解析几何答案

陈家宝

目录

1 向量与坐标 **1**

1.1 向量的定义、加法和数乘 1

1.2 向量的线性相关性 2

1.3 标架与坐标 4

1 向量与坐标

1.1 向量的定义、加法和数乘

1. 证明：$\overrightarrow{PA_1}+\overrightarrow{PA_2}+\cdots+\overrightarrow{PA_n}=\left(\overrightarrow{OA_1}-\overrightarrow{OP_1}\right)+\left(\overrightarrow{OA_2}-\overrightarrow{OP_2}\right)+\cdots+\left(\overrightarrow{OA_n}-\overrightarrow{OP_n}\right)=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}-n\overrightarrow{OP}$，又 $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}=\mathbf{0}$，故 $\overrightarrow{PA_1}+\overrightarrow{PA_2}+\cdots+\overrightarrow{PA_n}=-n\overrightarrow{OP}=n\overrightarrow{OP}$.

2. (a) $(\mu-\nu)(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})-(\mu+\nu)(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\mu\boldsymbol{a}-\mu\boldsymbol{b}-\nu\boldsymbol{a}+\nu\boldsymbol{b}-\mu\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}-\nu\boldsymbol{a}+\nu\boldsymbol{b}=-2\nu\boldsymbol{a}+2\nu\boldsymbol{b}$.

   (b) $\mathbf{D}=\begin{vmatrix}3 & 4\\ 2 & -3\end{vmatrix}=-17,\mathbf{D_x}=\begin{vmatrix}\mathbf{a} & 4\\ \mathbf{b} & -3\end{vmatrix}=-3\mathbf{a}-4\mathbf{b},\mathbf{D_y}=\begin{vmatrix}3 & \mathbf{a}\\ 3 & \mathbf{b}\end{vmatrix},\mathbf{x}=\frac{D_x}{D}=\frac{3}{17}\mathbf{a}+\frac{4}{17}\mathbf{b},\mathbf{y}=\frac{D_y}{D}=-\frac{3}{17}\mathbf{b}+\frac{2}{17}\mathbf{a}$.

3. (1)$\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$, (2)$\mathbf{a},\mathbf{b}$ 同向，(3)$\mathbf{a},\mathbf{b}$ 反向，且 $|\mathbf{a}|\geq|\mathbf{b}|(4)\mathbf{a},\mathbf{b}$ 反向,(5)$\mathbf{a},\mathbf{b}$ 同向，且 $|\mathbf{a}|\geq|\mathbf{b}|$.

4. 证明：若 $\lambda+\mu<0,-\lambda<0$，由情形 1，得 $[(\lambda+\mu)+(-\lambda)]\,\mathbf{a}=(\lambda+\mu)\mathbf{a}+(-\lambda)\mathbf{a}$，即 $\mu\mathbf{a}=(\lambda+\mu)\mathbf{a}-\lambda\mathbf{a}$，从而 $(\lambda+\mu)\mathbf{a}=\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{a}$ 得证.

1.2 向量的线性相关性

1. (1) 错，当 $\mathbf{a}=\mathbf{0}$ 时；(2) 错，当 $\mathbf{a}=\mathbf{0}$ 时.

2. 设 $\lambda\mathbf{c}+\mu\mathbf{d}=\mathbf{0}, \lambda(2\mathbf{a}-\mathbf{b})+\mu(3\mathbf{a}-2\mathbf{b})=\mathbf{0}, (2\lambda+3\mu)\mathbf{a}+(-\lambda-2\mu)\mathbf{b}=\mathbf{0}$. 由于 $\mathbf{a},\mathbf{b}$ 不共线，所以 $\begin{cases}2\lambda+3\mu=0,\\ \lambda+2\mu=0.\end{cases}$ 又 $\begin{vmatrix}2&3\\1&2\end{vmatrix}=1\neq 0$，所以 $\lambda=\mu=0$，即 $\mathbf{c},\mathbf{d}$ 线性无关.

3. 证明：$\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{CD}$，$E$、$F$ 分别为梯形腰 BC、AD 上的中点，连接 EF 交 AC 于点 H，则 H 为 AC 的中点，$\overrightarrow{FH}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{HE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{FE}=\overrightarrow{FH}+\overrightarrow{HE}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AB}\right)$，因为 $\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{CD}$，而 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 方向一致，所以 $\left|\overrightarrow{FE}\right|=\frac{1}{2}\left(\left|\overrightarrow{AB}\right|+\left|\overrightarrow{DC}\right|\right)$.

4. 设 $\mathbf{a}=\lambda\mathbf{b}+\mu\mathbf{c}$，则

   $$\mathbf{a}=-\mathbf{e_1}+3\mathbf{e_2}+2\mathbf{e_3}=2\lambda\mathbf{e_1}-6\lambda\mathbf{e_2}+2\lambda\mathbf{e_3}-3\mu\mathbf{e_1}+12\mu\mathbf{e_2}+11\mu\mathbf{e_3},$$

   即

   $$\left(-1-4\lambda+3\mu\right)\mathbf{e_1}+\left(3+6\lambda-12\mu\right)\mathbf{e_2}+\left(2-2\lambda-11\mu\right)\mathbf{e_3}=\mathbf{0},$$

   又 $\mathbf{e_1}$、$\mathbf{e_2}$、$\mathbf{e_3}$ 线性相关，有

   $$\begin{cases}-1-4\lambda+3\mu=0\\ 3+6\lambda-12\mu=0\\ 2-2\lambda-11\mu=0.\end{cases}$$

   解得 $\lambda=-\frac{1}{10}, \mu=\frac{1}{5}$，所以 $\mathbf{a}=\frac{1}{10}\mathbf{b}+\frac{1}{5}\mathbf{c}$.

5. C.

6. 设 $\overrightarrow{RD}=\lambda\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{RE}=\mu\overrightarrow{BE}$, 则

   $$\overrightarrow{RD}=\lambda\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\mu\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{RE}=\overrightarrow{RD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}=\mu\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\mu\overrightarrow{CA},$$

   故

   $$\overrightarrow{RD}=\left(\frac{2}{3}\mu-\frac{1}{3}\right)\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\left(1-\mu\right)\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\lambda\overrightarrow{BC},$$

   推得

   $$\begin{cases}\frac{2}{3}\mu-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\lambda,\\ \frac{1}{3}\left(1-\mu\right)=\lambda\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} \lambda = \frac{1}{7} \\ \mu = \frac{4}{7} \end{cases}$$

所以 $RD = \frac{1}{7}AD, RE = \frac{4}{7}BE$.

7. 由题得

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{PA}+\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{OP} = \left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}\right)+3\overrightarrow{OP},$$

又 $\overrightarrow{CP} = 2\overrightarrow{PG} = \overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}$, 所以 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC} = \mathbf{0}$, 则 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$ 得证.

8. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD} = 4\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD} = 4\overrightarrow{OP}+2\overrightarrow{PH}+2\overrightarrow{PG} = 4\overrightarrow{OP}$

9. "$\Rightarrow$" 因为 A、B、C 三点共线，所以存在不全为 0 的实数 k、l 满足 $k\overrightarrow{AB}+l\overrightarrow{AC} = \mathbf{0}$, 即 $k\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)+l\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\right) = \mathbf{0}$, 化简得 $-(k+l)\overrightarrow{OA}+k\overrightarrow{OB}+l\overrightarrow{OC} = \mathbf{0}$, 分别取 $\lambda = -(k+l), \mu = k, \gamma = l$, 得证.
"$\Leftarrow$" 因为 $\lambda = -(\mu+\gamma)$，设 $\lambda \neq 0$，则 μ、γ 不全为 0，$-(\mu+\gamma)\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC} = \mathbf{0}$，化简得 $\mu\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)+\gamma\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\right) = \mathbf{0}$，即 $\mu\overrightarrow{AB}+\gamma\overrightarrow{AC} = \mathbf{0}$，故 A、B、C 三点共线.

10. "$\Rightarrow$" 因为 P_1, P_2, P_3, P_4 四点共面，所以 $\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}, \overrightarrow{P_1P_4}$ 线性相关，存在不全为 0 的 m, n, p 使得 $m\overrightarrow{P_1P_2}+n\overrightarrow{P_1P_3}+p\overrightarrow{P_1P_4} = \mathbf{0}$, 即

$$m\left(\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP_1}\right)+n\left(\overrightarrow{OP_3}-\overrightarrow{OP_1}\right)+p\left(\overrightarrow{OP_4}-\overrightarrow{OP_1}\right) = \mathbf{0},$$

即

$$-(m+n+p)\mathbf{n}+m\mathbf{r_2}+n\mathbf{r_3}+p\mathbf{r_4} = \mathbf{0},$$

令 $m+n+p = \lambda_1, \lambda_2 = m, \lambda_3 = n, \lambda_4 = p$, 得证.
"$\Leftarrow$" 设 $\lambda_1 \neq 0$，则 $\lambda_1 = -(\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4)$，所以 $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ 不全为 0,

$$-(\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4)\mathbf{r_1}+\lambda_2\mathbf{r_2}+\lambda_3\mathbf{r_3}+\lambda_4\mathbf{r_4} = \mathbf{0},$$

因此 P_1, P_2, P_3, P_4 四点共面.

11. A,B,C 三点不共线 $\Leftrightarrow\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ 不共线 $\Leftrightarrow$ 点 P 在 π 上 $\Leftrightarrow\overrightarrow{AP}=\mu\overrightarrow{AB}+\gamma\overrightarrow{AC}\,(\mu,\gamma\in\mathbb{R})\Leftrightarrow\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=\mu\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)+\gamma\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\right)\Leftrightarrow\overrightarrow{OP}=(1-\mu-\gamma)\,\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC}$, 取 $\gamma=1-\mu-\gamma$，得证.

12. (1)$\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\mathbf{e_1}+\frac{1}{3}\mathbf{e_2},\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\mathbf{e_1}+\frac{2}{3}\mathbf{e_2}$
(2) 由角平分线的性质得 $\frac{|\overrightarrow{BT}|}{|\overrightarrow{TC}|}=\frac{\mathbf{e_1}}{\mathbf{e_2}}$，又 $\overrightarrow{BT}$ 与 $\overrightarrow{TC}$ 同向，则 $\overrightarrow{BT}=\frac{\mathbf{e_1}}{\mathbf{e_2}}\overrightarrow{TC},\overrightarrow{BT}=\overrightarrow{AT}-\overrightarrow{AB},\overrightarrow{TC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AT}$,因此 $\overrightarrow{AT}-\overrightarrow{AB}=\frac{\mathbf{e_1}}{\mathbf{e_2}}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AT}\right)$,
得 $\overrightarrow{AT}=\frac{|e_1|+|e_2|}{|e_1|+|e_2|}\mathbf{e_1}$.

1.3 标架与坐标

1. (1)$(0,16,-1)$.(2)$(-11,9,-2)$.

2. 分析：以本书第 25 页推论 1.6.1 作判别式，以本书第 7 页定理 1.21(4)
(1)$(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})=\begin{matrix}5&2&1\\-1&4&2\\-1&-1&5\end{matrix}=121\neq0$, 故 $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ 不共面，无线性组合.
(2) 同理 $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ 共面，
设 $\mathbf{c}=\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}$,
得 $\begin{cases}-3=6\lambda-9\mu\\6=4\lambda+6\mu\\3=2\lambda-3\mu\end{cases}$
解得 $\mathbf{c}=\frac{1}{2}\mathbf{a}+\frac{4}{3}\mathbf{b}$. (3) 同理 $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ 共面，
但 $\mathbf{a}$ 平行 $\mathbf{b}$，且 $\mathbf{a}\neq\mathbf{c}$, 故显然无法以线性组合表示 $\mathbf{c}$.

3. 证明：设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 中，A_i 所对得面的重心为 G_i，
欲证 $A_iG_i\,(i=1,2,3,4)$ 相交于一点,在 A_iG_i 上取一点 P_i 使得 $\overrightarrow{A_iG_i}=3\overrightarrow{P_iG_i}$,
从而 $\overrightarrow{OP_i}=\frac{\overrightarrow{OA_i}+3\overrightarrow{OG_i}}{4}$,
设 A_i 坐标为 $(x_i,y_i,z_i)\,(i=1,2,3,4)$ 则有
$$G_1\left(\frac{x_2+x_3+x_4}{3},\frac{y_2+y_3+y_4}{3},\frac{z_2+z_3+z_4}{3}\right),$$
$$G_2\left(\frac{x_1+x_3+x_4}{3},\frac{y_1+y_3+y_4}{3},\frac{z_1+z_3+z_4}{3}\right),$$
$$G_3\left(\frac{x_1+x_2+x_4}{3},\frac{y_1+y_2+y_4}{3},\frac{z_1+z_2+z_4}{3}\right),$$

$$G_4\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{y_1+y_2+y_3}{3},\frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right),$$

所以 $P_1\left(\frac{x_1+3\frac{x_2+x_3+x_4}{3}}{4},\frac{y_1+3\frac{y_2+y_3+y_4}{3}}{4},\frac{z_1+3\frac{z_2+z_3+z_4}{3}}{4}\right)$，即 $P_1\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4},\frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4},\frac{z_1+z_2+z_3+z_4}{4}\right)$ 同理可得 P_2,P_3,P_4 坐标，可知 P_1,P_2,P_3,P_4 为同一点，故 A_iG_i 交于同一点 P 且点 P 到任一顶点的距离等于此点到对面重心的三倍.

4. 证明：必要性：因为 π 上三点 $p_i\left(x_i,y_i\right)_{i=1,2,3}$ 共线，故 $\overrightarrow{p_1p_2}$ 平行于 $\overrightarrow{p_1p_3}$，即 $\frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}=\frac{y_2-y_1}{y_3-y_1}$
即 $x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1-x_1y_3-x_3y_2-x_2y_1=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}=0$. 充分性：由 $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}=x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1-x_1y_3-x_3y_2-x_2y_1=0$
整理得
$$\frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}=\frac{y_2-y_1}{y_3-y_1},$$
即 $\overrightarrow{p_1p_2}$ 平行于 $\overrightarrow{p_1p_3}$，所以 π 上三点 $p_i\left(x_i,y_i\right)_{i=1,2,3}$ 共线. 综上，π 上三点 $p_i\left(x_i,y_i\right)_{i=1,2,3}$ 共线当且仅当 $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}=0$.

5. 证明:建立仿射坐标系 $\left\{\overrightarrow{A},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right\}$, 由 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB}=\lambda\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AP}\right)$, 得 $\overrightarrow{AP}=\frac{\lambda}{\lambda+1}\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AP}=\left(\frac{\lambda}{\lambda+1},0\right)$;
$\overrightarrow{AR}=\frac{1}{1+\nu}\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AR}=\left(0,\frac{1}{1+\nu}\right)$;
$\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{1+\mu}\overrightarrow{AB}+\frac{\mu}{1+\mu}\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AQ}=\left(\frac{1}{1+\mu},\frac{\mu}{1+\mu}\right)$;
由 P,Q,R 共线当且仅当 $\begin{vmatrix} \frac{1}{1+\mu} & 0 & 1\\ 0 & \frac{1}{1+\nu} & 1\\ \frac{1}{1+\mu} & \frac{\mu}{1+\mu} & 1\end{vmatrix}=0$，得 $\lambda\mu\nu=-1$，证毕.
（注：事实上，此即平面几何上的梅涅劳斯定理）

1.4 数量积