4.4 二次曲面的化简与分类

1. 解：$\lambda^3-3\lambda-2=0$.

$\lambda_1=2,\ \lambda_2=\lambda_3=-1$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt2} & -\frac{1}{\sqrt6} \\ \frac{1}{\sqrt3} & -\frac{1}{\sqrt2} & -\frac{1}{\sqrt6} \\ \frac{1}{\sqrt3} & 0 & \frac{2}{\sqrt6} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

化简方程得 $y^2+z^2-2x^2=9$：单叶双曲面

2. 解：$\lambda^3-\lambda^2-\lambda+1=0$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt2} & 0 & \frac{1}{\sqrt2} \\ \frac{1}{\sqrt2} & 0 & \frac{1}{\sqrt2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

化简得 $-x^2+y^2+z^2+1=0$：双叶双曲面.

3. 解：$\lambda^3-2\lambda^2-3\lambda=0$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt3} & -\frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt6} \\ \frac{1}{\sqrt3} & 0 & -\frac{2}{\sqrt6} \\ \frac{1}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt6} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}+\cancel{\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}\ \cancel{\begin{pmatrix} \frac{11}{8} \\ -\frac{1}{4} \\ -\frac{9}{8} \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

化简得 $3z^2-y^2-2=0$：双曲柱面

(15) $\lambda^3-18\lambda^2+99\lambda-162=0$. $\lambda_{1,2,3}=3,6,9$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ①$$

易知其为 $\lambda_1 x^2+\lambda_2 y^2+\lambda_3 z^2+I_4/I_3=0$ 形式的标准方程，故不必代入①式而立即可得 $3x^2+6y^2+9z^2-\frac{8}{27}=0$

(16) $\lambda^3+6\lambda^2-216\lambda=0$, $\lambda_1=0$, $\lambda_2=12$, $\lambda_3=-18$

(17) $\lambda^3-7\lambda^2+10\lambda=0$. $\lambda_1=0$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=5$

年　月　日　　　　第　页共　页

18) ~~$2x^2+1$~~

$\lambda^3-12\lambda^2+21\lambda-10=0$. $\lambda_1=1$, $\lambda_2=1$, $\lambda_3=10$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

得 $x^2+y^2+10z^2-1=0$. ∴ 椭球面.

19) $\lambda^3-7\lambda^2+14\lambda-6=0$. $\lambda_1=3$, $\lambda_2=2+\sqrt{2}$, $\lambda_3=2-\sqrt{2}$.

简化后的过渡方程略. 因为 $\lambda_1\lambda_2\lambda_3\neq 0$. 知化简方程必为椭圆球抛物面. 知为

$$3x^2+(2+\sqrt{2})y^2+(2-\sqrt{2})z^2-11/2=0$$

2 证明: 特征方程为 $\lambda^3-\frac{1}{4}\lambda=0$. $\lambda_1=0$, $\lambda_2=\frac{1}{2}$, $\lambda_3=-\frac{1}{2}$.

又其中心为不存在. 知为 (II) 类方程

$\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}y^2+d=0$ 的形式.

不论 d 为正或负 都有方程为双曲抛物面.

3. 解：取 $\begin{pmatrix}\vec{e_1'}\\ \vec{e_2'}\\ \vec{e_3'}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt3}\\ \frac{2}{\sqrt6} & -\frac{1}{\sqrt6} & -\frac{1}{\sqrt6}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt2} & -\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{e_1}\\ \vec{e_2}\\ \vec{e_3}\end{pmatrix}$ 和三径面交点 $(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 为原点 得

$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt3} & \frac{2}{\sqrt6} & 0\\ \frac{1}{\sqrt3} & -\frac{1}{\sqrt6} & \frac{1}{\sqrt2}\\ \frac{1}{\sqrt3} & -\frac{1}{\sqrt6} & -\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$ 即 $$\begin{pmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt3}\\ \frac{2}{\sqrt6} & -\frac{1}{\sqrt6} & -\frac{1}{\sqrt6}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt2} & -\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y+\frac{1}{2}\\ z-\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

得 $O'(0,0,\frac{1}{\sqrt2})$. $A'(\frac{1}{\sqrt3},\frac{2}{\sqrt6},-\frac{1}{\sqrt2})$ $B'(\frac{1}{\sqrt3},-\frac{1}{\sqrt6},0)$.

所以直线方程，得 $-2x^2+y^2-z^2+\frac{1}{2}=0$.

其余各类型方程不存在.

4.3 节

4.3 二次曲面的对称面与主径面

1. 解：令 $\Phi_1(X,Y,Z)=\Phi_2(X,Y,Z)=\Phi_3(X,Y,Z)=0$.

即 $\begin{cases} X+Y-2Z=0 \\ X+Y-2Z=0 \\ -2X-2Y+4Z=0 \end{cases}$ 解得此曲面有无数奇向

为 $X:Y:Z=2\lambda:2\mu:(\mu+\lambda)$.

2. 解：将 $(0,0,0)$ 代入共轭于方向 (X,Y,Z) 的直径面方程中.

即 $\Phi_4(X,Y,Z)=0$. 得 $X=Y$.

知所求径面的共轭方向为 $X:Y:Z=t:t:m$.

得所求径面方程为 $(6t-2m)x+(3t-m)y-(3t-m)z=0$.

(t 与 m 不同时为零)

3. 解：参考例 4.3.3 有对应主方向与主径面三组为

(1) ① $X:Y:Z=1:-1:0$ 与 $x-y+1=0$

② $X:Y:Z=0:0:1$ 与 $-5z-2=0$

③ $X:Y:Z=1:1:0$ 与 $x+y-1=0$.

(2) ① $X:Y:Z=1:-1:0$ 与 $2x-2y+3=0$.

注：特征根为 $\lambda=0,0,2$.

(3) 特征方程为 $\lambda^3-36\lambda^2+396\lambda-1296=0$ (感受到绝望了吗?)

解得 $\lambda_1=6$, $\lambda_2=18$, $\lambda_3=12$.

得 ① $x:y:z=1:1:2$ 有 $x+y+2z=0$.

② $x:y:z=-1:-1:1$ 有 $-x-y+z=0$

③ $x:y:z=1:-1:0$ 有 $x-y+1=0$.

解: 4: 略 (此题不留答案更佳).

4.2 节

4.2 二次曲面的渐近方向和中心

1. 由定理4.2.1，得二次曲面中心分别为 $(-3,1,-2)$ 和 $z=0$

2. 解：令 $F_1(x,y,z)=F_2(x,y,z)=F_3(x,y,z)=0$.

得 $\begin{cases} x=0 \\ -y-1=0 \\ -0.5=0 \end{cases}$ 无解 知为无心二次曲面

3. 解：(1) 由定理4.2.1，$I_3=\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}=29$ 知为中心二次曲面.

(2) 由定理4.2.1，$I_3=\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=0$ 知为非中心二次曲面.

其中心方程组为 $\begin{cases} \cancel{3x-2y+z+1=0} \\ \cancel{-2x+5y-z+6=0} \\ \cancel{x-y+3z+1=0} \end{cases}$

对于系数矩阵 A^* 的秩 r 和增广矩阵 B 的秩 R 易得 $r\neq R$ 知为无心二次曲面.

4.解：(1) 其中心坐标为 $(0,0,0)$，知其渐近锥面方程为

Ch082.95.2013.8

$$\phi(x-0,y-0,z-0)=y^2-2z^2+2xz=0$$

(2) 其中心坐标为 $(0,0,0)$，知其渐近锥面方程为

$$x^2+y^2+z^2-4xy-4yz-4xz=0$$

(3) $I_3=0$，知为非中心二次曲面，知（可能）不存在渐近锥面、

5.解：(1) $x=y=1$ (2) $x=2y=z$ (3) 没有中心

6.解：(1) $2x-y+3z+2=0$. (2) $x=\frac{3}{2}y=3(z-2)$

(3)

7.解：对锥面 $ax^2+by^2+cz^2=0$.

有 $XF_1(x_0,y_0,z_0)+YF_2(x_0,y_0,z_0)+ZF_3(x_0,y_0,z_0)=aXx_0+bYy_0+cZz_0$

$=0$.

讨论：① $\phi(X,Y,Z)=aX^2+bY^2+cZ^2\neq0$ 时.

直线与二次曲面相切

② $\phi(X,Y,Z)=0$ 时.

因为恒有 $F(x_0,y_0,z_0)=0$，知直线在二次曲面上、

8. 解：将直线代入方程，整理得

$$7t^2-7t+1=0.$$

解得 $t_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{21}}{14}$

得交点 $\left(\frac{-7+3\sqrt{21}}{7},\frac{7+\sqrt{21}}{7},0\right)$ 或 $\left(\frac{-7-3\sqrt{21}}{7},\frac{7-\sqrt{21}}{7},0\right)$.

9. 解：将直线代入曲面之方程，整理得

$4t-1=0$. 得 $t=\frac{1}{4}$

得交点 $(0,\frac{1}{2},0)$

证明：直线 l 的方向向量为 $(4,2,0)$ 代入 $\varphi(x,y,z)$ 得

$\varphi(x,y,z)=0$. 令 $xF_1(x_0,y_0,z_0)+yF_2(x_0,y_0,z_0)+zF_3(x_0,y_0,z_0)$

$=F(x_0,y_0,z_0)=0$.

即 $\begin{cases}4(x_0-y_0+2z_0+\frac{3}{2})+2(-x_0-z_0)=0 & ① \\ x_0^2+z_0^2-2x_0y_0-y_0z_0+4z_0x_0+3x_0-5z_0=0 & ②\end{cases}$

①代入②中，整理得

$z_0(y_0-2z_0-8)=0$. 知 $z_0=0$ 或 $y_0-2z_0-8=0$.

与①联立方程可知

$z_0=x_0-13=\frac{y_0-8}{2}$ 或 $x_0-2y_0+3=z_0=0$

知存在且存在有无数条所求直线. 取 $(-3,0,0)$ 点得其中一条直线为 $\frac{x+3}{4}=\frac{y}{2}=\frac{z}{0}$.

4.1节

4.1 坐标变换

1. 解：由题意得

$$\begin{pmatrix}\vec{e_1'}\\ \vec{e_2'}\\ \vec{e_3'}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{e_1}\\ \vec{e_2}\\ \vec{e_3}\end{pmatrix}$$

坐标变换公式为

$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}$$

其 M在新系的坐标 $M'=(1,-1,0)$

2. 解、取之三方向向量 $\vec{n_1}=(1,1,1)$，$\vec{n_2}=(1,-2,1)$，$\vec{n_3}=(1,0,-1)$

易知 $\vec{n_1}\perp\vec{n_2}\perp\vec{n_3}$．且 $(\vec{n_1},\vec{n_2},\vec{n_3})=4>0$，知构成右手直角标架．

取 $\vec{n_1^0},\vec{n_2^0},\vec{n_3^0}$ 为新坐标系的坐标向量．即

$$\begin{pmatrix}\vec{e_1'}\\ \vec{e_2'}\\ \vec{e_3'}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3}, & \frac{\sqrt{3}}{3}, & \frac{\sqrt{3}}{3}\\ \frac{\sqrt{6}}{6}, & -\frac{\sqrt{6}}{3}, & \frac{\sqrt{6}}{6}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}, & 0, & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{e_1}\\ \vec{e_2}\\ \vec{e_3}\end{pmatrix}.$$

并利用三条直线的公共点 $(0,0,0)$ 作为新原点．

得坐标变换公式

$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{3} & 0\\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}$$

3. 解：取 $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = (-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2})$ 为原点。

$\vec{n_1^0} = \pm(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ 为 x 轴方向，

$\vec{n_2^0} = \pm(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ 为 y 轴方向。

$\vec{n_3^0} = \pm(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$ 为 z 轴方向。

控制正负号使原点落在新坐标系的第一卦限

有坐标变换公式为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \left(\pm\vec{n_1^0}^T, \pm\vec{n_2^0}^T, \pm\vec{n_3^0}^T\right)\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad ①$$

由于过渡矩阵我们是正交矩阵，所以①即为

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm\vec{n_1^0} \\ \pm\vec{n_2^0} \\ \pm\vec{n_3^0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x+\frac{1}{2} \\ y-1 \\ z-\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$ 代入 $(0,0,0)$ 得

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mp\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \mp\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \pm\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$，知取 $-\vec{n_1^0}$ 为 x 轴正方向单位向量，

取 $+\vec{n_2^0}$ 为 y 轴正方向单位向量

$\vec{n_3^0}$ 为 z 轴正方向单位向量。

同时，$(\vec{n_1^0}, \vec{n_2^0}, \vec{n_3^0}) > 0$，知为右手系，得坐标变换公式。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

4. D. 解：$x^2+y^2=2xy$，即 $(x^2-2xy+y^2)=(x-y)^2=0$.

5. 可以这样：$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

另外介绍高等解法：视 $2x+3y+4z+5=0$ 为二次方程

$(2x+3y+4z+5)^2=4x^2+9y^2+16z^2+12xy+16xz+24yz+20x+30y+40z+25=0$.

特征方程为：$\lambda^3-29\lambda^2=0$.

求变换公式为 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{29}} & \frac{3}{\sqrt{22}} & \frac{-17}{\sqrt{638}} \\ \frac{3}{\sqrt{29}} & \frac{2}{\sqrt{22}} & \frac{18}{\sqrt{638}} \\ \frac{4}{\sqrt{29}} & -\frac{3}{\sqrt{22}} & \frac{5}{\sqrt{638}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$.

6. 其特征方程为 $\lambda^3-625\lambda=0$，$\lambda_1=0$，$\lambda_2=\lambda_3=25$. 且其为无心二次曲面.
亦为椭圆抛物面.

7. 设 $\vec{e_1}=(\cos\theta\sin\varphi, \sin\theta, \cos\theta\cos\varphi)$.

又 $\vec{e_1}\cdot(1,1,1)=(0,0,1)(1,1,1)$.

且 $\dfrac{[\vec{e_1}\times(1,1,1)]\cdot[(0,0,1)\times(1,1,1)]}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cdot1\cdot1}=\cos\frac{2}{3}\pi$.

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

得 $\vec{e_1}=(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3})$. 同理得 $\vec{e_2},\vec{e_3}$ 变到的变换公式为