aux \\ y=uz\left(x-z\right) \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 1=vay \\ x=vz\left(x-z\right) \end{cases}$

4. 证明：

(1)

$$(x+z)^2 = (1+y)(1-y)$$

其直母线族方程为

$$\begin{cases} x+z = u(1+y) \\ u(x+z) = 1-y \end{cases}$$

其方向向量 $(1,-u,1)\times(u,1,u) = (u^2-1,0,1+u^2) = (u^2+1)(-1,0,1) \mathbin{//} (1,-1,1)$
方向为定向，知为柱面.

(2)

$$(y+z)^2 = (1+x)(1-x)$$

得

$$\begin{cases} y+z = u(1+x) \\ u(y+z) = 1-x \end{cases}$$

其方向向量 $(u,-1,-1)\times(1,u,u) = (0,-1-u^2,1+u^2) \mathbin{//} (0,-1,1)$
方向为定向，知为柱面.

(3)

$$\begin{cases} x+y = u(x+2y+z) \\ u(y+z) = 1 \end{cases}$$

其方向向量 $(1-u,1-2u,-u)\times(0,u,u) = (-u^2+u,u^2-u,u-u^2) \mathbin{//} (-1,1,-1)$
知为柱面.

(4)

$$\begin{cases} x+y+z = u(x-y-z) \\ u(x+y+z) = x-y-z \end{cases}$$

其方向向量 $(1-u,1+u,1+u)\times(u-1,u+1,u+1) = (0,-2(1+u),2(1+u)) \mathbin{//} (0,-1,1)$
知为柱面.

5. 解：

(1) 其直母线方程为 $\begin{cases} x+2y = 16u \\ u(x-2y) = z \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x+2y = vz \\ v(x-2y) = 16 \end{cases}$
其方向向量 $(1,2,0)\times(u,-2u,-1)\cdot(3,2,-4) = 0$
得直线方程 $\dfrac{x}{-2} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z+1}{-1}$

同理解得另一条直线 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+4}{1}=\dfrac{z+4}{2}$

(2) $\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y-16}{1}=\dfrac{z+32}{-4}$ 或 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+32}{1}=\dfrac{z+128}{8}$

(3) $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z}{0}$ 或 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-6}{-3}=\dfrac{z+4}{4}$

6. 解：

(1) $\dfrac{x-6}{3}=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z-8}{4}$ 或 $\dfrac{x-3}{0}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{2}$

(2) $\theta=\arccos\dfrac{8}{25}\sqrt{5}$

7. 略.

8. 解：Cayley 三次直纹面可整理为

$$\frac{x^2}{1-z}+\frac{y^2}{1+z}=1$$

故其参数方程可写为

$$\begin{cases} x=\sqrt{1-u}\cos\theta \\ y=\sqrt{1+u}\sin\theta \\ z=u \end{cases}$$

9. 证明：u 族直母线族为

$$\begin{cases} x+3z=u\,(1+y) \\ u\,(x-3z)=1-y \\ z=u \end{cases}$$

消去 z，得直线在 $\mathbb{XOY}$ 平面上的投影为

$$2ux+\left(1-u^2\right)y=u^2+1$$

即

$$\frac{2u}{1+u^2}x+\frac{1-u^2}{1+u^2}y=1①$$

又其腰椭圆为

$$x^2+y^2=1②$$

①中

$$\left(\frac{2u}{1+u^2}\right)^2+\left(\frac{1-u^2}{1+u^2}\right)^2=1$$

知①是②的切线，证毕.

4 二次曲面的分类

4.1 坐标变换

1. 解：由题得

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e_1}' \\ \mathbf{e_2}' \\ \mathbf{e_3}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e_1} \\ \mathbf{e_2} \\ \mathbf{e_3} \end{pmatrix}$$

知转轴公式为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

M 在新系下的坐标 $M' = (1, -1, 0)$

2. 解：取三个方向向量

$$\mathbf{n_1} = (1, 1, 1)\,, \mathbf{n_2} = (1, -2, 1)\,, \mathbf{n_3} = (1, 0, -1)$$

易知 $\mathbf{n_1} \perp \mathbf{n_2} \perp \mathbf{n_3}$，且 $(\mathbf{n_1}, \mathbf{n_2}, \mathbf{n_3}) = 4 > 0$，即

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e_1}' \\ \mathbf{e_2}' \\ \mathbf{e_3}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e_1} \\ \mathbf{e_2} \\ \mathbf{e_3} \end{pmatrix}$$

并利用三条直线的公共点 $(0, 0, 0)$ 作为新原点，得坐标变换公式

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{3} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

3. 解：取 $\prod_1 \bigcap \prod_2 \bigcap \prod_3 = \left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)$ 为原点.

$\mathbf{n_1^0} = \pm\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ 为 $\mathbb{X}$ 轴方向；$\mathbf{n_2^0} = \pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 为 $\mathbb{Y}$

轴方向；$\mathbf{n_3^0} = \pm\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ 为 $\mathbb{Z}$ 轴方向；

控制正负号使原点落在新坐标系的第一卦限，有坐标变换公式为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm\mathbf{n_1^0}^{\mathbf{T}} & \pm\mathbf{n_2^0}^{\mathbf{T}} & \pm\mathbf{n_3^0}^{\mathbf{T}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} ①$$

由于过渡矩阵取的是正交矩阵，所以①即为：

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm\mathbf{n_1^0} \\ \pm\mathbf{n_2^0} \\ \pm\mathbf{n_3^0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x + \frac{1}{2} \\ y - 1 \\ z - \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

代入 $(0, 0, 0)$ 得

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mp\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \mp\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \mp\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

知取 $-\mathbf{n_1^0}$ 为 $\mathbb{X}$ 轴正方向单位向量，取 $-\mathbf{n_1^0}$ 为 $\mathbb{X}$ 轴正方向单位向量，取 $+\mathbf{n_2^0}$ 为 $\mathbb{Y}$ 轴正方向单位向量，取 $+\mathbf{n_3^0}$ 为 $\mathbb{Z}$ 轴正方向单位向量. 同时 $(\mathbf{n_1^0}, \mathbf{n_2^0}, \mathbf{n_3^0}) > 0$ 知为右手系得坐标变换公式

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

4. D. 解：$x^2 + y^2 = 2xy$ 即 $(x - y)^2 = 0$.

5. 可以这样:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

另外的高等解法：视 $2x + 3y + 4z + 5 = 0$ 为二次方程

$(2x + 3y + 4z + 5)^2 = 4x^2 + 9y^2 + 16z^2 + 12xy + 16xz + 24yz + 20x + 30y + 40z + 25 = 0$

特征方程为 $\lambda^3-29\lambda^2=0$，取变换公式为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{29}} & \frac{3}{\sqrt{22}} & -\frac{17}{\sqrt{638}} \\ \frac{3}{\sqrt{29}} & \frac{2}{\sqrt{22}} & -\frac{18}{\sqrt{638}} \\ \frac{4}{\sqrt{29}} & \frac{3}{\sqrt{22}} & \frac{5}{\sqrt{638}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

6. 其特征方程为

$$\lambda^3-625\lambda=0$$

，解得

$$\lambda_1=0,\lambda_2=\lambda_3=25$$

且其为无心二次曲面，知为椭圆抛物面.

7. 设 $\mathbf{e_1}'=(\cos\theta\sin\varphi,\sin\theta,\cos\theta\cos\varphi)$，令

$$\mathbf{e_1}'\cdot(1,1,1)=(0,0,1)\,(1,1,1)$$

且

$$\frac{[\mathbf{e_1}'\,(1,1,1)]\cdot[(0,0,1)\times(1,1,1)]}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cdot 1\cdot 1}=\cos\frac{2}{3}\pi$$

得 $\mathbf{e_1}'=\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$，同理得 $\mathbf{e_2}'$ $\mathbf{e_3}'$，知坐标变换公式为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

4.2 二次曲面的渐进方向和中心

1. 由定理 4.2.1 得二次曲面中心分别为 $(-3,1,-2)$ 和 $z=0$.

2. B. 解：令 $F_1(x,y,z)=F_2(x,y,z)=F_3(x,y,z)=0$，得

$$\begin{cases} x=0 \\ -y-1=0 \\ -0.5=0 \end{cases}$$

无解. 知为无心二次曲面.

3. 解：

(1) 由定理 4.2.1，$I_3=\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}=29$ 知为中心二次曲面.

(2) 由定理 4.2.1，$I_3=\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=0$ 知为非中心二次曲面. 其线性方程组为

$$\begin{cases} 3x-2y+z+1=0 \\ -2x+5y-z+6=0 \\ x-y+3z+5=0 \end{cases}$$

对系数矩阵 A^* 的秩 r 和增广矩阵 B 的秩 R，易得 $r\neq R$，为无心二次曲面.

4. 解：

(1) 其中心坐标为 $(0,0,0)$，知其渐进锥面方程为

$$\phi(x-0,y-0,z-0)=y^2-2z^2+2xz=0$$

.

(2) 其中心坐标为 $(0,0,0)$，知其渐进锥面方程为

$$x^2+y^2+z^2-4xy-4yz-4xz=0$$

.

(3) $I_3=0$，知为非中心二次曲面，知（可能）不存在渐进锥面/

5. 解：(1)$x=y=1$；(2)$x=2y=2$；(3) 没有中心；

6. 解：(1)$2x-y+3z+2=0$；(2)$x=\frac{3}{2}y=3(z-2)$

7. 解：对锥面 $ax^2+by^2+cz^2=0$，有

$$XF_1(x_0,y_0,z_0)+YF_2(x_0,y_0,z_0)+ZF_3(x_0,y_0,z_0)=aXx_0+bYy_0+cZz_0=0$$

时，直线于二次曲面相切.

讨论：①$\phi(X,Y,Z)=aX^2+bY^2+cZ^2\neq 0$ 时，直线与二次曲面相切；

②$\phi(X,Y,Z)=0$ 时，因为恒有 $F(x_0,y_0,z_0)=0$，知直线在二次曲面上.

8. 解：将直线代入方程，整理得

$$7t^2-7t+1=0$$

解得

$$t_1=t_2=\frac{7\pm\sqrt{21}}{14}$$

得两个交点为 $\left(\dfrac{-7\pm 2\sqrt{21}}{7},\dfrac{7\pm 2\sqrt{21}}{7},0\right)$

9. 解：将直线代入曲面 $Delta$ 方程，整理得

$$4t-1=0$$

解得

$$t=\frac{1}{4}$$

得交点 $(2,\dfrac{1}{2},0)$

证明：直线 l 的方向向量为 $(4,2,0)$ 代入 $\phi(X,Y,Z)$ 得 $\phi(X,Y,Z)=0$，令

$$XF_1(x_0,y_0,z_0)+YF_2(x_0,y_0,z_0)+ZF_3(x_0,y_0,z_0)=F(x_0,y_0,z_0)=0$$

即

$$\begin{cases} 4(x_0-y_0+2z_0+\dfrac{3}{2})+2(-x_0-z_0)=0① \\ x_0^2+z_0^2-2x_0y_0-y_0z_0+4z_0x_0+3x_0-5z_0=0② \end{cases}$$

①代入②中整理得

$$z_0(y_0-2z_0-8)=0$$

知 $z_0=0$ 或 $y_0-2z_0-8=0$. 与①联立方程解得 $z_0=x_0-13=\dfrac{y_0-8}{2}$ 或 $x_0-2y_0+3=z_0=0$，知存在且存在无数条所求直线，取 $(-3,0,0)$ 点得其中一条直线为

$$\frac{x+3}{4}=\frac{y}{2}=\frac{z}{0}$$

4.3 二次曲面的对称面和主径面

1. 解：令 $\phi_1(X,Y,Z)=\phi_2(X,Y,Z)=\phi_3(X,Y,Z)=0$ 即

$$\begin{cases} X+Y-2Z=0 \\ X+Y-2Z=0 \\ -2X-2Y+4Z=0 \end{cases}$$

解得此曲面有无数奇向为 $X:Y:Z=2\lambda:2\mu:\lambda+\mu$

2. 解:将 $(0,0,0)$ 代入共轭于方向 (X,Y,Z) 的直径面方程,即 $\phi_4(X,Y,Z)=0$ 得 $X=Y$.
知所求径面的共轭方向为

$$X:Y:Z=t:t:m$$

得所求径面方程为

$$(6t-2m)X+(3t-m)y-(3t-m)z=0,(t^2+m^2\neq 0)$$

3. 解：参考例 4.3.3 有对应主方向与主径面三组为
(1)①$X:Y:Z=1:-1:0$ 与 $x-y+1=0$
②$X:Y:Z=0:0:1$ 与 $-5z-2=0$
③$X:Y:Z=1:1:0$ 与 $x+y-1=0$
(2)$X:Y:Z=1:-1:0$ 与 $2x-2y+3=0$(注：特征根为 $\lambda_{1,2,3}=0,0,2$)
(3) 特征方程为 $\lambda^3-36\lambda^2+396\lambda-1296=0$ 解得 $\lambda_1=6,\lambda_2=18,\lambda_3=12$
得①$X:Y:Z=1:1:2$ 与 $x+y+2z=0$
②$X:Y:Z=-1:-1:1$ 与 $-x-y+z=0$
③$X:Y:Z=1:-1:0$ 与 $x-y+1=0$

4. 略.

4.4 二次曲面的化简与分类

1. 解：

(1) $\lambda^3-3\lambda-2=0\Rightarrow\lambda_1=2,\lambda_2=\lambda_3=-1\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&0&\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

化简方程得 $y^2+z^2-2x^2=9$：单叶双曲面.

(2) $\lambda^3-\lambda^2-\lambda+1=0$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$$

化简方程得 $-x^2+y^2+z^2+1=0$：双叶双曲面.

(3) $\lambda^3-2\lambda^2-3\lambda=0$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&0&-\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

化简方程得 $3z^2-y^2-2=0$：双曲柱面.

(4) 略

(5) $\lambda^3-18\lambda^2+99\lambda-162=0\Rightarrow\lambda_1=3,\lambda_2=6,\lambda_3=9\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

易知为

$$\lambda_1x^2+\lambda_2y^2+\lambda_3z^2+I_4/I_3=0$$

即得

$$3x^2+6y^2+9z^2-\frac{8}{27}=0$$

.

(6) $\lambda^3+6\lambda^2-216\lambda=0\Rightarrow\lambda_1=0,\lambda_2=12,\lambda_3=-18$ 下略.

(7) $\lambda^3-7\lambda^2+10\lambda=0\Rightarrow\lambda_1=0,\lambda_2=2,\lambda_3=5$ 下略.

(8) $\lambda^3-12\lambda^2+21\lambda-10=0\Rightarrow\lambda_1=1,\lambda_2=1,\lambda_3=10\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

得 $x^2+y^2+10z^2-1=0$：椭球面.

(9) $\lambda^3-7\lambda^2+14\lambda-6=0\Rightarrow\lambda_1=3,\lambda_2=2+\sqrt{2},\lambda_3=2-\sqrt{2}$ 简化的过渡方程略，因为 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\neq0$，知化简方程必为椭圆球面，知为 $3x^2+(2+\sqrt{2})y^2+(2+\sqrt{2})z^2-1172=0$.

2. 证明：特征方程为 $\lambda^3-\frac{1}{4}\lambda=0\Rightarrow\lambda_1=0,\lambda_2=\frac{1}{2},\lambda_3=-\frac{1}{2}$
又其中心不存在，知为 (II) 类方程 $\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}y^2+d=0$ 的形式，不论 d 或正或负，都有方程为双曲抛物面.

3. 解：取

$$\begin{pmatrix}\mathbf{e_1}'\\\mathbf{e_2}'\\\mathbf{e_3}'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{e_1}\\\mathbf{e_2}\\\mathbf{e_3}\end{pmatrix}$$

和三个主径面交点 $(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 为原点得

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{2}{\sqrt{6}}&0\\\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

即

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y+\frac{1}{2}\\z-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

得 $O'(0,0,\frac{1}{2}), A'(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{2}{\sqrt{6}},-\frac{1}{2}), B'(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{6}},0)$
代入 (I) 类方程，得

$$-2x^2+y^2-z^2+\frac{1}{2}=0$$

其余类型方程不存在.

4.5 二次曲面的切线与切平面

略.