

4.4 二次曲面的化简与分类

1. $\lambda = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 2 = 0$.

$$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = \lambda_3 = -1.$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

化简方程得 $y^2 + z^2 - 2x^2 = 9$: 单叶双曲线

2. $\lambda = \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = 0$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

化简得 $-x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$: 双叶双曲线.

3. $\lambda = \lambda^3 - 2\lambda^2 - 3\lambda = 0$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{8} \\ 0 \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

化简得 $3z^2 - y^2 - 2 = 0$: 双曲柱面.

$$(15) \lambda^3 - 18\lambda^2 + 99\lambda - 162 = 0. \quad \lambda_{1,2,3} = 3, 6, 9$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ ①}$$

易知为 $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + I_4 / I_3 > 0$ 的齐次方程，故无实数解

$$\text{即得 } 3x^2 + 6y^2 + 9z^2 - \frac{8}{27} = 0$$

$$(16) \lambda^3 + 6\lambda^2 - 21\lambda = 0. \quad \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 12, \lambda_3 = -18$$

$$(17) \lambda^3 - 7\lambda^2 + 10\lambda = 0. \quad \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 5, \lambda_3 = -2$$

(18) ~~$2x^2 + 1$~~

$$\lambda^3 - 12\lambda^2 + 21\lambda - 10 = 0. \quad \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 10$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

得 $x^2 + y^2 + 10z^2 - 1 = 0.$ \therefore 椭球面

(19) $\lambda^3 - 7\lambda^2 + 14\lambda - 6 = 0. \quad \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2 + \sqrt{2}, \lambda_3 = 2 - \sqrt{2}.$

简化后过原点，因为 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \neq 0$. 简化后必为

椭球面. 如为

$$3x^2 + (2 + \sqrt{2})y^2 + (2 - \sqrt{2})z^2 - 11/2 = 0$$

2. 证明特征方程为 $\lambda^3 - \frac{1}{4}\lambda = 0. \quad \lambda_1 = 0, \lambda_2 = \frac{1}{2}, \lambda_3 = -\frac{1}{2}.$

又其必为不存在. 知为(I)双叶双曲面

$$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 + d = 0$$

不论d或正或负，都有方程为双叶双曲面。

3. 解：取 $\begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix}$ 和三棱锥面及底 $(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 为原点，得

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ 即 } \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y + \frac{1}{2} \\ z - \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

得 $O'(0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $A'(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, $B'(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, 0)$.

代入球方程，得 $-2x^2 + y^2 - z^2 + \frac{1}{2} = 0$.

其余球方程不存在.

4.3 节

1. $\lambda_1 = -7, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 3$ (2013.05.26)

(3) 特征方程为 $\lambda^3 - 36\lambda^2 + 396\lambda - 1296 = 0$ (感受副旋量了吗?)

解得 $\lambda_1 = 6, \lambda_2 = 18, \lambda_3 = 12$.

得 ① $x:y:z = 1:-1:2$ 有 $x+y+2z=0$.

② $x:y:z = -1:-1:1$ 有 $-x-y+z=0$

③ $x:y:z = 1:-1:0$ 有 $x-y+1=0$.

~~4.~~ 千万 (此题不推荐更佳)

知所求平面的法向量 $X:Y:Z = t:t:m$.

得所求平面方程为 $(6t-2m)x + (3t-m)y - (3t-m)z = 0$.
(只有 m 不同时为零)

3. 解之得 $t=1, 3, 3$ 有对应的平面方程为

① $x:y:z = 1:-1:0$ 有 $x-y+1=0$

② $x:y:z = 0:0:1$ 有 $-5z-2=0$

③ $x:y:z = 1:1:0$ 有 $x+y-1=0$.

④ $x:y:z = 1:-1:0$ 有 $2x-2y+3=0$.

注: 特征根为 $\lambda = 0, 0, 2$.

4.2 节

4. 解

(1) 其中心坐标为 $(0, 0, 0)$ ，其渐近线方程为

Ch082.95.2013.8

$$\phi(x=0, y=0, z=0) = y^2 - 2z^2 + 2xz = 0$$

(2) 其中心坐标为 $(0, 0, 0)$ ，其渐近线方程为

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 4yz - 4xz = 0$$

(3) $I_3 = 0$ ，为椭中心之双曲面，和可能不存在渐近线。

5. 解

(1) $x=y=1$ (2) $x=2y=2$ (3) 该有中心

6. 解

$$m(2x-y+3z+2)=0 \quad (2) x=\frac{3}{2}y=3(z+2)$$

15

7. 解

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$$

$$A(x_0, y_0, z_0) + B(y_0, z_0) + C(z_0, x_0) = ax_0 + by_0 + cz_0 = 0$$

讨论：① $\phi(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 \neq 0$ 时

直线为二次曲线的切线

② $\phi(x, y, z) = 0$ 时

因为恒有 $\phi(x_0, y_0, z_0) = 0$ ，知直线在二次曲面上。

8. 解：將直線代入方程，整理得

$$7x^2 - 7x + 1 = 0$$

解得 $x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{41}}{14}$

得交點 $(\frac{-7+3\sqrt{41}}{14}, \frac{7+\sqrt{41}}{14}, 0)$ 或 $(\frac{-7-3\sqrt{41}}{14}, \frac{7-\sqrt{41}}{14}, 0)$.

9. 解：將直線代入曲面之方程，整理得

$$4t - 1 = 0 \text{ 得 } t = \frac{1}{4}$$

得交點 $(0, \frac{1}{2}, 0)$

證明：直線的方程為 $(4, 2, 0)$ ， $\forall (x, y, z) \in$

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= 0 \Leftrightarrow x_1 f_1(x_0, y_0, z_0) + x_2 f_2(x_0, y_0, z_0) + x_3 f_3(x_0, y_0, z_0) \\ &= f(x_0, y_0, z_0) = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 4(x_0 - y_0 + 2z_0 + \frac{3}{2}) + 2(-x_0 - z_0) = 0. \quad ① \\ x_0^2 + z_0^2 - 2x_0y_0 - y_0z_0 + 4z_0x_0 + 3x_0 - 5z_0 = 0 \quad ② \end{cases}$$

①代入②中得，整理得

$$z_0(y_0 - 2z_0 - 8) = 0 \text{ 知 } z_0 = 0 \text{ 或 } y_0 - 2z_0 - 8 = 0.$$

由①聯立方程可得

$$z_0 = x_0 - 13 = \frac{y_0 - 8}{2} \text{ 或 } x_0 - 2y_0 + 3 = z_0 = 0$$

知存在且只有兩組解所求直線。取 $(-3, 0, 0)$ 点得其斜率直線為 $\frac{x+3}{4} = \frac{y}{2} = \frac{z}{0}$.

4.1 节

3. ~~取 -n₁, n₂, n₃~~ = (-1/2, 1, 1/2) 为原点

$\vec{n}_1 = \pm(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ 为 X 轴方向,

$\vec{n}_2 = \pm(1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2})$ 为 Y 轴方向.

$\vec{n}_3 = \pm(1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6})$ 为 Z 轴方向.

转动正负号使原点落在新坐标系的第一卦限

由坐标变换公式

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{n}_1^T & \vec{n}_2^T & \vec{n}_3^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad ①$$

由过渡矩阵承的基正交矩阵, 所以 ① 即为

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm \vec{n}_1 \\ \pm \vec{n}_2 \\ \pm \vec{n}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x + \frac{1}{2} \\ y - 1 \\ z - \frac{1}{2} \end{pmatrix} + (0, 0, 0)$$

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \pm \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$, 知 $-\vec{n}_1$ 为 X 轴正方向单位向量,
 取 $+\vec{n}_2$ 为 Y 轴正方向单位向量
 \vec{n}_3 为 Z 轴正方向单位向量

同时, $(\vec{n}_1^T, \vec{n}_2^T, \vec{n}_3^T) > 0$, 知为右旋, 得坐标变换公式

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

4. D. 解: $x^2 + y^2 = 2xy$, 即 $(x^2 - 2xy + y^2) = (x-y)^2 = 0$.

5. 可以这样: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

另外的高等解法: 视 $2x+3y+4z+5=0$ 为二级方程

$$(2x+3y+4z+5)^2 = 4x^2 + 9y^2 + 16z^2 + 12xy + 16xz + 24yz + 20x + 30y + 40z + 25 = 0.$$

特征方程为: $\lambda^3 - 29\lambda^2 = 0$.

承衰换矩阵为 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{19}} & \frac{3}{\sqrt{22}} & \frac{-17}{\sqrt{198}} \\ \frac{3}{\sqrt{19}} & \frac{2}{\sqrt{22}} & \frac{18}{\sqrt{198}} \\ \frac{4}{\sqrt{19}} - \frac{-3}{\sqrt{22}} & \frac{5}{\sqrt{198}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

b. 其特征方程为 $\lambda^3 - 625\lambda = 0$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 25$. 直线为无心二次曲面.

和为椭圆抛物面.

7. 设 $\vec{e}_1 = (\cos \theta \sin \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta \cos \varphi)$.

则 $\vec{e}_1 \cdot (1, 1, 1) = (0, 0, 1)(1, 1, 1)$.

且 $\frac{[\vec{e}_1' \times (1, 1, 1)] \cdot [\vec{e}_1' \times (0, 0, 1) \times (1, 1, 1)]}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot 1 \cdot 1} = \cos \frac{2}{3}\pi$.

得 $\vec{e}_1 = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. 同理得 \vec{e}_2, \vec{e}_3 和承衰换矩阵为

3.5 节

3.5 直改面

1. 证明、设单叶双曲面方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, a, b, c \in \mathbb{R}^+$

$$\text{方程改写为 } \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = (1 + \frac{y}{b})(1 - \frac{y}{b})$$

$$\text{得直角坐标系 } \left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = u(1 + \frac{y}{b}) \\ u \cdot \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = 1 - \frac{y}{b} \end{array} \right.$$

$$V \text{ 直角坐标系 } \left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = v(1 - \frac{y}{b}) \\ v \cdot \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = 1 + \frac{y}{b} \end{array} \right.$$

对原方程中任意两个变量，其值不平行，则下证其任意不相关，即立得，得

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{a}x - \frac{1}{b}u_1y - \frac{1}{c}z = u_1 = 0 \\ \frac{u_1}{a}x + \frac{1}{b}y + \frac{u_1}{c}z - 1 = 0 \\ \frac{1}{a}x - \frac{u_2}{b}y - \frac{1}{c}z = u_2 = 0 \\ \frac{u_2}{a}x + \frac{1}{b}y + \frac{u_2}{c}z - 1 = 0 \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} \frac{1}{a} - \frac{u_1}{b} - \frac{1}{c} = u_1 \\ \frac{u_1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{u_1}{c} = 1 \\ \frac{1}{a} - \frac{u_2}{b} - \frac{1}{c} = u_2 \\ \frac{u_2}{a} + \frac{1}{b} + \frac{u_2}{c} = 1 \end{array} \right|$$

$$= \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{c} \left| \begin{array}{l} 1 - u_1 - 1 = u_1 \\ u_1 + u_1 - 1 = u_1 \\ 1 - u_2 - 1 = u_2 \\ u_2 + u_2 - 1 = u_2 \end{array} \right| = \frac{4}{abc} u_2(u_2 - u_1)$$

因为其不平行，故其判别式非零，故两直角坐标系 (1) 得证。

V 直角坐标系。

梯度场在直角坐标系中，同理得梯度矩阵

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{1}{b}u & -\frac{1}{c}v \\ \frac{1}{a}u & \frac{1}{b} & \frac{1}{c}u - 1 \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b}v & -\frac{1}{c}v \\ \frac{1}{a}v & -\frac{1}{b} & \frac{1}{c}v - 1 \end{pmatrix} \quad \det A = \frac{1}{abc} \begin{vmatrix} 1 & -u & 1 & u \\ u & 1 & -u & 1 \\ 1 & v & 1 & v \\ v & -1 & -v & 1 \end{vmatrix} = 0$$

梯度场在直角坐标系中为平面。

$$\text{梯度场的方向向量 } \vec{u} = \left(\frac{1}{a}, -\frac{1}{b}u, -\frac{1}{c}v \right) \times \left(\frac{1}{a}u, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}u \right)$$
$$= \left(-\frac{1}{bc}u^2 + \frac{1}{bc}, -\frac{2}{ac}u, \frac{1}{ab}u^2 + \frac{1}{ab} \right)$$

$$\text{梯度场的方向向量 } \vec{v} = \left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}v, -\frac{1}{c}v \right) \times \left(\frac{1}{a}v, -\frac{1}{b}, \frac{1}{c}v \right)$$
$$= \left(-\frac{1}{ab}v^2 - \frac{1}{ab}, -\frac{1}{ac}v, -\frac{1}{ab}v^2 - \frac{1}{ab} \right)$$
$$= \left(\frac{1}{bc}v^2 - \frac{1}{bc}, -\frac{2}{ac}v, -\frac{1}{ab}v^2 - \frac{1}{ab} \right).$$

令 $\vec{v} \parallel \vec{u}$, 则 对应数成比例时

$$\frac{-u^2 + 1}{v^2 - 1} = \frac{-u}{-v} = \frac{u + 1}{-(v + 1)} \quad \text{当且仅当 } \frac{u}{v} = -1 \text{ 时成立,}$$

则 梯度场在一直线上，在梯度场中存在一条直线的切线。

2. 证明：由 P34 例题 3.5.1 证法 2 得

$$\text{一族母线} \left\langle \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2u \right. ; \quad \text{V 族母线} \left\langle \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 2v \right. \\ \left. u \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right) = z \right. ; \quad \left. v \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right) = z \right.$$

为同理，族互为对称，其增族平行

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & 0 & -2u_1 \\ \frac{1}{a}u_1 & \frac{1}{b}u_1 - 1 & 0 \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & 0 & -2u_2 \\ \frac{1}{a}u_2 & \frac{1}{b}u_2 - 1 & 0 \end{pmatrix} \det A = \frac{-1}{ab} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2u_1 \\ u_1 & -u_1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -u_2 \\ u_2 & -u_2 & -1 & 0 \end{vmatrix} \\ = -\frac{4}{ab} (u_1 + u_2)^2 \cdot (u_1 - u_2).$$

知 V 族平行于 U 族两直线母线相交。（V 族同理）

族互为对称，其增族平行

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & 0 & -2u_1 \\ \frac{1}{a}u_1 - \frac{1}{b}u_1 - 1 & 0 \\ \frac{1}{a} & -\frac{1}{b} & 0 & -2v \\ \frac{1}{a}v & \frac{1}{b}v - 1 & 0 \end{pmatrix} \det A = \frac{-1}{ab} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & u \\ u & -u & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & v \\ v & v & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ = 0$$

知 U 族平行于 V 族两直线母线相交。

$$\text{V 族直线方程向量基为 } \vec{u} = \left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, 0 \right) \times \left(\frac{1}{a}u_1 - \frac{1}{b}u_1 - 1, 0 \right) \\ = \left(-\frac{1}{b}, \frac{1}{a}, -\frac{2}{ab}u \right)$$

易知其平行于平面 $\frac{1}{a}x + \frac{1}{b}y = 0$ 。对 V 族同理，

知 U 族平行于 V 族两直线方程于同一平面。

3. 解：

$$(1) \begin{cases} x+z = ux \\ -y = u(x-z) \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x+z = vx \\ y = v(x-z) \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} I = aux \\ y = uz \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} I = vay \\ x = vz \end{cases}$$

$$4. \text{ 证明: } (x+z)^2 = (I+y)(I-y)$$

$$\text{其方向向量为 } x+z = u(I+y)$$

$$u(x+z) = Iy$$

$$\text{其方向向量为 } (1, -u, 1) \times (u, 1, u) = (-u^2, 0, 1+u^2)$$

$$= (u^2+1)(-1, 0, 1) // (1, -1, 1)$$

方向为负向，知为柱面。

$$(2) (y+z)^2 = (I+x)(I-x)$$

$$\text{得 } \begin{cases} y+z = u(I+x) \\ u(y+z) = I-x \end{cases}, \text{ 其方向向量为 } (u, -1, -1) \times (1, u, u)$$

$$= (0, -1-u^2, u^2+1) // (0, -1, 1)$$

知为柱面。

$$(3) x+y = u(x+y+z)$$

$$u(x+y+z) = 1$$

$$\text{得其方向向量为 } (1-u, 1-u, -u) \times (0, u, u)$$

$$= (-2u^2+u, u^2-u, u-u^2) // (-1, 1, -1)$$

知为柱面。

$$4) \begin{cases} x+y+z = u(x-y-z) \\ -u(x+y+z) = x-y-z \end{cases} \text{ 得向量 } (1-u, 1+u, 1+u) \times (u-1, u+1, u+1) \\ = (0, -2(1+u), 2(1+u)) // (0, -1, 1).$$

如图平面

$$5. \text{ 解: (1) 共面且成簇方程 } \begin{cases} x+2y = 16u \\ u(x-y) = z \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x+2y = 1z \\ v(x-y) = 16 \end{cases}$$

其向量 $(1, 2, 0) \times (u, -2u, -1) \cdot (3, 2, -4) = 0$.

$$\text{ 直线簇方程 } \frac{x}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{-1}$$

$$\text{ 同理解得另一条直线 } \frac{x}{2} = y+4 = \frac{z+4}{2}$$

$$(2) \frac{x}{-2} = \frac{y-16}{1} = \frac{z+32}{-4} \text{ 或 } \frac{x}{2} = \frac{y+32}{1} = \frac{z+128}{8}$$

$$(3) \frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z}{0} \text{ 或 } \frac{x}{2} = \frac{y-6}{-3} = \frac{z+4}{4}$$

$$6. \text{ 解: (1) } \frac{x-6}{3} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-8}{4} \text{ 或 } \frac{x-3}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{2}.$$

$$(2) \theta = \arccos \frac{8}{25\sqrt{15}}$$

7. 略

8. 解: 参考文献[9] (注: 原文标注有误)

<http://www.mathcurve.com/surfaces/cayley/cayley.shtml>

Cayley 三元二次曲面方程可整理为

$$\frac{x^2}{1-z} + \frac{y^2}{1+z} = 1.$$

故其参数方程可写为 $\begin{cases} x = \sqrt{1-u} \cos \theta \\ y = \sqrt{1+u} \sin \theta \\ z = u \end{cases}$

Forme 1
Équation homogène dite *tétrahédrique* :

$$\frac{1}{X_1} + \frac{1}{X_2} + \frac{1}{X_3} + \frac{1}{X_4} = 0 \quad , \text{ soit } \sum_{1 \leq i < j < k \leq 4} X_i X_j X_k = 0$$

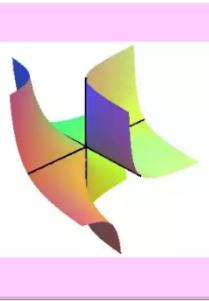
Surface **cubique**.

Les 4 points coniques sont $A_1(1,0,0,0), \dots, A_4(0,0,0,1)$.

Les 9 droites sont les 6 $D_\eta : X_i = X_j = 0$ pour $1 \leq i < j \leq 4$ (la droite D_η joint A_k à A_ℓ)

et les 3 $\Delta_i : X_4 + X_i = X_j + X_k = 0$ pour $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$.

Dans la version affine associée, d'équation $xyz + a(xy + yz + zx) = 0$, ne subsistent à distance finie qu'un point conique A_4 et 3 droites incluses (les 3 axes, en noir ci-contre).



La *surface de Cayley* est la surface définie (à homographie près) par l'équation ci-dessus.

C'est la seule surface cubique dont le groupe des homographies la laissant invariante est le groupe S_4 des permutations de 4 objets (cf. l'invariance par les 24 permutations des coordonnées X_1, X_2, X_3, X_4) et c'est aussi la seule surface cubique à posséder 4 points coniques (maximum possible pour une surface cubique). Cette surface cubique non **lisse** possède 9 droites, qui sont réelles : les arêtes du tétraèdre formé par les points coniques et 3 autres droites, qui sont coplanaires.

Une première transformation projective permet de "voir" les 9 droites à distance finie :

Forme 2
Le changement de coordonnées défini

$$\begin{cases} X_1 = X \\ X_2 = Y \\ X_3 = Z \\ kX_4 = T - (X + Y + Z) \end{cases}$$

par

donne l'

Équation homogène 2 :

$$(X + Y + Z - T)(XY + YZ + ZX) = kXYZ$$

Les points coniques sont

$$A_1(1,0,0,1), A_2(0,1,0,1), A_3(0,0,1,1), A_4(0,0,0,1)$$

Les 9 droites sont les 6 arêtes du tétraèdre formé par les points coniques, plus

$$\Delta_1 : \begin{cases} T = (1-k)X \\ Y + Z = 0 \end{cases} \quad \Delta_2 : \begin{cases} T = (1-k)Y \\ X + Z = 0 \end{cases}$$

$$\Delta_3 : \begin{cases} T = (1-k)Z \\ X + Y = 0 \end{cases}$$

Équation cartésienne affine associée :

$$(x + y + z - a)(xy + yz + zx) = kxyz$$

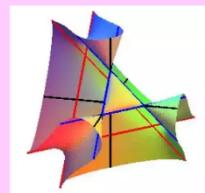
Les points coniques sont

$$A_1(a,0,0), A_2(0,a,0), A_3(0,0,a), A_4(0,0,0)$$

Les 9 droites sont les 6 arêtes du tétraèdre des points coniques, plus :

$$\Delta_1 : \begin{cases} x = a/(1-k) \\ y + z = 0 \end{cases} \quad \Delta_2 : \begin{cases} y = a/(1-k) \\ x + z = 0 \end{cases}$$

$$\Delta_3 : \begin{cases} z = a/(1-k) \\ x + y = 0 \end{cases}$$



Les axes du repère sont en noir, les trois autres arêtes du tétraèdre en bleu, et les 3 droites Δ_i en rouge.

Nous avons choisi ici $k = 2$ (pour $k = 1$ les droites Δ_i sont rejetées à l'infini).

Dans ce cas, on montre que la surface de Cayley est le lieu des points dont les projections sur les quatre plans-faces du tétraèdre des points coniques sont coplanaires. C'est en quelque sorte la généralisation à l'espace du problème du lieu des points dont les projections sur les côtés du triangle sont alignés, lieu qui est, lui, le cercle circonscrit au triangle (cf. **droite de Simson**).

Une deuxième transformation projective permet d'obtenir une vue affine où la surface est invariante par les 24 isométries du tétraèdre régulier (mais 3 des 9 droites sont rejetées à l'infini) :

Forme 3
Le changement de coordonnées défini

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ T \end{bmatrix}$$

par

donne l'

$$\text{Équation homogène 3 : } (X^2 + Y^2 + Z^2)T + 2XYZ = T^3$$

Les points coniques sont

$$A_1(-1,1,1,1), A_2(1,-1,1,1), A_3(1,1,-1,1), A_4(-1,-1,-1,1)$$

Les neuf droites sont les 6 arêtes du tétraèdre et $\Delta_1 : X = T = 0, \Delta_2 : Y = T = 0, \Delta_3 : Z = T = 0$.

Équation cartésienne affine associée :

$$2xyz + a(x^2 + y^2 + z^2) = a^3$$

(voir à [surface du sinus](#) une paramétrisation simple)

Les points coniques sont

$$A_1(-1,1,1), A_2(1,-1,1), A_3(1,1,-1), A_4(-1,-1,-1)$$

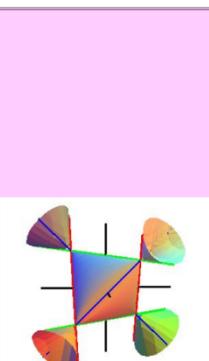
formant un tétraèdre régulier dont les 6 arêtes sont les droites D_η (les droites Δ_i sont rejetées à l'infini dans ce modèle).

La rotation d'un huitième de tour définie par $x := \frac{x+y}{\sqrt{2}}, y := \frac{x-y}{\sqrt{2}}$ donne pour équation cartésienne : $(x^2 - y^2)z + a(x^2 + y^2 + z^2) = a^3$, se simplifiant en

$$\frac{x^2 - y^2}{a-z} + \frac{y^2}{a+z} = a$$

$$\frac{\pi^2 a^3}{2}$$

Le volume de la partie tétraédrique vaut $\frac{\pi^2 a^3}{2}$.
Sous cette forme, la surface de Cayley est une [surface tétraédrique de Goursat](#).



Vue avec les 3 axes de coordonnées (en noir) et les 6 droites incluses.

9. 证明： α 族解为 $x+3z = \alpha(1+y)$

$$\alpha(x-3z) = 1-y$$

消去 z , 得到在 \mathbb{R}^2 上圆的方程为

$$2\alpha x + (1-\alpha^2)y = \alpha^2 + 1$$

$$\text{即 } \frac{2\alpha}{1+\alpha^2}x + \frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}y = 1 \quad \textcircled{1}$$

又其图形为 ~~$x^2 + y^2 = 1$~~ $\textcircled{2}$

$$\textcircled{1} \text{ 中 } \left(\frac{2\alpha}{1+\alpha^2}\right)^2 + \left(\frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}\right)^2 = 1$$

易知 $\textcircled{1}$ 是 $\textcircled{2}$ 的切线，证毕

3.4 节

3.4 二项曲面

1. 解：设所求平面为 $Ay+Bz=0$. 联立椭球面方程，得

$$\begin{cases} Ay+Bz=0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \end{cases}$$

① $A=0$ 时，显然不满足要求
② $A \neq 0$ 时，有 $\frac{x^2}{a^2} + (\frac{B}{A} - \frac{1}{c^2})z^2 = 1$
显然 $\frac{1}{A^2} = \frac{B^2}{A^2b^2} + \frac{1}{c^2}$.

所求平面为 $y = \pm \sqrt{(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2})b^2} z$

2. 解：由题 $(x+4)^2 + y^2 + z^2 = 4[x-2]^2 + y^2 + z^2$

得 $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 24x = 0$.

3. 解：设所求椭圆为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. 由题设得

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{36} = 1$$

4. 解： $\frac{x^2}{9} = \frac{z^2}{9}$, 即 $\frac{x}{z} = \pm 1$, 为两条双曲线

5. 解： $(1-k^2)x^2 + y^2 = 1$.

形状为圆， $k=0$.

$$\begin{cases} 椭圆, -1 < k < 1 \\ 两条双曲线, k=\pm 1 \\ 双曲线, |k| > 1 \end{cases}$$

6. 解：(1) 双叶抛物面，讨论略。 (2) $\begin{cases} z = kx \\ x = k \end{cases}$ 利用平行消元法，
如直纹面，讨论略
(3) 单叶双曲面，讨论略 (4) 双叶双曲面，讨论略。

7. 解： $A, B, C > \lambda$ 时为椭球面 $\lambda = C$ 时为

$A > B > C$ 时为单叶双曲面

$A > \lambda > B > C$ 时为双叶双曲面

$\lambda > A, B, C$ 时不存在图形

8. 解： $\lambda > 9$, 不存在; $\lambda = 9$, 不存在; $9 > \lambda > 4$, 双叶双曲面;

$\lambda = 4$, 椭圆柱面; $4 > \lambda > 1$, 单叶双曲面; $\lambda = 1$, 椭圆柱面;

$\lambda < 1$, 椭圆球面。

9. 解：设其方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2x$, 代入两点坐标解得

$$\frac{3}{5}z^2 + \frac{18}{5}y^2 = x.$$

10. 解：显然为 $x=12$ 或 $y=3$

11. 略

12. 证明：显然有 $P(1\lambda, 1\mu, 1\nu)$. 我们原方程整理可得证.

13. 解： $\sqrt{(x-1)^2 + y^2 + z^2} = \frac{1}{2}|x-4|$. 即

$$3x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 12 = 0.$$

14. 解：物理， $3x^2 - y^2 - z^2 - 12 = 0$.

15. 解：不妨设定直线为 $x=y=0$. 考虑 (a, b, c) . 如图

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} = \lambda \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\text{整理得}, (1-\lambda^2)x^2 + (1-\lambda^2)y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + a^2 + b^2 + c^2 = 0.$$

如图

$|\lambda| < 1$ 时，椭球面

$|\lambda| = 1$ 时，椭圆抛物面

$|\lambda| > 1$ 时，双叶双曲面

注：该图略缺，只画了平面。

3.3 节

3.3 離圓面和旋轉曲面

1. 解：在離圓面上一點，以 (x_1, y_1, z_1) ，後母線以 h 為準線，則

以 (x_1, y_1, z_1) ，則

$$\frac{x_1-0}{x-0} = \frac{y_1-0}{y-0} = \frac{z_1-0}{z-0} \quad \text{全母線平行，則}$$

$x = xt, y = yt, z = zt$ 將其代入準線方程，得 $x^2 + y^2 + z^2 = h^2$ 。

整理得所求離圓面方程為 $3x^2 + 9y^2 - 4z^2 = 0$ 。

(2) 同理，所求曲面方程為 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ 。

(3) 同理，所求曲面方程為 $F\left(\frac{hx}{z}, \frac{hy}{z}\right) = 0$ 。

(4) 先討論 $x=y=z$ 為圓錐面旋轉時

取圓錐面上一點 $M(x, y, z)$ ，後母線為 $O(0, 0, 0)$ 在上一點 $B(a, a, a)$

全 $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OM}| \cdot |\overrightarrow{OB}| \cos \alpha$ 。

再取直線上一點 $A(1, 0, 1)$ 在圓錐面上一高，則得以下兩方程：

$$\begin{cases} (x, y, z) \cdot (a, a, a) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot a\sqrt{3} \cdot \cos \alpha \\ (0, 0, 1) \cdot (a, a, a) = \sqrt{3} \cdot a\sqrt{3} \cdot \cos \alpha \end{cases}$$

解得所求圓錐面方程為 $xy + yz + xz = 0$ 。

同理得其另一條方程為 $xy - yz + xz = 0$ 。或 $xy - yz - xz = 0$ 。

或 $xy + yz - xz = 0$ 。

(15) 同理, 所求曲面方程为 $x^2 + 13y^2 + 25z^2 - 10xy - 30yz + 22xz + 4x - 4y + 4z - 4 = 0$.
Ch082.95.213.8

(16) ~~同理, 所求曲面方程为?~~

(17) 其曲面方程为 $x=y=z$. 且由题得

$$(1, 2, 1)(1, 1, 1) = \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} \cdot \cos \alpha. \text{ 知 } \cos \alpha = \frac{6}{7}$$

由第78页第7题结论 得所求曲面方程为

$$(x+yz)^2 = \frac{6}{7} (1^2 + 1^2 + 1^2) (x^2 + y^2 + z^2)$$

$$\text{即 } 11x^2 + 11y^2 + 11z^2 - 14xy - 14xz - 14yz = 0.$$

2. 解: (1) 由题3.3.1 其侧面为锥面 ~~方程~~, 且是圆锥面 ~~方程~~.

其顶点为 $(0, 0, 0)$.

(2) ~~由题3.3.1 其侧面为锥面 ~~方程~~, 且是圆锥面 ~~方程~~~~

$$(x+z-x)^2 = 1$$

(2) 由原方程的形态, 利用 $x=x'+a$ 的线性变换将其化成一个新方程,
为此, 令 $y+z-x-1=0$.

$$\begin{cases} z+x-y-1=0 \\ x+y-z-1=0 \end{cases} \text{解得 } x=y=z=1. \text{ 则}$$

$\therefore x'=x-1, y'=y-1, z'=z-1$, 代入原方程整理得

$(y'+z'-x')^2 = (z'+x'-y')^2 (x'+y'-z')$ 由于这样而变换不改变曲面
的形状, 因此原方程为锥面方程, 其顶点为 $(1, 1, 1)$

证明：整理方程，得 $x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2xz = 0$.

显然其为一个椭圆方程且原点是其顶点。

再整理得 $(x+y+z)^2 = (\frac{16}{3})^2 (1^2 + 1^2 + 1^2) / (x^2 + y^2 + z^2)$.

由P78页第7题知， $\sqrt{x} + \sqrt{y} - \sqrt{z} = 0$ 表示一个椭圆角为 $\arccos \frac{16}{3}$ 的圆锥面。

$$1) \frac{(y-1)^2}{b^2} + \frac{x^2 + z^2}{c^2} = 1 \quad 2) z - \tan(x^2 + y^2) = 0$$

$$3) 4(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 0 \quad 4) \text{设 } x = \frac{1}{3}(t-2), y = \frac{1}{2}(t+1), z = t.$$

得椭圆方程为

$$\begin{cases} x = \sqrt{\frac{(t-2)^2}{9} + \frac{(t+1)^2}{4}} \cos \theta \\ y = \sqrt{\frac{(t-2)^2}{9} + \frac{(t+1)^2}{4}} \sin \theta \end{cases}$$

$\theta = \pi$.

$$\text{得 } x^2 + y^2 = \frac{(z-2)^2}{9} + \frac{(z+1)^2}{4}$$

同理得，故得圆锥面方程

$$5x^2 + 5y^2 + 2z^2 + 2xy + 4xz + 4yz + 4x - 4y - 4z - 6 = 0.$$

（b）求曲面上一点从 (x', y', z') .

$$\text{则 } x'^2 + y'^2 + z'^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

$$(x-x', y-y', z-z')(1, 2, 1) = 0.$$

$$\begin{cases} x'^2 = y \\ x' + z' = 0 \end{cases}$$

消去 x', y', z' 得

$$3x^2 + 3y^2 - 4xy - 2xz - 4yz - 4x - 8y - 4z = 0.$$

5. 解: 得 $\frac{x^2+y^2}{9-\lambda} + \frac{z^2}{4-\lambda} = 1$

其形状为 $\begin{cases} \text{椭球面}, & \lambda < 4; \\ \text{单叶双曲面}, & 4 < \lambda < 9 \\ (\text{不存在}), & \lambda > 9 \end{cases}$

(2) 承 $(x, y, z) = (at, b, t)$.

得旋转参数方程为 $(x, y, z) = h(\sqrt{at^2+b^2}\cos\theta, \sqrt{at^2+b^2}\sin\theta, t)$.

即 $x^2 + y^2 - a^2 z^2 - b^2 = 0$. 证毕.

6. 证明: 由得 $4x^2 - 9(y^2 + z^2) = 36$.

可取母成为 $\begin{cases} 4x^2 - 9y^2 = 36, \\ z \geq 0 \end{cases}$, 轴为 x 轴, 故其为单叶双曲面.

7. 证明：设任一点 (m, n, p) 固锥面上一点 (x, y, z) .
则由共轭为义，得

$$\frac{(x, y, z)(m, n, p)}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \cos \alpha.$$

$$\text{整理即得，为 } (mx+ny+pz)^2 = \cos^2(m^2+n^2+p^2)(x^2+y^2+z^2)$$

8. 解：(1) 柱面. 说明：对任一满足行程的点 (x_0, y_0, z_0) 都必然会有

(x_0+t, y_0, z_0+t) 满足行程，由此得直角线

$$\begin{cases} kx - z - kx_0 + z_0 = 0 \\ y = y_0 \end{cases} \quad \text{之所以解会形成一条方向}$$

固定的直线，又由于本节讨论代数曲面，故所得
解是连续的，可构成连绵的图形，称为柱面。

(2) 锥面. 说明：对任一 (x_0, y_0, z_0) 满足行程，都有 (tx_0, ty_0, tz_0)
满足行程，又由于是代数曲面，故为锥面。

(3) 柱面. 说明：同(1)中理， (x_0, y_0, z_0) 解张为直角解

$$x - x_0 = \frac{y - y_0}{a} = \frac{z - z_0}{b}.$$

(4) 锥面. 说明略。

~~3.2 柱面的投影曲线~~

1. ~~单柱面~~, ~~图~~

单圆柱面, 图形如图所示

(2) 双圆柱面, 图形如下

(3) 抛物柱面, 图形如下

(4) 抛物柱面, 图形如下

(5) 平面, 图形略.

(6) 两个垂直的平面, 图形略.

(7) 两个垂直的平面, 图形略

(8) 三个互相垂直的平面, 图形略.

2. 解: 1) $z^2 + 4z - 4y = 0$
 $x^2 + z^2 = 0$

2. 解: 1) $y - z^2 + 4y + 4z = 0$ 2) $x^2 - x + y^2 + 1 = 0$ 3) $x^2 - 2x - 2z^2 + 6z - 3 = 0$
 $\begin{cases} x^2 + z^2 = 0 \\ x^2 - 4z = 0 \\ x^2 + 4y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} z - x - 1 = 0 \\ z^2 - 3z + y^2 + 1 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y - z + 1 = 0 \\ x^2 - 2x + y^2 + 2y + 1 = 0 \end{cases}$

4) $x - z - 3 = 0$. 5) $\begin{cases} z^2 + x - 1 = 0 \\ 2y + 7z - 2 = 0 \\ 7x + 2y - 18 = 0 \end{cases}$

3. 解: $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = 2z \end{cases}$ 通过 $(x^2 + y^2)$, 得 $z^2 + 2z = 1$. 解得 $z = -1 \pm \sqrt{2}$. 代入方程中, 得
 $x^2 + y^2 = -2 \pm 2\sqrt{2}$, 由于 $x^2 + y^2 \geq 0$, 故 $x^2 + y^2 = -2 + 2\sqrt{2}$,
知曲线方程为 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2(\sqrt{2} - 1) \\ z = \sqrt{2} - 1 \end{cases}$ 其形状为一个半径 $r = \sqrt{2(\sqrt{2} - 1)}$ 的圆.

4. 解: 通过方程组, 得

$\begin{cases} (z-2)^2 = 4(y+1) \\ x^2 = -4y \end{cases}$ 知其图形为一个在 x_0y 平面和 z_0y 平面上的椭圆柱状平行
 根据曲线的方程, 其横截面为抛物线.

两个

Ch082.95.2013.8

典例

5. 解: (1) 设 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 为 P₁ 上一点, 则
 椭面上的点有 $x = x_0 - t - 1, y = y_0, z = z_0$.
 且 $\begin{cases} (x_0-1)^2 + (y_0+3)^2 + (z_0-2)^2 = 25 \\ x_0 + y_0 + z_0 + 2 = 0 \end{cases}$ ①

消去 x_0, y_0, z_0 , 得 $\begin{cases} (x+t)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 = 25 \\ x + y - z + t + 3 = 0 \end{cases}$

消去参数 t, 得 $(z-y-3)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 = 25$

(2) 设 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 为 P₂ 上一点, 由直线的方向向量为 $(0, 1, 1)$ 得
 椭面上的点有 $x = x_0, y = y_0 + t, z = z_0 + t$.
 且满足①式,
 消去 x_0, y_0, z_0 , 得 $\begin{cases} (x-1)^2 + (y-t+3)^2 + (z-t-2)^2 = 25 \\ x + y - z + 2 = 0 \end{cases}$

消去参数 t, 得
 无视参数 t, 得 $x + y - z + 2 = 0$.

(3) 设 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 为 P₃ 上一点, 则
 椭面上的点有 $x = x_0 - t, y = y_0 + t, z = z_0 + t$.
 且 $\begin{cases} x_0^2 + y_0^2 - z_0 + 1 = 0 \\ 2x_0^2 + 2y_0^2 + z_0 - 4 = 0 \end{cases}$

消去 x_0, y_0, z_0 , 得 $\begin{cases} (x+t)^2 + (y-t)^2 - z + t + 1 = 0 \\ 2(x+t)^2 + 2(y-t)^2 + z - t - 4 = 0 \end{cases}$

消去参数 t, 得 $(x+z-2)^2 + (y-z+2)^2 - 1 = 0$.

4) 求准线所过之点, $A(0, 0, 0)$, $B(2, 1, 1)$, $C(2, -1, 1)$.

其法向量 $\vec{u} = \vec{AB} \times \vec{AC} = (-1, 0, 2)$, ($\lambda = \frac{1}{2}$).

设从 (x_0, y_0, z_0) 在准线上, 则对所有~~该~~面上的点有

$$x = x_0 - t, y = y_0, z = z_0 + 2t.$$

且 $x_0 = y_0^2 + z_0^2 = 2z_0$.

消去 x_0, y_0, z_0 , 得 $x + t = y^2 + (z - 2t)^2 = 2(z - 2t)$

消去参数 t , 得 ~~2y^2 + (z + 2x)^2 - 20x - 10z = 0~~.

b) 知 $d=1$, 考虑轴的半径 $d = \frac{\sqrt{14}}{3}$, 故圆柱面半径为 $r = \frac{\sqrt{14}}{3}$

由题意 2.3.2, 得圆柱面方程

$$2x^2 + \frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{4}z^2 + xy - 2xz - 2yz - 2x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z - \frac{39}{4} = 0.$$

即 $(2y - 2z)^2 + (z + 2x - 1)^2 + (2x + y + 1)^2 = 41$.

(2) 因为对称轴上点 (x, y, z) 到原点的距离相等，所以

Ch082.95.2013.8

$$|(x, y, z) \times (1, 1, 1)| = |(x+1, y, z-1) \times (1, 1, 1)| = |(x, y+1, z-2) \times (1, 1, 1)|.$$

化简得对称轴方程为 $x = y + 2 = z - 1$ ，圆柱面上的点到对称轴的距离等于对称轴上点 $(0, -2, 1)$ 到直线 $x = y = z$ 的距离，故

$$|(0, -2, 1) \times (1, 1, 1)| = |(x, y+2, z-1) \times (1, 1, 1)| \text{ 即}$$

$$(z-y-3)^2 + (x-z+1)^2 + (y-x+2)^2 = 14$$

于是圆柱面方程为

答案有误，大家自己看着办

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz - x + 5y - 4z = 0.$$

(3) 圆柱面平行 z 轴，其方程即为 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$.

(4) 圆柱面平行 z 轴，故该所求圆柱面方程为

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = t^2$$

代入 $(0, 0), (4, 2), (6, -3)$ 三个点解得

$$(x-\frac{11}{3})^2 + (y+\frac{1}{3})^2 = \frac{34}{3}$$

(5) 圆柱面平行 z 轴，同理可得

$$(x+4)^2 + (y-3)^2 = 25$$

7. 证明：由定理 3.2.2 圆柱面方程为

$$(py-nz)^2 + (qx-mz)^2 + (hx-my)^2 = f^2 (m^2 + n^2 + p^2).$$

展开即证得

3.1 圆与空间曲线

1. 解：整理得 $(x+1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 3^2$. 和

圆心 $(-1, 0, 2)$, 半径 $r=3$

2. 解：(1) 知道 $r=3$

$$(2) r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{3}$$

$$\theta = \arccos \frac{z}{r} = \arccos \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ 和柱面坐标 } (r, \theta, \phi) = (\sqrt{3}, \frac{\pi}{4}, \arccos \frac{\sqrt{3}}{3})$$

$$y = r \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2}$$

$$y = r \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ 和柱面坐标 } (r, \theta, z) = (\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}, 1).$$

$$z = \sqrt{3} = 1$$

3. 解

$$\begin{cases} x = a \cos \varphi \\ y = a \cdot \sin \varphi \\ z = z_0 \end{cases}$$

$$y = vt$$

$$z_0 = gt$$

$$\begin{cases} x = a \cos \omega t \\ y = a \sin \omega t \\ z = vt \end{cases}$$

4. 解：椭圆曲线，证明略

5. 解：(1) 原点至平面 $x+y+z=0$ 的距离

$$d = \sqrt{3} \text{, 则所求圆的半径 } r = \sqrt{4 - d^2} = 1.$$

易得过原点且与平面 $x+y+z=0$ 垂直为

$$x=y=z.$$

该平面方程得圆心坐标 $(1, 1, 1)$.

(2) 对原方程由

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 5 \\ x^2 + y^2 + z^2 + x + 2y + 3z - 7 = 0 \end{cases} \quad ①$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 5 \\ x + 2y + 3z - 2 = 0 \end{cases} \quad ②, \quad ② - ① \text{ 得}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 5 \\ x + 2y + 3z - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 5 \\ x + 2y + 3z - 2 = 0 \end{cases}$$

同(1)理可得半径 $r = \frac{4}{7}\sqrt{14}$.

6. 证明：

$$\text{圆心坐标} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}\right).$$

且 $t=0$, 得坐标 $(0, 0, 0)$.

且 $t=1$, 得坐标 $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$

且 $t=-1$, 得坐标 $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$.

由以上三点决定的椭圆方程为 $\frac{x^2}{t^2+1} + \frac{y^2}{t^2+1} + \frac{z^2}{t^2+1} = 1$. 其圆心为 (x_0, y_0, z_0) .

$$\begin{aligned} \text{且 } (\frac{1}{3}-x_0)^2 + (\frac{1}{3}-y_0)^2 + (\frac{1}{3}-z_0)^2 &= (-\frac{1}{3}-x_0)^2 + (\frac{1}{3}-y_0)^2 + (\frac{1}{3}-z_0)^2 \\ &= x_0^2 + y_0^2 + z_0^2. \end{aligned}$$

解得 $(x_0, y_0, z_0) = (0, \frac{1}{2}, 0)$. 半径 $r = \frac{1}{2}$.

$$\text{而 } (\frac{x}{1+t^2+t^4})^2 + (\frac{y}{1+t^2+t^4})^2 + (\frac{z}{1+t^2+t^4})^2 = (\frac{1}{2})^2 \text{ 成立.}$$

则曲线在 xy 平面上的方程为 $x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 + z^2 = (\frac{1}{2})^2$

7. 证明：由题， $(\sqrt{x^2+y^2}-a)^2+z^2=b^2$.

Ch082.95.2013.8

则由第75页表3.2得：

面 $(\sqrt{x^2+y^2}-a)^2+z^2=b^2$ 可由 $\begin{cases} (y-a)^2+z^2=b^2 \\ x=0 \end{cases}$ 绕 x 轴旋转得到。
故其为一个环面。其环面方程为 $(\sqrt{x^2+y^2}-a)^2+z^2=b^2$.

8. 解：

$$\begin{cases} x=t \\ y=1-t \end{cases}$$

$$z=\sqrt{\frac{9}{4}-t^2-(1-t)^2}$$

9. 解：(补平面) $x-y-3z+1=0$ 距离 $d=\frac{|b|}{\sqrt{14}}$

故球体方程为 $(x-3)^2+(y+5)^2+(z-2)^2=\frac{128}{7}$

9. 证明：由前面定理2.3.2，只要证 $l_1 \parallel l_2$ ，只需证 $l_1 \parallel l_2$ 时成立。

若 $l_1 \parallel l_2$ ，此时不妨设 $x=\frac{a}{d}, y=\frac{b}{d}, z=\frac{c}{d}$.

此时把方程转化为 $A/a+b/b+c/c+d/d=0$.

当 $d>0$ 时， $l_1 \parallel l_2$ ，此时转化为前面定理2.3.2相同的结论。

故 $l_1 \parallel l_2$ 。

2.6 节

2.6 平面束

1. 证明：假设方程为 $\frac{x_2}{-1} = \frac{y-1}{4} = \frac{z}{3}$, 则 $\begin{cases} \frac{x_2}{-1} = \frac{z}{3} \\ \frac{x_2}{-1} = \frac{y-1}{4} \end{cases}$ 代入平面方程则得如

恒满足平面方程，即在平面上。

2. 解：假设该平面为 $\mu(4x-y+3z-1) + \lambda(x+5y-2z+2) = 0$.

$$\text{即 } (4\mu+1)x + (-\mu+5\lambda)y + (3\mu-\lambda)z + (-\mu+2\lambda) = 0.$$

$$\text{令 } (4\mu+1, -\mu+5\lambda, 3\mu-\lambda) \cdot (0, 1, 0) = 0.$$

$$\text{得 } 5\lambda = \mu. \text{ 得该方程为 } 21x+14y-3=0.$$

$$(2) 同理，令 $(4\mu+1, -\mu+5\lambda, 3\mu-\lambda) \cdot (2, -1, 5) = 0$.$$

$$\text{得该方程为 } 7x+14y+5=0.$$

3. 解：(1) 该平面方程为 $\mu\left(\frac{x+1}{2} - \frac{y}{-1}\right) + \lambda\left(\frac{y}{-1} - \frac{z-2}{3}\right) = 0$.

$$\text{则 } \mu = \frac{6}{-1} - \frac{-1-2}{3} = 1$$

$$\lambda = -\left(\frac{2+1}{3} - \frac{0}{-1}\right) = -1$$

$$\text{得平面 } 3x+12y+2z-1=0.$$

(2) 该平面方程为 $\mu(-5x-y+7) + \lambda(-x-z+1) = 0$.

$$\text{其法向量 } \vec{n} \cdot [(2, -1, -1) \times (1, 2, -1)] = 0.$$

$$\text{得平面方程 } -3x-y+2z+5=0.$$

(3) 同理，该平面方程为 $\mu(-3x-2y-1) + \lambda(-x-z+1) = 0$.

$$\text{其法向量 } \vec{n} \cdot (3, 2, -1) = 0.$$

4. 解：得平面方程为 $-x+8y+13z-9=0$.

① 该平面方程为 $x-2y+3z+c=0$. ($c \neq -4$).

(1) 代入 $(0, -3, 0)$ 得 $x-2y+3z-6=0$.

$$(2) d_{\text{max}} = |c| / \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} = 1.$$

$$\text{得 } x-2y+3z \pm \sqrt{14} = 0.$$

5. 解：设所求平面为 $x+3y+2z=D$.

其在 x 轴、 y 轴、 z 轴上的距离分别为 $D, \frac{D}{3}, \frac{D}{2}$.

$$V = |D| \cdot |\frac{D}{3}| \cdot |\frac{D}{2}| \cdot \frac{1}{3} = 6. \text{ 解得 } D = \pm 3\sqrt[3]{4}$$

则所求平面方程为 $x+3y+2z \pm 3\sqrt[3]{4} = 0$.

6. 解：设 x 轴系数为 λ ， y 轴系数为 μ ， z 轴系数为 ν ，即

$$1+\lambda=3-\lambda, \text{ 得 } \lambda=1, \text{ 平面 } 2x+2y-2z+9=0.$$

7. 解：设所求平面为 $\mu(x+1)+\lambda(-3y-2z-6)=0$.

$$\text{令 } d_{xy}=\lambda=3, \text{ 则 } (5\mu+1)^2 = 3^2 \cdot [\mu^2 + (3\lambda)^2 + (2\lambda)^2]$$

$$\text{解得 } \mu=\lambda=8 \text{ 或 } -\frac{34}{7}, (-65+18\sqrt{77})/16 \text{ 或 } (-65-18\sqrt{77})/16$$

则所求平面为 $8x+3y+2z+2=0$.

$$\text{或 } 34x+21y+14z+76=0.$$

$$\text{设两个相似平面 } 3x-21y-14z-39=0.$$

$$\text{或 } 54x-21y-14z+12=0.$$

注：我也很无奈啊！

8. 解：设平面 I: $\mu(2x-4y+z)+\lambda(3x-y-9)=0$.

$$\text{令 } I \perp II, \text{ 解得 } I: x+3y-z-9=0.$$

则所求直线方程为 $\begin{cases} x+3y-z-9=0 \\ 4x-y+z-1=0. \end{cases}$

9. 证明：由平面几何 2.3.2 知要证垂直成立，只需证 $l_1 \parallel l_2$ 即可。

若 $l_1 \parallel l_2$ ，此时不妨设 $x = \frac{a}{d}, y = \frac{b}{d}, z = \frac{c}{d}$.

此时把该方程转化为 $A/x + B/y + C/z + D/d = 0$.

当 $d=0$ 时， $l_1 \parallel l_2$. 此时转化为与定理 2.3.2 相同的情形。

故垂直成立。

2.4 节

2.4 点到平面的距离

$$1. (1) d = \frac{20}{11}\sqrt{2} \quad (2) d = \sqrt{6}$$

2. 证明：由点到平面距离公式，

$$d = \frac{|x+1|}{\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2 + \left(\frac{1}{c}\right)^2}}, \text{整理即得所证。}$$

3. 解：虽然平面 $x+1=0$ 不满足条件，则设过直线 $\frac{x+1}{0} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-2}{3}$ 的平面为

$$(1)x+1+m(3y+2z+2)=0.$$

$$\text{即 } x+3my+2mz+2m+1=0.$$

由点到平面距离公式，得

$$3^2 = \frac{(4+3m+4m+2m+1)^2}{[1+(3m)^2+(2m)^2]}$$

$$\text{解得 } m = -\frac{1}{6} \text{ 或 } \frac{8}{3}$$

所以所求平面方程为 $3x+4y+16z+19=0$.

$$\text{或 } 3x-y-2z+2=0.$$

$$4. (1) d=0 \quad (2) d = \frac{15}{4}\sqrt{41} \quad (3) d=0.$$