

安徽中考（2017）压轴题，虽然条件很少，但考点明确、 考题经典

如图，已知正方形 $ABCD$ ，点 M 为边 AB 的中点.点 G 为线段 CM 上的一点，且 $\angle AGB = 90^\circ$ ，延长 AG ， BG 分别与边 BC ， CD 交于点 E ， F 。

(1) 求证： $BE = CF$

(2) 求证： $BE^2 = BC \cdot CE$

证明：

$$(1) \angle AEB + \angle CBF = \angle CFB + \angle CBF = 90^\circ$$

得

$$\left. \begin{array}{l} \angle AEB = \angle CFB \\ \angle ABC = \angle BCD \\ BE = CF \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABE \cong \triangle BCF \Rightarrow BE = CF$$

(2)

$$BE^2 = BC \cdot CE \Rightarrow BE^2 = BC(BC - BE) \Rightarrow \frac{BE}{BC} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \Rightarrow \tan \angle BAE = \frac{BE}{AB} = \frac{BE}{BC} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

利用二倍角公式

$$\angle CMB = 2\angle EAB \Rightarrow \tan \angle CMB = \tan 2\angle EAB \xrightarrow{\text{二倍角公式}} \tan \angle CMB = \frac{2 \tan \angle EAB}{1 - (\tan \angle EAB)^2} = 2$$

从而解得

$$\tan \angle EAB = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

满足题意，得证.

