解析几何答案

陈家宝

目录

1 向量与坐标

1.1 向量的定义、加法和数乘

1. 证明：$\overrightarrow{PA_1}+\overrightarrow{PA_2}+\cdots+\overrightarrow{PA_n}=\left(\overrightarrow{OA_1}-\overrightarrow{OP_1}\right)+\left(\overrightarrow{OA_2}-\overrightarrow{OP_2}\right)+\cdots+\left(\overrightarrow{OA_n}-\overrightarrow{OP_n}\right)=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}-n\overrightarrow{OP}$, 又 $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}=\mathbf{0}$, 故 $\overrightarrow{PA_1}+\overrightarrow{PA_2}+\cdots+\overrightarrow{PA_n}=-n\overrightarrow{OP}=n\overrightarrow{OP}$.

2. (a) $(\mu-\nu)(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})-(\mu+\nu)(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\mu\boldsymbol{a}-\mu\boldsymbol{b}-\nu\boldsymbol{a}+\nu\boldsymbol{b}-\mu\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}-\nu\boldsymbol{a}+\nu\boldsymbol{b}=-2\nu\boldsymbol{a}+2\nu\boldsymbol{b}$.

   (b) $\mathbf{D}=\begin{vmatrix}3&4\\2&-3\end{vmatrix}=-17,\mathbf{D_x}=\begin{vmatrix}\mathbf{a}&4\\\mathbf{b}&-3\end{vmatrix}=-3\mathbf{a}-4\mathbf{b},\mathbf{D_y}=\begin{vmatrix}3&\mathbf{a}\\3&\mathbf{b}\end{vmatrix},\mathbf{x}=\frac{D_x}{D}=\frac{3}{17}\mathbf{a}+\frac{4}{17}\mathbf{b},\mathbf{y}=\frac{D_y}{D}=-\frac{3}{17}\mathbf{b}+\frac{2}{17}\mathbf{a}$.

3. (1)$\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$, (2)$\mathbf{a},\mathbf{b}$ 同向，(3)$\mathbf{a},\mathbf{b}$ 反向，且 $|\mathbf{a}|\geq|\mathbf{b}|(4)\mathbf{a},\mathbf{b}$ 反向,(5)$\mathbf{a},\mathbf{b}$ 同向，且 $|\mathbf{a}|\geq|\mathbf{b}|$.

4. 证明：若 $\lambda+\mu<0,-\lambda<0$，由情形 1，得 $[(\lambda+\mu)+(-\lambda)]\,\mathbf{a}=(\lambda+\mu)\mathbf{a}+(-\lambda)\mathbf{a}$，即 $\mu\mathbf{a}=(\lambda+\mu)\mathbf{a}-\lambda\mathbf{a}$，从而 $(\lambda+\mu)\mathbf{a}=\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{a}$ 得证.

1.2 向量的线性相关性

1. (1) 错，当 $\mathbf{a}=\mathbf{0}$ 时；(2) 错，当 $\mathbf{a}=\mathbf{0}$ 时.

2. 设 $\lambda\mathbf{c}+\mu\mathbf{d}=\mathbf{0}, \lambda(2\mathbf{a}-\mathbf{b})+\mu(3\mathbf{a}-2\mathbf{b})=\mathbf{0}, (2\lambda+3\mu)\mathbf{a}+(-\lambda-2\mu)\mathbf{b}=\mathbf{0}$. 由于 $\mathbf{a},\mathbf{b}$ 不共线，所以 $\begin{cases} 2\lambda+3\mu=0, \\ \lambda+2\mu=0. \end{cases}$ 又 $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=1\neq 0$，所以 $\lambda=\mu=0$，即 $\mathbf{c},\mathbf{d}$ 线性无关.

3. 证明：$\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{CD}$，$E$、$F$ 分别为梯形腰 BC、AD 上的中点，连接 EF 交 AC 于点 H，则 H 为 AC 的中点，$\overrightarrow{FH}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{HE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{FE}=\overrightarrow{FH}+\overrightarrow{HE}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AB}\right)$，因为 $\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{CD}$，而 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 方向一致，所以 $\left|\overrightarrow{FE}\right|=\frac{1}{2}\left(\left|\overrightarrow{AB}\right|+\left|\overrightarrow{DC}\right|\right)$.

4. 设 $\mathbf{a}=\lambda\mathbf{b}+\mu\mathbf{c}$，则

   $\mathbf{a}=-\mathbf{e_1}+3\mathbf{e_2}+2\mathbf{e_3}=2\lambda\mathbf{e_1}-6\lambda\mathbf{e_2}+2\lambda\mathbf{e_3}-3\mu\mathbf{e_1}+12\mu\mathbf{e_2}+11\mu\mathbf{e_3}$,

   即

   $$(-1-4\lambda+3\mu)\,\mathbf{e_1}+(3+6\lambda-12\mu)\,\mathbf{e_2}+(2-2\lambda-11\mu)\,\mathbf{e_3}=\mathbf{0},$$

   又 $\mathbf{e_1}$、$\mathbf{e_2}$、$\mathbf{e_3}$ 线性相关，有

   $$\begin{cases} -1-4\lambda+3\mu=0 \\ 3+6\lambda-12\mu=0 \\ 2-2\lambda-11\mu=0. \end{cases}$$

   解得 $\lambda=-\frac{1}{10}, \mu=\frac{1}{5}$，所以 $\mathbf{a}=\frac{1}{10}\mathbf{b}+\frac{1}{5}\mathbf{c}$.

5. C.

6. 设 $\overrightarrow{RD}=\lambda\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{RE}=\mu\overrightarrow{BE}$, 则

   $$\overrightarrow{RD}=\lambda\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\mu\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{RE}=\overrightarrow{RD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}=\mu\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\mu\overrightarrow{CA},$$

   故

   $$\overrightarrow{RD}=\left(\frac{2}{3}\mu-\frac{1}{3}\right)\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}(1-\mu)\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\lambda\overrightarrow{BC},$$

   推得

   $$\begin{cases} \frac{2}{3}\mu-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\lambda, \\ \frac{1}{3}(1-\mu)=\lambda \end{cases}$$

   解得

   $$\begin{cases} \lambda=\frac{1}{7} \\ \mu=\frac{4}{7} \end{cases}$$

   所以 $RD=\frac{1}{7}AD, RE=\frac{4}{7}BE$.

7. 由题得

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{OP}=\left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}\right)+3\overrightarrow{OP}$,

又 $\overrightarrow{CP}=2\overrightarrow{PG}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}$, 所以 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\mathbf{0}$, 则 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$ 得证.

8. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=4\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=4\overrightarrow{OP}+2\overrightarrow{PH}+2\overrightarrow{PG}=4\overrightarrow{OP}$

9. "$\Rightarrow$" 因为 A、B、C 三点共线，所以存在不全为 0 的实数 k、l 满足 $k\overrightarrow{AB}+l\overrightarrow{AC}=\mathbf{0}$, 即 $k\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)+l\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\right)=\mathbf{0}$, 化简得 $-(k+l)\overrightarrow{OA}+k\overrightarrow{OB}+l\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$, 分别取 $\lambda=-(k+l),\mu=k,\gamma=l$, 得证.
"$\Leftarrow$" 因为 $\lambda=-(\mu+\gamma)$，设 $\lambda\neq 0$，则 μ、γ 不全为 0，$-(\mu+\gamma)\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$，化简得 $\mu\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)+\gamma\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\right)=\mathbf{0}$，即 $\mu\overrightarrow{AB}+\gamma\overrightarrow{AC}=\mathbf{0}$，故 A、B、C 三点共线.

10. "$\Rightarrow$" 因为 P_1,P_2,P_3,P_4 四点共面，所以 $\overrightarrow{P_1P_2},\overrightarrow{P_1P_3},\overrightarrow{P_1P_4}$ 线性相关，存在不全为 0 的 m,n,p 使得 $m\overrightarrow{P_1P_2}+n\overrightarrow{P_1P_3}+p\overrightarrow{P_1P_4}=\mathbf{0}$, 即

$$m\left(\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP_1}\right)+n\left(\overrightarrow{OP_3}-\overrightarrow{OP_1}\right)+p\left(\overrightarrow{OP_4}-\overrightarrow{OP_1}\right)=\mathbf{0},$$

即

$$-(m+n+p)\,\mathbf{n}+m\mathbf{r_2}+n\mathbf{r_3}+p\mathbf{r_4}=\mathbf{0},$$

令 $m+n+p=\lambda_1,\lambda_2=m,\lambda_3=n,\lambda_4=p$, 得证.
"$\Leftarrow$" 设 $\lambda_1\neq 0$，则 $\lambda_1=-(\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4)$，所以 $\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$ 不全为 0,

$$-(\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4)\,\mathbf{r_1}+\lambda_2\mathbf{r_2}+\lambda_3\mathbf{r_3}+\lambda_4\mathbf{r_4}=\mathbf{0},$$

因此 P_1,P_2,P_3,P_4 四点共面.

11. A,B,C 三点不共线 $\Leftrightarrow\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ 不共线 $\Leftrightarrow$ 点 P 在 π 上 $\Leftrightarrow\overrightarrow{AP}=\mu\overrightarrow{AB}+\gamma\overrightarrow{AC}\,(\mu,\gamma\in\mathbb{R})\Leftrightarrow\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=\mu\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)+\gamma\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\right)\Leftrightarrow\overrightarrow{OP}=(1-\mu-\gamma)\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC}$, 取 $\gamma=1-\mu-\gamma$，得证.

12. (1)$\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\mathbf{e_1}+\frac{1}{3}\mathbf{e_2},\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\mathbf{e_1}+\frac{2}{3}\mathbf{e_2}$
(2) 由角平分线的性质得 $\frac{|\overrightarrow{BT}|}{|\overrightarrow{TC}|}=\frac{\mathbf{e_1}}{\mathbf{e_2}}$，又 $\overrightarrow{BT}$ 与 $\overrightarrow{TC}$ 同向，则 $\overrightarrow{BT}=$

$\frac{\mathbf{e_1}}{\mathbf{e_2}}\overrightarrow{TC}, \overrightarrow{BT} = \overrightarrow{AT} - \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{TC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AT}$,因此 $\overrightarrow{AT} - \overrightarrow{AB} = \frac{\mathbf{e_1}}{\mathbf{e_2}}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AT}\right)$,
得 $\overrightarrow{AT} = \frac{|e_1|+|e_2|}{|e_1|+|e_2|}\mathbf{e_1}$.

1.3 标架与坐标