

解析几何答案

陈家宝

jackchen2025@outlook.com

2020 年 1 月 15 日

目录

1	向量与坐标	2
1.1	向量的定义、加法和数乘	2
1.2	向量的线性相关性	2
1.3	标架与坐标	5
1.4	数量积	7
1.5	向量积	8
1.6	混合积与双重向量积	9
2	平面与直线	11
2.1	平面方程	11
2.2	直线方程	12
2.3	线、面的位置关系	14
2.4	点、线、面之间的距离	18
2.5	线、面间的夹角	20
2.6	平面束	20
3	常见曲面	22
3.1	曲面与空间曲线	22
3.2	柱面与投影曲线	24
3.3	锥面和旋转曲面	27
3.4	二次曲面	31
3.5	直纹面	33

4 二次曲面的分类	38
4.1 坐标变换	38
4.2 二次曲面的渐进方向和中心	40
4.3 二次曲面的对称面 and 主径面	43
4.4 二次曲面的化简与分类	43
4.5 二次曲面的切线与切平面	44

1 向量与坐标

1.1 向量的定义、加法和数乘

- 证明: $\overrightarrow{PA_1} + \overrightarrow{PA_2} + \cdots + \overrightarrow{PA_n} = (\overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OP_1}) + (\overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OP_2}) + \cdots + (\overrightarrow{OA_n} - \overrightarrow{OP_n}) = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \cdots + \overrightarrow{OA_n} - n\overrightarrow{OP}$, 又 $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \cdots + \overrightarrow{OA_n} = \mathbf{0}$, 故 $\overrightarrow{PA_1} + \overrightarrow{PA_2} + \cdots + \overrightarrow{PA_n} = -n\overrightarrow{OP} = n\overrightarrow{OP}$.
- (1) $(\mu - v)(\mathbf{a} - \mathbf{b}) - (\mu + v)(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mu\mathbf{a} - \mu\mathbf{b} - v\mathbf{a} + v\mathbf{b} - \mu\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} - v\mathbf{a} + v\mathbf{b} = -2v\mathbf{a} + 2v\mathbf{b}$.
 (2) $\mathbf{D} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -17, \mathbf{D}_x = \begin{vmatrix} \mathbf{a} & 4 \\ \mathbf{b} & -3 \end{vmatrix} = -3\mathbf{a} - 4\mathbf{b}, \mathbf{D}_y = \begin{vmatrix} 3 & \mathbf{a} \\ 3 & \mathbf{b} \end{vmatrix}, \mathbf{x} = \frac{D_x}{D} = \frac{3}{17}\mathbf{a} + \frac{4}{17}\mathbf{b}, \mathbf{y} = \frac{D_y}{D} = -\frac{3}{17}\mathbf{b} + \frac{2}{17}\mathbf{a}$.
- (1) $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, (2) \mathbf{a}, \mathbf{b} 同向, (3) \mathbf{a}, \mathbf{b} 反向, 且 $|\mathbf{a}| \geq |\mathbf{b}|$, (4) \mathbf{a}, \mathbf{b} 反向, (5) \mathbf{a}, \mathbf{b} 同向, 且 $|\mathbf{a}| \geq |\mathbf{b}|$.
- 证明: 若 $\lambda + \mu < 0, -\lambda < 0$, 由情形 1, 得 $[(\lambda + \mu) + (-\lambda)]\mathbf{a} = (\lambda + \mu)\mathbf{a} + (-\lambda)\mathbf{a}$, 即 $\mu\mathbf{a} = (\lambda + \mu)\mathbf{a} - \lambda\mathbf{a}$, 从而 $(\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}$ 得证.

1.2 向量的线性相关性

- (1) 错, 当 $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ 时; (2) 错, 当 $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ 时.
- 设 $\lambda\mathbf{c} + \mu\mathbf{d} = \mathbf{0}, \lambda(2\mathbf{a} - \mathbf{b}) + \mu(3\mathbf{a} - 2\mathbf{b}) = \mathbf{0}, (2\lambda + 3\mu)\mathbf{a} + (-\lambda - 2\mu)\mathbf{b} = \mathbf{0}$.
 由于 \mathbf{a}, \mathbf{b} 不共线, 所以 $\begin{cases} 2\lambda + 3\mu = 0, \\ \lambda + 2\mu = 0. \end{cases}$ 又 $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, 所以 $\lambda = \mu = 0$, 即 \mathbf{c}, \mathbf{d} 线性无关.

3. 证明: $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{CD}$, E 、 F 分别为梯形腰 BC 、 AD 上的中点, 连接 EF 交 AC 于点 H , 则 H 为 AC 的中点, $\overrightarrow{FH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{HE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{FH} + \overrightarrow{HE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AB})$, 因为 $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{CD}$, 而 \overrightarrow{AB} 与 \overrightarrow{CD} 方向一致, 所以 $|\overrightarrow{FE}| = \frac{1}{2}(|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{DC}|)$.

4. 设 $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{b} + \mu\mathbf{c}$, 则

$$\mathbf{a} = -\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3 = 2\lambda\mathbf{e}_1 - 6\lambda\mathbf{e}_2 + 2\lambda\mathbf{e}_3 - 3\mu\mathbf{e}_1 + 12\mu\mathbf{e}_2 + 11\mu\mathbf{e}_3,$$

即

$$(-1 - 4\lambda + 3\mu)\mathbf{e}_1 + (3 + 6\lambda - 12\mu)\mathbf{e}_2 + (2 - 2\lambda - 11\mu)\mathbf{e}_3 = \mathbf{0},$$

又 \mathbf{e}_1 、 \mathbf{e}_2 、 \mathbf{e}_3 线性相关, 有

$$\begin{cases} -1 - 4\lambda + 3\mu = 0 \\ 3 + 6\lambda - 12\mu = 0 \\ 2 - 2\lambda - 11\mu = 0. \end{cases}$$

解得 $\lambda = -\frac{1}{10}$, $\mu = \frac{1}{5}$, 所以 $\mathbf{a} = \frac{1}{10}\mathbf{b} + \frac{1}{5}\mathbf{c}$.

5. C.

6. 设 $\overrightarrow{RD} = \lambda\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{RE} = \mu\overrightarrow{BE}$, 则

$$\overrightarrow{RD} = \lambda\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\mu\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{RE} = \overrightarrow{RD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} = \mu\overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\mu\overrightarrow{CA},$$

故

$$\overrightarrow{RD} = \left(\frac{2}{3}\mu - \frac{1}{3}\right)\overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}(1 - \mu)\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\lambda\overrightarrow{BC},$$

推得

$$\begin{cases} \frac{2}{3}\mu - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\lambda, \\ \frac{1}{3}(1 - \mu) = \lambda \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} \lambda = \frac{1}{7} \\ \mu = \frac{4}{7} \end{cases}$$

所以 $RD = \frac{1}{7}AD$, $RE = \frac{4}{7}BE$.

7. 由题得

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} &= \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{OP} = (\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}) + 3\overrightarrow{OP}, \\ \text{又 } \overrightarrow{CP} &= 2\overrightarrow{PG} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}, \text{ 所以 } \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \mathbf{0}, \text{ 则 } \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \\ &\text{得证.}\end{aligned}$$

$$8. \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 4\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = 4\overrightarrow{OP} + 2\overrightarrow{PH} + 2\overrightarrow{PG} = 4\overrightarrow{OP}$$

9. "⇒" 因为 A, B, C 三点共线, 所以存在不全为 0 的实数 k, l 满足 $k\overrightarrow{AB} + l\overrightarrow{AC} = \mathbf{0}$, 即 $k(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) + l(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) = \mathbf{0}$, 化简得 $-(k+l)\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB} + l\overrightarrow{OC} = \mathbf{0}$, 分别取 $\lambda = -(k+l), \mu = k, \gamma = l$, 得证.

"⇐" 因为 $\lambda = -(\mu + \gamma)$, 设 $\lambda \neq 0$, 则 μ, γ 不全为 0, $-(\mu + \gamma)\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC} = \mathbf{0}$, 化简得 $\mu(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) + \gamma(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) = \mathbf{0}$, 即 $\mu\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC} = \mathbf{0}$, 故 A, B, C 三点共线.

10. "⇒" 因为 P_1, P_2, P_3, P_4 四点共面, 所以 $\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}, \overrightarrow{P_1P_4}$ 线性相关, 存在不全为 0 的 m, n, p 使得 $m\overrightarrow{P_1P_2} + n\overrightarrow{P_1P_3} + p\overrightarrow{P_1P_4} = \mathbf{0}$, 即

$$m(\overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1}) + n(\overrightarrow{OP_3} - \overrightarrow{OP_1}) + p(\overrightarrow{OP_4} - \overrightarrow{OP_1}) = \mathbf{0},$$

即

$$-(m+n+p)\mathbf{n} + m\mathbf{r}_2 + n\mathbf{r}_3 + p\mathbf{r}_4 = \mathbf{0},$$

令 $m+n+p = \lambda_1, \lambda_2 = m, \lambda_3 = n, \lambda_4 = p$, 得证.

"⇐" 设 $\lambda_1 \neq 0$, 则 $\lambda_1 = -(\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)$, 所以 $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ 不全为 0,

$$-(\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)\mathbf{r}_1 + \lambda_2\mathbf{r}_2 + \lambda_3\mathbf{r}_3 + \lambda_4\mathbf{r}_4 = \mathbf{0},$$

因此 P_1, P_2, P_3, P_4 四点共面.

11. A, B, C 三点不共线 $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ 不共线 \Leftrightarrow 点 P 在 π 上 $\Leftrightarrow \overrightarrow{AP} = \mu\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC} (\mu, \gamma \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = \mu(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) + \gamma(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} = (1 - \mu - \gamma)\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC}$, 取 $\gamma = 1 - \mu - \gamma$, 得证.

$$12. (1) \overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{3}\mathbf{e}_2, \overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\mathbf{e}_1 + \frac{2}{3}\mathbf{e}_2$$

(2) 由角平分线的性质得 $\frac{|\overrightarrow{BT}|}{|\overrightarrow{TC}|} = \frac{\mathbf{e}_1}{\mathbf{e}_2}$, 又 \overrightarrow{BT} 与 \overrightarrow{TC} 同向, 则 $\overrightarrow{BT} =$

$$\frac{\mathbf{e}_1}{\mathbf{e}_2} \overrightarrow{TC}, \overrightarrow{BT} = \overrightarrow{AT} - \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{TC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AT}, \text{因此 } \overrightarrow{AT} - \overrightarrow{AB} = \frac{\mathbf{e}_1}{\mathbf{e}_2} (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AT}),$$

$$\text{得 } \overrightarrow{AT} = \frac{|e_1| + |e_2|}{|e_1| + |e_2|} \mathbf{e}_1.$$

1.3 标架与坐标

1. (1)(0, 16, -1). (2)(-11, 9, -2).

2. 分析: 以本书第 25 页推论 1.6.1 作判别式, 以本书第 7 页定理 1.21(4)

$$(1) (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 121 \neq 0, \text{故 } \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \text{ 不共面, 无线性组合.}$$

(2) 同理 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 共面,

设 $\mathbf{c} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}$,

$$\text{得 } \begin{cases} -3 = 6\lambda - 9\mu \\ 6 = 4\lambda + 6\mu \\ 3 = 2\lambda - 3\mu \end{cases}$$

$$\text{解得 } \mathbf{c} = \frac{1}{2} \mathbf{a} + \frac{4}{3} \mathbf{b}.$$

(3) 同理 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 共面, 但 \mathbf{a} 平行 \mathbf{b} , 且 $\mathbf{a} \neq \mathbf{c}$, 故显然无法以线性组合表示 \mathbf{c} .

3. 证明: 设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 中, A_i 所对得面的重心为 G_i ,

欲证 A_iG_i ($i = 1, 2, 3, 4$) 相交于一点, 在 A_iG_i 上取一点 P_i 使得 $\overrightarrow{A_iG_i} = 3\overrightarrow{P_iG_i}$,

$$\text{从而 } \overrightarrow{OP_i} = \frac{\overrightarrow{OA_i} + 3\overrightarrow{OG_i}}{4},$$

设 A_i 坐标为 (x_i, y_i, z_i) ($i = 1, 2, 3, 4$) 则有

$$G_1 \left(\frac{x_2 + x_3 + x_4}{3}, \frac{y_2 + y_3 + y_4}{3}, \frac{z_2 + z_3 + z_4}{3} \right),$$

$$G_2 \left(\frac{x_1 + x_3 + x_4}{3}, \frac{y_1 + y_3 + y_4}{3}, \frac{z_1 + z_3 + z_4}{3} \right),$$

$$G_3 \left(\frac{x_1 + x_2 + x_4}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_4}{3}, \frac{z_1 + z_2 + z_4}{3} \right),$$

$$G_4 \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3} \right),$$

$$\text{所以 } P_1 \left(\frac{x_1 + 3 \frac{x_2 + x_3 + x_4}{3}}{4}, \frac{y_1 + 3 \frac{y_2 + y_3 + y_4}{3}}{4}, \frac{z_1 + 3 \frac{z_2 + z_3 + z_4}{3}}{4} \right),$$

即 $P_1 \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}, \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4}, \frac{z_1 + z_2 + z_3 + z_4}{4} \right)$, 同理可得 P_2, P_3, P_4 坐标, 可知 P_1, P_2, P_3, P_4 为同一点, 故 $A_i G_i$ 交于同一点 P 且点 P 到任一顶点的距离等于此点到对面重心的三倍.

4. 证明: 必要性: 因为 π 上三点 $p_i(x_i, y_i)_{i=1,2,3}$ 共线, 故 $\overrightarrow{p_1 p_2}$ 平行于 $\overrightarrow{p_1 p_3}$, 即 $\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1}$

$$\text{即 } x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1 - x_1 y_3 - x_3 y_2 - x_2 y_1 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \text{ 充分}$$

$$\text{性: 由 } \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1 - x_1 y_3 - x_3 y_2 - x_2 y_1 = 0$$

整理得

$$\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1},$$

即 $\overrightarrow{p_1 p_2}$ 平行于 $\overrightarrow{p_1 p_3}$, 所以 π 上三点 $p_i(x_i, y_i)_{i=1,2,3}$ 共线. 综上, π 上

$$\text{三点 } p_i(x_i, y_i)_{i=1,2,3} \text{ 共线当且仅当 } \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

5. 证明: 建立仿射坐标系 $\{\vec{A}, \vec{AB}, \vec{AC}\}$, 由 $\vec{AP} = \lambda \vec{PB} = \lambda (\vec{AB} - \vec{AP})$,

$$\text{得 } \vec{AP} = \frac{\lambda}{\lambda + 1} \vec{AB}, \vec{AP} = \left(\frac{\lambda}{\lambda + 1}, 0 \right);$$

$$\vec{AR} = \frac{1}{1 + \mu} \vec{AC}, \vec{AR} = \left(0, \frac{1}{1 + \mu} \right);$$

$$\vec{AQ} = \frac{1}{1 + \mu} \vec{AB} + \frac{\mu}{1 + \mu} \vec{AC}, \vec{AQ} = \left(\frac{1}{1 + \mu}, \frac{\mu}{1 + \mu} \right);$$

由 P, Q, R 共线当且仅当
$$\begin{vmatrix} \frac{1}{1+\mu} & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{1+v} & 1 \\ \frac{1}{1+\mu} & \frac{\mu}{1+\mu} & 1 \end{vmatrix} = 0, \text{ 得 } \lambda\mu\nu = -1, \text{ 证}$$

毕.

(注: 事实上, 此即平面几何上的梅涅劳斯定理)

1.4 数量积

$$1. \mathbf{ab} + \mathbf{bc} + \mathbf{ca} = \frac{1}{2} [(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) - (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})] = -13$$

$$2. (3\mathbf{a} + 2\mathbf{b})(2\mathbf{a} - 5\mathbf{b}) = 6|\mathbf{a}|^2 - 0|\mathbf{b}|^2 - 11\mathbf{ab} = 14 - 33\sqrt{3}.$$

3. 由题, 得

$$(\mathbf{a} + 3\mathbf{b})(7\mathbf{a} - 5\mathbf{b}) = (\mathbf{a} - 4\mathbf{b})(7\mathbf{a} - 2\mathbf{b}) = 0$$

解得: $\mathbf{ab} = \frac{1}{2}|\mathbf{b}|^2$ 且 $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$, 知 $\cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \frac{1}{2}$, 故 $\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\pi}{3}$

4. (1) 错误: 数量的概念不等同于向量概念;

(2) 正确;

(3) 错误: 向量相等的必要条件是方向相同;

(4) 错误: 左边 $= |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos^2 \theta$, 右边 $= |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$;

(5) 错误: 向量相等的必要条件是方向相同;

(6) 错误: 左边 $= |\mathbf{c}| \cdot |\mathbf{a}| \cdot \cos \angle(\mathbf{c}, \mathbf{a}) \neq |\mathbf{c}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos \angle(\mathbf{c}, \mathbf{b}) =$ 右边;

5. 证明: 左边 $= (\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 + (\mathbf{a} - \mathbf{b})^2 = 2\mathbf{a}^2 + 2\mathbf{b}^2 + 2\mathbf{ab} - 2\mathbf{ab} =$ 右边.

(注: 几何含义为平行四边形两斜边的平方和等于四条边长的平方和)

6. (1) 证明: 由向量乘法交换律得

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}),$$

故 $\mathbf{a}[(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \cdot \mathbf{b}] = 0$, 所以两向量垂直.

(注: $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \cdot \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \times \mathbf{c}$ 不一定成立.)

(2) 证明: 因为 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 不共线, 取该平面任意向量 $\mathbf{c} = \lambda\mathbf{v}_1 + \mu\mathbf{v}_2$, 则

$$(\mathbf{a} - \mathbf{b})\mathbf{c} = (\mathbf{a} - \mathbf{b})(\lambda\mathbf{v}_1 + \mu\mathbf{v}_2) = \lambda(\mathbf{a}\mathbf{v}_1 - \mathbf{b}\mathbf{v}_1) + \mu(\mathbf{a}\mathbf{v}_2 - \mathbf{b}\mathbf{v}_2) = 0$$

故 $(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \perp \mathbf{c}$, 由 \mathbf{c} 的任意性得 $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{0}$, 所以 $\mathbf{a} = \mathbf{b}$.

(3) 证明: 假设 $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$, 由题意, 得

$$\mathbf{r}\mathbf{a} - \mathbf{r}\mathbf{b} = \mathbf{0}$$

得 $\mathbf{a} = \mathbf{b}$; 同理可得 $\mathbf{a} = \mathbf{c}, \mathbf{b} = \mathbf{c}$, 这与 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 不共面矛盾, 故 $\mathbf{r} = \mathbf{0}$.

1.5 向量积

1. A.

2. A.

3. $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$

$$\begin{aligned} &= (2\mathbf{m} - \mathbf{n}) \times (4\mathbf{m} - 5\mathbf{n}) \\ &= 8(\mathbf{m} \times \mathbf{m}) - 10\mathbf{m} \times \mathbf{n} - 4\mathbf{n} \times \mathbf{m} + 5\mathbf{n} \times \mathbf{n} \\ &= -6\mathbf{m} \times \mathbf{n} \end{aligned}$$

$$\text{得 } |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = 6|\mathbf{m} \times \mathbf{n}| = 3\sqrt{2}.$$

$$4. \text{ 因为 } \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \left(\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \right) = (7, -7, -7).$$

(1) 令 $\mathbf{m} = (7, -7, -7)$, 则

$$\mathbf{c} = \frac{\mathbf{m}}{|\mathbf{m}|} = \left(\frac{7}{7\sqrt{3}}, -\frac{7}{7\sqrt{3}}, -\frac{7}{7\sqrt{3}} \right) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

(2) $\mathbf{c} = \lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (7\lambda, -7\lambda, -7\lambda)$

$$\mathbf{c} \times \mathbf{d} = 10$$

$$\text{所以 } \lambda = \frac{5}{28},$$

$$\text{所以 } \mathbf{c} = \left(\frac{5}{4}, -\frac{5}{4}, -\frac{5}{4} \right).$$

5. 易证.

$$\begin{aligned}
 6. & (\mathbf{a} - \mathbf{d}) \times (\mathbf{b} - \mathbf{c}) \\
 &= \mathbf{a} \times (\mathbf{b} - \mathbf{c}) - \mathbf{d} \times (\mathbf{b} - \mathbf{c}) \\
 &= \mathbf{a} \times \mathbf{b} - \mathbf{a} \times \mathbf{c} - \mathbf{d} \times \mathbf{b} + \mathbf{d} \times \mathbf{c} \\
 &= \mathbf{c} \times \mathbf{d} - \mathbf{b} \times \mathbf{d} - \mathbf{d} \times \mathbf{b} + \mathbf{d} \times \mathbf{c} \\
 &= \mathbf{0}
 \end{aligned}$$

所以 $\mathbf{a} - \mathbf{d}$ 与 $\mathbf{b} - \mathbf{c}$ 共线.

1.6 混合积与双重向量积

1. D.

解:

(A.) $|\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = |\mathbf{a}| |\mathbf{c}| \cos \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle$ ($|\mathbf{a}| \neq 0$).

(B.) 取 $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ 或 $\mathbf{b} = \mathbf{0}$.

(C.) 取 $\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

(D.) 证明: 原式左右两边同乘以向量 \mathbf{c} , 得

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{c} \times \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = 0$$

由定理 1.6 与命题 1.6.1 得

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0$$

由推论 1.6.1, 命题得证.

2. C.

解: $\mathbf{a}[(\mathbf{c} \cdot \mathbf{b})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}] = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{c} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) = 0$, 又 $\mathbf{a}, \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, 得证.

(注: 定理 1.6.2 不一定成立, 一位内向量叉乘只有在 \mathbb{R}^3 情况下才成立.)

3. 解: 与例 1.6.1 同理, $V = \frac{59}{6}$.

4. (1) 同理, A, B, C, D 四点共面.

$$\begin{aligned}
 (2) \quad V &= \frac{1}{6} \left| \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} \right) \right| = \frac{58}{3}, \\
 h_D &= \frac{6V}{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|} = \frac{6V}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{29}{7}
 \end{aligned}$$

5. $\frac{8}{25}, \frac{5}{2}$

6. (1) 证明: 综合运用命题 1.6.1 可证得.

$$\begin{aligned} (2) \text{ 证明: 左边} &= (\mathbf{a}, \mathbf{b} + \mathbf{c}, \mathbf{c} + \mathbf{a}) + (\mathbf{b}, \mathbf{b} + \mathbf{c}, \mathbf{c} + \mathbf{a}) \\ &= (\mathbf{a}, \mathbf{b} + \mathbf{c}, \mathbf{c}) + (\mathbf{a}, \mathbf{b} + \mathbf{c}, \mathbf{a}) + \cdots \\ &= \cdots \\ &= 2(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \text{右边}. \end{aligned}$$

(3) 证明: 同 (2) 理, 展开右边即得.

$$\begin{aligned} (\text{注: 类比 } (\mathbf{a} - \mathbf{d})(\mathbf{b} - \mathbf{d})(\mathbf{c} - \mathbf{d}) &= \mathbf{abc} - \mathbf{abd} - \mathbf{dbc} - \mathbf{adc} + \\ &0(\mathbf{add} + \mathbf{bdd} + \mathbf{cdd} - \mathbf{ddd})) \end{aligned}$$

$$(4) \text{ 证明: 左边} = (\mathbf{a} + \mathbf{b})(\mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) + \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) = \text{右边}.$$

(5) 证明: 设 $\mathbf{d} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} + \nu \mathbf{c}$,

$$\begin{aligned} \text{则 } (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \times \mathbf{d}) &= (\mathbf{a} \times \mathbf{b})[\mathbf{c} \times (\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} + \nu \mathbf{c})] \\ &= (\mathbf{a} \times \mathbf{b})[\mathbf{c} \times (\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b})] \\ &= \mathbf{a} \times \mathbf{b}(\lambda \mathbf{c} \times \mathbf{a} + \mu \mathbf{c} \times \mathbf{b}) \\ &= \lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b})(\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mu(\mathbf{a} \times \mathbf{b})(\mathbf{c} \times \mathbf{b}) \quad \text{①} \end{aligned}$$

同理展开其余两式, 得

$$(\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a} \times \mathbf{d}) = \mu(\mathbf{b} \times \mathbf{c})(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + \nu(\mathbf{b} \times \mathbf{c})(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \quad \text{②}$$

$$(\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b} \times \mathbf{d}) = \lambda(\mathbf{c} \times \mathbf{a})(\mathbf{b} \times \mathbf{a}) + \nu(\mathbf{c} \times \mathbf{a})(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \quad \text{③}$$

① + ② + ③, 整理得

$$\begin{aligned} \text{左边} &= \lambda[(\mathbf{a} \times \mathbf{b})(\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + (\mathbf{c} \times \mathbf{a})(\mathbf{b} \times \mathbf{a})] \\ &\quad + \mu[(\mathbf{a} \times \mathbf{b})(\mathbf{c} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{b} \times \mathbf{c})(\mathbf{a} \times \mathbf{b})] \\ &\quad + \nu[(\mathbf{b} \times \mathbf{c})(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) + (\mathbf{c} \times \mathbf{a})(\mathbf{b} \times \mathbf{c})] \\ &= \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 + \nu \cdot 0 \\ &= 0 = \text{右边}. \end{aligned}$$

等式得证.

7. 证明: 显然 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \perp \mathbf{n}$, 则 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 共面. 否则:

若 $\mathbf{n} = \mathbf{0}$, 则 $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{c} = \mathbf{0}$, 仍成立;

若 $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 中至少有两个向量共线, 则仍成立;

若 $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 互不共线, 则 \mathbf{n} 为 \mathbf{a}, \mathbf{b} 所确定的平面的法向量, $\mathbf{n} \cdot \mathbf{c} \neq 0$, 这与题设相悖.

故成立.

2 平面与直线

2.1 平面方程

1. (1) 取 \mathbb{Z} 轴上两点和题设点 $(0, 0, 0), (0, 0, 1), (3, 1, -2)$.

$$\text{所求方程为 } \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = x - 3y = 0$$

- (2) 由平面法式方程, 不妨设所求平面方程为 $3x - 2y + 5 = D (D \neq 0)$.

代入点 $(-1, -5, 4)$ 得 $3x - 2y - 7 = 0$.

- (3) 不妨设所求平面法向量为 $\mathbf{n} = (a, b, c)$.

则 $\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{M_1 M_2} = \mathbf{n} \cdot (1, -8, 3) = 0$.

$$\text{即 } \begin{cases} a + 6b + c = 0 \\ a - 8b + 3c = 0 \end{cases}, \text{ 取一组解 } \mathbf{n} = (13, -1, -7).$$

同 (2) 理可得 $13x - y - 7z = 37$.

2. $\overrightarrow{AB} = (-4, 5, -1), \overrightarrow{CD} = (-1, 0, 2)$.

由题得平面的法向量为 $\mathbf{n}_1 = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD} = (11, 7, 5)$.

得此平面方程为 $11(x - 4) + 7(y - 0) + 5(z - 6) = 0$

即 $11x + 7y + 5z = 74$.

$\overrightarrow{AB} = (-4, 5, -1), \overrightarrow{BC} = (-4, -6, 2)$.

由题得平面 ABC 的法向量为 $\mathbf{n}_2 = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} = (4, 3, 1)$.

所以平面的法向量 $\mathbf{n}_3 = \mathbf{n}_2 \times \overrightarrow{AB} = (-8, 0, 32)$. 得此平面方程为 $-8(x - 5) + 32(z - 3) = 0$.

即 $x - 4z + 7 = 0$.

3. $x + 2y - z + 4 = 0 \Leftrightarrow x + 2y - z = -4 \Leftrightarrow \frac{x}{-4} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{4} = 1$

由此知平面过坐标轴上 $A(-4, 0, 0), B(0, -2, 0), C(0, 0, 4)$

知道 $\overrightarrow{AB} = (4, -2, 0), \overrightarrow{AC} = (4, 0, 4)$.

$$\text{得参数方程 } \begin{cases} x = -4 + 2u + v \\ y = -u \\ z = v \end{cases}$$

2.2 直线方程

1. (1) 取直线的法向量 \mathbf{v} 使与已知平面的法向量 \mathbf{n}_1 平行, 令

$$\mathbf{v} = \lambda \mathbf{n}_1 = (6, -3, -5)$$

由 $M(2, -3, -5)$ 得点向式直线标准方程 $\frac{x-2}{6} = \frac{y+3}{-3} = \frac{z+5}{-5}$.

- (2) 取所求直线的方向向量 $\mathbf{v} = (x_0, y_0, z_0)$ 与已知两直线的方向向量 $\mathbf{n}_1 = (1, 1, -1), \mathbf{n}_2 = (1, -1, 0)$ 垂直.

即 $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_1 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_2 = 0$, 取 \mathbf{v} 的一组解为 $(1, 1, 2)$, 又 $M(1, 0, -2)$ 得点向式直线标准方程为 $x-1 = y = \frac{z+2}{2}$.

- (3) 解: 设所求直线的方向向量为 $\mathbf{v} = (x_0, y_0, z_0)$, 由题得

$$\mathbf{v} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2} \right)$$

又 $M(1, -5, 3)$ 得直线点向式标准方程为 $x-1 = \frac{y+5}{\sqrt{2}} = \frac{y-3}{-1}$.

- (4) 解: 设所求直线的方向向量为 $\mathbf{v}_0 = (x_0, y_0, z_0)$,

已知平面的法向量为 $\mathbf{n} = (3, -1, 2)$

已知直线的方向向量为 $\mathbf{v} = (4, -2, 1)$

已知直线上的一个点 $Q(1, 3, 0)$, 由题得 $\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n} = 0$, 且 $(\overrightarrow{PQ}, \mathbf{v}_0, \mathbf{v}) = 0$ (注: 本书第 41 页命题 2.3.2(2))

$$\text{即} \begin{cases} 3x_0 - y_0 + 2z_0 = 0 \\ \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \end{cases}$$

得直线点向式标准方程为 $\frac{x-1}{-4} = \frac{y}{50} = \frac{z+2}{31}$

2. (1) 解: 令 $y=0$ 得一点 $M(-5, 0, -9) \in l$,

已知平面的法向量为 $\mathbf{n}_1 = (2, 1, -1), \mathbf{n}_2 = (3, -1, -2)$

取所求直线的方向向量 $\mathbf{v} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = (-3, 1, -5)$,

则该直线点向式方程为 $\frac{x+5}{-3} = y = \frac{z+9}{-5}$.

- (2) 解: 从一般方程中消去 z , 得 $4y = 3x$, 消去 x , 得 $4y = -3z + 18$, 于是得

$$\frac{x}{4} = \frac{y}{3} = \frac{z-6}{-4}.$$

3. (1) 解: 设以 $\begin{cases} 2x - 7y + 4z - 3 = 0 \\ 3x - 5y + 4z + 11 = 0 \end{cases}$ 为轴的平面束是

$$\lambda(2x - 7y + 4z - 3) + \mu(3x - 5y + 4z + 11) = 0$$

代入点 $(-2, 1, 3)$ 得 $\mu/\lambda = -1/6$,

故所求平面方程为 $\frac{3}{2}x - \frac{37}{6}y + \frac{10}{3}z - \frac{19}{6} = 0$.

(2) 解: 同理, 设平面束方程为

$$\lambda(2x - 7y + 4z - 3) + \mu(3x - 5y + 4z + 11) = 0$$

取其法向量 $\mathbf{n}_1 = (2\lambda + 3\mu, -7\lambda - 5\mu, 4\lambda + 4\mu)$ 与已知平面法向量 $\mathbf{n}_2 = (1, 1, 1)$ 垂直, 即 $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 0$, 解得 $\mu/\lambda = -1/2$,

故所求平面方程为 $\frac{3}{2}x - \frac{3}{2}z + 2 = 0$.

(3) (a) 解法一: 任取过直线 $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-2}{x}$ 的平面方程

$$\pi_1: 2\frac{x-1}{2} - \frac{y+2}{-3} - \frac{z-2}{2} = 0$$

$$\pi_2: \frac{x-2}{2} + \frac{y+2}{-3} - 2\frac{z-2}{2} = 0$$

化简得

$$\pi_1: 6x + 2y - 3z + 4 = 0$$

$$\pi_2: 3x - 2y - 6z + 2 = 0$$

同理, 得所求平面方程为 $x - 8y - 13z + 9 = 0$.

(b) 解法二: 已知平面的法向量 $\mathbf{n}_1 = (3, 2, 1)$

取已知直线上一点 $(1, -2, -2)$ 及其方向向量 $\mathbf{v} = (2, -3, 2)$

则所求平面的法向量 $\mathbf{n}_2 = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{v} = (1, -12, 13)$

又所求平面过点 $(1, -2, 2)$ 得所求平面方程为

$$x - 8y - 13z + 9 = 0.$$

(4) 解: 设该平面为 $Ax + By + Cz + D = 0$,

因为该平面与直线 $\frac{x-2}{-1} = \frac{y+4}{3} = \frac{z+1}{1}$ 垂直, 有 \mathbf{n} 平行 \mathbf{v} .

所以 $\mathbf{n} = (-1, 3, 1)$, 则有 $-x + 3y + z + D = 0$.

又因为该平面过点 $(4, -1, 2)$, 所以得 $D = 5$,

综上, 该平面方程为 $-x + 3y + z + 5 = 0$.

(5) 解: 易得直线 $\begin{cases} 2x - y - z - 3 = 0 \\ x + 2y - z - 5 = 0 \end{cases}$ 的方向向量

$$\mathbf{v}_0 = (2, -1, -1) \times (1, 2, -1) = (3, 1, 5)$$

记直线 $\frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{-5} = \frac{z+1}{-1}$ 的方向向量为 \mathbf{v} , 得 $\mathbf{v} = (1, -5, -1)$,
 设所求平面的法向量为 \mathbf{n} , 则 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_0 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0$.

取 \mathbf{n} 的一组非零解 $(3, 1, -2)$

代入直线 $\frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{-5} = \frac{z+1}{-1}$ 上一点 $(2, -3, -1)$ 得
 所求平面方程为

$$3x + y - 2z - 5 = 0$$

2.3 线、面的位置关系

1. (1) 解: 取 $M_1(-1, 1, 2) \in \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-2}{1}$,
 取 $M_2(0, 6, -5) \in \frac{x}{-1} = \frac{y-6}{2} = \frac{z+5}{3}$,
 由两已知直线的方向向量分别为 $\mathbf{v}_1 = (3, 3, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (-1, 2, 3)$,
 根据命题 2.3.2, 因为 $(\overrightarrow{M_1 M_2}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = 106 \neq 0$ 知两平面异面.

(2) 解:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ y + z + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x-1}{0} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{1},$$

$$\begin{cases} x + z + 1 = 0 \\ x + y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x+1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1},$$

根据命题 2.3.2, 计算三向量的混合积为 3, 知两平面异面.

2. (1) 解: \mathbb{X} 轴所在直线方程为 $y = z = 0$, 则联立方程

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y + z + 0 = 0 \\ 0 \cdot x + y + 0 \cdot z + 0 = 0 \end{cases}$$

由例 2.3.2 得所求条件为

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

即 $A_1D_2 = A_2D_1$

- (2) 设所给直线的方向向量 $\mathbf{v} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = (A_1, B_1, C_1) \times (A_2, B_2, C_2) = (\lambda, 0, 0), \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

得 $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0$, 且 $\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} \neq 0$

令直线不与 \mathbb{X} 轴重合, 只需令 $(0, 0, 0)$ 不满足直线方程, 即 $D_1 = D_2 = 0$ 无解.

综上, 所求条件为 $\begin{cases} \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} \neq 0 \\ D_2 \neq 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} \neq 0 \\ D_1 \neq 0 \end{cases}$

- (3) 同理可得所求条件为 $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} = D_1 = D_2 = 0$

(注: 若 $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0$ 则 $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ 不构成直线, 两平面平行或重合.)

3. (1) 解: 设所给直线方向向量为 $\mathbf{v} = (3, -2, 7)$, 所给平面法向量为

$$\mathbf{n} = (4, -3, 7),$$

$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \neq 0$, 且显然 \mathbf{v} 不平行于 \mathbf{n} , 则直线与平面相交.

(2) 解: 由题, 得 $\begin{cases} 5x - 3y + 2z - 5 = 0 \\ 2x - y - z - 1 = 0 \\ 4x - 3y + 7z - 7 = 0 \end{cases}$, 由克拉默法则 $D = \begin{vmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 4 & -3 & 7 \end{vmatrix} =$

0 知直线在平面上.

- (3) 已知直线方向向量为 $\mathbf{v} = (1, -2, 9)$,

已知平面法向量为 $\mathbf{n} = (3, -4, 7)$

同 (1) 中理可得直线与平面交于一点.

4. 解: 联立方程
$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z = 0 \\ (A_1 + A_2)x + (B_1 + B_2)y + (C_1 + C_2)z = 0 \end{cases}$$

由克拉默法则 $D = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_1 + A_2 & B_1 + B_2 & C_1 + C_2 \end{vmatrix} = 0$ 是显然的,

则在直线 $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z = 0 \end{cases}$ 上的点必在平面 $(A_1 + A_2)x + (B_1 + B_2)y + (C_1 + C_2)z = 0$

上, 知直线在平面上.

5. (1) 解: 令直线的方向向量 \mathbf{v} 与所给平面法向量 \mathbf{n} 垂直, 得

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = (4, 3, 1) \cdot (k, 3, -5) = 0$$

得 $k = -1$, 经检验, 直线不在平面内, 故 $k = -1$ 满足题意.

(2) 解: 令所给直线的方向向量 $\mathbf{v} = (2, -4, 3)$ 与所给平面法向量 $\mathbf{n} = (k, m, 6)$ 平行, 即

$$(2, -4, 3) = \lambda(k, m, 6)$$

解得 $k = 4, m = 8$.

6. 解: 设所给直线为 l_4 , 其方向向量为 $\mathbf{v} = (8, 7, 1)$, 则 l_4 与 l_3 所确定的平面的法向量 $\mathbf{n}_1 = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = (4, -6, 10)$ 代入 l_2 上 $(-13, 5, 0)$ 得 l_4 与 l_2 所确定的平面

$$x - y + z - 17 = 0$$

知所求直线为
$$\begin{cases} 2x - 3y + 5z + 41 = 0 \\ x - y + z - 17 = 0 \end{cases}.$$

7. 解: 与例 2.3.3 同理, 所求直线为
$$\begin{cases} 2x + 4y - 3z - 11 = 0 \\ 13x - 9y + 2z - 50 = 0 \end{cases}$$

8. 解: 由题设可知: 设未知直线的方向向量为 $\mathbf{v} = (X, Y, Z)$, l' 的方向向量为 $\mathbf{v}' = (1, 5, 3)$, 平面法向量为 $\mathbf{n} = (2, 1, -3)$, 所以 $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}' = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$,

即

$$\begin{cases} X + 5Y + 3Z = 0 \\ 2X + Y - 3Z = 0 \end{cases}$$

解得 $X = -2Y, Z = -Y$, 所以 $X : Y : Z = -2 : 1 : -1$,

又因为未知直线过 l' 与平面 Π 的交点 P , 所以

$$\begin{cases} 2X + Y - 3Z + 1 = 0 \\ \frac{x}{1} = \frac{y+5}{5} = \frac{z+2}{3} = 0 \end{cases}$$

所以 $P(1, 0, 1)$, 所以直线方程为 $\frac{x-1}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}$.

9. 解: 设所求直线的方向向量为 \mathbf{v} , 所求平面的法向量为 \mathbf{n} , 所给直线的方向向量为 $\mathbf{v}_0 = (1, 0, 0)$, 则 $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_0 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$ 得 $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 \times \mathbf{n} = (0, -1, 1)$ 取所给直线与平面的交点 $(1, 1, -1)$ 代入, 得所求直线方程为 $\frac{x-1}{-2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{1}$.

10. 解: 化 l_0 方程为标准方程 $\frac{x}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z+\frac{1}{2}}{5}$, 设 M_1 在 l_0 上的投影点为 $M_0 \left(2t, 4t, \frac{1}{2} + 5t \right)$, 则 $\overrightarrow{M_1 M_0} \cdot (2, 4, 5) = 0$ 得 $M_0(3, 6, 8)$. 由中点坐标公式得 $M_2(2, 15, 6)$, 易得所求直线方程为

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-15}{4} = \frac{z-6}{5}$$

11. 证明: 联立方程得

$$\begin{cases} cy + bz - bc = 0 \\ x = 0 \\ ax - az - ac = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

其判别式

$$\begin{vmatrix} 0 & c & b & -bc \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & -a & -ac \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2abc \neq 0$$

由例 2.3.2, l_1, l_2 不交于一点, 则 l_1, l_2 异面或平行, 而毫无疑问, l_1, l_2 不平行, 故得证.

2.4 点、线、面之间的距离

1. (1) $d = \frac{20}{11}\sqrt{2}$, (2) $d = \sqrt{6}$.

2. 证明: 由点到平面距离公式 $p = 1 - \frac{11}{\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2 + \left(\frac{1}{c}\right)^2}}$ 整理

即得所求证式.

3. 解: 显然平面 $x+1=0$ 不满足条件, 则设过直线 $\frac{x+1}{0} = \frac{y+\frac{2}{3}}{2} = \frac{z}{-3}$ 的平面为 $(x+1)+m(9y+2z+2)=0$, 即 $x+3my+2mz+2m+1=0$. 由点到平面距离公式得

$$3^2 = \frac{(4+3m+4m+2m+1)^2}{1^2 + (3m)^2 + (2m)^2}$$

解得 $m = d = -\frac{1}{6}$ 或 $d = \frac{8}{3}$ 所以所求平面方程为 $3x+24y+16z+19=0$ 或 $3x-y-z+2=0$.

4. (1) $d = 0$, (2) $d = \frac{15}{41}\sqrt{41}$, (3) $d = 0$.

5. 解:

(1) 证明: 由定理 2.4.2 得公垂线段的长 $d = \frac{3}{112}\sqrt{122}$, 所以两直线异面, 同时其公垂线方程为

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 1 & -3 & 3 \\ 3 & 8 & 7 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 8 & 7 \end{vmatrix} = 0 \end{cases}$$

$$\text{即 } \begin{cases} -45x + 2y + 17z + 45 = 0 \\ 23x - 20y + 13z = 0 \end{cases}$$

(2) 同理可得其公垂线段的长 $d = \sqrt{54}$, 所以两直线异面, 同时其公垂

线方程为

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \begin{array}{ccc} x+2 & y & z-2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 5 & -2 & 5 \end{array} \right| = 0 \\ \left| \begin{array}{ccc} x-3 & y+2 & z-7 \\ 1 & 5 & 1 \\ 5 & -2 & 5 \end{array} \right| = 0 \end{array} \right.$$

即 $\begin{cases} x+5y+z=0 \\ x-y+4=0 \end{cases}$

- (3) 同理可得其公垂线段的长 $d = \frac{1}{6}$, 所以两直线异面, 同时其公垂线方程为

$$\begin{cases} x+y+4z-1=0 \\ x-2y-2z+3=0 \end{cases}$$

6. 解:

- (1) 整理方程得 $m(x+y)+n(-z-1)=0$

m, n 作为变量, 若 x, y 满足 $\begin{cases} x+y=0 \\ -z-1=0 \end{cases}$, 则原方程恒成立.

知平面 II 恒过定直线 $l_1: \begin{cases} x+y=0 \\ -z-1=0 \end{cases}$, 点 $M_1(0, 0, -1)$ 显然在直线 l_1 上.

- (2) $l_1: x = -y = \frac{z+1}{0}$, l_1, l_2 的判别式 $\Delta = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$
- $-1 \neq 0$ 知 l_1, l_2 异面.

- (3) 由定理 2.4.2 得 l_1, l_2 间的距离 $d = 2$, 其公垂线方程为

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \begin{array}{ccc} x & y & z+1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{array} \right| = 0 \\ \left| \begin{array}{ccc} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{array} \right| = 0 \end{array} \right.$$

$$\text{即} \begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

7. 解: 过点 M_1 且与平面 II 平行的平面 III 为 $3x - 2y + z - 6 = 0$,
 过点 M_2 且与平面 II 平行的平面 IV 为 $3x - 2y + z - 13 = 0$,
 由 $-6 < -4, -13 < -4$, 得 M_1, M_2 在平面 II 的同侧
 (注: 将方程 $f(x, y, z) = 0$ 的图像沿 \mathbb{Z} 轴正方向平移 a 单位长度
 (若 $a < 0$, 则沿反方向平移 $|a|$ 单位长), 则得到的图像方程为
 $f(x, y, z - a) = 0$, 故若平面在平面 II 的 \mathbb{Z} 轴方向上方, 则其标准方程常数项比 II 小, 反之同理)

8. (1) 解得下列平面:

过 M 平行 $\pi_1: 3x - y + 2z - 9 = 0$

过 M 平行 $\pi_2: x - 2y - z - 3 = 0$

过 N 平行 $\pi_1: 3x - y + 2z + 5 = 0$

过 N 平行 $\pi_2: x - 2y - z = 0$

则由第 7 题注, 得 M 在 π_1 上, 在 π_2 下; N 在 π_1 下, 在 π_2 下,
 知 N, M 两点在相邻的二面角内.

(2) 同理可得, N, M 两点在对顶的二面角内.

9. 证明: 假设有两条公垂线, 则它们都与异面直线相交, 所以公垂线确定一个平面 A , 所以四个交点共面, 又因为每条异面直线都有四个点在平面 A 上, 所以异面直线都在平面 A 上, 所以两直线共面, 与题设矛盾, 假设不成立. 故原命题成立.

2.5 线、面间的夹角

略.

2.6 平面束

1. 证明: l 的方程为 $\frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{4} = \frac{z}{3}$, 即

$$\begin{cases} \frac{x-2}{-1} = \frac{z}{3} \\ \frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{4} \end{cases}$$

代入平面方程中则易知恒满足平面方程, 知 l 在平面 II 上.

2. 解:

(1) 设所求平面为 $\mu(4x - y + 3z - 1) + \lambda(x + 5y - z + 2) = 0$, 即
 $(4\mu + \lambda)x + (-\mu + 5\lambda)y + (3\mu - \lambda)z + (-\mu + 2\lambda) = 0$
 令 $(4\mu + \lambda, -\mu + 5\lambda, 3\mu - \lambda) \cdot (0, 1, 0) = 0$, 得 $5\lambda = \mu$, 得所求方程为 $21x + 14y - 3 = 0$

(2) 同理, 令 $(4\mu + \lambda, -\mu + 5\lambda, 3\mu - \lambda) \cdot (2, -1, 5) = 0$
 得平面方程为 $7x + 14y + 5 = 0$.

3. 解:

(1) 设所求平面为 $\lambda\left(\frac{x+1}{2} - \frac{y}{-1}\right) + \lambda\left(\frac{y}{-1} - \frac{z-2}{3}\right) = 0$
 则 $\mu = 1, \lambda = -1$ 得所求平面 $3x + 12y + 2z - 1 = 0$.

(2) 设所求平面为 $\mu(-5x - y + 7) + \lambda(-x - z + 1) = 0$
 令其法向量 \mathbf{n} 满足 $\mathbf{n} \cdot [(2, -1, -1) \times (1, 2, -1)]$, 得所求平面方程为

$$-3x - y + 2z + 5 = 0.$$

(3) 同理, 设所求平面为 $\mu(-3x - 2y - 1) + \lambda(x - z + 1) = 0$
 令其法向量 \mathbf{n} 满足 $\mathbf{n} \cdot (3, 2, -1)$, 得所求平面 $-x + 8y + 13z - 9 = 0$.

4. 解: 设所求平面为 $x - 2y + 3z + c = 0 (c \neq -4)$.

(1) 代入 $(0, -3, 0)$ 得 $x - 2y + 3z - 6 = 0$

(2) $d_{O \rightarrow \pi} = \frac{|c|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2}} = 1$, 得

$$x - 2y + 3z \pm \sqrt{14} = 0.$$

5. 解: 设所求平面方程为 $x + 3y + 2z = D$

其在 X 轴 Y 轴 Z 轴上的截距分别为 $D, \frac{D}{3}, \frac{D}{2}$.

$V = |D| \cdot \left|\frac{D}{3}\right| \cdot \left|\frac{D}{2}\right| \cdot \frac{1}{3} = 6$ 解得 $D = \pm 3\sqrt[3]{4}$, 则所求平面为

$$x + 3y + 2z \pm 3\sqrt[3]{4} = 0$$

6. 解: 令 x 项系数与 y 项系数相等, 即 $1 + \lambda = 3 - \lambda$, 得平面 $2x + 2y - 2z + 9 = 0$.

7. 解: 设所求平面为 $\mu(x+1) + \lambda(-3x-2z-6) = 0$
 令 $d_{P \rightarrow \pi} = 3$, 即 $(5\mu + 13\lambda)^2 = 3^2 [(\mu)^2 + (3\lambda)^2 + (2\lambda)^2]$, 解得 $\mu =$
 $\lambda = \frac{-65 \pm 18\sqrt{377}}{16}$
 未完待续...
8. 解: 设平面 I: $\mu(2x-4y+z) + \lambda(3x-y-9) = 0$.
 令 $I \perp II$ 解得 I: $x+3y-z-9=0$
 知所求射影直线方程为 $\begin{cases} x+3y-z-9=0 \\ 4x-y+z-1=0 \end{cases}$
9. 证明: 由本书第 41 页定理 2.3.2 知要证命题成立, 只需证 $l_1//l_2$ 时成立.
 若 $l_1//l_2$ 此时不妨设 $x = \frac{a}{d}, y = \frac{b}{d}, z = \frac{c}{d}$
 此时已知方程转化为 $A_ia + B_ib + C_ic + D_id = 0$
 当 $d=0$ 时, $l_1//l_2$, 此时转化为与定理 2.3.2 相同得情形, 故原命题成立.

3 常见曲面

3.1 曲面与空间曲线

1. 解: 整理得 $(x+1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 3^2$, 知圆心坐标 $(-1, 0, 2)$ 半径 $r=3$.
2. 解:
- (1) 方程 $r=3$.
- (2) $\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{3} \\ \theta = \arccos \frac{y}{r} = \arccos \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \varphi = \arccos \frac{z}{r} = \frac{\pi}{4} \end{cases}$, 知球面坐标为 $(r, \varphi, \theta) = \left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}, \arccos \frac{\sqrt{3}}{3} \right)$
- $\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{2} \\ \varphi = \arccos \frac{y}{r} = \frac{\pi}{4} \\ z = z = 1 \end{cases}$, 知球面坐标为 $(r, \varphi, z) = \left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}, 1 \right)$

3. 解:

$$\begin{cases} x = a \cos \varphi \\ y = a \sin \varphi \\ z = z_0 \\ \varphi = \omega t \\ z_0 = vt \end{cases} \quad \text{得参数方程} \quad \begin{cases} x = a \cos \omega t \\ y = a \sin \omega t \\ z = vt \end{cases}$$

4. 解: 椭圆曲线. 证明略.

5. 解:

(1) 原点至平面 $x + y + z - 3 = 0$ 的距离 $d = 3$, 则所求圆的半径

$r = \sqrt{4 - d^2} = 1$. 易得过原点且与平面 $x + y + z - 3 = 0$ 垂直的直线为 $x = y = z$, 联立平面方程得圆心坐标 $(1, 1, 1)$

(2) 对原方程组 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 5 \\ x^2 + y^2 + z^2 + x + 2y + 3z - 7 = 0 \end{cases}$ 整理得 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 5 \\ x + 2y + 3z - 2 = 0 \end{cases}$
同理可得半径 $r = \frac{4}{7}\sqrt{14}$, 圆心坐标 $\left(\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}\right)$.

6. 证明: 令 $t = 0$, 得坐标 $(0, 0, 0)$, 令 $t = 1$, 得坐标 $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, 令 $t = -1$,

得坐标 $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$, 设由此三点决定的球面方程为 π , 其球心为

$$(x_0, y_0, z_0) \quad \text{令} \quad \left(\frac{1}{3} - x_0\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - y_0\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - z_0\right)^2 = \left(-\frac{1}{3} - x_0\right)^2 + \left(-\frac{1}{3} - y_0\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - z_0\right)^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2,$$

解得 $(x_0, y_0, z_0) = \left(0, \frac{1}{2}, 0\right)$, 半径 $r = \frac{1}{2}$.

$$\text{而} \quad \left(\frac{t}{1+t^2+t^4}\right)^2 + \left(\frac{t^2}{1+t^2+t^4} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{t^3}{1+t^2+t^4}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

则曲线在一球面上, 且球面方程为 $x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + z^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$

7. 证明: 由题, $\left(\sqrt{x^2 + y^2} - a\right)^2 + z^2 = b^2$, 则由本书第 75 页表 3.2 得

$$\text{面} \quad \left(\sqrt{x^2 + y^2} - a\right)^2 + z^2 = b^2 \quad \text{可由} \quad \begin{cases} (y - a)^2 + z^2 = b^2 \\ x = 0 \end{cases} \quad \text{绕} \quad \mathbb{Z} \quad \text{轴旋}$$

转得到. 故其为一个环面, 其环面方程为 $(y - a)^2 + z^2 = b^2$.

$$8. \text{ 解: } \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = \sqrt{\frac{9}{2} - t^2 - (1 - t)^2} \end{cases}$$

$$9. \text{ 解: } C \text{ 到平面 } 2x - y - 3z + 11 = 0 \text{ 的距离 } d = \frac{16}{\sqrt{14}},$$

$$\text{故所求方程为 } (x - 3)^2 + (y + 5)^2 + (z - 2)^2 = \frac{128}{\sqrt{7}}$$

3.2 柱面与投影曲线

1. (1) 椭圆柱面, 图形略; (2) 双曲柱面, 图形略; (3) 抛物柱面, 图形略; (4) 抛物柱面, 图形略; (5) 平面, 图形略; (6) 两个互相垂直的平面, 图形略; (7) 两个互相垂直的平面, 图形略; (8) 三个互相垂直的平面, 图形略;

2. 解:

$$(1) \begin{cases} z^2 + 4y + 4z = 0 \\ x^2 + z^2 - 4z = 0 \\ x^2 + 4y = 0 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x^2 - x + y^2 - 1 = 0 \\ z - x - 1 = 0 \\ z^2 - 3z + y^2 + 1 = 0 \end{cases} \quad (3) \begin{cases} x^2 - 2x - 2z^2 + 6z - 3 = 0 \\ y - z + 1 = 0 \\ x^2 - 2x + y^2 + 2y + 1 = 0 \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} x - z - 3 = 0 \\ 2y + 7z - 2 = 0 \\ 7x + 2y - 18 = 0 \end{cases} \quad (5) \begin{cases} z^2 + x - 1 = 0 \\ (1 - z^2)^2 + z^2 + y^2 - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - x = 0 \end{cases}$$

$$3. \text{ 解: } \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = 2z \end{cases} \quad \text{消去 } x^2 + y^2 \text{ 得 } z^2 + 2z = 1, \text{ 解得 } z = -1 \pm \sqrt{2}$$

代入原方程中, 得 $x^2 + y^2 = -2 \pm 2\sqrt{2}$, 由于 $x^2 + y^2 \geq 0$, 故 $x^2 + y^2 = -2 - 2\sqrt{2}$ 舍去.

$$\text{知曲线方程为 } \begin{cases} x^2 + y^2 = 2(\sqrt{2} - 1) \\ z = \sqrt{2} - 1 \end{cases}, \text{ 其形状为一个半径 } r = \sqrt{2(\sqrt{2} - 1)}$$

的圆.

$$4. \text{ 解: 整理方程组得 } \begin{cases} (z - 2)^2 = 4(y + 1) \\ x^2 = -4y \end{cases} \quad \text{知其图形为一个在 } xOy \text{ 平}$$

面有相同形状的投影曲线的曲线, 其两个投影曲线都为抛物线形.

5. 解:

(1) 设 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 为曲线 Γ 上的点, 则

柱面上的点有 $x = x_0 - t - 1, y = y_0, z = z_0$, 且

$$\begin{cases} (x_0 - 1)^2 + (y_0 + 3)^2 + (z_0 - 2)^2 = 25 \\ x_0 + y_0 - z_0 + 2 = 0 \end{cases}$$

消去 x_0, y_0, z_0 得

$$\begin{cases} (x + t)^2 + (y + 3)^2 + (z - 2)^2 = 25 \\ x + y - z + t + 3 = 0 \end{cases} \quad \textcircled{1}$$

消去参数 t , 得

$$(z - y - 3)^2 + (y + 3)^2 + (z - 2)^2 = 25$$

(2) 设 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 为曲线 Γ 上的点, 由直线的方向向量为 $(0, 1, 1)$

得柱面上的点有 $x = x_0, y = y_0 + t, z = z_0 + t$, 且满足①式, 消去 x_0, y_0, z_0 得

$$\begin{cases} (x - 1)^2 + (y - t + 3)^2 + (z - t - 2)^2 = 25 \\ x + y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

无视参数 t 得

$$x + y - z + 2 = 0$$

.

(3) 设 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 为曲线 Γ 上的点, 则柱面上的点有 $x = x_0 - t, y = y_0 + t, z = z_0 + t$, 且

$$x_0^2 + y_0^2 - z_0 + 1 = 0, 2x_0^2 + 2y_0^2 + z_0 - 4 = 0$$

消去参数 t , 得

$$(x + z - 2)^2 + (y - z + 2)^2 - 1 = 0$$

.

(4) 取准线上的三个点 $A(0, 0, 0), B(2, 1, 1), C(2, -1, 1)$ 取其母线方向

向 $\mathbf{v} = \lambda \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-1, 0, 2), \left(\lambda = \frac{1}{2}\right)$

设 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 在准线上, 则对所求柱面上的点有

$$x = x_0 - t, y = y_0, z = z_0 + 2t$$

且

$$x_0 = y_0^2 + z_0^2 = 2z_0$$

消去 x_0, y_0, z_0 得

$$x + t = y^2 + (z - 2t)^2 = 2(z - 2t)$$

消去参数 t , 得

$$25y^2 + (z + 2x)^2 - 20x - 10z = 0$$

6. 解:

- (1) 点到轴的距离 $d = \frac{\sqrt{41}}{3}$, 故圆柱面半径为 $r = \frac{\sqrt{41}}{3}$, 由定理 2.3.2, 得圆柱面方程

$$2x^2 + \frac{5}{4}y^2 + \frac{5}{4}z^2 + xy - 2xz - 2yz - 2x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z - \frac{39}{4} = 0$$

即

$$(2y - 2z)^2 + (z + 2x - 1)^2 + (2x + y - 1)^2 = 41$$

- (2) 任取对称轴上的点 (x, y, z) 到三条母线的距离相等, 所以

$$|(x, y, z) \times (1, 1, 1)| = |(x + 1, y, z - 1) \times (1, 1, 1)| = |(x, y + 1, z - 2) \times (1, 1, 1)|$$

化简得对称轴方程为 $x = y + 2 = z - 1$, 圆柱面上的点到对称轴的距离等于对称轴上的点 $(0, -2, 1)$ 到母线 $x = y = z$ 的距离, 故

$$|(0, -2, 1) \times (1, 1, 1)| = |(x, y + 2, z - 1) \times (1, 1, 1)|$$

即

$$(z - y - 3)^2 + (x - z + 1)^2 + (y - x + 2)^2 = 14$$

于是圆周面的方程为

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz - x + 5y - 4z = 0$$

- (3) 圆柱面平行于 \mathbb{Z} 轴, 其方程明显为

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$$

(4) 圆柱面平行于 z 轴, 故设所求圆柱面方程为

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

代入 $(0,0), (4,2), (6,-3)$ 三个点解得

$$\left(x - \frac{25}{8}\right)^2 + \left(y + \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{34}{3}$$

.

(5) 圆柱面平行于 z 轴, 同理可得

$$(x+4)^2 + (y-3)^2 = 25$$

7. 证明: 由定理 3.2.2, 由柱面方程为

$$(py - nz)^2 + (px - mz)^2 + (nx - my)^2 = r^2(m^2 + n^2 + p^2)$$

展开即所得.

3.3 锥面和旋转曲面

1. 解:

(1) 任取锥面上一点 (x, y, z) , 设母线 OM 与准线相交于 $M_1(x_1, y_1, z_1)$, 则

$$\frac{x_1 - 0}{x - 0} = \frac{y_1 - 0}{y - 0} = \frac{z_1 - 0}{z - 0}$$

, 令比值为 t , 则

$$x_1 = xt, y_1 = yt, z_1 = zt$$

. 将其代入准线方程并消去参数 t , 整理得所求锥面方程为

$$36x^2 + 9y^2 - 4z^2 = 0$$

.

(2) 同理, 所求曲面方程为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

.

(3) 同理, 所求曲面方程为

$$F\left(\frac{hx}{z}, \frac{hy}{z}\right) = 0$$

(4) 先讨论当 $x = y = z$ 为圆锥曲面的轴时, 取圆锥面上一点 (x, y, z) , 设原点为 $O(0, 0, 0)$, 轴上一点 $B(a, a, a) (a \neq 0)$ 令 $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OM}| \cdot |\overrightarrow{OB}| = \cos \alpha$, 再令 \mathbb{Z} 轴上一点 $A(0, 0, 1)$ 为圆锥面上一点, 则得以下两个方程:

$$\begin{cases} (x, y, z) \cdot (a, a, a) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} a \sqrt{3} \cos \alpha \\ (0, 0, 1) \cdot (a, a, a) = \sqrt{3} a \sqrt{3} \cos \alpha \end{cases}$$

解得所求圆锥面方程为

$$xy + yz + xz = 0.$$

同理得其余情况下方程为

$$xy - yz + xz = 0$$

或

$$xy - yz - xz = 0$$

或

$$xy + yz - xz = 0$$

(5) 同理, 所求曲面方程为

$$5x^2 + 13y^2 + 25z^2 - 10xy - 30yz + 22xz + 4x - 4y + 4z - 4 = 0$$

(6) 同理, 所求曲面方程为

?

(7) 其轴方程为 $x = y = z$, 且由题得

$$(3, 2, 1) \cdot (1, 1, 1) = \sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2} \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} \cdot \cos \alpha$$

知 $\cos^2 \alpha = \frac{6}{7}$, 由本书第 78 页第 7 题讨论, 得所求曲面方程为

$$(x + y + z)^2 = \frac{6}{7} (1^2 + 1^2 + 1^2) (x^2 + y^2 + z^2)$$

即

$$11x^2 + 11y^2 + 11z^2 - 14xy - 14xz - 14yz = 0$$

2. 解:

- (1) 由命题 3.3.1, 其曲面为锥面, 且是圆锥面, 顶点为 $(0, 0, 0)$
 (2) 观察方程的形态, 利用 $x = x' + a$ 线性变换将其配凑成一个齐次方程, 为此, 令

$$\begin{cases} y + z - x - 1 = 0 \\ z + x - y - 1 = 0 \\ x + y - z - 1 = 0 \end{cases}$$

解得 $x = y = z = 1$, 则令 $x' = x - 1, y' = y - 1, z' = z - 1$ 代入原方程整理得

$$(y' + z' - x')^3 = (z' + x' - y')^2 (x' + y' - z')$$

由于这样的变换不改变曲面的形状, 因此原方程为锥面方程, 其顶点为 $(1, 1, 1)$

3. 证明: 整理方程得

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2xz = 0$$

显然其为一个锥面方程且原点是其顶点. 再整理得

$$(x + y + z)^2 = \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 (1^2 + 1^2 + 1^2) (x^2 + y^2 + z^2)$$

由本书第 7 题知, $\sqrt{x} + \sqrt{y} - \sqrt{z} = 0$ 表示一个半顶角为 $\arccos \frac{\sqrt{6}}{3}$ 的圆锥面.

4. (1)

$$\frac{(y-1)^2}{b^2} + \frac{x^2 + z^2}{c^2} = 1$$

(2)

$$z - \tan(x^2 + y^2) = 0$$

(3)

$$4(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 1$$

(4) 设 $x = \frac{1}{3}(t-2), y = \frac{1}{2}(t+1), z = t$ 得其旋转曲面方程为

$$\begin{cases} x = \sqrt{\frac{(t-2)^2}{9} + \frac{(t+1)^2}{4}} \cos \theta \\ y = \sqrt{\frac{(t-2)^2}{9} + \frac{(t+1)^2}{4}} \sin \theta \\ z = t \end{cases}$$

消去参数得

$$x^2 + y^2 = \frac{(z-2)^2}{9} + \frac{(z+1)^2}{4}$$

(5) 两直线平行, 故得圆柱面方程

$$5x^2 + 5y^2 + 2z^2 + 2xy + 4xz + 4yz + 4x - 4y - 4z - 6 = 0$$

(6) 取曲面上一点 $M(x', y', z')$, 则 $x'^2 + y'^2 + z'^2 = x^2 + y^2 + z^2$, 有

$$\begin{cases} (x - x', y - y', z - z')(1, 2, 1) = 0 \\ x'^2 = y \\ x' + z' = 0 \end{cases}$$

消去 x', y', z' 得

$$3x^2 + 3y^2 - 4xy - 2xz - 4yz - 4x - 8y - 4z = 0$$

5. 解:

(1) 得 $\frac{x^2 + y^2}{9 - \lambda} + \frac{z^2}{4 - \lambda} = 1$, 其形状为 (1) 椭球面, $\lambda < 4$; (2) 单页双曲面, $4 < \lambda < 9$; (3) 不存在, $\lambda > 9$.

(2) 取 $(x, y, z) = (at, b, t)$, 得旋转参数方程为 $(x, y, z) = \left(\sqrt{(at)^2 + b^2} \cos \theta, \sqrt{(at)^2 + b^2} \sin \theta, t \right)$.
即

$$x^2 + y^2 - a^2 z^2 - b^2 = 0$$

讨论略.

6. 证明: 整理得

$$4x^2 - 9(y^2 + z^2) = 36$$

可取母线为 $\begin{cases} 4x^2 - 9y^2 = 36 \\ z = 0 \end{cases}$, 转轴为 \mathbb{X} 轴, 故其为旋转曲面.

7. 证明: 取 l 上一点 (m, n, p) , 圆周面上一点 (x, y, z) , 则由于夹角为 α , 得

$$\frac{(m, n, p)(x, y, z)}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \cos \alpha$$

整理即得所求为

$$(mx + ny + pz)^2 = \cos^2 \alpha (m^2 + n^2 + p^2) (x^2 + y^2 + z^2)$$

8. 解:

- (1) 柱面. 说明: 对于任一满足方程的点 (x_0, y_0, z_0) , 都显然会有 $\left(x_0 + \frac{t}{k}, y_0, z_0 + t\right)$ 满足方程, 消去 t , 得直线

$$\begin{cases} kx - z - kx_0 + z_0 = 0 \\ y = y_0 \end{cases}$$

知所得点解会张成一条方向固定的直线, 又由于本书只讨论代数曲面, 故所得点解是连续的, 可构成连续的图形, 知为柱面.

- (2) 锥面. 说明: 对任一满足方程的点 (x_0, y_0, z_0) , 都显然会有 (tx_0, ty_0, tz_0) 满足方程, 又由于是代数曲面, 故为锥面.

- (3) 柱面. 同理 (x_0, y_0, z_0) 解张为直线解

$$x - x_0 = \frac{y - y_0}{a} = \frac{z - z_0}{b}$$

- (4) 锥面. 说明略.

3.4 二次曲面

1. 解: 设所求平面方程为 $Ax + Bz = 0$, 联立椭球面方程得

$$\begin{cases} Ax + Bz = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \end{cases}$$

代入得 (1) $A = 0$ 时, 显然不满足要求; (2) $A \neq 0$ 时, 有 $\frac{x^2}{a^2} + \left(\frac{B^2}{A^2 b^2} + \frac{1}{c^2}\right) z^2 = 1$, 显然 $\frac{1}{a^2} = \frac{B^2}{A^2 b^2} + \frac{1}{c^2}$, 知所求平面为

$$y = \pm z \sqrt{\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2}\right) b^2}$$

2. 解: 由题

$$(x+4)^2 + y^2 + z^2 = 4[(x-2)^2 + y^2 + z^2]$$

得

$$3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 24x = 0$$

3. 解: 设所求椭球面为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

代入题设得

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{36} = 1$$

4. 解: $\frac{x^2}{4} = \frac{z^2}{9}$, 即 $\frac{x}{2} = \pm \frac{z}{3}$, 为两条交叉直线.

5. 解: $(1-k^2)x^2 + y^2 = 1$, 形状为 (1) 圆, $k=0$; (2) 椭圆, $-1 < k < 1$; (3) 两条平行直线, $k = \pm 1$; (4) 双曲线, $|k| > 1$;

6. 解: (1) 双曲抛物面, 讨论略; (2) $\begin{cases} z = ky \\ x = k \end{cases}$, 利用平行截割法, 知为直纹面, 讨论略; (3) 单页双曲面, 讨论略; (4) 双叶双曲面, 讨论略;

7. 解: $A, B, C > \lambda$ 时为椭圆面;

$A > B > \lambda > C$ 时为单页双曲面;

$A > \lambda > B > C$ 时为双叶双曲面;

$\lambda > A, B, C$ 时不存在图形.

8. 解: $\lambda > 9$, 不存在; $\lambda = 9$, 不存在; $9 > \lambda > 4$, 双叶双曲面; $\lambda = 4$, 椭柱面; $4 > \lambda > 1$, 单页双曲面; $\lambda = 1$, 椭柱面; $\lambda < 1$, 椭球面.

9. 解: 设其方程为 $\frac{z^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2x$, 代入两点坐标解得

$$\frac{3}{5}z^2 + \frac{18}{5}y^2 = x$$

.

10. 解: 显然为 $x = \pm 2$ 或 $y = \pm 3$.

3.5 直纹面

1. (1) 设单叶双曲面方程为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a, b, c \in \mathbb{R}^+)$$

方程改写为

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \left(1 + \frac{y}{b}\right) \left(1 - \frac{y}{b}\right)$$

得 u 族直母线

$$\begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = u \left(1 + \frac{y}{b}\right) \\ u \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = 1 - \frac{y}{b} \end{cases}$$

得 v 族直母线

$$\begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = v \left(1 - \frac{y}{b}\right) \\ v \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = 1 + \frac{y}{b} \end{cases}$$

对同族中任意两条直母线，其显然不平行，则下证其任意不相交，

联立方程得

$$\begin{cases} \frac{1}{a}x - \frac{1}{b}u_1y - \frac{1}{c}z - u_1 = 0 \\ \frac{u_1}{a}x + \frac{1}{b}y + \frac{u_1}{c}z - 1 = 0 \\ \frac{1}{a}x - \frac{u_2}{b}y - \frac{1}{c}z - u_2 = 0 \\ \frac{u_2}{a}x + \frac{1}{b}y + \frac{u_2}{c}z - 1 = 0 \end{cases}$$

其判别式

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{u_1}{b} & -\frac{1}{c} & -u_1 \\ \frac{u_1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{u_1}{c} & -1 \\ \frac{1}{a} & -\frac{u_2}{b} & -\frac{1}{c} & -u_2 \\ \frac{u_2}{a} & \frac{1}{b} & \frac{u_2}{c} & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{a} \frac{1}{b} \frac{1}{c} \begin{vmatrix} 1 & -u_1 & -1 & -u_1 \\ u_1 & 1 & u_1 & -1 \\ 1 & -u_2 & -1 & -u_2 \\ u_2 & 1 & u_2 & -1 \end{vmatrix} = \frac{4}{abc} u_2 (u_2 - u_1)$$

因为其中 $u_1 \neq u_2$ ，故其判别式非零，故两条直线异面，同理 v 族异面，(1) 得证.

(2) 对异族中任意两条直母线, 同理, 得增广矩阵

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{u}{b} & -\frac{1}{c} & -u \\ \frac{u}{a} & \frac{1}{b} & \frac{u}{c} & -1 \\ \frac{1}{a} & \frac{v}{b} & \frac{1}{c} & -v \\ \frac{u}{a} & -\frac{1}{b} & \frac{v}{c} & -1 \end{pmatrix}$$

得

$$\det A = \frac{1}{abc} \begin{vmatrix} 1 & -u & 1 & u \\ u & 1 & -u & 1 \\ 1 & v & 1 & v \\ v & -1 & -v & 1 \end{vmatrix} = 0$$

知异族两条直母线共面.

$$\begin{aligned} u \text{ 族直母线的方向向量 } \mathbf{u} &= \left(\frac{1}{a}, -\frac{u}{b}, -\frac{1}{c} \right) \times \left(\frac{u}{a}, \frac{1}{b}, \frac{u}{c} \right) = \left(\frac{u^2}{bc} + \frac{1}{bc}, -\frac{2u}{ac}, \frac{u^2}{ab} + \frac{1}{ab} \right) \\ v \text{ 族直母线的方向向量 } \mathbf{v} &= \left(\frac{1}{a}, \frac{v}{b}, -\frac{1}{c} \right) \times \left(\frac{v}{a}, -\frac{1}{b}, \frac{v}{c} \right) = \left(\frac{v^2}{bc} - \frac{1}{bc}, -\frac{2v}{ac}, -\frac{v^2}{ab} - \frac{1}{ab} \right) \end{aligned}$$

令 \mathbf{v} 平行 \mathbf{u} , 则对应数成比例, 即

$$\frac{-u^2 + 1}{v^2 - 1} = \frac{-u}{-v} = \frac{u^2 + 1}{-(v^2 + 1)}$$

当且仅当 $u = -v$ 时成立, 则 u 族的任一直母线, 在 v 族直母线中有且仅有一条直母线与之平行.

2. 证明: 由本书第 84 页定理 3.5.1 证法 2 得

$$\text{得 } u \text{ 族直母线: } \begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2u \\ u \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right) = z \end{cases} \quad v \text{ 族直母线: } \begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 2v \\ v \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right) = z \end{cases}$$

与 1 中同理, 联立方程其增广矩阵

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & 0 & -2u_1 \\ \frac{u_1}{a} & \frac{u_1}{b} & -1 & 0 \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & 0 & -2u_2 \\ \frac{u_2}{a} & -\frac{u_2}{b} & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

知

$$\det A = \frac{-2}{ab} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & u_1 \\ u_1 & -u_1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & u_2 \\ u_2 & -u_2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{4}{ab} (u_1 - u_2)^2, (u_1 \neq u_2)$$

知同族的任意两条直母线异面 (v 族同理)

联立任意两条异族直母线方程, 同理其增广矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & 0 & -2u \\ \frac{u}{a} & -\frac{u}{b} & -1 & 0 \\ \frac{1}{a} & -\frac{1}{b} & 0 & -2v \\ \frac{v}{a} & \frac{v}{b} & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

知

$$\det A = \frac{2}{ab} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & u \\ u & -u & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & v \\ v & v & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

知异族的任意两条直母线相交.

$$u \text{ 族直母线的方向向量 } \mathbf{u} = \left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, 0 \right) \times \left(\frac{u}{a}, \frac{u}{b}, -1 \right) = \left(-\frac{1}{b}, \frac{1}{a}, -\frac{2u}{ab} \right)$$

知其平行于平面 $\frac{1}{a}x + \frac{1}{b}y = 0$, 对 v 族同理.

知同族的全体直母线平行于同一平面.

$$\begin{aligned} 3. (1) & \begin{cases} x + z = uy \\ -y = u(x - z) \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x + z = -vy \\ y = v(x - z) \end{cases} \\ (2) & \begin{cases} 1 = aux \\ y = uz(x - z) \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} 1 = vay \\ x = vz(x - z) \end{cases} \end{aligned}$$

4. 证明:

(1)

$$(x + z)^2 = (1 + y)(1 - y)$$

其直母线族方程为

$$\begin{cases} x + z = u(1 + y) \\ u(x + z) = 1 - y \end{cases}$$

其方向向量 $(1, -u, 1) \times (u, 1, u) = (u^2 - 1, 0, 1 + u^2) = (u^2 + 1)(-1, 0, 1) // (1, -1, 1)$
方向为定向, 知为柱面.

(2)

$$(y + z)^2 = (1 + x)(1 - x)$$

得

$$\begin{cases} y + z = u(1 + x) \\ u(y + z) = 1 - x \end{cases}$$

其方向向量 $(u, -1, -1) \times (1, u, u) = (0, -1 - u^2, 1 + u^2) // (0, -1, 1)$
方向为定向, 知为柱面.

(3)

$$\begin{cases} x + y = u(x + 2y + z) \\ u(y + z) = 1 \end{cases}$$

其方向向量 $(1 - u, 1 - 2u, -u) \times (0, u, u) = (-u^2 + u, u^2 - u, u - u^2) // (-1, 1, -1)$
知为柱面.

(4)

$$\begin{cases} x + y + z = u(x - y - z) \\ u(x + y + z) = x - y - z \end{cases}$$

其方向向量 $(1 - u, 1 + u, 1 + u) \times (u - 1, u + 1, u + 1) = (0, -2(1 + u), 2(1 + u)) // (0, -1, 1)$
知为柱面.

5. 解:

$$(1) \text{ 其直母线方程为 } \begin{cases} x + 2y = 16u \\ u(x - 2y) = z \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x + 2y = vz \\ v(x - 2y) = 16 \end{cases}$$

其方向向量 $(1, 2, 0) \times (u, -2u, -1) \cdot (3, 2, -4) = 0$

得直线方程 $\frac{x}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{-1}$

同理得另一条直线 $\frac{x}{2} = \frac{y+4}{1} = \frac{z+4}{2}$

$$(2) \frac{x}{-2} = \frac{y-16}{1} = \frac{z+32}{-4} \text{ 或 } \frac{x}{2} = \frac{y+32}{1} = \frac{z+128}{8}$$

$$(3) \frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z}{0} \text{ 或 } \frac{x}{2} = \frac{y-6}{-3} = \frac{z+4}{4}$$

6. 解:

$$(1) \frac{x-6}{3} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-8}{4} \text{ 或 } \frac{x-3}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{2}$$

$$(2) \theta = \arccos \frac{8}{25} \sqrt{5}$$

7. 略.

8. 解: Cayley 三次直纹面可整理为

$$\frac{x^2}{1-z} + \frac{y^2}{1+z} = 1$$

故其参数方程可写为

$$\begin{cases} x = \sqrt{1-u} \cos \theta \\ y = \sqrt{1+u} \sin \theta \\ z = u \end{cases}$$

9. 证明: u 族直母线族为

$$\begin{cases} x + 3z = u(1+y) \\ u(x - 3z) = 1 - y \\ z = u \end{cases}$$

消去 z , 得直线在 XOY 平面上的投影为

$$2ux + (1 - u^2)y = u^2 + 1$$

即

$$\frac{2u}{1+u^2}x + \frac{1-u^2}{1+u^2}y = 1 \text{ ①}$$

又其腰椭圆为

$$x^2 + y^2 = 1 \text{ ②}$$

①中

$$\left(\frac{2u}{1+u^2} \right)^2 + \left(\frac{1-u^2}{1+u^2} \right)^2 = 1$$

知①是②的切线, 证毕.

4 二次曲面的分类

4.1 坐标变换

1. 解：由题得

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1' \\ \mathbf{e}_2' \\ \mathbf{e}_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}$$

知转轴公式为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

M 在新系下的坐标 $M' = (1, -1, 0)$

2. 解：取三个方向向量

$$\mathbf{n}_1 = (1, 1, 1), \mathbf{n}_2 = (1, -2, 1), \mathbf{n}_3 = (1, 0, -1)$$

易知 $\mathbf{n}_1 \perp \mathbf{n}_2 \perp \mathbf{n}_3$, 且 $(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3) = 4 > 0$, 即

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1' \\ \mathbf{e}_2' \\ \mathbf{e}_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}$$

并利用三条直线的公共点 $(0, 0, 0)$ 作为新原点, 得坐标变换公式

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

3. 解：取 $\Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \Pi_3 = \left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)$ 为原点.

$\mathbf{n}_1^0 = \pm \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ 为 \mathbb{X} 轴方向; $\mathbf{n}_2^0 = \pm \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 为 \mathbb{Y}

轴方向: $\mathbf{n}_3^0 = \pm \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right)$ 为 \mathbb{Z} 轴方向;

控制正负号使原点落在新坐标系的第一卦限, 有坐标变换公式为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm \mathbf{n}_1^{0T} & \pm \mathbf{n}_2^{0T} & \pm \mathbf{n}_3^{0T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \textcircled{1}$$

由于过渡矩阵取的是正交矩阵, 所以 $\textcircled{1}$ 即为:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm \mathbf{n}_1^0 \\ \pm \mathbf{n}_2^0 \\ \pm \mathbf{n}_3^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x + \frac{1}{2} \\ y - 1 \\ z - \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

代入 $(0, 0, 0)$ 得

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mp \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \mp \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

知取 $-\mathbf{n}_1^0$ 为 \mathbb{X} 轴正方向单位向量, 取 $-\mathbf{n}_1^0$ 为 \mathbb{X} 轴正方向单位向量, 取 $+\mathbf{n}_2^0$ 为 \mathbb{Y} 轴正方向单位向量, 取 $+\mathbf{n}_3^0$ 为 \mathbb{Z} 轴正方向单位向量. 同时 $(\mathbf{n}_1^0, \mathbf{n}_2^0, \mathbf{n}_3^0) > 0$ 知为右手系得坐标变换公式

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

4. D. 解: $x^2 + y^2 = 2xy$ 即 $(x - y)^2 = 0$.

5. 可以这样:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

另外的高等解法: 视 $2x + 3y + 4z + 5 = 0$ 为二次方程

$$(2x + 3y + 4z + 5)^2 = 4x^2 + 9y^2 + 16z^2 + 12xy + 16xz + 24yz + 20x + 30y + 40z + 25 = 0$$

特征方程为 $\lambda^3 - 29\lambda^2 = 0$, 取变换公式为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{29}} & \frac{3}{\sqrt{22}} & -\frac{17}{\sqrt{638}} \\ \frac{3}{\sqrt{29}} & \frac{2}{\sqrt{22}} & -\frac{18}{\sqrt{638}} \\ \frac{4}{\sqrt{29}} & \frac{3}{\sqrt{22}} & \frac{5}{\sqrt{638}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

6. 其特征方程为

$$\lambda^3 - 625\lambda = 0$$

, 解得

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \lambda_3 = 25$$

且其为无心二次曲面, 知为椭圆抛物面.

7. 设 $\mathbf{e}_1' = (\cos \theta \sin \varphi, \sin \theta, \cos \theta \cos \varphi)$, 令

$$\mathbf{e}_1' \cdot (1, 1, 1) = (0, 0, 1) \cdot (1, 1, 1)$$

且

$$\frac{[\mathbf{e}_1' \cdot (1, 1, 1)] \cdot [(0, 0, 1) \times (1, 1, 1)]}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot 1 \cdot 1} = \cos \frac{2}{3}\pi$$

得 $\mathbf{e}_1' = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, 同理得 $\mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3'$, 知坐标变换公式为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

4.2 二次曲面的渐进方向和中心

1. 由定理 4.2.1 得二次曲面中心分别为 $(-3, 1, -2)$ 和 $z = 0$.

2. B. 解: 令 $F_1(x, y, z) = F_2(x, y, z) = F_3(x, y, z) = 0$, 得

$$\begin{cases} x = 0 \\ -y - 1 = 0 \\ -0.5 = 0 \end{cases}$$

无解. 知为无心二次曲面.

3. 解:

$$(1) \text{ 由定理 4.2.1, } I_3 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 29 \text{ 知为中心二次曲面.}$$

$$(2) \text{ 由定理 4.2.1, } I_3 = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \text{ 知为非中心二次曲面. 其}$$

线性方程组为

$$\begin{cases} 3x - 2y + z + 1 = 0 \\ -2x + 5y - z + 6 = 0 \\ x - y + 3z + 5 = 0 \end{cases}$$

对系数矩阵 A^* 的秩 r 和增广矩阵 B 的秩 R , 易得 $r \neq R$, 为无心二次曲面.

4. 解:

(1) 其中心坐标为 $(0, 0, 0)$, 知其渐进锥面方程为

$$\phi(x-0, y-0, z-0) = y^2 - 2z^2 + 2xz = 0$$

.

(2) 其中心坐标为 $(0, 0, 0)$, 知其渐进锥面方程为

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 4yz - 4xz = 0$$

.

(3) $I_3 = 0$, 知为非中心二次曲面, 知(可能)不存在渐进锥面/

5. 解: (1) $x = y = 1$; (2) $x = 2y = 2$; (3) 没有中心;

6. 解: (1) $2x - y + 3z + 2 = 0$; (2) $x = \frac{3}{2}y = 3(z - 2)$

7. 解: 对锥面 $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$, 有

$$XF_1(x_0, y_0, z_0) + YF_2(x_0, y_0, z_0) + ZF_3(x_0, y_0, z_0) = aXx_0 + bYy_0 + cZz_0 = 0$$

时, 直线于二次曲面相切.

讨论: ① $\phi(X, Y, Z) = aX^2 + bY^2 + cZ^2 \neq 0$ 时, 直线与二次曲面相切;

② $\phi(X, Y, Z) = 0$ 时, 因为恒有 $F(x_0, y_0, z_0) = 0$, 知直线在二次曲面上.

8. 解: 将直线代入方程, 整理得

$$7t^2 - 7t + 1 = 0$$

解得

$$t_1 = t_2 = \frac{7 \pm \sqrt{21}}{14}$$

得两个交点为 $\left(\frac{-7 \pm 2\sqrt{21}}{7}, \frac{7 \pm 2\sqrt{21}}{7}, 0 \right)$

9. 解: 将直线代入曲面 *Delta* 方程, 整理得

$$4t - 1 = 0$$

解得

$$t = \frac{1}{4}$$

得交点 $(2, \frac{1}{2}, 0)$

证明: 直线 l 的方向向量为 $(4, 2, 0)$ 代入 $\phi(X, Y, Z)$ 得 $\phi(X, Y, Z) = 0$, 令

$$XF_1(x_0, y_0, z_0) + YF_2(x_0, y_0, z_0) + ZF_3(x_0, y_0, z_0) = F(x_0, y_0, z_0) = 0$$

即

$$\begin{cases} 4(x_0 - y_0 + 2z_0 + \frac{3}{2}) + 2(-x_0 - z_0) = 0 \textcircled{1} \\ x_0^2 + z_0^2 - 2x_0y_0 - y_0z_0 + 4z_0x_0 + 3x_0 - 5z_0 = 0 \textcircled{2} \end{cases}$$

①代入②中整理得

$$z_0(y_0 - 2z_0 - 8) = 0$$

知 $z_0 = 0$ 或 $y_0 - 2z_0 - 8 = 0$. 与①联立方程解得 $z_0 = x_0 - 13 = \frac{y_0 - 8}{2}$ 或 $x_0 - 2y_0 + 3 = z_0 = 0$, 知存在且存在无数条所求直线, 取 $(-3, 0, 0)$ 点得其中一条直线为

$$\frac{x+3}{4} = \frac{y}{2} = \frac{z}{0}$$

4.3 二次曲面的对称面和主径面

1. 解: 令 $\phi_1(X, Y, Z) = \phi_2(X, Y, Z) = \phi_3(X, Y, Z) = 0$ 即

$$\begin{cases} X + Y - 2Z = 0 \\ X + Y - 2Z = 0 \\ -2X - 2Y + 4Z = 0 \end{cases}$$

解得此曲面有无数奇向为 $X : Y : Z = 2\lambda : 2\mu : \lambda + \mu$

2. 解: 将 $(0, 0, 0)$ 代入共轭于方向 (X, Y, Z) 的直径面方程, 即 $\phi_4(X, Y, Z) = 0$ 得 $X = Y$.

知所求径面的共轭方向为

$$X : Y : Z = t : t : m$$

得所求径面方程为

$$(6t - 2m)X + (3t - m)y - (3t - m)z = 0, (t^2 + m^2 \neq 0)$$

3. 解: 参考例 4.3.3 有对应主方向与主径面三组为

(1) ① $X : Y : Z = 1 : -1 : 0$ 与 $x - y + 1 = 0$

② $X : Y : Z = 0 : 0 : 1$ 与 $-5z - 2 = 0$

③ $X : Y : Z = 1 : 1 : 0$ 与 $x + y - 1 = 0$

(2) $X : Y : Z = 1 : -1 : 0$ 与 $2x - 2y + 3 = 0$ (注: 特征根为 $\lambda_{1,2,3} = 0, 0, 2$)

(3) 特征方程为 $\lambda^3 - 36\lambda^2 + 396\lambda - 1296 = 0$ 解得 $\lambda_1 = 6, \lambda_2 = 18, \lambda_3 = 12$

得① $X : Y : Z = 1 : 1 : 2$ 与 $x + y + 2z = 0$

② $X : Y : Z = -1 : -1 : 1$ 与 $-x - y + z = 0$

③ $X : Y : Z = 1 : -1 : 0$ 与 $x - y + 1 = 0$

4. 略.

4.4 二次曲面的化简与分类

- 1.

4.5 二次曲面的切线与切平面

1.