

# 解析几何答案

陈家宝

## 目录

1 向量与坐标	1
1.1 向量的定义、加法和数乘	1
1.2 向量的线性相关性	2
1.3 标架与坐标	4
1.4 数量积	6
1.5 向量积	7

## 1 向量与坐标

### 1.1 向量的定义、加法和数乘

1. 证明:  $\overrightarrow{PA_1} + \overrightarrow{PA_2} + \cdots + \overrightarrow{PA_n} = (\overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OP_1}) + (\overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OP_2}) + \cdots + (\overrightarrow{OA_n} - \overrightarrow{OP_n}) = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \cdots + \overrightarrow{OA_n} - n\overrightarrow{OP}$ , 又  $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \cdots + \overrightarrow{OA_n} = \mathbf{0}$ , 故  $\overrightarrow{PA_1} + \overrightarrow{PA_2} + \cdots + \overrightarrow{PA_n} = -n\overrightarrow{OP} = n\overrightarrow{OP}$ .
2. (1)  $(\mu - \nu)(\mathbf{a} - \mathbf{b}) - (\mu + \nu)(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mu\mathbf{a} - \mu\mathbf{b} - \nu\mathbf{a} + \nu\mathbf{b} - \mu\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} - \nu\mathbf{a} + \nu\mathbf{b} = -2\nu\mathbf{a} + 2\nu\mathbf{b}$ .  
(2)  $\mathbf{D} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -17, \mathbf{D}_x = \begin{vmatrix} \mathbf{a} & 4 \\ \mathbf{b} & -3 \end{vmatrix} = -3\mathbf{a} - 4\mathbf{b}, \mathbf{D}_y = \begin{vmatrix} 3 & \mathbf{a} \\ 3 & \mathbf{b} \end{vmatrix}, \mathbf{x} = \frac{D_x}{D} = \frac{3}{17}\mathbf{a} + \frac{4}{17}\mathbf{b}, \mathbf{y} = \frac{D_y}{D} = -\frac{3}{17}\mathbf{b} + \frac{2}{17}\mathbf{a}$ .
3. (1) $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ , (2) $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  同向, (3) $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  反向, 且  $|\mathbf{a}| \geq |\mathbf{b}|$  (4) $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  反向, (5) $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  同向, 且  $|\mathbf{a}| \geq |\mathbf{b}|$ .

4. 证明: 若  $\lambda + \mu < 0, -\lambda < 0$ , 由情形 1, 得  $[(\lambda + \mu) + (-\lambda)]\mathbf{a} = (\lambda + \mu)\mathbf{a} + (-\lambda)\mathbf{a}$ , 即  $\mu\mathbf{a} = (\lambda + \mu)\mathbf{a} - \lambda\mathbf{a}$ , 从而  $(\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}$  得证.

## 1.2 向量的线性相关性

- (1) 错, 当  $\mathbf{a} = \mathbf{0}$  时; (2) 错, 当  $\mathbf{a} = \mathbf{0}$  时.
- 设  $\lambda\mathbf{c} + \mu\mathbf{d} = \mathbf{0}, \lambda(2\mathbf{a} - \mathbf{b}) + \mu(3\mathbf{a} - 2\mathbf{b}) = \mathbf{0}, (2\lambda + 3\mu)\mathbf{a} + (-\lambda - 2\mu)\mathbf{b} = \mathbf{0}$ .  
由于  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  不共线, 所以  $\begin{cases} 2\lambda + 3\mu = 0, \\ \lambda + 2\mu = 0. \end{cases}$  又  $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ , 所以  $\lambda = \mu = 0$ , 即  $\mathbf{c}, \mathbf{d}$  线性无关.
- 证明:  $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{CD}$ ,  $E, F$  分别为梯形腰  $BC, AD$  上的中点, 连接  $EF$  交  $AC$  于点  $H$ , 则  $H$  为  $AC$  的中点,  $\overrightarrow{FH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{HE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{FH} + \overrightarrow{HE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AB})$ , 因为  $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{CD}$ , 而  $\overrightarrow{AB}$  与  $\overrightarrow{CD}$  方向一致, 所以  $|\overrightarrow{FE}| = \frac{1}{2}(|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{DC}|)$ .
- 设  $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{b} + \mu\mathbf{c}$ , 则

$$\mathbf{a} = -\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3 = 2\lambda\mathbf{e}_1 - 6\lambda\mathbf{e}_2 + 2\lambda\mathbf{e}_3 - 3\mu\mathbf{e}_1 + 12\mu\mathbf{e}_2 + 11\mu\mathbf{e}_3,$$

即

$$(-1 - 4\lambda + 3\mu)\mathbf{e}_1 + (3 + 6\lambda - 12\mu)\mathbf{e}_2 + (2 - 2\lambda - 11\mu)\mathbf{e}_3 = \mathbf{0},$$

又  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  线性相关, 有

$$\begin{cases} -1 - 4\lambda + 3\mu = 0 \\ 3 + 6\lambda - 12\mu = 0 \\ 2 - 2\lambda - 11\mu = 0. \end{cases}$$

解得  $\lambda = -\frac{1}{10}, \mu = \frac{1}{5}$ , 所以  $\mathbf{a} = \frac{1}{10}\mathbf{b} + \frac{1}{5}\mathbf{c}$ .

5. C.

6. 设  $\overrightarrow{RD} = \lambda\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{RE} = \mu\overrightarrow{BE}$ , 则

$$\overrightarrow{RD} = \lambda\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\mu\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{RE} = \overrightarrow{RD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} = \mu\overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\mu\overrightarrow{CA},$$

故

$$\overrightarrow{RD} = \left(\frac{2}{3}\mu - \frac{1}{3}\right)\overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}(1-\mu)\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\lambda\overrightarrow{BC},$$

推得

$$\begin{cases} \frac{2}{3}\mu - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\lambda, \\ \frac{1}{3}(1-\mu) = \lambda \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} \lambda = \frac{1}{7} \\ \mu = \frac{4}{7} \end{cases}$$

所以  $RD = \frac{1}{7}AD, RE = \frac{4}{7}BE$ .

7. 由题得

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{OP} = (\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}) + 3\overrightarrow{OP},$$

又  $\overrightarrow{CP} = 2\overrightarrow{PG} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}$ , 所以  $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \mathbf{0}$ , 则  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$  得证.

$$8. \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 4\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = 4\overrightarrow{OP} + 2\overrightarrow{PH} + 2\overrightarrow{PG} = 4\overrightarrow{OP}$$

9. " $\Rightarrow$ " 因为  $A, B, C$  三点共线, 所以存在不全为 0 的实数  $k, l$  满足  $k\overrightarrow{AB} + l\overrightarrow{AC} = \mathbf{0}$ , 即  $k(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) + l(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) = \mathbf{0}$ , 化简得  $-(k+l)\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB} + l\overrightarrow{OC} = \mathbf{0}$ , 分别取  $\lambda = -(k+l), \mu = k, \gamma = l$ , 得证.

" $\Leftarrow$ " 因为  $\lambda = -(\mu + \gamma)$ , 设  $\lambda \neq 0$ , 则  $\mu, \gamma$  不全为 0,  $-(\mu + \gamma)\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC} = \mathbf{0}$ , 化简得  $\mu(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) + \gamma(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) = \mathbf{0}$ , 即  $\mu\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC} = \mathbf{0}$ , 故  $A, B, C$  三点共线.

10. " $\Rightarrow$ " 因为  $P_1, P_2, P_3, P_4$  四点共面, 所以  $\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}, \overrightarrow{P_1P_4}$  线性相关, 存在不全为 0 的  $m, n, p$  使得  $m\overrightarrow{P_1P_2} + n\overrightarrow{P_1P_3} + p\overrightarrow{P_1P_4} = \mathbf{0}$ , 即

$$m(\overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1}) + n(\overrightarrow{OP_3} - \overrightarrow{OP_1}) + p(\overrightarrow{OP_4} - \overrightarrow{OP_1}) = \mathbf{0},$$

即

$$-(m+n+p)\mathbf{n} + m\mathbf{r}_2 + n\mathbf{r}_3 + p\mathbf{r}_4 = \mathbf{0},$$

令  $m+n+p=\lambda_1, \lambda_2=m, \lambda_3=n, \lambda_4=p$ , 得证.

" $\Leftarrow$ " 设  $\lambda_1 \neq 0$ , 则  $\lambda_1 = -(\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)$ , 所以  $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  不全为 0,

$$-(\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)\mathbf{r}_1 + \lambda_2\mathbf{r}_2 + \lambda_3\mathbf{r}_3 + \lambda_4\mathbf{r}_4 = \mathbf{0},$$

因此  $P_1, P_2, P_3, P_4$  四点共面.

11.  $A, B, C$  三点不共线  $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$  不共线  $\Leftrightarrow$  点  $P$  在  $\pi$  上  $\Leftrightarrow \overrightarrow{AP} = \mu\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC}$  ( $\mu, \gamma \in \mathbb{R}$ )  $\Leftrightarrow \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = \mu(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) + \gamma(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} = (1 - \mu - \gamma)\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC}$ , 取  $\gamma = 1 - \mu - \gamma$ , 得证.
12. (1)  $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{3}\mathbf{e}_2, \overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\mathbf{e}_1 + \frac{2}{3}\mathbf{e}_2$
- (2) 由角平分线的性质得  $\frac{|\overrightarrow{BT}|}{|\overrightarrow{TC}|} = \frac{\mathbf{e}_1}{\mathbf{e}_2}$ , 又  $\overrightarrow{BT}$  与  $\overrightarrow{TC}$  同向, 则  $\overrightarrow{BT} = \frac{\mathbf{e}_1}{\mathbf{e}_2}\overrightarrow{TC}, \overrightarrow{BT} = \overrightarrow{AT} - \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{TC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AT}$ , 因此  $\overrightarrow{AT} - \overrightarrow{AB} = \frac{\mathbf{e}_1}{\mathbf{e}_2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AT})$ , 得  $\overrightarrow{AT} = \frac{|e_1| + |e_2|}{|e_1| + |e_2|}\mathbf{e}_1$ .

### 1.3 标架与坐标

1. (1)  $(0, 16, -1)$ . (2)  $(-11, 9, -2)$ .

2. 分析: 以本书第 25 页推论 1.6.1 作判别式, 以本书第 7 页定理 1.21(4)

$$(1) (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 121 \neq 0, \text{ 故 } \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \text{ 不共面, 无线性组合.}$$

- (2) 同理  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  共面,

$$\begin{aligned} &\text{设 } \mathbf{c} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}, \\ &\text{得 } \begin{cases} -3 = 6\lambda - 9\mu \\ 6 = 4\lambda + 6\mu \\ 3 = 2\lambda - 3\mu \end{cases} \\ &\text{解得 } \mathbf{c} = \frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{4}{3}\mathbf{b}. \end{aligned}$$

(3) 同理  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  共面, 但  $\mathbf{a}$  平行  $\mathbf{b}$ , 且  $\mathbf{a} \neq \mathbf{c}$ , 故显然无法以线性组合表示  $\mathbf{c}$ .

3. 证明: 设四面体  $A_1A_2A_3A_4$  中,  $A_i$  所对得面的重心为  $G_i$ ,

欲证  $A_iG_i (i = 1, 2, 3, 4)$  相交于一点, 在  $A_iG_i$  上取一点  $P_i$  使得  $\overrightarrow{A_iG_i} = 3\overrightarrow{P_iG_i}$ ,

从而  $\overrightarrow{OP_i} = \frac{\overrightarrow{OA_i} + 3\overrightarrow{OG_i}}{4}$ ,

设  $A_i$  坐标为  $(x_i, y_i, z_i) (i = 1, 2, 3, 4)$  则有

$$G_1 \left( \frac{x_2 + x_3 + x_4}{3}, \frac{y_2 + y_3 + y_4}{3}, \frac{z_2 + z_3 + z_4}{3} \right),$$

$$G_2 \left( \frac{x_1 + x_3 + x_4}{3}, \frac{y_1 + y_3 + y_4}{3}, \frac{z_1 + z_3 + z_4}{3} \right),$$

$$G_3 \left( \frac{x_1 + x_2 + x_4}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_4}{3}, \frac{z_1 + z_2 + z_4}{3} \right),$$

$$G_4 \left( \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3} \right),$$

$$\text{所以 } P_1 \left( \frac{x_1 + 3 \frac{x_2 + x_3 + x_4}{3}}{4}, \frac{y_1 + 3 \frac{y_2 + y_3 + y_4}{3}}{4}, \frac{z_1 + 3 \frac{z_2 + z_3 + z_4}{3}}{4} \right),$$

$$\text{即 } P_1 \left( \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}, \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4}, \frac{z_1 + z_2 + z_3 + z_4}{4} \right), \text{ 同理}$$

可得  $P_2, P_3, P_4$  坐标, 可知  $P_1, P_2, P_3, P_4$  为同一点, 故  $A_iG_i$  交于同一点  $P$  且点  $P$  到任一顶点的距离等于此点到对面重心的三倍.

4. 证明: 必要性: 因为  $\pi$  上三点  $p_i (x_i, y_i)_{i=1,2,3}$  共线, 故  $\overrightarrow{p_1p_2}$  平行于  $\overrightarrow{p_1p_3}$ , 即  $\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1}$

$$\text{即 } x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_1y_3 - x_3y_2 - x_2y_1 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \text{ 充分}$$

$$\text{性: 由 } \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_1y_3 - x_3y_2 - x_2y_1 = 0$$

整理得

$$\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1},$$

即  $\overrightarrow{p_1 p_2}$  平行于  $\overrightarrow{p_1 p_3}$ , 所以  $\pi$  上三点  $p_i (x_i, y_i)_{i=1,2,3}$  共线. 综上,  $\pi$  上

$$\text{三点 } p_i (x_i, y_i)_{i=1,2,3} \text{ 共线当且仅当 } \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

5. 证明: 建立仿射坐标系  $\{\vec{A}, \vec{AB}, \vec{AC}\}$ , 由  $\vec{AP} = \lambda \vec{PB} = \lambda (\vec{AB} - \vec{AP})$ ,

$$\text{得 } \vec{AP} = \frac{\lambda}{\lambda+1} \vec{AB}, \vec{AP} = \left( \frac{\lambda}{\lambda+1}, 0 \right);$$

$$\vec{AR} = \frac{1}{1+\nu} \vec{AC}, \vec{AR} = \left( 0, \frac{1}{1+\nu} \right);$$

$$\vec{AQ} = \frac{1}{1+\mu} \vec{AB} + \frac{\mu}{1+\mu} \vec{AC}, \vec{AQ} = \left( \frac{1}{1+\mu}, \frac{\mu}{1+\mu} \right);$$

$$\text{由 } P, Q, R \text{ 共线当且仅当 } \begin{vmatrix} \frac{1}{1+\mu} & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{1+\nu} & 1 \\ \frac{1}{1+\mu} & \frac{\mu}{1+\mu} & 1 \end{vmatrix} = 0, \text{ 得 } \lambda\mu\nu = -1, \text{ 证}$$

毕.

(注: 事实上, 此即平面几何上的梅涅劳斯定理)

#### 1.4 数量积

$$1. \mathbf{ab} + \mathbf{bc} + \mathbf{ca} = \frac{1}{2} [(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) - (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})] = -13$$

$$2. (3\mathbf{a} + 2\mathbf{b})(2\mathbf{a} - 5\mathbf{b}) = 6|\mathbf{a}|^2 - 0|\mathbf{b}|^2 - 11\mathbf{ab} = 14 - 33\sqrt{3}.$$

3. 由题, 得

$$(\mathbf{a} + 3\mathbf{b})(7\mathbf{a} - 5\mathbf{b}) = (\mathbf{a} - 4\mathbf{b})(7\mathbf{a} - 2\mathbf{b}) = 0$$

$$\text{解得: } \mathbf{ab} = \frac{1}{2} |\mathbf{b}|^2 \text{ 且 } |\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|, \text{ 知 } \cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} = \frac{1}{2}, \text{ 故}$$

$$\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\pi}{3}$$

4. (1) 错误: 数量的概念不等同于向量概念;

(2) 正确;

(3) 错误: 向量相等的必要条件是方向相同;

(4) 错误: 左边 =  $|\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos^2 \theta$ , 右边 =  $|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|$ ;

(5) 错误: 向量相等的必要条件是方向相同;

(6) 错误: 左边  $= |\mathbf{c}| \cdot |\mathbf{a}| \cdot \cos \angle(\mathbf{c}, \mathbf{a}) \neq |\mathbf{c}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos \angle(\mathbf{c}, \mathbf{b}) =$  右边;

5. 证明: 左边  $= (\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 + (\mathbf{a} - \mathbf{b})^2 = 2\mathbf{a}^2 + 2\mathbf{b}^2 + 2\mathbf{a}\mathbf{b} - 2\mathbf{a}\mathbf{b} =$  右边.

(注: 几何含义为平行四边形两斜边的平方和等于四条边长的平方和)

6. (1) 证明: 由向量乘法交换律得

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}),$$

故  $\mathbf{a}[(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \cdot \mathbf{b}] = 0$ , 所以两向量垂直.

(注:  $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \cdot \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \times \mathbf{c}$  不一定成立.)

(2) 证明: 因为  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  不共线, 取该平面任意向量  $\mathbf{c} = \lambda \mathbf{v}_1 + \mu \mathbf{v}_2$ , 则

$$(\mathbf{a} - \mathbf{b})\mathbf{c} = (\mathbf{a} - \mathbf{b})(\lambda \mathbf{v}_1 + \mu \mathbf{v}_2) = \lambda(\mathbf{a}\mathbf{v}_1 - \mathbf{b}\mathbf{v}_1) + \mu(\mathbf{a}\mathbf{v}_2 - \mathbf{b}\mathbf{v}_2) = 0$$

故  $(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \perp \mathbf{c}$ , 由  $\mathbf{c}$  的任意性得  $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{0}$ , 所以  $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ .

(3) 证明: 假设  $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$ , 由题意, 得

$$\mathbf{r}\mathbf{a} - \mathbf{r}\mathbf{b} = \mathbf{0}$$

得  $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ ; 同理可得  $\mathbf{a} = \mathbf{c}, \mathbf{b} = \mathbf{c}$ , 这与  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  不共面矛盾, 故  $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ .

## 1.5 向量积

1. A.

2. A.

3.  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$

$$= (2\mathbf{m} - \mathbf{n}) \times (4\mathbf{m} - 5\mathbf{n})$$

$$= 8(\mathbf{m} \times \mathbf{m}) - 10\mathbf{m} \times \mathbf{n} - 4\mathbf{n} \times \mathbf{m} + 5\mathbf{n} \times \mathbf{n}$$

$$= -6\mathbf{m} \times \mathbf{n}$$

$$\text{得 } |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = 6|\mathbf{m} \times \mathbf{n}| = 3\sqrt{2}.$$

$$4. \text{ 因为 } \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \left( \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \right) = (7, -7, -7).$$

(1) 令  $\mathbf{m} = (7, -7, -7)$ , 则

$$\mathbf{c} = \frac{\mathbf{m}}{|\mathbf{m}|} = \left( \frac{7}{7\sqrt{3}}, -\frac{7}{7\sqrt{3}}, -\frac{7}{7\sqrt{3}} \right) = \left( \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

(2)  $\mathbf{c} = \lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (7\lambda, -7\lambda, -7\lambda)$

$$\mathbf{c} \times \mathbf{d} = 10$$

$$\text{所以 } \lambda = \frac{5}{28},$$

$$\text{所以 } \mathbf{c} = \left( \frac{5}{4}, -\frac{5}{4}, -\frac{5}{4} \right).$$

5. 易证.

6.  $(\mathbf{a} - \mathbf{d}) \times (\mathbf{b} - \mathbf{c})$

$$= \mathbf{a} \times (\mathbf{b} - \mathbf{c}) - \mathbf{d} \times (\mathbf{b} - \mathbf{c})$$

$$= \mathbf{a} \times \mathbf{b} - \mathbf{a} \times \mathbf{c} - \mathbf{d} \times \mathbf{b} + \mathbf{d} \times \mathbf{c}$$

$$= \mathbf{c} \times \mathbf{d} - \mathbf{b} \times \mathbf{d} - \mathbf{d} \times \mathbf{b} + \mathbf{d} \times \mathbf{c}$$

$$= \mathbf{0}$$

所以  $\mathbf{a} - \mathbf{d}$  与  $\mathbf{b} - \mathbf{c}$  共线.