解析几何答案

陈家宝

jackchen2025@outlook.com

2020 年 1 月 14 日

目录

1 向量与坐标

1.1 向量的定义、加法和数乘

1. 证明：$\overrightarrow{PA_1}+\overrightarrow{PA_2}+\cdots+\overrightarrow{PA_n}=\left(\overrightarrow{OA_1}-\overrightarrow{OP_1}\right)+\left(\overrightarrow{OA_2}-\overrightarrow{OP_2}\right)+\cdots+\left(\overrightarrow{OA_n}-\overrightarrow{OP_n}\right)=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}-n\overrightarrow{OP}$, 又 $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}=\mathbf{0}$, 故 $\overrightarrow{PA_1}+\overrightarrow{PA_2}+\cdots+\overrightarrow{PA_n}=-n\overrightarrow{OP}=n\overrightarrow{OP}$.

2. (1) $(\mu-\upsilon)(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})-(\mu+\upsilon)(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\mu\boldsymbol{a}-\mu\boldsymbol{b}-\upsilon\boldsymbol{a}+\upsilon\boldsymbol{b}-\mu\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}-\upsilon\boldsymbol{a}+\upsilon\boldsymbol{b}=-2\upsilon\boldsymbol{a}+2\upsilon\boldsymbol{b}$.

   (2) $\mathbf{D}=\begin{vmatrix}3&4\\2&-3\end{vmatrix}=-17,\mathbf{D_x}=\begin{vmatrix}\mathbf{a}&4\\\mathbf{b}&-3\end{vmatrix}=-3\mathbf{a}-4\mathbf{b},\mathbf{D_y}=\begin{vmatrix}3&\mathbf{a}\\3&\mathbf{b}\end{vmatrix},\mathbf{x}=\dfrac{D_x}{D}=\dfrac{3}{17}\mathbf{a}+\dfrac{4}{17}\mathbf{b},\mathbf{y}=\dfrac{D_y}{D}=-\dfrac{3}{17}\mathbf{b}+\dfrac{2}{17}\mathbf{a}$.

3. (1)$\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$, (2)$\mathbf{a},\mathbf{b}$ 同向，(3)$\mathbf{a},\mathbf{b}$ 反向，且 $|\mathbf{a}|\geq|\mathbf{b}|(4)\mathbf{a},\mathbf{b}$ 反向,(5)$\mathbf{a},\mathbf{b}$ 同向，且 $|\mathbf{a}|\geq|\mathbf{b}|$.

4. 证明：若 $\lambda+\mu<0,-\lambda<0$，由情形 1，得 $[(\lambda+\mu)+(-\lambda)]\,\mathbf{a}=(\lambda+\mu)\mathbf{a}+(-\lambda)\mathbf{a}$，即 $\mu\mathbf{a}=(\lambda+\mu)\mathbf{a}-\lambda\mathbf{a}$，从而 $(\lambda+\mu)\mathbf{a}=\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{a}$ 得证.

1.2 向量的线性相关性

1. (1) 错，当 $\mathbf{a}=\mathbf{0}$ 时；(2) 错，当 $\mathbf{a}=\mathbf{0}$ 时.

2. 设 $\lambda\mathbf{c}+\mu\mathbf{d}=\mathbf{0},\lambda(2\mathbf{a}-\mathbf{b})+\mu(3\mathbf{a}-2\mathbf{b})=\mathbf{0},(2\lambda+3\mu)\mathbf{a}+(-\lambda-2\mu)\mathbf{b}=\mathbf{0}$. 由于 $\mathbf{a},\mathbf{b}$ 不共线，所以 $\begin{cases}2\lambda+3\mu=0,\\\lambda+2\mu=0.\end{cases}$ 又 $\begin{vmatrix}2&3\\1&2\end{vmatrix}=1\neq0$，所以 $\lambda=\mu=0$，即 $\mathbf{c},\mathbf{d}$ 线性无关.

3. 证明: $\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{CD}$，$E$、$F$ 分别为梯形腰 BC、AD 上的中点，连接 EF 交 AC 于点 H，则 H 为 AC 的中点，$\overrightarrow{FH}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{DC},\overrightarrow{HE}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB},\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{FH}+\overrightarrow{HE}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AB}\right)$，因为 $\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{CD}$，而 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 方向一致，所以 $\left|\overrightarrow{FE}\right|=\dfrac{1}{2}\left(\left|\overrightarrow{AB}\right|+\left|\overrightarrow{DC}\right|\right)$.

4. 设 $\mathbf{a}=\lambda\mathbf{b}+\mu\mathbf{c}$，则

   $$\mathbf{a}=-\mathbf{e_1}+3\mathbf{e_2}+2\mathbf{e_3}=2\lambda\mathbf{e_1}-6\lambda\mathbf{e_2}+2\lambda\mathbf{e_3}-3\mu\mathbf{e_1}+12\mu\mathbf{e_2}+11\mu\mathbf{e_3},$$

   即

   $$(-1-4\lambda+3\mu)\,\mathbf{e_1}+(3+6\lambda-12\mu)\,\mathbf{e_2}+(2-2\lambda-11\mu)\,\mathbf{e_3}=\mathbf{0},$$

又 $\mathbf{e_1}$、$\mathbf{e_2}$、$\mathbf{e_3}$ 线性相关，有

$$\begin{cases} -1-4\lambda+3\mu=0 \\ 3+6\lambda-12\mu=0 \\ 2-2\lambda-11\mu=0. \end{cases}$$

解得 $\lambda=-\dfrac{1}{10},\mu=\dfrac{1}{5}$，所以 $\mathbf{a}=\dfrac{1}{10}\mathbf{b}+\dfrac{1}{5}\mathbf{c}$.

5. C.

6. 设 $\overrightarrow{RD}=\lambda\overrightarrow{AD},\overrightarrow{RE}=\mu\overrightarrow{BE}$, 则

$$\overrightarrow{RD}=\lambda\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\mu\overrightarrow{BC},\overrightarrow{RE}=\overrightarrow{RD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}=\mu\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\mu\overrightarrow{CA},$$

故

$$\overrightarrow{RD}=\left(\frac{2}{3}\mu-\frac{1}{3}\right)\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\left(1-\mu\right)\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\lambda\overrightarrow{BC},$$

推得

$$\begin{cases} \dfrac{2}{3}\mu-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{3}\lambda, \\ \dfrac{1}{3}\left(1-\mu\right)=\lambda \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} \lambda=\dfrac{1}{7} \\ \mu=\dfrac{4}{7} \end{cases}$$

所以 $RD=\dfrac{1}{7}AD,RE=\dfrac{4}{7}BE$.

7. 由题得

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{OP}=\left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}\right)+3\overrightarrow{OP},$$

又 $\overrightarrow{CP}=2\overrightarrow{PG}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}$, 所以 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\mathbf{0}$, 则 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$ 得证.

8. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=4\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=4\overrightarrow{OP}+2\overrightarrow{PH}+2\overrightarrow{PG}=4\overrightarrow{OP}$

9. ”$\Rightarrow$” 因为 A、B、C 三点共线，所以存在不全为 0 的实数 k、l 满足 $k\overrightarrow{AB}+l\overrightarrow{AC}=\mathbf{0}$, 即 $k\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)+l\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\right)=\mathbf{0}$, 化简得

$-(k+l)\overrightarrow{OA}+k\overrightarrow{OB}+l\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$, 分别取 $\lambda=-(k+l),\mu=k,\gamma=l$, 得证.

"$\Leftarrow$" 因为 $\lambda=-(\mu+\gamma)$，设 $\lambda\neq 0$，则 μ、γ 不全为 0，$-(\mu+\gamma)\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$，化简得 $\mu\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)+\gamma\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\right)=\mathbf{0}$，即 $\mu\overrightarrow{AB}+\gamma\overrightarrow{AC}=\mathbf{0}$，故 A、B、C 三点共线.

10. "$\Rightarrow$" 因为 P_1,P_2,P_3,P_4 四点共面，所以 $\overrightarrow{P_1P_2},\overrightarrow{P_1P_3},\overrightarrow{P_1P_4}$ 线性相关，存在不全为 0 的 m,n,p 使得 $m\overrightarrow{P_1P_2}+n\overrightarrow{P_1P_3}+p\overrightarrow{P_1P_4}=\mathbf{0}$, 即

$$m\left(\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP_1}\right)+n\left(\overrightarrow{OP_3}-\overrightarrow{OP_1}\right)+p\left(\overrightarrow{OP_4}-\overrightarrow{OP_1}\right)=\mathbf{0},$$

即

$$-(m+n+p)\,\mathbf{n}+m\mathbf{r_2}+n\mathbf{r_3}+p\mathbf{r_4}=\mathbf{0},$$

令 $m+n+p=\lambda_1,\lambda_2=m,\lambda_3=n,\lambda_4=p$, 得证.

"$\Leftarrow$" 设 $\lambda_1\neq 0$，则 $\lambda_1=-(\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4)$，所以 $\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$ 不全为 0,

$$-(\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4)\,\mathbf{r_1}+\lambda_2\mathbf{r_2}+\lambda_3\mathbf{r_3}+\lambda_4\mathbf{r_4}=\mathbf{0},$$

因此 P_1,P_2,P_3,P_4 四点共面.

11. A,B,C 三点不共线 $\Leftrightarrow\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ 不共线 $\Leftrightarrow$ 点 P 在 π 上 $\Leftrightarrow\overrightarrow{AP}=\mu\overrightarrow{AB}+\gamma\overrightarrow{AC}\,(\mu,\gamma\in\mathbb{R})\Leftrightarrow\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=\mu\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)+\gamma\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\right)\Leftrightarrow\overrightarrow{OP}=(1-\mu-\gamma)\,\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC}$, 取 $\gamma=1-\mu-\gamma$，得证.

12. (1)$\overrightarrow{AD}=\dfrac{2}{3}\mathbf{e_1}+\dfrac{1}{3}\mathbf{e_2},\overrightarrow{AE}=\dfrac{1}{3}\mathbf{e_1}+\dfrac{2}{3}\mathbf{e_2}$

(2) 由角平分线的性质得 $\dfrac{\left|\overrightarrow{BT}\right|}{\left|\overrightarrow{TC}\right|}=\dfrac{\mathbf{e_1}}{\mathbf{e_2}}$，又 $\overrightarrow{BT}$ 与 $\overrightarrow{TC}$ 同向，则 $\overrightarrow{BT}=\dfrac{\mathbf{e_1}}{\mathbf{e_2}}\overrightarrow{TC},\overrightarrow{BT}=\overrightarrow{AT}-\overrightarrow{AB},\overrightarrow{TC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AT}$,因此 $\overrightarrow{AT}-\overrightarrow{AB}=\dfrac{\mathbf{e_1}}{\mathbf{e_2}}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AT}\right)$, 得 $\overrightarrow{AT}=\dfrac{|e_1|+|e_2|}{|e_1|+|e_2|}\mathbf{e_1}$.

1.3 标架与坐标

1. (1)$(0,16,-1)$.(2)$(-11,9,-2)$.

2. 分析：以本书第 25 页推论 1.6.1 作判别式，以本书第 7 页定理 1.21(4)

(1) $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})=\begin{vmatrix}5 & 2 & 1\\ -1 & 4 & 2\\ -1 & -1 & 5\end{vmatrix}=121\neq 0$, 故 $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ 不共面，无线性组合.

(2) 同理 $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ 共面，
设 $\mathbf{c}=\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}$,
得 $\begin{cases}-3=6\lambda-9\mu\\ 6=4\lambda+6\mu\\ 3=2\lambda-3\mu\end{cases}$
解得 $\mathbf{c}=\frac{1}{2}\mathbf{a}+\frac{4}{3}\mathbf{b}$.

(3) 同理 $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ 共面，但 $\mathbf{a}$ 平行 $\mathbf{b}$，且 $\mathbf{a}\neq\mathbf{c}$, 故显然无法以线性组合表示 $\mathbf{c}$.

3. 证明：设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 中，A_i 所对得面的重心为 G_i，
欲证 $A_iG_i\,(i=1,2,3,4)$ 相交于一点,在 A_iG_i 上取一点 P_i 使得 $\overrightarrow{A_iG_i}=3\overrightarrow{P_iG_i}$,
从而 $\overrightarrow{OP_i}=\dfrac{\overrightarrow{OA_i}+3\overrightarrow{OG_i}}{4}$,
设 A_i 坐标为 $(x_i,y_i,z_i)\,(i=1,2,3,4)$ 则有

$$G_1\left(\frac{x_2+x_3+x_4}{3},\frac{y_2+y_3+y_4}{3},\frac{z_2+z_3+z_4}{3}\right),$$

$$G_2\left(\frac{x_1+x_3+x_4}{3},\frac{y_1+y_3+y_4}{3},\frac{z_1+z_3+z_4}{3}\right),$$

$$G_3\left(\frac{x_1+x_2+x_4}{3},\frac{y_1+y_2+y_4}{3},\frac{z_1+z_2+z_4}{3}\right),$$

$$G_4\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{y_1+y_2+y_3}{3},\frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right),$$

所以 $P_1\left(\dfrac{x_1+3\dfrac{x_2+x_3+x_4}{3}}{4},\dfrac{y_1+3\dfrac{y_2+y_3+y_4}{3}}{4},\dfrac{z_1+3\dfrac{z_2+z_3+z_4}{3}}{4}\right)$,

即 $P_1\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4},\dfrac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4},\dfrac{z_1+z_2+z_3+z_4}{4}\right)$, 同理可得 P_2,P_3,P_4 坐标，可知 P_1,P_2,P_3,P_4 为同一点，故 A_iG_i 交于同一点 P 且点 P 到任一顶点的距离等于此点到对面重心的三倍.

4. 证明：必要性：因为 π 上三点 $p_i\left(x_i, y_i\right)_{i=1,2,3}$ 共线，故 $\overrightarrow{p_1p_2}$ 平行于 $\overrightarrow{p_1p_3}$，即 $\dfrac{x_2-x_1}{x_3-x_1}=\dfrac{y_2-y_1}{y_3-y_1}$
即 $x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1-x_1y_3-x_3y_2-x_2y_1=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0$. 充分性：由 $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1-x_1y_3-x_3y_2-x_2y_1=0$
整理得
$$\frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}=\frac{y_2-y_1}{y_3-y_1},$$
即 $\overrightarrow{p_1p_2}$ 平行于 $\overrightarrow{p_1p_3}$，所以 π 上三点 $p_i\left(x_i, y_i\right)_{i=1,2,3}$ 共线. 综上，π 上三点 $p_i\left(x_i, y_i\right)_{i=1,2,3}$ 共线当且仅当 $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0$.

5. 证明:建立仿射坐标系 $\left\{\overrightarrow{A}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right\}$, 由 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB}=\lambda\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AP}\right)$,
得 $\overrightarrow{AP}=\dfrac{\lambda}{\lambda+1}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AP}=\left(\dfrac{\lambda}{\lambda+1}, 0\right)$;
$\overrightarrow{AR}=\dfrac{1}{1+\upsilon}\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AR}=\left(0, \dfrac{1}{1+\upsilon}\right)$;
$\overrightarrow{AQ}=\dfrac{1}{1+\mu}\overrightarrow{AB}+\dfrac{\mu}{1+\mu}\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AQ}=\left(\dfrac{1}{1+\mu}, \dfrac{\mu}{1+\mu}\right)$;
由 P, Q, R 共线当且仅当 $\begin{vmatrix} \dfrac{1}{1+\mu} & 0 & 1 \\ 0 & \dfrac{1}{1+\upsilon} & 1 \\ \dfrac{1}{1+\mu} & \dfrac{\mu}{1+\mu} & 1 \end{vmatrix}=0$，得 $\lambda\mu\upsilon=-1$，证毕.
（注：事实上，此即平面几何上的梅涅劳斯定理）

1.4 数量积

1. $\mathbf{ab}+\mathbf{bc}+\mathbf{ca}=\dfrac{1}{2}\left[(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})-(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})\right]=-13$

2. $(3\mathbf{a}+2\mathbf{b})(2\mathbf{a}-5\mathbf{b})=6\left|\mathbf{a}\right|^2-0\left|\mathbf{b}\right|^2-11\mathbf{ab}=14-33\sqrt{3}.$

3. 由题，得

$$(\mathbf{a}+3\mathbf{b})(7\mathbf{a}-5\mathbf{b})=(\mathbf{a}-4\mathbf{b})(7\mathbf{a}-2\mathbf{b})=0$$

解得：$\mathbf{ab}=\dfrac{1}{2}|\mathbf{b}|^2$ 且 $|\mathbf{a}|=|\mathbf{b}|$，知 $\cos\angle(\mathbf{a},\mathbf{b})=\dfrac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}=\dfrac{1}{2}$, 故 $\angle(\mathbf{a},\mathbf{b})=\dfrac{\pi}{3}$

4. (1) 错误：数量的概念不等同于向量概念；

(2) 正确；

(3) 错误：向量相等的必要条件是方向相同；

(4) 错误：左边 $=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos^2\theta$，右边 $=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|$;

(5) 错误：向量相等的必要条件是方向相同；

(6) 错误：左边 $=|\mathbf{c}|\cdot|\mathbf{a}|\cdot\cos\angle(\mathbf{c},\mathbf{a})\neq|\mathbf{c}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\cos\angle(\mathbf{c},\mathbf{b})=$ 右边；

5. 证明：左边 $=(\mathbf{a}+\mathbf{b})^2+(\mathbf{a}-\mathbf{b})^2=2\mathbf{a}^2+2\mathbf{b}^2+2\mathbf{ab}-2\mathbf{ab}=$ 右边.
（注：几何含义为平行四边形两斜边的平方和等于四条边长的平方和）

6. (1) 证明：由向量乘法交换律得

$$(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}),$$

故 $\mathbf{a}[(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\cdot\mathbf{b}]=0$, 所以两向量垂直.
（注：$(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\cdot\mathbf{b}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=\mathbf{a}\times\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ 不一定成立.）

(2) 证明：因为 $\mathbf{v_1},\mathbf{v_2}$ 不共线，取该平面任意向量 $\mathbf{c}=\lambda\mathbf{v_1}+\mu\mathbf{v_2}$, 则

$$(\mathbf{a}-\mathbf{b})\,\mathbf{c}=(\mathbf{a}-\mathbf{b})(\lambda\mathbf{v_1}+\mu\mathbf{v_2})=\lambda(\mathbf{av_1}-\mathbf{bv_1})+\mu(\mathbf{av_2}-\mathbf{bv_2})=0$$

故 $(\mathbf{a}-\mathbf{b})\perp\mathbf{c}$, 由 $\mathbf{c}$ 的任意性得 $\mathbf{a}-\mathbf{b}=\mathbf{0}$, 所以 $\mathbf{a}=\mathbf{b}$.

(3) 证明：假设 $\mathbf{r}\neq\mathbf{0}$, 由题意，得

$$\mathbf{ra}-\mathbf{rb}=0$$

得 $\mathbf{a}=\mathbf{b}$; 同理可得 $\mathbf{a}=\mathbf{c},\mathbf{b}=\mathbf{c}$, 这与 $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ 不共面矛盾，故 $\mathbf{r}=\mathbf{0}$.

1.5 向量积

1. A.

2. A.

3. $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$
$=(2\mathbf{m}-\mathbf{n})\times(4\mathbf{m}-5\mathbf{n})$
$=8(\mathbf{m}\times\mathbf{m})-10\mathbf{m}\times\mathbf{n}-4\mathbf{n}\times\mathbf{m}+5\mathbf{n}\times\mathbf{n}$
$=-6\mathbf{m}\times\mathbf{n}$
得 $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=6|\mathbf{m}\times\mathbf{n}|=3\sqrt{2}$.

4. 因为 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\left(\begin{vmatrix}3 & -1\\ -2 & 3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 3 & 1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & -2\end{vmatrix}\right)=(7,-7,-7)$.

   (1) 令 $\mathbf{m}=(7,-7,-7)$, 则

$$\mathbf{c}=\frac{\mathbf{m}}{|\mathbf{m}|}=\left(\frac{7}{7\sqrt{3}},-\frac{7}{7\sqrt{3}},-\frac{7}{7\sqrt{3}}\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

   (2) $\mathbf{c}=\lambda(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=(7\lambda,-7\lambda,-7\lambda)$
   $\mathbf{c}\times\mathbf{d}=10$
   所以 $\lambda=\frac{5}{28}$,
   所以 $\mathbf{c}=\left(\frac{5}{4},-\frac{5}{4},-\frac{5}{4}\right)$.

5. 易证.

6. $(\mathbf{a}-\mathbf{d})\times(\mathbf{b}-\mathbf{c})$
$=\mathbf{a}\times(\mathbf{b}-\mathbf{c})-\mathbf{d}\times(\mathbf{b}-\mathbf{c})$
$=\mathbf{a}\times\mathbf{b}-\mathbf{a}\times\mathbf{c}-\mathbf{d}\times\mathbf{b}+\mathbf{d}\times\mathbf{c}$
$=\mathbf{c}\times\mathbf{d}-\mathbf{b}\times\mathbf{d}-\mathbf{d}\times\mathbf{b}+\mathbf{d}\times\mathbf{c}$
$=\mathbf{0}$
所以 $\mathbf{a}-\mathbf{d}$ 与 $\mathbf{b}-\mathbf{c}$ 共线.

1.6 混合积与双重向量积

1. D.
解:

   (A.) $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos<\mathbf{a},\mathbf{b}>=|\mathbf{a}||\mathbf{c}|\cos<\mathbf{a},\mathbf{c}>\ (|\mathbf{a}|\neq 0)$.

(B.) 取 $\mathbf{a}=\mathbf{0}$ 或 $\mathbf{b}=\mathbf{0}$.

(C.) 取 $\mathbf{a}=\mathbf{0}$.

(D.) 证明：原式左右两边同乘以向量 $\mathbf{c}$, 得

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{c}\times\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}=0$$

由定理 1.6 与命题 1.6.1 得

$$(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})=0$$

由推论 1.6.1，命题得证.

2. C.
解:$\mathbf{a}\left[(\mathbf{c}\cdot\mathbf{b})\,\mathbf{b}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\,\mathbf{c}\right]=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\,(\mathbf{c}\cdot\mathbf{d})-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})=0$,又 $\mathbf{a},\mathbf{bc}\neq\mathbf{0}$，得证.
（注：定理 1.6.2 不一定成立，一位内向量叉乘只有在 $\mathbb{R}^3$ 情况下才成立.）

3. 解：与例 1.6.1 同理，$V=\dfrac{59}{6}$.

4. (1) 同理，A,B,C,D 四点共面.
(2) $V=\dfrac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)\right|=\dfrac{58}{3}$,
$$h_D=\frac{6V}{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|}=\frac{6V}{\begin{vmatrix}1&1&1\\2&-2&-3\\4&0&6\end{vmatrix}}=\frac{29}{7}$$

5. $\dfrac{8}{25},\dfrac{5}{2}$

6. (1) 证明：综合运用命题 1.6.1 可证得.
(2) 证明：左边 $=(\mathbf{a},\mathbf{b}+\mathbf{c},\mathbf{c}+\mathbf{a})+(\mathbf{b},\mathbf{b}+\mathbf{c},\mathbf{c}+\mathbf{a})$
$=(\mathbf{a},\mathbf{b}+\mathbf{c},\mathbf{c})+(\mathbf{a},\mathbf{b}+\mathbf{c},\mathbf{a})+\cdots$
$=\cdots$
$=2\,(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})=$ 右边.
(3) 证明：同 (2) 理，展开右边即得.
（注：类比 $(\mathbf{a}-\mathbf{d})\,(\mathbf{b}-\mathbf{d})\,(\mathbf{c}-\mathbf{d})=\mathbf{abc}-\mathbf{abd}-\mathbf{dbc}-\mathbf{adc}+0\,(\mathbf{add}+\mathbf{bdd}+\mathbf{cdd}-\mathbf{ddd})$）

(4) 证明：左边 $= (\mathbf{a}+\mathbf{b})(\mathbf{a}\times\mathbf{c}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{a}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{c}) + \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) + \mathbf{b}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) + \mathbf{b}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{c}) =$ 右边.

(5) 证明：设 $\mathbf{d} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} + \upsilon\mathbf{c}$,

则 $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\times\mathbf{d}) = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})[\mathbf{c}\times(\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}+\upsilon\mathbf{c})]$

$= (\mathbf{a}\times\mathbf{b})[\mathbf{c}\times(\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b})]$

$= \mathbf{a}\times\mathbf{b}(\lambda\mathbf{c}\times\mathbf{a}+\mu\mathbf{c}\times\mathbf{b})$

$= \lambda(\mathbf{a}\times\mathbf{b})(\mathbf{c}\times\mathbf{a}) + \mu(\mathbf{a}\times\mathbf{b})(\mathbf{c}\times\mathbf{b})$ ①

同理展开其余两式，得

$(\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{a}\times\mathbf{d}) = \mu(\mathbf{b}\times\mathbf{c})(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) + \upsilon(\mathbf{b}\times\mathbf{c})(\mathbf{a}\times\mathbf{c})$ ②

$(\mathbf{c},\mathbf{a},\mathbf{b}\times\mathbf{d}) = \lambda(\mathbf{c}\times\mathbf{a})(\mathbf{b}\times\mathbf{a}) + \upsilon(\mathbf{c}\times\mathbf{a})(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$③

① + ② + ③，整理得

左边 $= \lambda[(\mathbf{a}\times\mathbf{b})(\mathbf{c}\times\mathbf{a}) + (\mathbf{c}\times\mathbf{a})(\mathbf{b}\times\mathbf{a})]$

$+ \mu[(\mathbf{a}\times\mathbf{b})(\mathbf{c}\times\mathbf{b}) + (\mathbf{b}\times\mathbf{c})(\mathbf{a}\times\mathbf{b})]$

$+ \upsilon[(\mathbf{b}\times\mathbf{c})(\mathbf{a}\times\mathbf{c}) + (\mathbf{c}\times\mathbf{a})(\mathbf{b}\times\mathbf{c})]$

$= \lambda\cdot 0 + \mu\cdot 0 + \upsilon\cdot 0$

$= 0 =$ 右边.

等式得证.

7. 证明：显然 $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\perp\mathbf{n}$, 则 $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ 共面. 否则：
若 $\mathbf{n} = \mathbf{0}$，则 $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{c} = \mathbf{0}$, 仍成立;
若 $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$，$\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ 中至少有两个向量共线，则仍成立;
若 $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$，$\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ 胡不共线，则 $\mathbf{n}$ 为 $\mathbf{a},\mathbf{b}$ 所确定的平面的法向量，$\mathbf{n}\cdot\mathbf{c} \neq 0$，这与题设相悖.
故成立.

2 平面与直线

2.1 平面方程

1. (1) 取 $\mathbb{Z}$ 轴上两点和题设点 $(0,0,0),(0,0,1),(3,1,-2)$.

所求方程为 $\begin{matrix} x & y & z \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{matrix} = x - 3y = 0$

(2) 由平面点法式方程,不妨设所求平面方程为 $3x-2y+5 = D\,(D \neq 0)$.

代入点 $(-1,-5,4)$ 得 $3x-2y-7=0$.

(3) 不妨设所求平面法向量为 $\mathbf{n}=(a,b,c)$.

则 $\mathbf{n}\cdot\overrightarrow{M_1M_2}=\mathbf{n}\cdot(1,-8,3)=0$.

即 $\begin{cases} a+6b+c=0 \\ a-8b+3c=0 \end{cases}$，取一组解 $\mathbf{n}=(13,-1,-7)$.

同 (2) 理可得 $13x-y-7z=37$.

2. $\overrightarrow{AB}=(-4,5,-1),\overrightarrow{CD}=(-1,0,2)$.

由题得平面的法向量为 $\mathbf{n_1}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{CD}=(11,7,5)$.

得此平面方程为 $11(x-4)+7(y-0)+5(z-6)=0$

即 $11x+7y+5z=74$.

$\overrightarrow{AB}=(-4,5,-1),\overrightarrow{BC}=(-4,-6,2)$.

由题得平面 ABC 的法向量为 $\mathbf{n_2}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}=(4,3,1)$.

所以平面的法向量 $\mathbf{n_3}=\mathbf{n_2}\times\overrightarrow{AB}=(-8,0,32)$. 得此平面方程为 $-8(x-5)+32(z-3)=0$.

即 $x-4z+7=0$.

3. $x+2y-z+4=0\Leftrightarrow x+2y-z=-4\Leftrightarrow \dfrac{x}{-4}+\dfrac{y}{-2}+\dfrac{z}{4}=1$

由此知平面过坐标轴上 $A(-4,0,0),B(0,-2,0),C(0,0,4)$

知道 $\overrightarrow{AB}=(4,-2,0),\overrightarrow{AC}=(4,0,4)$.

得参数方程 $\begin{cases} x=-4+2u+v \\ y=-u \\ z=v \end{cases}$

2.2 直线方程

1. (1) 取直线的法向量 $\mathbf{v}$ 使与已知平面的法向量 $\mathbf{n_1}$ 平行，令

$$\mathbf{v}=\lambda\mathbf{n_1}=(6,-3,-5)$$

由 $M(2,-3,-5)$ 得点向式直线标准方程 $\dfrac{x-2}{6}=\dfrac{y+3}{-3}=\dfrac{z+5}{-5}$.

(2) 取所求直线的方向向量 $\mathbf{v}=(x_0,y_0,z_0)$ 与已知两直线的方向向量 $\mathbf{n_1}=(1,1,-1),\mathbf{n_2}=(1,-1,0)$ 垂直.

即 $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n_1}=\mathbf{v}\cdot\mathbf{n_2}=0$, 取 $\mathbf{v}$ 的一组解为 $(1,1,2)$，又 $M(1,0,-2)$

得点向式直线标准方程为 $x-1=y=\dfrac{z+2}{2}$.

(3) 解：设所求直线的方向向量为 $\mathbf{v}=(x_0,y_0,z_0)$, 由题得

$$\mathbf{v}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{1}{2}\right)$$

又 $M(1,-5,3)$ 得直线点向式标准方程为 $x-1=\dfrac{y+5}{\sqrt{2}}=\dfrac{y-3}{-1}$.

(4) 解：设所求直线的方向向量为 $\mathbf{v_0}=(x_0,y_0,z_0)$,
已知平面的法向量为 $\mathbf{n}=(3,-1,2)$
已知直线的方面向量为 $\mathbf{v}=(4,-2,1)$
已知直线上的一个点 $Q(1,3,0)$, 由题得 $\mathbf{v_0}\cdot\mathbf{n}=0$, 且 $\left(\overrightarrow{PQ},\mathbf{v_0},\mathbf{v}\right)=0$（注：本书第 41 页命题 2.3.2(2)）

即 $\begin{cases} 3x_0-y_0+2z_0=0 \\ \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix}=0 \end{cases}$

得直线点向式标准方程为 $\dfrac{x-1}{-4}=\dfrac{y}{50}=\dfrac{z+2}{31}$

2. (1) 解：令 $y=0$ 得一点 $M(-5,0,-9)\in l$,
已知平面的法向量为 $\mathbf{n_1}=(2,1,-1)$, $\mathbf{n_2}=(3,-1,-2)$
取所求直线的方向向量 $\mathbf{v}=\mathbf{n_1}\times\mathbf{n_2}=(-3,1,-5)$,
则该直线点向式方程为 $\dfrac{x+5}{-3}=y=\dfrac{z+9}{-5}$.

(2) 解：从一般方程中消去 z，得 $4y=3x$，消去 x，得 $4y=-3z+18$，于是得

$$\frac{x}{4}=\frac{y}{3}=\frac{z-6}{-4}.$$

3. (1) 解：设以 $\begin{cases} 2x-7y+4z-3=0 \\ 3x-5y+4z+11=0 \end{cases}$ 为轴的平面束是

$$\lambda(2x-7y+4z-3)+\mu(3x-5y+4z+11)=0$$

代入点 $(-2,1,3)$ 得 $\mu/\lambda=-1/6$,
故所求平面方程为 $\dfrac{3}{2}x-\dfrac{37}{6}y+\dfrac{10}{3}z-\dfrac{19}{6}=0$.

(2) 解：同理，设平面束方程为

$$\lambda(2x-7y+4z-3)+\mu(3x-5y+4z+11)=0$$

取其法向量 $\mathbf{n_1} = (2\lambda+3\mu, -7\lambda-5\mu, 4\lambda+4\mu)$ 与已知平面法向量 $\mathbf{n_2} = (1,1,1)$ 垂直，即 $\mathbf{n_1}\cdot\mathbf{n_2} = 0$, 解得 $\mu/\lambda = -1/2$,
故所求平面方程为 $\frac{3}{2}x - \frac{3}{2}z + 2 = 0$.

(3) (a) 解法一；任取过直线 $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-2}{x}$ 的平面方程

$$\pi_1 : 2\frac{x-1}{2} - \frac{y+2}{-3} - \frac{z-2}{2} = 0$$

$$\pi_2 : \frac{x-2}{2} + \frac{y+2}{-3} - 2\frac{z-2}{2} = 0$$

化简得

$$\pi_1 : 6x + 2y - 3z + 4 = 0$$

$$\pi_2 : 3x - 2y - 6z + 2 = 0$$

同理，得所求平面方程为 $x - 8y - 13z + 9 = 0$.

(b) 解法二：已知平面的法向量 $\mathbf{n_1} = (3,2,1)$
取已知直线上一点 $(1,-2,-2)$ 及其方向向量 $\mathbf{v} = (2,-3,2)$
则所求平面的法向量 $\mathbf{n_2} = \mathbf{n_1}\times\mathbf{v} = (1,-12,13)$
又所求平面过点 $(1,-2,2)$ 得所求平面方程为

$$x - 8y - 13z + 9 = 0.$$

(4) 解：设该平面为 $Ax + By + Cz + D = 0$,
因为该平面与直线 $\frac{x-2}{-1} = \frac{y+4}{3} = \frac{z+1}{1}$ 垂直，有 $\mathbf{n}$ 平行 $\mathbf{v}$.
所以 $\mathbf{n} = (-1,3,1)$，则有 $-x + 3y + z + D = 0$.
又因为该平面过点 $(4,-1,2)$，所以得 $D = 5$,
综上，该平面方程为 $-x + 3y + z + 5 = 0$.

(5) 解：易得直线 $\begin{cases} 2x - y - z - 3 = 0 \\ x + 2y - z - 5 = 0 \end{cases}$ 的方向向量

$$\mathbf{v_0} = (2,-1,-1)\times(1,2,-1) = (3,1,5)$$

记直线 $\frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{-5} = \frac{z+1}{-1}$ 的方向向量为 $\mathbf{v}$,得 $\mathbf{v} = (1,-5,-1)$，
设所求平面的法向量为 $\mathbf{n}$，则 $\mathbf{n}\cdot\mathbf{v_0} = \mathbf{n}\cdot\mathbf{v} = 0$.
取 $\mathbf{n}$ 的一组非零解 $(3,1,-2)$

代入直线 $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+3}{-5}=\dfrac{z+1}{-1}$ 上一点 $(2,-3,-1)$ 得所求平面方程为

$$3x+y-2z-5=0$$

.

2.3 线、面的位置关系

1. (1) 解：取 $M_1(-1,1,2)\in\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-2}{1}$，
   取 $M_2(0,6,-5)\in\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y-6}{2}=\dfrac{z+5}{3}$，
   由两已知直线的方向向量分别为 $\mathbf{v_1}=(3,3,1)\,,\mathbf{v_2}=(-1,2,3)$，
   根据命题 2.3.2，因为 $\left(\overrightarrow{M_1M_2},\mathbf{v_1},\mathbf{v_2}\right)=106\neq0$ 知两平面异面.

   (2) 解：
   $\begin{cases}x+y+z=0\\ y+z+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+2}{1}$，
   $\begin{cases}x+z+1=0\\ x+y+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}$，
   根据命题 2.3.2，计算三向量的混合积为 3，知两平面异面.

2. (1) 解：$\mathbb{X}$ 轴所在直线方程为 $y=z=0$，则联立方程

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\\ 0\cdot x+0\cdot y+z+0=0\\ 0\cdot x+y+0\cdot z+0=0\end{cases}$$

   由例 2.3.2 得所求条件为

$$\begin{vmatrix}A_1 & B_1 & C_1 & D_1\\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{vmatrix}=0$$

   即 $A_1D_2=A_2D_1$

   (2) 设所给直线的方向向量 $\mathbf{v}=\mathbf{n_1}\times\mathbf{n_2}=(A_1,B_1,C_1)\times(A_2,B_2,C_2)=(\lambda,0,0)\,,\lambda\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$

得 $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0$, 且 $\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} \neq 0$

令直线不与 $\mathbb{X}$ 轴重合，只需令 $(0,0,0)$ 不满足直线方程，即 $D_1 = D_2 = 0$ 无解.

综上,所求条件为 $\begin{cases} \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} \neq 0 \\ D_2 \neq 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} \neq 0 \\ D_1 \neq 0 \end{cases}$

(3) 同理可得所求条件为 $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} = D_1 = D_2 = 0$

（注:若 $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0$ 则 $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ 不构成直线，两平面平行或重合.）

3. (1) 解：设所给直线方向向量为 $\mathbf{v} = (3,-2,7)$, 所给平面法向量为 $\mathbf{n} = (4,-3,7)$,

$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \neq 0$，且显然 $\mathbf{v}$ 不平行于 $\mathbf{n}$，则直线与平面相交.

(2) 解:由题,得 $\begin{cases} 5x - 3y + 2z - 5 = 0 \\ 2x - y - z - 1 = 0 \\ 4x - 3y + 7z - 7 = 0 \end{cases}$,由克拉默法则 $D = \begin{vmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 4 & -3 & 7 \end{vmatrix} = 0$ 知直线在平面上.

(3) 已知直线方向向量为 $\mathbf{v} = (1,-2,9)$，

已知平面法向量为 $\mathbf{n} = (3,-4,7)$

同 (1) 中理可得直线与平面交于一点.

4. 解：联立方程 $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z = 0 \\ (A_1 + A_2)\,x + (B_1 + B_2)\,y + (C_1 + C_2)\,z = 0 \end{cases}$

由克拉默法则 $D = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_1 + A_2 & B_1 + B_2 & C_1 + C_2 \end{vmatrix} = 0$ 是显然的,

则在直线 $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z=0 \end{cases}$ 上的点必在平面

$$(A_1+A_2)\,x+(B_1+B_2)\,y+(C_1+C_2)\,z=0$$

上，知直线在平面上.

5. (1) 解：令直线的方向向量 $\mathbf{v}$ 与所给平面法向量 $\mathbf{n}$ 垂直，得

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}=(4,3,1)\cdot(k,3,-5)=0$$

得 $k=-1$，经检验，直线不在平面内，故 $k=-1$ 满足题意.

(2) 解：令所给直线的方向向量 $\mathbf{v}=(2,-4,3)$ 与所给平面法向量 $\mathbf{n}=(k,m,6)$ 平行，即

$$(2,-4,3)=\lambda\,(k,m,6)$$

解得 $k=4,m=8$.

6. 解：设所给直线为 l_4，其方向向量为 $\mathbf{v}=(8,7,1)$，则 l_4 与 l_3 所确定的平面的法向量 $\mathbf{n_1}=\mathbf{v_1}\times\mathbf{v_2}=(4,-6,10)$ 代入 l_2 上 $(-13,5,0)$ 得 l_4 与 l_2 所确定的平面

$$x-y+z-17=0$$

知所求直线为 $\begin{cases} 2x-3y+5z+41=0 \\ x-y+z-17=0 \end{cases}$.

7. 解：与例 2.3.3 同理，所求直线为 $\begin{cases} 2x+4y-3z-11=0 \\ 13x-9y+2z-50=0 \end{cases}$

8. 解：由题设可知：设未知直线的方向向量为 $\mathbf{v}=(X,Y,Z)$，l' 的方向向量为 $\mathbf{v'}=(1,5,3)$，平面法向量为 $\mathbf{n}=(2,1,-3)$，所以 $\mathbf{v}\cdot\mathbf{v_1}=\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}=0$，即

$$\begin{cases} X+5Y+3Z=0 \\ 2X+Y-3Z=0 \end{cases}$$

解得 $X=-2Y,Z=-Y$，所以 $X:Y:Z=-2:1:-1$，
又因为未知直线过 l' 与平面 II 的交点 P，所以

$$\begin{cases} 2X+Y-3Z+1=0 \\ \dfrac{x}{1}=\dfrac{y+5}{5}=\dfrac{z+2}{3}=0 \end{cases}$$

所以 $P(1,0,1)$，所以直线方程为 $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$.

9. 解：设所求直线的方向向量为 $\mathbf{v}$，所求平面的法向量为 $\mathbf{n}$，所给直线的方向向量为 $\mathbf{v_0}=(1,0,0)$，则 $\mathbf{v}\cdot\mathbf{v_0}=\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}=0$ 得 $\mathbf{v}=\mathbf{v_0}\times\mathbf{n}=(0,-1,1)$ 取所给直线与平面的交点 $(1,1,-1)$ 代入，得所求直线方程为 $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+1}{1}$.

10. 解：化 l_0 方程为标准方程 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z+\frac{1}{2}}{5}$，设 M_1 在 l_0 上的投影点为 $M_0\left(2t,4t,\dfrac{1}{2}+5t\right)$，
则 $\overrightarrow{M_1M_0}\cdot(2,4,5)=0$ 得 $M_0(3,6,8)$. 由中点坐标公式得 $M_2(2,15,6)$，易得所求直线方程为

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y-15}{4}=\frac{z-6}{5}$$

11. 证明：联立方程得

$$\begin{cases} cy+bz-bc=0 \\ x=0 \\ ax-az-ac=0 \\ y=0 \end{cases}$$

其判别式

$$\begin{vmatrix} 0 & c & b & -bc \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & -a & -ac \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=2abc\neq 0$$

由例 2.3.2，l_1,l_2 不交于一点，则 l_1,l_2 异面或平行，而毫无疑问，l_1,l_2 不平行，故得证.

2.4 点、线、面之间的距离

1. $(1)d=\dfrac{20}{11}\sqrt{2}$，$(2)d=\sqrt{6}$.

2. 证明：由点到平面距离公式 $p=1-\dfrac{11}{\sqrt{\left(\dfrac{1}{a}\right)^2+\left(\dfrac{1}{b}\right)^2+\left(\dfrac{1}{c}\right)^2}}$ 整理即得所求证式.

3. 解：显然平面 $x+1=0$ 不满足条件，则设过直线 $\frac{x+1}{0}=\frac{y+\frac{2}{3}}{2}=\frac{z}{-3}$ 的平面为 $(x+1)+m(9y+2z+2)=0$，即 $x+3my+2mz+2m+1=0$. 由点到平面距离公式得

$$3^2=\frac{(4+3m+4m+2m+1)^2}{1^2+(3m)^2+(2m)^2}$$

解得 $m=d=-\frac{1}{6}$ 或 $d=\frac{8}{3}$ 所以所求平面方程为 $3x+24y+16z+19=0$ 或 $3x-y-z+2=0$.

4. $(1)d=0$,$(2)d=\frac{15}{41}\sqrt{41}$,$(3)d=0$.

5. 解：

(1) 证明：由定理 2.4.2 得公垂线段的长 $d=\frac{3}{112}\sqrt{122}$，所以两直线异面，同时其公垂线方程为

$$\begin{cases}\begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 1 & -3 & 3 \\ 3 & 8 & 7 \end{vmatrix}=0 \\ \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 8 & 7 \end{vmatrix}=0 \end{cases}$$

即 $\begin{cases} -45x+2y+17z+45=0 \\ 23x-20y+13z=0 \end{cases}$

(2) 同理可得其公垂线段的长 $d=\sqrt{54}$，所以两直线异面，同时其公垂线方程为

$$\begin{cases}\begin{vmatrix} x+2 & y & z-2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 5 & -2 & 5 \end{vmatrix}=0 \\ \begin{vmatrix} x-3 & y+2 & z-7 \\ 1 & 5 & 1 \\ 5 & -2 & 5 \end{vmatrix}=0 \end{cases}$$

即 $\begin{cases} x+5y+z=0 \\ x-y+4=0 \end{cases}$

(3) 同理可得其公垂线段的长 $d=\dfrac{1}{6}$，所以两直线异面，同时其公垂线方程为

$$\begin{cases} x+y+4z-1=0 \\ x-2y-2z+3=0 \end{cases}$$

6. 解：

(1) 整理方程得 $m(x+y)+n(-z-1)=0$
m,n 作为变量，若 x,y 满足 $\begin{cases} x+y=0 \\ -z-1=0 \end{cases}$，则原方程恒成立.
知平面 II 恒过定直线 $l_1:\begin{cases} x+y=0 \\ -z-1=0 \end{cases}$，点 $M_1(0,0,-1)$ 显然在直线 l_1 上.

(2) $l_1: x=-y=\dfrac{z+1}{0}$，l_1,l_2 的判别式 $\Delta=\begin{vmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=-1\neq 0$ 知 l_1,l_2 异面.

(3) 由定理 2.4.2 得 l_1,l_2 间的距离 $d=2$，其公垂线方程为

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} x & y & z+1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}=0 \\ \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}=0 \end{cases}$$

即 $\begin{cases} x+y=0 \\ x-y=0 \end{cases}$

7. 解：过点 M_1 且与平面 II 平行的平面 III 为 $3x-2y+z-6=0$，
过点 M_2 且与平面 II 平行的平面 IV 为 $3x-2y+z-13=0$，
由 $-6<-4,-13<-4$，得 M_1,M_2 在平面 II 的同侧
（注：将方程 $f(x,y,z)=0$ 的图像沿 $\mathbb{Z}$ 轴正方向平移 a 单位长度（若 $a<0$，则沿反方向平移 $|a|$ 单位长），则得到的图像方程为 $f(x,y,z-a)=0$，故若平面在平面 II 的 $\mathbb{Z}$ 轴方向上方，则其标准方程常数项比 II 小，反之同理）

8. (1) 解得下列平面：

   过 M 平行 $\pi_1: 3x - y + 2z - 9 = 0$

   过 M 平行 $\pi_2: x - 2y - z - 3 = 0$

   过 N 平行 $\pi_1: 3x - y + 2z + 5 = 0$

   过 N 平行 $\pi_2: x - 2y - z = 0$

   则由第 7 题注，得 M 在 π_1 上，在 π_2 下；N 在 π_1 下，在 π_2 下，知 N, M 两点在相邻的二面角内.

   (2) 同理可得，N, M 两点在对顶的二面角内.

9. 证明：假设有两条公垂线，则它们都与异面直线相交，所以公垂线确定一个平面 A，所以四个交点共面，又因为每条异面直线都有四个点在平面 A 上，所以异面直线都在平面 A 上，所以两直线共面，与题设矛盾，假设不成立. 故原命题成立.