2014 年全国硕士研究生入学统一考试

数学二试题解析

一、选择题 1—8 小题．每小题 4 分，共 32 分．

1．当 $x\to 0^+$ 时，若 $\ln^{\alpha}(1+2x)$，$(1-\cos x)^{\frac{1}{\alpha}}$ 均是比 x 高阶的无穷小，则 α 的可能取值范围是（ ）

（A）$(2,+\infty)$ （B）$(1,2)$ （C）$(\frac{1}{2},1)$ （D）$(0,\frac{1}{2})$

【详解】

$\ln^{\alpha}(1+2x)\sim 2^{\alpha}x^{\alpha}$，是 α 阶无穷小，$(1-\cos x)^{\frac{1}{\alpha}}\sim \dfrac{1}{2^{\frac{1}{\alpha}}}x^{\frac{2}{\alpha}}$ 是 $\dfrac{2}{\alpha}$ 阶无穷小，由题意可知 $\begin{cases}\alpha>1\\ \dfrac{2}{\alpha}>1\end{cases}$

所以 α 的可能取值范围是 $(1,2)$，应该选（B）．

2．下列曲线有渐近线的是

（A）$y=x+\sin x$ （B）$y=x^2+\sin x$ （C）$y=x+\sin\dfrac{1}{x}$ （D）$y=x^2+\sin\dfrac{1}{x}$

【详解】对于 $y=x+\sin\dfrac{1}{x}$，可知 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=1$ 且 $\lim\limits_{x\to\infty}(y-x)=\lim\limits_{x\to\infty}\sin\dfrac{1}{x}=0$，所以有斜渐近线 $y=x$

应该选（C）

3．设函数 $f(x)$ 具有二阶导数，$g(x)=f(0)(1-x)+f(1)x$，则在 $[0,1]$ 上（ ）

（A）当 $f'(x)\ge 0$ 时，$f(x)\ge g(x)$ （B）当 $f'(x)\ge 0$ 时，$f(x)\le g(x)$

（C）当 $f''(x)\ge 0$ 时，$f(x)\ge g(x)$ （D）当 $f''(x)\ge 0$ 时，$f(x)\le g(x)$

【分析】此题考查的曲线的凹凸性的定义及判断方法．

【详解 1】如果对曲线在区间 $[a,b]$ 上凹凸的定义比较熟悉的话，可以直接做出判断． 显然

$g(x)=f(0)(1-x)+f(1)x$ 就是联接 $(0,f(0)),(1,f(1))$ 两点的直线方程．故当 $f''(x)\ge 0$ 时，曲线是凹的，也就是 $f(x)\le g(x)$，应该选（D）

【详解 2】如果对曲线在区间 $[a,b]$ 上凹凸的定义不熟悉的话，可令

$F(x)=f(x)-g(x)=f(x)-f(0)(1-x)-f(1)x$，则 $F(0)=F(1)=0$，且 $F''(x)=f''(x)$，故当

$f''(x)\ge 0$时，曲线是凹的，从而$F(x)\le F(0)=F(1)=0$，即$F(x)=f(x)-g(x)\le 0$，也就是

$f(x)\le g(x)$，应该选（D）

4．曲线$\begin{cases}x=t^2+7,\\ y=t^2+4t+1\end{cases}$上对应于$t=1$的点处的曲率半径是（　　）

（A）$\dfrac{\sqrt{10}}{50}$　（B）$\dfrac{\sqrt{10}}{100}$　（C）$10\sqrt{10}$　（D）$5\sqrt{10}$

【详解】 曲线在点$(x,f(x))$处的曲率公式 $K=\dfrac{|y''|}{\sqrt{(1+y'^2)^3}}$，曲率半径$R=\dfrac{1}{K}$.

本题中$\dfrac{dx}{dt}=2t,\dfrac{dy}{dt}=2t+4$，所以$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2t+4}{2t}=1+\dfrac{2}{t}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{-\frac{2}{t^2}}{2t}=-\dfrac{1}{t^3}$，

对应于$t=1$的点处$y'=3,y''=-1$，所以$K=\dfrac{|y''|}{\sqrt{(1+y'^2)^3}}=\dfrac{1}{10\sqrt{10}}$，曲率半径$R=\dfrac{1}{K}=10\sqrt{10}$.

应该选（C）

5．设函数$f(x)=\arctan x$，若$f(x)=xf'(\xi)$，则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\xi^2}{x^2}=$（　　）

（A）1　　（B）$\dfrac{2}{3}$　　（C）$\dfrac{1}{2}$　　（D）$\dfrac{1}{3}$

【详解】注意（1）$f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$，（2）$x\to 0$时，$\arctan x=x-\dfrac{1}{3}x^3+o(x^3)$.

由于$f(x)=xf'(\xi)$．所以可知$f'(\xi)=\dfrac{1}{1+\xi^2}=\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{\arctan x}{x}$，$\xi^2=\dfrac{x-\arctan x}{(\arctan x)^2}$，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\xi^2}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x-arx\tan x}{x(\arctan x)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x-(x-\frac{1}{3}x^3)+o(x^3)}{x^3}=\frac{1}{3}.$$

6．设$u(x,y)$在平面有界闭区域 D 上连续，在 D 的内部具有二阶连续偏导数，且满足$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\ne 0$及

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，则（　　）.

（A）$u(x,y)$的最大值点和最小值点必定都在区域D的边界上；

（B）$u(x,y)$的最大值点和最小值点必定都在区域D的内部；

（C）$u(x,y)$ 的最大值点在区域 D 的内部，最小值点在区域 D 的边界上；

（D）$u(x,y)$ 的最小值点在区域 D 的内部，最大值点在区域 D 的边界上.

【详解】 $u(x,y)$ 在平面有界闭区域 D 上连续，所以 $u(x,y)$ 在 D 内必然有最大值和最小值．并且如果在内部存在驻点 (x_0,y_0)，也就是 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=0$，在这个点处 $A=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},C=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},B=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$，由条件，显然 $AC-B^2<0$，显然 $u(x,y)$ 不是极值点，当然也不是最值点，所以 $u(x,y)$ 的最大值点和最小值点必定都在区域 D 的边界上.

所以应该选（A）.

7．行列式 $\begin{vmatrix}0&a&b&0\\a&0&0&b\\0&c&d&0\\c&0&0&d\end{vmatrix}$ 等于

（A）$(ad-bc)^2$　　（B）$-(ad-bc)^2$　　（C）$a^2d^2-b^2c^2$　　（D）$-a^2d^2+b^2c^2$

【详解】

$$\begin{vmatrix}0&a&b&0\\a&0&0&b\\0&c&d&0\\c&0&0&d\end{vmatrix}=-a\begin{vmatrix}a&0&b\\0&d&0\\c&0&d\end{vmatrix}+b\begin{vmatrix}a&0&b\\0&c&0\\c&0&d\end{vmatrix}=-ad\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}+bc\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}=-(ad-bc)^2$$

应该选（B）.

8．设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 均是三维向量，则对任意的常数 k,l，向量 $\alpha_1+k\alpha_3$，$\alpha_2+l\alpha_3$ 线性无关是向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关的

（A）必要而非充分条件　　（B）充分而非必要条件

（C）充分必要条件　　（D）　非充分非必要条件

【详解】 若向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，则

（$\alpha_1+k\alpha_3$，$\alpha_2+l\alpha_3$）$=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\k&l\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)K$，对任意的常数 k,l，矩阵 K 的秩都等于 2，所以向量 $\alpha_1+k\alpha_3$，$\alpha_2+l\alpha_3$ 一定线性无关.

而当 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ 时，对任意的常数 k,l，向量 $\alpha_1+k\alpha_3$，$\alpha_2+l\alpha_3$ 线性无关，但 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关；故选择（A）.

二、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分．把答案填在题中横线上）

9．$\int_{-\infty}^{1}\frac{1}{x^2+2x+5}dx=$______．

【详解】$\int_{-\infty}^{1}\frac{1}{x^2+2x+5}dx=\int_{-\infty}^{1}\frac{dx}{(x+1)^2+4}=\frac{1}{2}\arctan\frac{x+1}{2}|_{-\infty}^{1}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}-(-\frac{\pi}{2})\right)=\frac{3\pi}{8}$．

10．设 $f(x)$ 为周期为 4 的可导奇函数，且 $f'(x)=2(x-1),x\in[0,2]$，则 $f(7)=$______________．

【详解】当 $x\in[0,2]$ 时，$f(x)=\int 2(x-1)dx=x^2-2x+C$，由 $f(0)=0$ 可知 $C=0$，即 $f(x)=x^2-2x$；$f(x)$ 为周期为 4 奇函数，故 $f(7)=f(-1)=-f(1)=1$．

11．设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $e^{2yz}+x+y^2+z=\frac{7}{4}$ 确定的函数，则 $dz|_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}=$____________．

【详解】

设 $F(x,y,z)=e^{2yz}+x+y^2+z-\frac{7}{4}$，$F_x=1,F_y=2ze^{2yz}+2y,F_z=2ye^{2yz}+1$，当 $x=y=\frac{1}{2}$ 时，$z=0$，$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{1}{2}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{1}{2}$，所以 $dz|_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}=-\frac{1}{2}dx-\frac{1}{2}dy$．

12．曲线 L 的极坐标方程为 $r=\theta$，则 L 在点 $(r,\theta)=\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 处的切线的直角坐标方程为____________．

【详解】先把曲线方程化为参数方程 $\begin{cases}x=r(\theta)\cos\theta=\theta\cos\theta\\y=r(\theta)\sin\theta=\theta\sin\theta\end{cases}$，于是在 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 处，$x=0,y=\frac{\pi}{2}$，$\frac{dy}{dx}|_{\frac{\pi}{2}}=\frac{\sin\theta+\theta\cos\theta}{\cos\theta-\theta\sin\theta}|_{\frac{\pi}{2}}=-\frac{2}{\pi}$，则 L 在点 $(r,\theta)=\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 处的切线方程为 $y-\frac{\pi}{2}=-\frac{2}{\pi}(x-0)$，即 $y=-\frac{2}{\pi}x+\frac{\pi}{2}$.

13．一根长为 1 的细棒位于 x 轴的区间 $[0,1]$ 上，若其线密度 $\rho(x)=-x^2+2x+1$，则该细棒的质心坐标 $\bar{x}=$______．

【详解】质心坐标 $\bar{x}=\frac{\int_0^1 x\rho(x)dx}{\int_0^1\rho(x)dx}=\frac{\int_0^1(-x^3+2x^2+x)dx}{\int_0^1(-x^2+2x+1)dx}=\frac{\frac{11}{12}}{\frac{5}{3}}=\frac{11}{20}$．

14．设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+2ax_1x_3+4x_2x_3$ 的负惯性指数是 1，则 a 的取值范围是____________.

【详解】由配方法可知

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+2ax_1x_3+4x_2x_3$$
$$=(x_1+ax_3)^2-(x_2-2x_3)^2+(4-a^2)x_3^2$$

由于负惯性指数为 1，故必须要求 $4-a^2\ge 0$，所以 a 的取值范围是 $[-2,2]$.

三、解答题

15.（本题满分 10 分）

求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x \left(t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t\right)dt}{x^2\ln(1+\frac{1}{x})}$.

【分析】. 先用等价无穷小代换简化分母，然后利用洛必达法则求未定型极限.

【详解】

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x \left(t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t\right)dt}{x^2\ln(1+\frac{1}{x})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x \left(t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t\right)dt}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(x^2(e^{\frac{1}{x}}-1)-x\right)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left(x^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)-x\right)=\frac{1}{2}$$

16.（本题满分 10 分）

已知函数 $y=y(x)$ 满足微分方程 $x^2+y^2y'=1-y'$，且 $y(2)=0$，求 $y(x)$ 的极大值和极小值.

【详解】

解：把方程化为标准形式得到 $(1+y^2)\dfrac{dy}{dx}=1-x^2$，这是一个可分离变量的一阶微分方程，两边分别积分

可得方程通解为：$\dfrac{1}{3}y^3+y=x-\dfrac{1}{3}x^3+C$，由 $y(2)=0$ 得 $C=\dfrac{2}{3}$，

即 $\dfrac{1}{3}y^3+y=x-\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{2}{3}$.

令 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1-x^2}{1+y^2}=0$，得 $x=\pm1$，且可知 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{-2x(1+y^2)^2-2y(1-x^2)^2}{(1+y^2)^3}$；

当 $x=1$ 时，可解得 $y=1$，$y''=-1<0$，函数取得极大值 $y=1$；

当 $x=-1$ 时，可解得 $y=0$，$y''=2>0$，函数取得极小值 $y=0$.

17.（本题满分 10 分）

设平面区域 $D=\{(x,y)|1\le x^2+y^2\le 4, x\ge 0.y\ge 0\}$. 计算 $\iint\limits_D \frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxdy$

【详解】由对称性可得

$$\iint\limits_D \frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxd=\iint\limits_D \frac{y\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxd=\frac{1}{2}\iint\limits_D \frac{(x+y)\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxdy$$

$$=\frac{1}{2}\iint\limits_D \frac{\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{1}dxd=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_1^2 r\sin\pi r dr=-\frac{3}{4}$$

18.（本题满分 10 分）

设函数 $f(u)$ 具有二阶连续导数，$z=f(e^x\cos y)$ 满足 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(4z+e^x\cos y)e^{2x}$. 若 $f(0)=0, f'(0)=0$，求 $f(u)$ 的表达式.

【详解】

设 $u=e^x\cos y$，则 $z=f(u)=f(e^x\cos y)$，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(u)e^{x\cos y},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''(u)e^{2x}\cos^2 y+f'(u)e^x\cos y;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-f'(u)e^x\sin y,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''(u)e^{2x}\sin^2 y-f'(u)e^x\cos y;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''(u)e^{2x}=f''(e^x\cos y)e^{2x}$$

由条件 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(4z+e^x\cos y)e^{2x}$，

可知

$$f''(u)=4f(u)+u$$

这是一个二阶常用系数线性非齐次方程.
对应齐次方程的通解为：

$$f(u)=C_1e^{2u}+C_2e^{-2u} \text{ 其中} C_1,C_2 \text{ 为任意常数.}$$

对应非齐次方程特解可求得为 $y^*=-\frac{1}{4}u$.

故非齐次方程通解为 $f(u)=C_1e^{2u}+C_2e^{-2u}-\frac{1}{4}u$.

将初始条件 $f(0)=0, f'(0)=0$ 代入，可得 $C_1=\frac{1}{16}, C_2=-\frac{1}{16}$.

所以 $f(u)$ 的表达式为 $f(u)=\frac{1}{16}e^{2u}-\frac{1}{16}e^{-2u}-\frac{1}{4}u$.

19.（本题满分 10 分）

设函数 $f(x),g(x)$ 在区间 $[a.b]$ 上连续，且 $f(x)$ 单调增加，$0\le g(x)\le 1$，证明：

（1） $0\le\int_a^x g(t)dt\le x-a,\ x\in[a,b]$；

（2） $\int_a^{a+\int_a^b g(t)dt} f(x)dx\le\int_a^b f(x)g(x)dx$.

【详解】

（1）证明：因为 $0\le g(x)\le 1$，所以 $\int_a^x 0dx\le\int_a^x g(t)dt\le\int_a^x 1dt\quad x\in[a,b]$.

即 $0\le\int_a^x g(t)dt\le x-a,\ x\in[a,b]$.

（2）令 $F(x)=\int_a^x f(u)g(u)du-\int_a^{a+\int_a^x g(t)dt} f(u)du$，

则可知 $F(a)=0$，且 $F'(x)=f(x)g(x)-g(x)f\left(a+\int_a^x g(t)dt\right)$，

因为 $0\le\int_a^x g(t)dt\le x-a$，且 $f(x)$ 单调增加，

所以 $f\left(a+\int_a^x g(t)dt\right)\le f(a+x-a)=f(x)$. 从而

$$F'(x)=f(x)g(x)-g(x)f\left(a+\int_a^x g(t)dt\right)\ge f(x)g(x)-g(x)f(x)=0,\qquad x\in[a,b]$$

也是 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 单调增加，则 $F(b)\ge F(a)=0$，即得到

$$\int_a^{a+\int_a^b g(t)dt} f(x)dx\le\int_a^b f(x)g(x)dx.$$

20.（本题满分 11 分）

设函数 $f(x)=\frac{x}{1+x}, x\in[0,1]$，定义函数列

$$f_1(x)=f(x),\quad f_2(x)=f(f_1(x)),\ \cdots, f_n(x)=f(f_{n-1}(x)),\cdots$$

设 S_n 是曲线 $y=f_n(x)$，直线 $x=1,\ y=0$ 所围图形的面积．求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}nS_n$.

【详解】

$$f_1(x)=\frac{x}{1+x}, f_2(x)=\frac{f_1(x)}{1+f_1(x)}=\frac{\frac{x}{1+x}}{1+\frac{x}{1+x}}=\frac{x}{1+2x},\quad f_3(x)=\frac{x}{1+3x},\cdots,$$

利用数学归纳法可得 $f_n(x)=\dfrac{x}{1+nx}$.

$$S_n=\int_0^1 f_n(x)dx=\int_0^1\frac{x}{1+nx}dx=\frac{1}{n}\int_0^1(1-\frac{1}{1+nx})dx=\frac{1}{n}(1-\frac{\ln(1+n)}{n}),$$

$$\lim_{n\to\infty}nS_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\ln(1+n)}{n}\right)=1.$$

21.（本题满分 11 分）

已知函数 $f(x,y)$ 满足 $\dfrac{\partial f}{\partial y}=2(y+1)$，且 $f(y,y)=(y+1)^2-(2-y)\ln y$，求曲线 $f(x,y)=0$ 所成的图形绕直线 $y=-1$ 旋转所成的旋转体的体积.

【详解】

由于函数 $f(x,y)$ 满足 $\dfrac{\partial f}{\partial y}=2(y+1)$，所以 $f(x,y)=y^2+2y+C(x)$，其中 $C(x)$ 为待定的连续函数.

又因为 $f(y,y)=(y+1)^2-(2-y)\ln y$，从而可知 $C(y)=1-(2-y)\ln y$，

得到 $f(x,y)=y^2+2y+C(x)=y^2+2y+1-(2-x)\ln x$.

令 $f(x,y)=0$，可得 $(y+1)^2=(2-x)\ln x$. 且当 $y=-1$ 时，$x_1=1, x_2=2$.

曲线 $f(x,y)=0$ 所成的图形绕直线 $y=-1$ 旋转所成的旋转体的体积为

$$V=\pi\int_1^2(y+1)^2dx=\pi\int_1^2(2-x)\ln x dx=(2\ln 2-\frac{5}{4})\pi$$

22.（本题满分 11 分）

设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -4\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 0 & -3\end{pmatrix}$，E 为三阶单位矩阵.

（1） 求方程组 $AX=0$ 的一个基础解系;

（2） 求满足 $AB=E$ 的所有矩阵 B.

【详解】（1）对系数矩阵 A 进行初等行变换如下:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -4\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 0 & 3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -4\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 4 & -3 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -4\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 1 & -3\end{pmatrix},$$

得到方程组 $AX=0$ 同解方程组

$$\begin{cases} x_1 = -x_4 \\ x_2 = 2x_4 \\ x_3 = 3x_4 \end{cases}$$

得到 $\boldsymbol{AX}=0$ 的一个基础解系 $\xi_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

（2）显然 B 矩阵是一个 4×3 矩阵，设 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{pmatrix}$

对矩阵 $(\boldsymbol{AE})$ 进行进行初等行变换如下：

$$(\boldsymbol{AE})=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & -4 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

由方程组可得矩阵 B 对应的三列分别为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}+c_1\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

即满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$ 的所有矩阵为

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 2-c_1 & 6-c_2 & -1-c_3 \\ -1+2c_1 & -3+2c_2 & 1+2c_3 \\ -1+3c_1 & -4+3c_2 & 1+3c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

其中 c_1,c_2,c_3 为任意常数.

23.（本题满分 11 分）

证明 n 阶矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$ 相似.

【详解】证明：设 $A=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0&\cdots&0&1\\0&\cdots&0&2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&\cdots&0&n\end{pmatrix}$.

分别求两个矩阵的特征值和特征向量如下：

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&\cdots&-1\\-1&\lambda-1&\cdots&-1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\-1&-1&\cdots&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-n)\lambda^{n-1},$$

所以 A 的 n 个特征值为 $\lambda_1=n,\lambda_2=\lambda_3=\cdots\lambda_n=0$；

而且 A 是实对称矩阵，所以一定可以对角化．且 $A\sim\begin{pmatrix}\lambda&&&\\&0&&\\&&\cdots&\\&&&0\end{pmatrix}$；

$$|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda&0&\cdots&-1\\0&\lambda&\cdots&-2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&\lambda-n\end{vmatrix}=(\lambda-n)\lambda^{n-1}$$

所以 B 的 n 个特征值也为 $\lambda_1=n,\lambda_2=\lambda_3=\cdots\lambda_n=0$；

对于 $n-1$ 重特征值 $\lambda=0$，由于矩阵 $(0E-B)=-B$ 的秩显然为 1，所以矩阵 B 对应 $n-1$ 重特征值 $\lambda=0$ 的特征向量应该有 $n-1$ 个线性无关，进一步矩阵 B 存在 n 个线性无关的特征向量，即矩阵 B 一定可以对角化，且 $B\sim\begin{pmatrix}\lambda&&&\\&0&&\\&&\cdots&\\&&&0\end{pmatrix}$

从而可知 n 阶矩阵 $\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}0&\cdots&0&1\\0&\cdots&0&2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&\cdots&0&n\end{pmatrix}$ 相似.