解析几何答案

陈家宝

目录

1 向量与坐标

1.1 向量的定义、加法和数乘

1. 证明：$\overrightarrow{PA_1}+\overrightarrow{PA_2}+\cdots+\overrightarrow{PA_n}=\left(\overrightarrow{OA_1}-\overrightarrow{OP_1}\right)+\left(\overrightarrow{OA_2}-\overrightarrow{OP_2}\right)+\cdots+\left(\overrightarrow{OA_n}-\overrightarrow{OP_n}\right)=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}-n\overrightarrow{OP}$, 又 $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}=\mathbf{0}$, 故 $\overrightarrow{PA_1}+\overrightarrow{PA_2}+\cdots+\overrightarrow{PA_n}=-n\overrightarrow{OP}=n\overrightarrow{OP}$.

2. (1) $(\mu-\upsilon)(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})-(\mu+\upsilon)(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\mu\boldsymbol{a}-\mu\boldsymbol{b}-\upsilon\boldsymbol{a}+\upsilon\boldsymbol{b}-\mu\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}-\upsilon\boldsymbol{a}+\upsilon\boldsymbol{b}=-2\upsilon\boldsymbol{a}+2\upsilon\boldsymbol{b}$.

(2) $\mathbf{D} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -17, \mathbf{D_x} = \begin{vmatrix} \mathbf{a} & 4 \\ \mathbf{b} & -3 \end{vmatrix} = -3\mathbf{a} - 4\mathbf{b}, \mathbf{D_y} = \begin{vmatrix} 3 & \mathbf{a} \\ 3 & \mathbf{b} \end{vmatrix}, \mathbf{x} = \frac{D_x}{D} = \frac{3}{17}\mathbf{a} + \frac{4}{17}\mathbf{b}, \mathbf{y} = \frac{D_y}{D} = -\frac{3}{17}\mathbf{b} + \frac{2}{17}\mathbf{a}.$

3. (1)$\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, (2)$\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 同向，(3)$\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 反向，且 $|\mathbf{a}| \geq |\mathbf{b}|(4)\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 反向,(5)$\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 同向，且 $|\mathbf{a}| \geq |\mathbf{b}|$.

4. 证明：若 $\lambda + \mu < 0, -\lambda < 0$，由情形 1，得 $[(\lambda+\mu)+(-\lambda)]\,\mathbf{a} = (\lambda+\mu)\mathbf{a} + (-\lambda)\mathbf{a}$，即 $\mu\mathbf{a} = (\lambda+\mu)\mathbf{a} - \lambda\mathbf{a}$，从而 $(\lambda+\mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}$ 得证.

1.2 向量的线性相关性

1. (1) 错，当 $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ 时；(2) 错，当 $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ 时.

2. 设 $\lambda\mathbf{c} + \mu\mathbf{d} = \mathbf{0}, \lambda(2\mathbf{a}-\mathbf{b}) + \mu(3\mathbf{a}-2\mathbf{b}) = \mathbf{0}, (2\lambda+3\mu)\mathbf{a} + (-\lambda-2\mu)\mathbf{b} = \mathbf{0}$. 由于 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 不共线，所以 $\begin{cases} 2\lambda + 3\mu = 0, \\ \lambda + 2\mu = 0. \end{cases}$ 又 $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$，所以 $\lambda = \mu = 0$，即 $\mathbf{c}, \mathbf{d}$ 线性无关.

3. 证明：$\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{CD}$，$E$、$F$ 分别为梯形腰 BC、AD 上的中点，连接 EF 交 AC 于点 H，则 H 为 AC 的中点，$\overrightarrow{FH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{HE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{FH} + \overrightarrow{HE} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AB}\right)$，因为 $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{CD}$，而 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 方向一致，所以 $\left|\overrightarrow{FE}\right| = \frac{1}{2}\left(\left|\overrightarrow{AB}\right| + \left|\overrightarrow{DC}\right|\right)$.

4. 设 $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{b} + \mu\mathbf{c}$，则

$$\mathbf{a} = -\mathbf{e_1} + 3\mathbf{e_2} + 2\mathbf{e_3} = 2\lambda\mathbf{e_1} - 6\lambda\mathbf{e_2} + 2\lambda\mathbf{e_3} - 3\mu\mathbf{e_1} + 12\mu\mathbf{e_2} + 11\mu\mathbf{e_3},$$

即

$$(-1 - 4\lambda + 3\mu)\,\mathbf{e_1} + (3 + 6\lambda - 12\mu)\,\mathbf{e_2} + (2 - 2\lambda - 11\mu)\,\mathbf{e_3} = \mathbf{0},$$

又 $\mathbf{e_1}$、$\mathbf{e_2}$、$\mathbf{e_3}$ 线性相关，有

$$\begin{cases} -1 - 4\lambda + 3\mu = 0 \\ 3 + 6\lambda - 12\mu = 0 \\ 2 - 2\lambda - 11\mu = 0. \end{cases}$$

解得 $\lambda=-\dfrac{1}{10},\mu=\dfrac{1}{5}$，所以 $\mathbf{a}=\dfrac{1}{10}\mathbf{b}+\dfrac{1}{5}\mathbf{c}$.

5. C.

6. 设 $\overrightarrow{RD}=\lambda\overrightarrow{AD},\overrightarrow{RE}=\mu\overrightarrow{BE}$, 则

$$\overrightarrow{RD}=\lambda\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\mu\overrightarrow{BC},\overrightarrow{RE}=\overrightarrow{RD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}=\mu\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\mu\overrightarrow{CA},$$

故

$$\overrightarrow{RD}=\left(\frac{2}{3}\mu-\frac{1}{3}\right)\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\left(1-\mu\right)\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\lambda\overrightarrow{BC},$$

推得

$$\begin{cases}\dfrac{2}{3}\mu-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{3}\lambda,\\ \dfrac{1}{3}\left(1-\mu\right)=\lambda\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}\lambda=\dfrac{1}{7}\\ \mu=\dfrac{4}{7}\end{cases}$$

所以 $RD=\dfrac{1}{7}AD,RE=\dfrac{4}{7}BE.$

7. 由题得

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{OP}=\left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}\right)+3\overrightarrow{OP},$$

又 $\overrightarrow{CP}=2\overrightarrow{PG}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}$, 所以 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\mathbf{0}$, 则 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$ 得证.

8. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=4\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=4\overrightarrow{OP}+2\overrightarrow{PH}+2\overrightarrow{PG}=4\overrightarrow{OP}$

9. ”$\Rightarrow$” 因为 A、B、C 三点共线，所以存在不全为 0 的实数 k、l 满足 $k\overrightarrow{AB}+l\overrightarrow{AC}=\mathbf{0}$, 即 $k\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)+l\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\right)=\mathbf{0}$, 化简得 $-\left(k+l\right)\overrightarrow{OA}+k\overrightarrow{OB}+l\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$, 分别取 $\lambda=-\left(k+l\right),\mu=k,\gamma=l$, 得证.
   ”$\Leftarrow$” 因为 $\lambda=-\left(\mu+\gamma\right)$，设 $\lambda\neq 0$，则 μ、γ 不全为 0，$-\left(\mu+\gamma\right)\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$，化简得 $\mu\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)+\gamma\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\right)=\mathbf{0}$，即 $\mu\overrightarrow{AB}+\gamma\overrightarrow{AC}=\mathbf{0}$，故 A、B、C 三点共线.

10. "$\Rightarrow$" 因为 P_1,P_2,P_3,P_4 四点共面，所以 $\overrightarrow{P_1P_2},\overrightarrow{P_1P_3},\overrightarrow{P_1P_4}$ 线性相关，存在不全为 0 的 m,n,p 使得 $m\overrightarrow{P_1P_2}+n\overrightarrow{P_1P_3}+p\overrightarrow{P_1P_4}=\mathbf{0}$, 即

$$m\left(\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP_1}\right)+n\left(\overrightarrow{OP_3}-\overrightarrow{OP_1}\right)+p\left(\overrightarrow{OP_4}-\overrightarrow{OP_1}\right)=\mathbf{0},$$

即

$$-(m+n+p)\,\mathbf{n}+m\mathbf{r_2}+n\mathbf{r_3}+p\mathbf{r_4}=\mathbf{0},$$

令 $m+n+p=\lambda_1,\lambda_2=m,\lambda_3=n,\lambda_4=p$, 得证.
"$\Leftarrow$" 设 $\lambda_1\neq 0$，则 $\lambda_1=-(\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4)$，所以 $\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$ 不全为 0,

$$-(\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4)\,\mathbf{r_1}+\lambda_2\mathbf{r_2}+\lambda_3\mathbf{r_3}+\lambda_4\mathbf{r_4}=\mathbf{0},$$

因此 P_1,P_2,P_3,P_4 四点共面.

11. A,B,C 三点不共线 $\Leftrightarrow\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ 不共线 $\Leftrightarrow$ 点 P 在 π 上 $\Leftrightarrow\overrightarrow{AP}=\mu\overrightarrow{AB}+\gamma\overrightarrow{AC}\,(\mu,\gamma\in\mathbb{R})\Leftrightarrow\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=\mu\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)+\gamma\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\right)\Leftrightarrow\overrightarrow{OP}=(1-\mu-\gamma)\,\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC}$, 取 $\gamma=1-\mu-\gamma$，得证.

12. (1)$\overrightarrow{AD}=\dfrac{2}{3}\mathbf{e_1}+\dfrac{1}{3}\mathbf{e_2},\overrightarrow{AE}=\dfrac{1}{3}\mathbf{e_1}+\dfrac{2}{3}\mathbf{e_2}$
(2) 由角平分线的性质得 $\dfrac{\left|\overrightarrow{BT}\right|}{\left|\overrightarrow{TC}\right|}=\dfrac{\mathbf{e_1}}{\mathbf{e_2}}$，又 $\overrightarrow{BT}$ 与 $\overrightarrow{TC}$ 同向，则 $\overrightarrow{BT}=\dfrac{\mathbf{e_1}}{\mathbf{e_2}}\overrightarrow{TC},\overrightarrow{BT}=\overrightarrow{AT}-\overrightarrow{AB},\overrightarrow{TC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AT}$,因此 $\overrightarrow{AT}-\overrightarrow{AB}=\dfrac{\mathbf{e_1}}{\mathbf{e_2}}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AT}\right)$, 得 $\overrightarrow{AT}=\dfrac{|e_1|+|e_2|}{|e_1|+|e_2|}\mathbf{e_1}$.

1.3 标架与坐标

1. $(1)(0,16,-1)\,.(2)(-11,9,-2)\,.$

2. 分析：以本书第 25 页推论 1.6.1 作判别式，以本书第 7 页定理 1.21(4)

(1) $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})=\begin{vmatrix}5&2&1\\-1&4&2\\-1&-1&5\end{vmatrix}=121\neq 0$, 故 $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ 不共面，无线性组合.

(2) 同理 $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ 共面，

设 $\mathbf{c}=\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}$,

得 $\begin{cases}-3=6\lambda-9\mu\\ 6=4\lambda+6\mu\\ 3=2\lambda-3\mu\end{cases}$

解得 $\mathbf{c}=\dfrac{1}{2}\mathbf{a}+\dfrac{4}{3}\mathbf{b}$.

(3) 同理 $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ 共面，但 $\mathbf{a}$ 平行 $\mathbf{b}$，且 $\mathbf{a}\neq\mathbf{c}$, 故显然无法以线性组合表示 $\mathbf{c}$.

3. 证明：设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 中，A_i 所对得面的重心为 G_i，
欲证 $A_iG_i\,(i=1,2,3,4)$ 相交于一点,在 A_iG_i 上取一点 P_i 使得 $\overrightarrow{A_iG_i}=3\overrightarrow{P_iG_i}$,
从而 $\overrightarrow{OP_i}=\dfrac{\overrightarrow{OA_i}+3\overrightarrow{OG_i}}{4}$,
设 A_i 坐标为 $(x_i,y_i,z_i)\,(i=1,2,3,4)$ 则有

$$G_1\left(\frac{x_2+x_3+x_4}{3},\frac{y_2+y_3+y_4}{3},\frac{z_2+z_3+z_4}{3}\right),$$

$$G_2\left(\frac{x_1+x_3+x_4}{3},\frac{y_1+y_3+y_4}{3},\frac{z_1+z_3+z_4}{3}\right),$$

$$G_3\left(\frac{x_1+x_2+x_4}{3},\frac{y_1+y_2+y_4}{3},\frac{z_1+z_2+z_4}{3}\right),$$

$$G_4\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{y_1+y_2+y_3}{3},\frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right),$$

所以 $P_1\left(\dfrac{x_1+3\frac{x_2+x_3+x_4}{3}}{4},\dfrac{y_1+3\frac{y_2+y_3+y_4}{3}}{4},\dfrac{z_1+3\frac{z_2+z_3+z_4}{3}}{4}\right)$,

即 $P_1\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4},\dfrac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4},\dfrac{z_1+z_2+z_3+z_4}{4}\right)$, 同理可得 P_2,P_3,P_4 坐标，可知 P_1,P_2,P_3,P_4 为同一点，故 A_iG_i 交于同一点 P 且点 P 到任一顶点的距离等于此点到对面重心的三倍.

4. 证明：必要性：因为 π 上三点 $p_i\,(x_i,y_i)_{i=1,2,3}$ 共线，故 $\overrightarrow{p_1p_2}$ 平行于 $\overrightarrow{p_1p_3}$，即 $\dfrac{x_2-x_1}{x_3-x_1}=\dfrac{y_2-y_1}{y_3-y_1}$

即 $x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1-x_1y_3-x_3y_2-x_2y_1=\begin{vmatrix}x_1&y_1&1\\x_2&y_2&1\\x_3&y_3&1\end{vmatrix}=0$. 充分

性：由 $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_1y_3 - x_3y_2 - x_2y_1 = 0$

整理得

$$\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1},$$

即 $\overrightarrow{p_1p_2}$ 平行于 $\overrightarrow{p_1p_3}$，所以 π 上三点 $p_i\left(x_i, y_i\right)_{i=1,2,3}$ 共线. 综上，π 上三点 $p_i\left(x_i, y_i\right)_{i=1,2,3}$ 共线当且仅当 $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

5. 证明:建立仿射坐标系 $\left\{\overrightarrow{A}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right\}$, 由 $\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{PB} = \lambda\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AP}\right)$,
得 $\overrightarrow{AP} = \dfrac{\lambda}{\lambda+1}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AP} = \left(\dfrac{\lambda}{\lambda+1}, 0\right)$;
$\overrightarrow{AR} = \dfrac{1}{1+\upsilon}\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AR} = \left(0, \dfrac{1}{1+\upsilon}\right)$;
$\overrightarrow{AQ} = \dfrac{1}{1+\mu}\overrightarrow{AB} + \dfrac{\mu}{1+\mu}\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AQ} = \left(\dfrac{1}{1+\mu}, \dfrac{\mu}{1+\mu}\right)$;
由 P, Q, R 共线当且仅当 $\begin{vmatrix} \dfrac{1}{1+\mu} & 0 & 1 \\ 0 & \dfrac{1}{1+\upsilon} & 1 \\ \dfrac{1}{1+\mu} & \dfrac{\mu}{1+\mu} & 1 \end{vmatrix} = 0$，得 $\lambda\mu\upsilon = -1$，证毕.
（注：事实上，此即平面几何上的梅涅劳斯定理）

1.4 数量积

1. $\mathbf{ab} + \mathbf{bc} + \mathbf{ca} = \dfrac{1}{2}\left[(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) - (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})\right] = -13$

2. $(3\mathbf{a} + 2\mathbf{b})(2\mathbf{a} - 5\mathbf{b}) = 6\left|\mathbf{a}\right|^2 - 0\left|\mathbf{b}\right|^2 - 11\mathbf{ab} = 14 - 33\sqrt{3}.$

3. 由题，得

$$(\mathbf{a} + 3\mathbf{b})(7\mathbf{a} - 5\mathbf{b}) = (\mathbf{a} - 4\mathbf{b})(7\mathbf{a} - 2\mathbf{b}) = 0$$

解得：$\mathbf{ab} = \dfrac{1}{2}\left|\mathbf{b}\right|^2$ 且 $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$，知 $\cos\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \dfrac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|} = \dfrac{1}{2}$，故 $\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \dfrac{\pi}{3}$

4. (1) 错误：数量的概念不等同于向量概念；

   (2) 正确；

   (3) 错误：向量相等的必要条件是方向相同；

   (4) 错误：左边 $= |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos^2\theta$，右边 $= |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|$；

   (5) 错误：向量相等的必要条件是方向相同；

   (6) 错误：左边 $= |\mathbf{c}|\cdot|\mathbf{a}|\cdot\cos\angle(\mathbf{c},\mathbf{a}) \neq |\mathbf{c}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\cos\angle(\mathbf{c},\mathbf{b}) =$ 右边；

5. 证明：左边 $= (\mathbf{a}+\mathbf{b})^2 + (\mathbf{a}-\mathbf{b})^2 = 2\mathbf{a}^2 + 2\mathbf{b}^2 + 2\mathbf{ab} - 2\mathbf{ab} =$ 右边.
（注：几何含义为平行四边形两斜边的平方和等于四条边长的平方和）

6. (1) 证明：由向量乘法交换律得

   $$(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}),$$

   故 $\mathbf{a}[(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\cdot\mathbf{b}] = 0$, 所以两向量垂直.
   （注：$(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\cdot\mathbf{b} - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = \mathbf{a}\times\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ 不一定成立.）

   (2) 证明：因为 $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}$ 不共线，取该平面任意向量 $\mathbf{c} = \lambda\mathbf{v_1} + \mu\mathbf{v_2}$, 则

   $$(\mathbf{a}-\mathbf{b})\,\mathbf{c} = (\mathbf{a}-\mathbf{b})(\lambda\mathbf{v_1} + \mu\mathbf{v_2}) = \lambda(\mathbf{av_1} - \mathbf{bv_1}) + \mu(\mathbf{av_2} - \mathbf{bv_2}) = 0$$

   故 $(\mathbf{a}-\mathbf{b})\perp\mathbf{c}$, 由 $\mathbf{c}$ 的任意性得 $\mathbf{a}-\mathbf{b} = \mathbf{0}$, 所以 $\mathbf{a} = \mathbf{b}$.

   (3) 证明：假设 $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$, 由题意，得

   $$\mathbf{ra} - \mathbf{rb} = 0$$

   得 $\mathbf{a} = \mathbf{b}$; 同理可得 $\mathbf{a} = \mathbf{c}, \mathbf{b} = \mathbf{c}$, 这与 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 不共面矛盾，故 $\mathbf{r} = \mathbf{0}$.

1.5 向量积

1. A.

2. A.

3. $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$
$= (2\mathbf{m} - \mathbf{n})\times(4\mathbf{m} - 5\mathbf{n})$
$= 8(\mathbf{m}\times\mathbf{m}) - 10\mathbf{m}\times\mathbf{n} - 4\mathbf{n}\times\mathbf{m} + 5\mathbf{n}\times\mathbf{n}$
$= -6\mathbf{m}\times\mathbf{n}$
得 $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = 6\,|\mathbf{m}\times\mathbf{n}| = 3\sqrt{2}$.

4. 因为 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\left(\begin{vmatrix}3 & -1\\ -2 & 3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 3 & 1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & -2\end{vmatrix}\right)=(7,-7,-7)$.

   (1) 令 $\mathbf{m}=(7,-7,-7)$, 则

   $$\mathbf{c}=\frac{\mathbf{m}}{|\mathbf{m}|}=\left(\frac{7}{7\sqrt{3}},-\frac{7}{7\sqrt{3}},-\frac{7}{7\sqrt{3}}\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

   (2) $\mathbf{c}=\lambda(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=(7\lambda,-7\lambda,-7\lambda)$
   $\mathbf{c}\times\mathbf{d}=10$
   所以 $\lambda=\frac{5}{28}$,
   所以 $\mathbf{c}=\left(\frac{5}{4},-\frac{5}{4},-\frac{5}{4}\right)$.

5. 易证.

6. $(\mathbf{a}-\mathbf{d})\times(\mathbf{b}-\mathbf{c})$
   $=\mathbf{a}\times(\mathbf{b}-\mathbf{c})-\mathbf{d}\times(\mathbf{b}-\mathbf{c})$
   $=\mathbf{a}\times\mathbf{b}-\mathbf{a}\times\mathbf{c}-\mathbf{d}\times\mathbf{b}+\mathbf{d}\times\mathbf{c}$
   $=\mathbf{c}\times\mathbf{d}-\mathbf{b}\times\mathbf{d}-\mathbf{d}\times\mathbf{b}+\mathbf{d}\times\mathbf{c}$
   $=\mathbf{0}$
   所以 $\mathbf{a}-\mathbf{d}$ 与 $\mathbf{b}-\mathbf{c}$ 共线.

1.6 混合积与双重向量积

1. D.
   解：

   (A.) $|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos<\mathbf{a},\mathbf{b}>=|\mathbf{a}|\,|\mathbf{c}|\cos<\mathbf{a},\mathbf{c}>(|\mathbf{a}|\neq 0)$.

   (B.) 取 $\mathbf{a}=\mathbf{0}$ 或 $\mathbf{b}=\mathbf{0}$.

   (C.) 取 $\mathbf{a}=\mathbf{0}$.

   (D.) 证明：原式左右两边同乘以向量 $\mathbf{c}$, 得

   $$\mathbf{a}\times\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{c}\times\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}=0$$

   由定理 1.6 与命题 1.6.1 得

   $$(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})=0$$

   由推论 1.6.1，命题得证.

2. C.

解:$\mathbf{a}\left[(\mathbf{c}\cdot\mathbf{b})\,\mathbf{b}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\,\mathbf{c}\right]=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\,(\mathbf{c}\cdot\mathbf{d})-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})=0$,又 $\mathbf{a},\mathbf{bc}\neq\mathbf{0}$,得证.

(注:定理 1.6.2 不一定成立,一位内向量叉乘只有在 $\mathbb{R}^3$ 情况下才成立.)

3. 解:与例 1.6.1 同理,$V=\dfrac{59}{6}$.

4. (1) 同理,A,B,C,D 四点共面.

(2) $V=\dfrac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)\right|=\dfrac{58}{3}$,

$$h_D=\frac{6V}{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|}=\frac{6V}{\begin{vmatrix}1&1&1\\2&-2&-3\\4&0&6\end{vmatrix}}=\frac{29}{7}$$

5. $\dfrac{8}{25},\dfrac{5}{2}$

6. (1) 证明:综合运用命题 1.6.1 可证得.

(2) 证明:左边 $=(\mathbf{a},\mathbf{b}+\mathbf{c},\mathbf{c}+\mathbf{a})+(\mathbf{b},\mathbf{b}+\mathbf{c},\mathbf{c}+\mathbf{a})$

$=(\mathbf{a},\mathbf{b}+\mathbf{c},\mathbf{c})+(\mathbf{a},\mathbf{b}+\mathbf{c},\mathbf{a})+\cdots$

$=\cdots$

$=2\,(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})=$ 右边.

(3) 证明:同 (2) 理,展开右边即得.

(注:类比 $(\mathbf{a}-\mathbf{d})\,(\mathbf{b}-\mathbf{d})\,(\mathbf{c}-\mathbf{d})=\mathbf{abc}-\mathbf{abd}-\mathbf{dbc}-\mathbf{adc}+0\,(\mathbf{add}+\mathbf{bdd}+\mathbf{cdd}-\mathbf{ddd})$)

(4) 证明:左边 $=(\mathbf{a}+\mathbf{b})\,(\mathbf{a}\times\mathbf{c}+\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\mathbf{a}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{c})+\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})+\mathbf{b}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})+\mathbf{b}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{c})=$ 右边.

(5) 证明:设 $\mathbf{d}=\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}+\upsilon\mathbf{c}$,

则 $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\times\mathbf{d})=(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\left[\mathbf{c}\times(\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}+\upsilon\mathbf{c})\right]$

$=(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\left[\mathbf{c}\times(\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b})\right]$

$=\mathbf{a}\times\mathbf{b}\,(\lambda\mathbf{c}\times\mathbf{a}+\mu\mathbf{c}\times\mathbf{b})$

$=\lambda\,(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\,(\mathbf{c}\times\mathbf{a})+\mu\,(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\,(\mathbf{c}\times\mathbf{b})$ ①

同理展开其余两式,得

$(\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{a}\times\mathbf{d})=\mu\,(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\,(\mathbf{a}\times\mathbf{b})+\upsilon\,(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\,(\mathbf{a}\times\mathbf{c})$ ②

$(\mathbf{c},\mathbf{a},\mathbf{b}\times\mathbf{d})=\lambda(\mathbf{c}\times\mathbf{a})(\mathbf{b}\times\mathbf{a})+\upsilon(\mathbf{c}\times\mathbf{a})(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$③

① + ② + ③，整理得

左边 $=\lambda[(\mathbf{a}\times\mathbf{b})(\mathbf{c}\times\mathbf{a})+(\mathbf{c}\times\mathbf{a})(\mathbf{b}\times\mathbf{a})]$

$+\mu[(\mathbf{a}\times\mathbf{b})(\mathbf{c}\times\mathbf{b})+(\mathbf{b}\times\mathbf{c})(\mathbf{a}\times\mathbf{b})]$

$+\upsilon[(\mathbf{b}\times\mathbf{c})(\mathbf{a}\times\mathbf{c})+(\mathbf{c}\times\mathbf{a})(\mathbf{b}\times\mathbf{c})]$

$=\lambda\cdot 0+\mu\cdot 0+\upsilon\cdot 0$

$=0=$ 右边.

等式得证.

7. 证明：显然 $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\perp\mathbf{n}$, 则 $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ 共面. 否则：
若 $\mathbf{n}=\mathbf{0}$，则 $\mathbf{a}=\mathbf{b}=\mathbf{c}=\mathbf{0}$, 仍成立；
若 $\mathbf{n}\neq\mathbf{0}$，$\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ 中至少有两个向量共线，则仍成立；
若 $\mathbf{n}\neq\mathbf{0}$，$\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ 胡不共线，则 $\mathbf{n}$ 为 $\mathbf{a},\mathbf{b}$ 所确定的平面的法向量，$\mathbf{n}\cdot\mathbf{c}\neq 0$，这与题设相悖.
故成立.

2 平面与直线

2.1 平面与直线

1. (1) 取 $\mathbb{Z}$ 轴上两点和题设点 $(0,0,0),(0,0,1),(3,1,-2)$.

   所求方程为 $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}=x-3y=0$

   (2) 由平面点法式方程,不妨设所求平面方程为 $3x-2y+5=D\,(D\neq 0)$.
   代入点 $(-1,-5,4)$ 得 $3x-2y-7=0$.

   (3) 不妨设所求平面法向量为 $\mathbf{n}=(a,b,c)$.
   则 $\mathbf{n}\cdot\overrightarrow{M_1M_2}=\mathbf{n}\cdot(1,-8,3)=0$.
   即 $\begin{cases} a+6b+c=0 \\ a-8b+3c=0 \end{cases}$，取一组解 $\mathbf{n}=(13,-1,-7)$.
   同 (2) 理可得 $13x-y-7z=37$.

2. $\overrightarrow{AB}=(-4,5,-1),\overrightarrow{CD}=(-1,0,2)$.
   由题得平面的法向量为 $\mathbf{n_1}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{CD}=(11,7,5)$.
   得此平面方程为 $11(x-4)+7(y-0)+5(z-6)=0$

即 $11x+7y+5z=74$.
$\overrightarrow{AB}=(-4,5,-1)\,,\overrightarrow{BC}=(-4,-6,2)$.
由题得平面 ABC 的法向量为 $\mathbf{n_2}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}=(4,3,1)$.
所以平面的法向量 $\mathbf{n_3}=\mathbf{n_2}\times\overrightarrow{AB}=(-8,0,32)$. 得此平面方程为 $-8(x-5)+32(z-3)=0$.
即 $x-4z+7=0$.

3. $x+2y-z+4=0\Leftrightarrow x+2y-z=-4\Leftrightarrow \dfrac{x}{-4}+\dfrac{y}{-2}+\dfrac{z}{4}=1$
由此知平面过坐标轴上 $A(-4,0,0)\,,B(0,-2,0)\,,C(0,0,4)$
知道 $\overrightarrow{AB}=(4,-2,0)\,,\overrightarrow{AC}=(4,0,4)$.
得参数方程 $\begin{cases} x=-4+2u+v \\ y=-u \\ z=v \end{cases}$

2.2 直线方程

1. (1) 取直线的法向量 $\mathbf{v}$ 使与已知平面的法向量 $\mathbf{n_1}$ 平行，令

$$\mathbf{v}=\lambda\mathbf{n_1}=(6,-3,-5)$$

由 $M(2,-3,-5)$ 得点向式直线标准方程 $\dfrac{x-2}{6}=\dfrac{y+3}{-3}=\dfrac{z+5}{-5}$.

(2) 取所求直线的方向向量 $\mathbf{v}=(x_0,y_0,z_0)$ 与已知两直线的方向向量 $\mathbf{n_1}=(1,1,-1)\,,\mathbf{n_2}=(1,-1,0)$ 垂直.
即 $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n_1}=\mathbf{v}\cdot\mathbf{n_2}=0$, 取 $\mathbf{v}$ 的一组解为 $(1,1,2)$，又 $M(1,0,-2)$
得点向式直线标准方程为 $x-1=y=\dfrac{z+2}{2}$.

(3) 解：设所求直线的方向向量为 $\mathbf{v}=(x_0,y_0,z_0)$, 由题得

$$\mathbf{v}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{1}{2}\right)$$

又 $M(1,-5,3)$ 得直线点向式标准方程为 $x-1=\dfrac{y+5}{\sqrt{2}}=\dfrac{y-3}{-1}$.

(4) 解：设所求直线的方向向量为 $\mathbf{v_0}=(x_0,y_0,z_0)$,
已知平面的法向量为 $\mathbf{n}=(3,-1,2)$
已知直线的方面向量为 $\mathbf{v}=(4,-2,1)$
已知直线上的一个点 $Q(1,3,0)$, 由题得 $\mathbf{v_0}\cdot\mathbf{n}=0$, 且 $\left(\overrightarrow{PQ},\mathbf{v_0},\mathbf{v}\right)=$

0（注：本书第 41 页命题 2.3.2(2)）

即 $\begin{cases} 3x_0 - y_0 + 2z_0 = 0 \\ \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \end{cases}$

得直线点向式标准方程为 $\dfrac{x-1}{-4} = \dfrac{y}{50} = \dfrac{z+2}{31}$

2. (1) 解：令 $y=0$ 得一点 $M(-5,0,-9) \in l$,
已知平面的法向量为 $\mathbf{n_1} = (2,1,-1)\,, \mathbf{n_2} = (3,-1,-2)$
取所求直线的方向向量 $\mathbf{v} = \mathbf{n_1} \times \mathbf{n_2} = (-3,1,-5)\,,$
则该直线点向式方程为 $\dfrac{x+5}{-3} = y = \dfrac{z+9}{-5}$.

(2) 解：从一般方程中消去 z，得 $4y=3x$，消去 x，得 $4y = -3z+18$，于是得

$$\frac{x}{4} = \frac{y}{3} = \frac{z-6}{-4}.$$

3. (1) 解：设以 $\begin{cases} 2x-7y+4z-3=0 \\ 3x-5y+4z+11=0 \end{cases}$ 为轴的平面束是

$$\lambda\,(2x-7y+4z-3) + \mu\,(3x-5y+4z+11) = 0$$

代入点 $(-2,1,3)$ 得 $\mu/\lambda = -1/6$,
故所求平面方程为 $\dfrac{3}{2}x - \dfrac{37}{6}y + \dfrac{10}{3}z - \dfrac{19}{6} = 0$.

(2) 解：同理，设平面束方程为

$$\lambda\,(2x-7y+4z-3) + \mu\,(3x-5y+4z+11) = 0$$

取其法向量 $\mathbf{n_1} = (2\lambda+3\mu, -7\lambda-5\mu, 4\lambda+4\mu)$ 与已知平面法向量 $\mathbf{n_2} = (1,1,1)$ 垂直，即 $\mathbf{n_1}\cdot\mathbf{n_2} = 0$, 解得 $\mu/\lambda = -1/2$,
故所求平面方程为 $\dfrac{3}{2}x - \dfrac{3}{2}z + 2 = 0$.

(3) (a) 解法一；任取过直线 $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{-3} = \dfrac{z-2}{x}$ 的平面方程

$$\pi_1 : 2\frac{x-1}{2} - \frac{y+2}{-3} - \frac{z-2}{2} = 0$$

$$\pi_2 : \frac{x-2}{2} + \frac{y+2}{-3} - 2\frac{z-2}{2} = 0$$

化简得

$$\pi_1 : 6x + 2y - 3z + 4 = 0$$

$$\pi_2 : 3x - 2y - 6z + 2 = 0$$

同理，得所求平面方程为 $x - 8y - 13z + 9 = 0.$

(b) 解法二：已知平面的法向量 $\mathbf{n_1} = (3, 2, 1)$
取已知直线上一点 $(1, -2, -2)$ 及其方向向量 $\mathbf{v} = (2, -3, 2)$
则所求平面的法向量 $\mathbf{n_2} = \mathbf{n_1} \times \mathbf{v} = (1, -12, 13)$
又所求平面过点 $(1, -2, 2)$ 得所求平面方程为

$$x - 8y - 13z + 9 = 0.$$

(4) 解：设该平面为 $Ax + By + Cz + D = 0,$
因为