解析几何答案

陈家宝

目录

1 向量与坐标

1.1 向量的定义、加法和数乘

1. 证明：$\overrightarrow{PA_1}+\overrightarrow{PA_2}+\cdots+\overrightarrow{PA_n}=\left(\overrightarrow{OA_1}-\overrightarrow{OP_1}\right)+\left(\overrightarrow{OA_2}-\overrightarrow{OP_2}\right)+\cdots+\left(\overrightarrow{OA_n}-\overrightarrow{OP_n}\right)=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}-n\overrightarrow{OP}$, 又 $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}=\mathbf{0}$, 故 $\overrightarrow{PA_1}+\overrightarrow{PA_2}+\cdots+\overrightarrow{PA_n}=-n\overrightarrow{OP}=n\overrightarrow{OP}$.

2. (1) $(\mu-\upsilon)(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})-(\mu+\upsilon)(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\mu\boldsymbol{a}-\mu\boldsymbol{b}-\upsilon\boldsymbol{a}+\upsilon\boldsymbol{b}-\mu\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}-\upsilon\boldsymbol{a}+\upsilon\boldsymbol{b}=-2\upsilon\boldsymbol{a}+2\upsilon\boldsymbol{b}$.

   (2) $\mathbf{D}=\begin{vmatrix}3 & 4\\ 2 & -3\end{vmatrix}=-17,\mathbf{D_x}=\begin{vmatrix}\mathbf{a} & 4\\ \mathbf{b} & -3\end{vmatrix}=-3\mathbf{a}-4\mathbf{b},\mathbf{D_y}=\begin{vmatrix}3 & \mathbf{a}\\ 3 & \mathbf{b}\end{vmatrix},\mathbf{x}=\frac{D_x}{D}=\frac{3}{17}\mathbf{a}+\frac{4}{17}\mathbf{b},\mathbf{y}=\frac{D_y}{D}=-\frac{3}{17}\mathbf{b}+\frac{2}{17}\mathbf{a}$.

3. (1)$\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$, (2)$\mathbf{a},\mathbf{b}$ 同向，(3)$\mathbf{a},\mathbf{b}$ 反向，且 $|\mathbf{a}|\geq|\mathbf{b}|(4)\mathbf{a},\mathbf{b}$ 反向,(5)$\mathbf{a},\mathbf{b}$ 同向，且 $|\mathbf{a}|\geq|\mathbf{b}|$.

4. 证明：若 $\lambda+\mu<0, -\lambda<0$，由情形 1，得 $[(\lambda+\mu)+(-\lambda)]\mathbf{a}=(\lambda+\mu)\mathbf{a}+(-\lambda)\mathbf{a}$，即 $\mu\mathbf{a}=(\lambda+\mu)\mathbf{a}-\lambda\mathbf{a}$，从而 $(\lambda+\mu)\mathbf{a}=\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{a}$ 得证.

1.2 向量的线性相关性

1. (1) 错，当 $\mathbf{a}=\mathbf{0}$ 时；(2) 错，当 $\mathbf{a}=\mathbf{0}$ 时.

2. 设 $\lambda\mathbf{c}+\mu\mathbf{d}=\mathbf{0}, \lambda(2\mathbf{a}-\mathbf{b})+\mu(3\mathbf{a}-2\mathbf{b})=\mathbf{0}, (2\lambda+3\mu)\mathbf{a}+(-\lambda-2\mu)\mathbf{b}=\mathbf{0}$. 由于 $\mathbf{a},\mathbf{b}$ 不共线，所以 $\begin{cases}2\lambda+3\mu=0,\\ \lambda+2\mu=0.\end{cases}$ 又 $\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{vmatrix}=1\neq 0$，所以 $\lambda=\mu=0$，即 $\mathbf{c},\mathbf{d}$ 线性无关.

3. 证明：$\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{CD}$，$E$、$F$ 分别为梯形腰 BC、AD 上的中点，连接 EF 交 AC 于点 H，则 H 为 AC 的中点，$\overrightarrow{FH}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{HE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{FE}=\overrightarrow{FH}+\overrightarrow{HE}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AB}\right)$，因为 $\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{CD}$，而 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 方向一致，所以 $\left|\overrightarrow{FE}\right|=\frac{1}{2}\left(\left|\overrightarrow{AB}\right|+\left|\overrightarrow{DC}\right|\right)$.

4. 设 $\mathbf{a}=\lambda\mathbf{b}+\mu\mathbf{c}$，则

$$\mathbf{a}=-\mathbf{e_1}+3\mathbf{e_2}+2\mathbf{e_3}=2\lambda\mathbf{e_1}-6\lambda\mathbf{e_2}+2\lambda\mathbf{e_3}-3\mu\mathbf{e_1}+12\mu\mathbf{e_2}+11\mu\mathbf{e_3},$$

即

$$(-1-4\lambda+3\mu)\,\mathbf{e_1}+(3+6\lambda-12\mu)\,\mathbf{e_2}+(2-2\lambda-11\mu)\,\mathbf{e_3}=\mathbf{0},$$

又 $\mathbf{e_1}$、$\mathbf{e_2}$、$\mathbf{e_3}$ 线性相关，有

$$\begin{cases}-1-4\lambda+3\mu=0\\ 3+6\lambda-12\mu=0\\ 2-2\lambda-11\mu=0.\end{cases}$$

解得 $\lambda=-\frac{1}{10}, \mu=\frac{1}{5}$，所以 $\mathbf{a}=\frac{1}{10}\mathbf{b}+\frac{1}{5}\mathbf{c}$.

5. C.

6. 设 $\overrightarrow{RD}=\lambda\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{RE}=\mu\overrightarrow{BE}$, 则

$$\overrightarrow{RD}=\lambda\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\mu\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{RE}=\overrightarrow{RD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}=\mu\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\mu\overrightarrow{CA},$$

故
$$\overrightarrow{RD}=\left(\frac{2}{3}\mu-\frac{1}{3}\right)\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\left(1-\mu\right)\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\lambda\overrightarrow{BC},$$
推得
$$\begin{cases}\frac{2}{3}\mu-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\lambda,\\ \frac{1}{3}\left(1-\mu\right)=\lambda\end{cases}$$
解得
$$\begin{cases}\lambda=\frac{1}{7}\\ \mu=\frac{4}{7}\end{cases}$$
所以 $RD=\frac{1}{7}AD,RE=\frac{4}{7}BE.$

7. 由题得
$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{OP}=\left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}\right)+3\overrightarrow{OP},$$
又 $\overrightarrow{CP}=2\overrightarrow{PG}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}$, 所以 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\mathbf{0}$, 则 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$ 得证.

8. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=4\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=4\overrightarrow{OP}+2\overrightarrow{PH}+2\overrightarrow{PG}=4\overrightarrow{OP}$

9. "$\Rightarrow$" 因为 A、B、C 三点共线，所以存在不全为 0 的实数 k、l 满足 $k\overrightarrow{AB}+l\overrightarrow{AC}=\mathbf{0}$, 即 $k\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)+l\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\right)=\mathbf{0}$, 化简得 $-\left(k+l\right)\overrightarrow{OA}+k\overrightarrow{OB}+l\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$, 分别取 $\lambda=-\left(k+l\right),\mu=k,\gamma=l$, 得证.
"$\Leftarrow$" 因为 $\lambda=-\left(\mu+\gamma\right)$，设 $\lambda\neq 0$，则 μ、γ 不全为 0，$-\left(\mu+\gamma\right)\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$，化简得 $\mu\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)+\gamma\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\right)=\mathbf{0}$，即 $\mu\overrightarrow{AB}+\gamma\overrightarrow{AC}=\mathbf{0}$，故 A、B、C 三点共线.

10. "$\Rightarrow$" 因为 P_1,P_2,P_3,P_4 四点共面，所以 $\overrightarrow{P_1P_2},\overrightarrow{P_1P_3},\overrightarrow{P_1P_4}$ 线性相关，存在不全为 0 的 m,n,p 使得 $m\overrightarrow{P_1P_2}+n\overrightarrow{P_1P_3}+p\overrightarrow{P_1P_4}=\mathbf{0}$, 即
$$m\left(\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP_1}\right)+n\left(\overrightarrow{OP_3}-\overrightarrow{OP_1}\right)+p\left(\overrightarrow{OP_4}-\overrightarrow{OP_1}\right)=\mathbf{0},$$
即
$$-\left(m+n+p\right)\mathbf{n}+m\mathbf{r_2}+n\mathbf{r_3}+p\mathbf{r_4}=\mathbf{0},$$

令 $m+n+p=\lambda_1,\lambda_2=m,\lambda_3=n,\lambda_4=p$, 得证.

"$\Leftarrow$" 设 $\lambda_1\neq 0$，则 $\lambda_1=-(\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4)$，所以 $\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$ 不全为 0,

$$-(\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4)\,\mathbf{r_1}+\lambda_2\mathbf{r_2}+\lambda_3\mathbf{r_3}+\lambda_4\mathbf{r_4}=\mathbf{0},$$

因此 P_1,P_2,P_3,P_4 四点共面.

11. A,B,C 三点不共线 $\Leftrightarrow\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ 不共线 $\Leftrightarrow$ 点 P 在 π 上 $\Leftrightarrow\overrightarrow{AP}=\mu\overrightarrow{AB}+\gamma\overrightarrow{AC}\,(\mu,\gamma\in\mathbb{R})\Leftrightarrow\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=\mu\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)+\gamma\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\right)\Leftrightarrow\overrightarrow{OP}=(1-\mu-\gamma)\,\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC}$, 取 $\gamma=1-\mu-\gamma$，得证.

12. (1)$\overrightarrow{AD}=\dfrac{2}{3}\mathbf{e_1}+\dfrac{1}{3}\mathbf{e_2},\overrightarrow{AE}=\dfrac{1}{3}\mathbf{e_1}+\dfrac{2}{3}\mathbf{e_2}$

(2) 由角平分线的性质得 $\dfrac{\left|\overrightarrow{BT}\right|}{\left|\overrightarrow{TC}\right|}=\dfrac{\mathbf{e_1}}{\mathbf{e_2}}$，又 $\overrightarrow{BT}$ 与 $\overrightarrow{TC}$ 同向，则 $\overrightarrow{BT}=\dfrac{\mathbf{e_1}}{\mathbf{e_2}}\overrightarrow{TC},\overrightarrow{BT}=\overrightarrow{AT}-\overrightarrow{AB},\overrightarrow{TC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AT}$,因此 $\overrightarrow{AT}-\overrightarrow{AB}=\dfrac{\mathbf{e_1}}{\mathbf{e_2}}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AT}\right)$, 得 $\overrightarrow{AT}=\dfrac{|e_1|+|e_2|}{|e_1|+|e_2|}\mathbf{e_1}$.

1.3 标架与坐标

1. (1)$(0,16,-1)$.(2)$(-11,9,-2)$.

2. 分析：以本书第 25 页推论 1.6.1 作判别式，以本书第 7 页定理 1.21(4)

(1) $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})=\begin{vmatrix}5&2&1\\-1&4&2\\-1&-1&5\end{vmatrix}=121\neq 0$, 故 $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ 不共面，无线性组合.

(2) 同理 $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ 共面，

设 $\mathbf{c}=\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}$,

得 $\begin{cases}-3=6\lambda-9\mu\\6=4\lambda+6\mu\\3=2\lambda-3\mu\end{cases}$

解得 $\mathbf{c}=\dfrac{1}{2}\mathbf{a}+\dfrac{4}{3}\mathbf{b}$.

(3) 同理 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 共面，但 $\mathbf{a}$ 平行 $\mathbf{b}$，且 $\mathbf{a} \neq \mathbf{c}$, 故显然无法以线性组合表示 $\mathbf{c}$.

3. 证明：设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 中，A_i 所对得面的重心为 G_i，
欲证 $A_iG_i\,(i=1,2,3,4)$ 相交于一点,在 A_iG_i 上取一点 P_i 使得 $\overrightarrow{A_iG_i} = 3\overrightarrow{P_iG_i}$,
从而 $\overrightarrow{OP_i} = \dfrac{\overrightarrow{OA_i} + 3\overrightarrow{OG_i}}{4}$,
设 A_i 坐标为 $(x_i, y_i, z_i)\,(i=1,2,3,4)$ 则有

$$G_1\left(\frac{x_2+x_3+x_4}{3}, \frac{y_2+y_3+y_4}{3}, \frac{z_2+z_3+z_4}{3}\right),$$

$$G_2\left(\frac{x_1+x_3+x_4}{3}, \frac{y_1+y_3+y_4}{3}, \frac{z_1+z_3+z_4}{3}\right),$$

$$G_3\left(\frac{x_1+x_2+x_4}{3}, \frac{y_1+y_2+y_4}{3}, \frac{z_1+z_2+z_4}{3}\right),$$

$$G_4\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}, \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right),$$

所以 $P_1\left(\dfrac{x_1+3\dfrac{x_2+x_3+x_4}{3}}{4}, \dfrac{y_1+3\dfrac{y_2+y_3+y_4}{3}}{4}, \dfrac{z_1+3\dfrac{z_2+z_3+z_4}{3}}{4}\right)$,
即 $P_1\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}, \dfrac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}, \dfrac{z_1+z_2+z_3+z_4}{4}\right)$, 同理可得 P_2, P_3, P_4 坐标，可知 P_1, P_2, P_3, P_4 为同一点，故 A_iG_i 交于同一点 P 且点 P 到任一顶点的距离等于此点到对面重心的三倍.

4. 证明：必要性：因为 π 上三点 $p_i\,(x_i, y_i)_{i=1,2,3}$ 共线，故 $\overrightarrow{p_1p_2}$ 平行于 $\overrightarrow{p_1p_3}$，即 $\dfrac{x_2-x_1}{x_3-x_1} = \dfrac{y_2-y_1}{y_3-y_1}$
即 $x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1-x_1y_3-x_3y_2-x_2y_1 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$. 充分性：由 $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1-x_1y_3-x_3y_2-x_2y_1 = 0$
整理得

$$\frac{x_2-x_1}{x_3-x_1} = \frac{y_2-y_1}{y_3-y_1},$$

即 $\overrightarrow{p_1p_2}$ 平行于 $\overrightarrow{p_1p_3}$，所以 π 上三点 $p_i\left(x_i,y_i\right)_{i=1,2,3}$ 共线. 综上，π 上三点 $p_i\left(x_i,y_i\right)_{i=1,2,3}$ 共线当且仅当 $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0.$

5. 证明:建立仿射坐标系 $\left\{\overrightarrow{A},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right\}$, 由 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB}=\lambda\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AP}\right)$, 得 $\overrightarrow{AP}=\dfrac{\lambda}{\lambda+1}\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AP}=\left(\dfrac{\lambda}{\lambda+1},0\right)$;
$\overrightarrow{AR}=\dfrac{1}{1+\upsilon}\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AR}=\left(0,\dfrac{1}{1+\upsilon}\right)$;
$\overrightarrow{AQ}=\dfrac{1}{1+\mu}\overrightarrow{AB}+\dfrac{\mu}{1+\mu}\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AQ}=\left(\dfrac{1}{1+\mu},\dfrac{\mu}{1+\mu}\right)$;
由 P,Q,R 共线当且仅当 $\begin{vmatrix} \dfrac{1}{1+\mu} & 0 & 1 \\ 0 & \dfrac{1}{1+\upsilon} & 1 \\ \dfrac{1}{1+\mu} & \dfrac{\mu}{1+\mu} & 1 \end{vmatrix}=0$，得 $\lambda\mu\upsilon=-1$，证毕.
（注：事实上，此即平面几何上的梅涅劳斯定理）

1.4 数量积

1. $\mathbf{ab}+\mathbf{bc}+\mathbf{ca}=\dfrac{1}{2}\left[(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})-(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})\right]=-13$
2. $(3\mathbf{a}+2\mathbf{b})\,(2\mathbf{a}-5\mathbf{b})=6\,|\mathbf{a}|^2-0\,|\mathbf{b}|^2-11\mathbf{ab}=14-33\sqrt{3}.$
3. 由题，得

$$(\mathbf{a}+3\mathbf{b})\,(7\mathbf{a}-5\mathbf{b})=(\mathbf{a}-4\mathbf{b})\,(7\mathbf{a}-2\mathbf{b})=0$$

解得：$\mathbf{ab}=\dfrac{1}{2}\,|\mathbf{b}|^2$ 且 $|\mathbf{a}|=|\mathbf{b}|$，知 $\cos\angle(\mathbf{a},\mathbf{b})=\dfrac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}=\dfrac{1}{2}$, 故 $\angle(\mathbf{a},\mathbf{b})=\dfrac{\pi}{3}$

4. (1) 错误：数量的概念不等同于向量概念；

   (2) 正确；

   (3) 错误：向量相等的必要条件是方向相同；

   (4) 错误：左边 $=|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos^2\theta$，右边 $=|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|$；

(5) 错误：向量相等的必要条件是方向相同；

(6) 错误：左边 $= |\mathbf{c}| \cdot |\mathbf{a}| \cdot \cos\angle(\mathbf{c},\mathbf{a}) \neq |\mathbf{c}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos\angle(\mathbf{c},\mathbf{b}) =$ 右边；

5. 证明：左边 $= (\mathbf{a}+\mathbf{b})^2 + (\mathbf{a}-\mathbf{b})^2 = 2\mathbf{a}^2 + 2\mathbf{b}^2 + 2\mathbf{ab} - 2\mathbf{ab} =$ 右边.
（注：几何含义为平行四边形两斜边的平方和等于四条边长的平方和）

6. (1) 证明：由向量乘法交换律得

$$(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}),$$

故 $\mathbf{a}[(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\cdot\mathbf{b}] = 0$, 所以两向量垂直.
（注：$(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\cdot\mathbf{b} - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = \mathbf{a}\times\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ 不一定成立.）

(2) 证明：因为 $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}$ 不共线，取该平面任意向量 $\mathbf{c} = \lambda\mathbf{v_1} + \mu\mathbf{v_2}$, 则

$$(\mathbf{a}-\mathbf{b})\mathbf{c} = (\mathbf{a}-\mathbf{b})(\lambda\mathbf{v_1} + \mu\mathbf{v_2}) = \lambda(\mathbf{av_1} - \mathbf{bv_1}) + \mu(\mathbf{av_2} - \mathbf{bv_2}) = 0$$

故 $(\mathbf{a}-\mathbf{b}) \perp \mathbf{c}$, 由 $\mathbf{c}$ 的任意性得 $\mathbf{a}-\mathbf{b} = \mathbf{0}$, 所以 $\mathbf{a} = \mathbf{b}$.

(3) 证明：假设 $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$, 由题意，得

$$\mathbf{ra} - \mathbf{rb} = 0$$

得 $\mathbf{a} = \mathbf{b}$; 同理可得 $\mathbf{a} = \mathbf{c}, \mathbf{b} = \mathbf{c}$, 这与 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 不共面矛盾，故 $\mathbf{r} = \mathbf{0}$.

1.5 向量积

1. A.

2. A.

3. $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$
$= (2\mathbf{m}-\mathbf{n})\times(4\mathbf{m}-5\mathbf{n})$
$= 8(\mathbf{m}\times\mathbf{m}) - 10\mathbf{m}\times\mathbf{n} - 4\mathbf{n}\times\mathbf{m} + 5\mathbf{n}\times\mathbf{n}$
$= -6\mathbf{m}\times\mathbf{n}$
得 $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = 6|\mathbf{m}\times\mathbf{n}| = 3\sqrt{2}$.

4. 因为 $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \left(\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \right) = (7, -7, -7)$.

(1) 令 $\mathbf{m} = (7, -7, -7)$, 则

$$\mathbf{c} = \frac{\mathbf{m}}{|\mathbf{m}|} = \left(\frac{7}{7\sqrt{3}}, -\frac{7}{7\sqrt{3}}, -\frac{7}{7\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

(2) $\mathbf{c} = \lambda (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (7\lambda, -7\lambda, -7\lambda)$
$\mathbf{c} \times \mathbf{d} = 10$
所以 $\lambda = \dfrac{5}{28}$,
所以 $\mathbf{c} = \left(\dfrac{5}{4}, -\dfrac{5}{4}, -\dfrac{5}{4}\right)$.

5. 易证.

6. $(\mathbf{a} - \mathbf{d}) \times (\mathbf{b} - \mathbf{c})$
$= \mathbf{a} \times (\mathbf{b} - \mathbf{c}) - \mathbf{d} \times (\mathbf{b} - \mathbf{c})$
$= \mathbf{a} \times \mathbf{b} - \mathbf{a} \times \mathbf{c} - \mathbf{d} \times \mathbf{b} + \mathbf{d} \times \mathbf{c}$
$= \mathbf{c} \times \mathbf{d} - \mathbf{b} \times \mathbf{d} - \mathbf{d} \times \mathbf{b} + \mathbf{d} \times \mathbf{c}$
$= \mathbf{0}$
所以 $\mathbf{a} - \mathbf{d}$ 与 $\mathbf{b} - \mathbf{c}$ 共线.

1.6 混合积与双重向量积

1. D.
解：

(A.) $|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos < \mathbf{a}, \mathbf{b} >= |\mathbf{a}|\,|\mathbf{c}| \cos < \mathbf{a}, \mathbf{c} > (|\mathbf{a}| \neq 0)$.

(B.) 取 $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ 或 $\mathbf{b} = \mathbf{0}$.

(C.) 取 $\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

(D.) 证明：原式左右两边同乘以向量 $\mathbf{c}$, 得

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{c} \times \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = 0$$

由定理 1.6 与命题 1.6.1 得

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0$$

由推论 1.6.1，命题得证.

2. C.

解:$\mathbf{a}\left[(\mathbf{c}\cdot\mathbf{b})\,\mathbf{b}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\,\mathbf{c}\right]=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\,(\mathbf{c}\cdot\mathbf{d})-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})=0$,又 $\mathbf{a},\mathbf{bc}\neq\mathbf{0}$，得证.

（注：定理 1.6.2 不一定成立，一位内向量叉乘只有在 $\mathbb{R}^3$ 情况下才成立.）

3. 解：与例 1.6.1 同理，$V=\dfrac{59}{6}$.

4. (1) 同理，A,B,C,D 四点共面.

(2) $V=\dfrac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)\right|=\dfrac{58}{3}$,

$$h_D=\frac{6V}{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|}=\frac{6V}{\begin{vmatrix}1&1&1\\2&-2&-3\\4&0&6\end{vmatrix}}=\frac{29}{7}$$

5. $\dfrac{8}{25},\dfrac{5}{2}$

6. (1) 证明：综合运用命题 1.6.1 可证得.

(2) 证明：左边 $=(\mathbf{a},\mathbf{b}+\mathbf{c},\mathbf{c}+\mathbf{a})+(\mathbf{b},\mathbf{b}+\mathbf{c},\mathbf{c}+\mathbf{a})$

$=(\mathbf{a},\mathbf{b}+\mathbf{c},\mathbf{c})+(\mathbf{a},\mathbf{b}+\mathbf{c},\mathbf{a})+\cdots$

$=\cdots$

$=2\,(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})=$ 右边.

(3) 证明：同 (2) 理，展开右边即得.

（注：类比 $(\mathbf{a}-\mathbf{d})\,(\mathbf{b}-\mathbf{d})\,(\mathbf{c}-\mathbf{d})=\mathbf{abc}-\mathbf{abd}-\mathbf{dbc}-\mathbf{adc}+0\,(\mathbf{add}+\mathbf{bdd}+\mathbf{cdd}-\mathbf{ddd})$）

(4) 证明：左边 $=(\mathbf{a}+\mathbf{b})\,(\mathbf{a}\times\mathbf{c}+\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\mathbf{a}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{c})+\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})+\mathbf{b}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})+\mathbf{b}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{c})=$ 右边.

(5) 证明：设 $\mathbf{d}=\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}+\upsilon\mathbf{c}$,

则 $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\times\mathbf{d})=(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\left[\mathbf{c}\times(\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}+\upsilon\mathbf{c})\right]$

$=(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\left[\mathbf{c}\times(\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b})\right]$

$=\mathbf{a}\times\mathbf{b}\,(\lambda\mathbf{c}\times\mathbf{a}+\mu\mathbf{c}\times\mathbf{b})$

$=\lambda\,(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\,(\mathbf{c}\times\mathbf{a})+\mu\,(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\,(\mathbf{c}\times\mathbf{b})$ ①

同理展开其余两式，得

$(\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{a}\times\mathbf{d})=\mu\,(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\,(\mathbf{a}\times\mathbf{b})+\upsilon\,(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\,(\mathbf{a}\times\mathbf{c})$ ②

$(\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}\times\mathbf{d}) = \lambda(\mathbf{c}\times\mathbf{a})(\mathbf{b}\times\mathbf{a}) + \upsilon(\mathbf{c}\times\mathbf{a})(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$③

① + ② + ③，整理得

左边 $= \lambda[(\mathbf{a}\times\mathbf{b})(\mathbf{c}\times\mathbf{a}) + (\mathbf{c}\times\mathbf{a})(\mathbf{b}\times\mathbf{a})]$

$+ \mu[(\mathbf{a}\times\mathbf{b})(\mathbf{c}\times\mathbf{b}) + (\mathbf{b}\times\mathbf{c})(\mathbf{a}\times\mathbf{b})]$

$+ \upsilon[(\mathbf{b}\times\mathbf{c})(\mathbf{a}\times\mathbf{c}) + (\mathbf{c}\times\mathbf{a})(\mathbf{b}\times\mathbf{c})]$

$= \lambda\cdot 0 + \mu\cdot 0 + \upsilon\cdot 0$

$= 0 =$ 右边.

等式得证.

7. 证明：显然 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \perp \mathbf{n}$, 则 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 共面. 否则：

若 $\mathbf{n} = \mathbf{0}$，则 $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{c} = \mathbf{0}$, 仍成立；

若 $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$，$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 中至少有两个向量共线，则仍成立；

若 $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$，$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 胡不共线，则 $\mathbf{n}$ 为 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 所确定的平面的法向量，$\mathbf{n}\cdot\mathbf{c} \neq 0$，这与题设相悖.

故成立.