

黄金分割的美学意义及其应用

张 雄

摘要 黄金分割在自然和社会中有着广泛的意义,从古到今始终被美学家作为形式美的一条法则。本文分析黄金分割的内在数理结构,从美学角度论述黄金分割的应用,然后分析黄金分割的美学意义,对其审美品性的深层原因作出解释。

黄金分割是人们熟悉的一种数学比例关系,但它的意义却并非如此简单。黄金分割在自然和社会中有着极为广泛的意义,其中自然有着深奥的机理。由于对此缺乏研究,使黄金分割始终染着神秘的色彩。本文拟分析黄金分割的内在数理结构,从美学角度论及黄金分割的某些应用,在此实证的基础上,再从自然辩证法角度分析研究黄金分割的美学意义,以期对黄金分割审美特性的深层原因作出解答。

1 完美的数理关联:黄金分割与斐波那契级数及连分数

“黄金分割”(Golden Section)相传是由公元前6世纪古希腊哲学家、数学家毕达哥拉斯(Pythagoras)及其学派发现的。欧几里德(Euclid)的名著《几何原本》第二卷是述说毕氏学派著述的,由14个命题组成,包含论线段计算的恒等式、黄金分割、勾股定理推广等。其中第十一节写道:“以点H按中末比截直线AB,使成黄金分割,即 $AB:AH=AH:HB$ ”。《几何原本》中还给出了求黄金比的五种方法。

若设 $AB=1$, $AH=x$,则上面等式变为 $1:x=x:(1-x)$,即 $x^2=1\cdot(1-x)$,整理得一元二次方程 $x^2+x-1=0$ 解之得 $x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618$ 。H即为线段AB的黄金分割点。0.618叫做“黄金数”。一般地,把长为L的线段分成两部分,使其中较长部分等于较短部分和全部的比例中项,即 $X:L=(L-X):X$, $X\approx 0.618L$,这样的分割称为“黄金分割”。古希腊著名哲学家柏拉图(Platon)将其命名为“黄金比”。

据说毕达哥拉斯学派是在五角星中发现了黄金分割的数理关系,并以此来解释按这种关系创造的建筑、雕塑等艺术形式美的原因。因为该学派有个著名的美学观点:“美是和谐与比例的合度”。线段上黄金分割点与两端点的距离不等,这种比例不相等而又最令人满意。这实际上讲的是线段比例关系如何造成匀称而使人满意。后来毕氏学派用各种长方形作了大量实验,发现短边与长边的比例为1:1.618或5:8时最令人喜欢,即指出按黄金数分配长宽的矩形是最美的矩形。因而就称这种比例为“黄金分割”。在欧洲又把“黄金比”叫做“黄金分割律”,并且这一名称是由19世纪德国美学家蔡辛(Zeising)提出来的。他深入研究了这一比例后认为,黄金分割无论在艺术还是在自然中,都是形式美的最佳比例关系。

中世纪德国数学家、天文学家开普勒(Kepler)指出:“几何学中有两件瑰宝,一是毕达哥拉斯定理,一是黄金分割律”,他宣称黄金分割是造物主赐予自然界传宗接代的美妙之意。文艺复兴时期,黄金分割被视为最神圣的比例。例如达·芬奇(Da Vinci)在《论绘画》一书中指出:“美感完全建立在各部分之间神圣比例关系上,各特征必须同时作用,才能产生使观众往往如醉如痴的和谐比例”。

黄金分割与斐波那契级数有着惊人的联系。中

世纪意大利著名数学家斐波那契(Fibonacci)《算盘书》一书中有这样一道数学题:“如果每对兔子每月可生一对小兔,每对小兔在第二个月也可以生产一对小兔,如此继续下去,且不发生死亡,问一年中共可生兔多少对?”以此引出斐波那契级数:1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55..., F_n , ...

该级数有递推关系 $F_n = F_{n-1} + F_{n-2} (n \geq 3)$, 并且有个奇妙的性质, 每前后两数之比:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \dots$$

恰好可以作为“黄金比”的近似值, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n-1}}{F_n} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618$ 。黄金分割与斐波那契级数的这种内在关联, 使它更具神秘感和迷人的魅力, 16 世纪威尼斯数学家帕乔里(Pacioli)在专论比例的著作《神秘的比例》中称之为“神赐的比例”(Divine proportion)。

依定义关系, 黄金比又可写成形式:

$$x = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+x}}$$

因而导出一个无限连分数(并且是正则连分数):

$$x = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\dots}}}$$

其渐近分数正是斐波那契级数前后两项之比。

黄金分割与斐波那契级数、连分数之间在内在的数理关系上, 表现出完美的统一。

2 普遍的应用:

自然与人为中的黄金分割

黄金分割自产生起就成为一条公认的著名美学定律, 被广泛应用于音乐、绘画、雕塑等艺术形式和建筑之中。在数学、美学、人体、艺术、自然中显示出巨大的作用, 推动了人们在它的指导下去认识世界和改造世界。

古希腊雅典的巴特农神殿, 就是按黄金分割比例来建造的, 其大理石柱廊高恰好占整个神殿高度的 0.618。古埃及修建的胡夫大金字塔, 其高与底部正方形边长之比为 0.62。埃菲尔建造巴黎大铁塔在比例上应用的也是黄金分割法。现在, 人们常在高塔的黄金分割点处建造楼阁或设置平台, 能使平直、单调的塔身变得多彩多姿, 而在摩天大楼的黄金分

割点处设置腰线或装饰物, 则可使整个楼显得宏伟而雅致。拿艺术作品来说, 古希腊时代著名的雕塑: 米洛斯的维纳斯女神塑像、知慧女神雅典娜和太阳神阿波罗塑像, 是故意延长双腿, 使肚脐到脚底的高度与全身高度之比为 0.618。因为艺术家早就发现人的形体以下肢与身高之比为 0.618 为最美, 但生活中这样的形体比例很少, 所以诗人荷马早就指出: “单凭扩大腿和脚的尺度, 就可以产生一种崇高的仪容”。达·芬奇、提香、普切利的作品中的许多比例关系也为 0.618。达·芬奇的名画《最后的晚餐》中, 犹大形象正处在黄金分割点上。现代绘画和摄影作品中, 画面的中心点也往往置于布局的分割点处。

如今, 黄金分割的美学价值和应用范围在不断扩大。在舞台表演上, 演员如果站在舞台的黄金分割点处, 观众在台下就感觉很匀称, 而且声音的传播效果也最好。在演奏乐器时, 如果将二胡上的“千斤”放在琴弦的黄金分割点处, 则音乐可达到最佳。由于符合宽、长之比为 0.618 的矩形被普遍认为是美的, 因此, 后人也认为在工艺美术和日常用品的长宽设计中采用这个比例, 就能引起美感, 令人赏心悦目, 如书本、柜橱、门窗等。据钱仁康教授说: “艺术上的‘黄金分割’比例, 和音乐中高潮的位置有密切关系。我们分析许多著名的音乐作品, 发觉其中高潮的出现, 大多和黄金分割点相接近。”刘大白的《诗外形律详说》则认为, “诗歌中的五音停和七音停最接近于黄金分割”。象征主义诗人马拉美甚至认为, 美的诗歌其“印刷符号”也“应依黄金分割律排列”。一些书法家在论及书法时认为, 汉字结构的重心大多数宜在偏左上方, 以符合黄金分割律为美。启功先生在《论书绝句百首》中有诗云: “用笔何为结字难, 纵横聚散最相关。一从证及黄金律, 顿觉金牛骨隙宽。”

植物学家们观察到某些植物的生长也是按黄金分割的序列排列的。当一株嫩芽抽枝吐叶时, 如果从这株嫩枝的顶端看下去, 可以看到叶子的排列成一对数螺旋线, 而叶子在螺旋线上的距离恰好符合黄金分割。人们按照车前草叶形排列的数学模式设计出来的螺旋形高楼大厦, 每一房间都能得到充足的阳光。无独有偶, 向日葵的种子也是按特定的对数螺旋线弧排列的, 而它们在螺旋线上的距离竟也服从黄金分割规律。其实, 早在中世纪的欧洲, 斐波那契就发现美妙的植物叶片、花瓣、松果壳瓣从小到大的

序列即是以 0.618:1 的近似值排列的。现代科学家还发现,当大脑呈现的“贝塔”脑电波,其低频率与高频率之比是 0.618 的近似值(8 赫兹与 12.9 赫兹之比)时,人的心身最具快感。甚至,当大自然的气温在摄氏 23 度与人的体温 37 度之比为 0.618 时,这气温就是最适宜于人的身心,最使人感到舒适。在现代最优化理论中,黄金分割能使我们用较少的实验找到合适的工艺条件或合理的配方。

可见,黄金分割的美学价值已远远超出了艺术的范畴,物质世界的组成、大地万物的诞生以及世间的许多事物,都和黄金分割有着千丝万缕的关系。它不仅是哲学的领悟、数学的技巧和艺术的完美之间最惊人的结合,而且还是构成世界与宇宙原动力的内部规律。它体现着人类能感觉到的蕴藏在这个世界之后的神奇结构和深奥理性。

3 美学意义的赋予: 自然人化与人本学命题

黄金分割何以成为人们普遍喜爱的一种美的比例关系呢?这始终被染着瑰丽诡秘的色彩。两千五百年来,人们用各种方式企图给予理论上的论证,但都不很成功。

柏拉图派给黄金分割以神的性质,据说有一个原故。平面正多边形的数目是无限的,但空间正凸多面体只有五种(这是柏拉图发现的),即称为柏拉图立体的四面体、立方体、八面体、十二面体和二十面体。但是柏拉图的宇宙论只容许四种元素的存在,即地、火、气和水。元素只有四种,完美的立体却有五种,为了消解困惑不安的差异,便“让最后的归于神明”。由于正十二面体因其各面为正五边形而与众不同,而正五边形与黄金分割有很密切的关系,比如若延长五边形的各边,便可得到五角星图形,五边形的各顶点恰是五角星各边上的黄金分割点,况且五角星又被视为神秘学中的神圣象征。因此,他们就把十二面体和它的十二个五边形的面奉给上天。此外,“神赐比例”的神秘性,还与古人对无限的认识有关,那时,无限是上帝的特征之一。

德国近代实验美学家费希纳(Fechner)曾在 1876 年对黄金分割作心理学实验,发现在用于实验的几何图形(两边之比从 2:5 到 1:1 的 10 个矩形)中,最被人喜爱的比例关系十分接近黄金分割。但

这仍未揭示出黄金分割具有审美品性的深层原因。还有一种通行的解释是根据黄金比定义本身,即这种分割依据极端而又中庸的理性。

后来,从人类自身寻求解释的观点得到了人们的普遍接受。应该承认,人类在千万年中形成的审美观中存在着自觉不自觉的自然倾向,驱使人们在艺术的欣赏和创造上有着大量的模拟自然的表现。例如,古今中外许多著名的称之为“美”的建筑,大多是模拟自然界的杰作,如我国“拟天”的杰作——北京天坛,1975 年美国芝加哥的“拟山”的世界最高建筑西尔斯大楼(高 440 米 110 层,苏姆设计),1973 年澳大利亚的悉尼歌剧院的“拟海”建筑,“科威特之塔”的“拟月”。陈声海提出,人们最熟悉、最喜爱、最尊敬、接触最频繁的还是人类自身,因而在建筑艺术中也要“拟人”。比如古今中外的绝大部分宫殿、庙宇、陵墓、纪念堂及一部分城市均采用了“左右对称,前后有别,上下迥异”的“人体式”布局。人体形象中间高,两旁低的特征,被模拟到建筑物上就形成对称布置的中高两低的“横向三段式”。有的则进一步模拟人们欢迎或拥抱的姿态,使建筑物形成左右对称中间高、左右高低错落并靠前、平面略呈“U”或“W”字形的“横向五段或七段”式的布局。还有模拟人体“上段小,中段大而实,下段虚长”的“垂直三段式”布局,北京“四合院”从布局上则模拟了人们牵儿带女的家庭序列。50 年代,北京工业设计院编写了一本《建筑资料集》收集了我国各地成年人人体尺寸的调查,男性中等人体躯干部分宽高比为 1:1.61878,高中低三类人体平均计算其比为 1:1.61,女性也差不多。世界各地民族体高差别较大,但躯干部分的宽高比都接近 1:1.618,并且人类在进化过程中其躯干部分的变化也最小。

自古至今人们十分崇尚人体美,特别是古希腊民族,社会上不少专家、学者研究人体美。正因为黄金分割符合人体躯干的宽高比,人类在长期的社会实践中,它与人的特殊生理和心理结构形成了协调关系,因而对它感到习惯进而转为喜爱,并形成“拟人化”的审美尺度。这与希腊诡辩学派首倡者普罗塔哥拉(Protagoras)提出的“人是万物的尺度”这一著名命题相一致,这是一个不同于自然本体论的人本学命题。

如果仅仅把黄金分割的审美特性归之于它符合人身躯干宽高之比这样的审美“拟人化”,那么,黄金

分割在生物学上和其它一些科学技术上的意义将无法解释。如前所述,许多植物都按此比例生长,叶子或枝条在枝杆上呈螺旋上升中,如果把第一片叶子在水平面上的投影作为计算角度的起点,那么第二片叶子的投影恰好在这个周角的黄金分割处,即相邻两片叶子投影间的夹角为 $(1-\frac{\sqrt{5}-1}{2})360^\circ \approx 137.50776^\circ$ 。因为 $\sqrt{5}$ 是无理数即无限不循环小数,故这样分布可以保证下面的任何一片叶子永远不会被上面的某一片叶子所完全覆盖,这就可使下面的叶子得到足够的光照。植物怎么懂得黄金分割或拟人呢?显然,“拟人化”的人本学命题虽不乏合理的意义,在此却显得不足为证。

笔者认为,黄金分割首先是数学命题,其次才是美学定律,因而其美学意义的产生应从自然规律中得到答案。古人有“数学设计”的思想,我们倒相信世界之规律在一定意义下能通过数学来表达和认识,数学是客观规律的抽象描述。人类既要认识和顺应自然规律,又要运用掌握的自然规律能动地改造世界,类似于瑞士心理学家、哲学家皮亚杰(Piaget)认知理论的顺应与同化。这正是人与自然的辩证关系。

从黄金分割本身的数学表达来看,似乎发现不了它与自然界的某种联系,但我们注意到数学内部的和谐与统一,将黄金分割与斐波那契级数、连分数联系起来分析其内在的深层结构,就会发现由黄金分割的定义即可得到一个正则连分数,而这个正则连分数的渐近分数恰为斐波那契级数前后两项之比,即正则连分数的渐近分数的分子、分母依次构成斐波那契级数,这是连分数运算的结果。因此,斐波那契级数与黄金分割之间的联系并非偶然的巧合,也并不神秘,连分数是联系二者的纽带。而兔子问题仅仅属于实际中的一个特例,投合了上述数学模式。值得注意的是,斐波那契级数有它的用处,它与累计生长有关,许多在实际中发生的事情就象兔子问题那样,沿树枝螺旋前伸的树叶分布,松果上的鳞片分布以及向日葵花盘上葵花籽从中心向外的分布,其排列情况都与斐波那契级数有关。这是生物

进化过程中进化规律作用的结果,生物调节以便得到充足的光照等最优化具有“天然合理”的意义。存在就是合理,合理的东西就是美的。

审美是人类特有的意识活动,自然规律理应成为审美活动的重要尺度。黄金分割的美学意义来自于这种数学模式在自然界中的合理性。它同其它自然规律一样,被人类在长期的实践过程中所逐渐认识和发现,同时审美活动又要符合自然规律,从而使黄金分割赋予了审美特性。这是审美本质的“自然化”。

最后指出,黄金分割数学模式的三种形式中,均涉及到无理数(无限不循环小数)、无限次计算、极限过程,这能否将其美学意义看作无理数现实意义的一种表现。

参考文献

- [1](美)T. 丹齐克著,苏仲湘译:《数:科学的语言》,商务印书馆,1985年版。
- [2]丁文复:“黄金分割及其应用”,载《美育》,1983年第3期。
- [3]徐本顺,殷启正:《数学中的美学方法》,江苏教育出版社,1991年版。
- [4](美)I. 阿西莫夫著,洪丕柱,周昌忠译:《数的趣谈》,上海科学技术出版社,1980年版。
- [5]杨恩寰等:《美学教程》,中国社会科学出版社,1987年版。
- [6]陈声海:“建筑艺术中的模拟、拟人倾向”,载《潜科学》,1981年第1期,《光明日报》1981年7月21日。
- [7]朱学志等:《数学的历史、思想和方法》(上册),哈尔滨出版社,1990年版。
- [8](美)M. 克莱因著,北大数学系译:《古今数学思想》(第一册),上海科学技术出版社,1979年版。
- [9]张雄:“曲线美何以为美”,载《陕西师大学报》(哲社版),1989年第4期,《文摘报》(光明日报社办)1990年1月4日。

【作者简介】张雄,1961年生,陕西教育学院数学系副主任,副教授。

邮编:西安 710061

(本文责任编辑 王建军)