2015 年全国硕士研究生入学统一考试数学二解析

一、选择题:1～8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求的,请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 下列反常积分收敛的是 ( )

(A) $\int_2^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}dx$ (B) $\int_2^{+\infty}\frac{\ln x}{x}dx$ (C) $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}dx$ (D) $\int_2^{+\infty}\frac{x}{e^x}dx$

【答案】(D)

【解析】$\int\frac{x}{e^x}dx=-(x+1)e^{-x}$，则 $\int_2^{+\infty}\frac{x}{e^x}dx=-(x+1)e^{-x}\Big|_2^{+\infty}=3e^{-2}-\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)e^{-x}=3e^{-2}$.

(2) 函数 $f(x)=\lim\limits_{t\to0}(1+\frac{\sin t}{x})^{\frac{x^2}{t}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内( )

(A) 连续

(B) 有可去间断点

(C) 有跳跃间断点

(D) 有无穷间断点

【答案】(B)

【解析】$f(x)=\lim\limits_{t\to0}(1+\frac{\sin t}{x})^{\frac{x^2}{t}}=e^{\lim\limits_{t\to0}\frac{\sin t}{x}\frac{x^2}{t}}=e^x$，$x\neq0$，故 $f(x)$ 有可去间断点 $x=0$.

(3) 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^\alpha\cos\frac{1}{x^\beta},x>0\\0,x\le0\end{cases}$ $(\alpha>0,\beta>0)$,若 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续则:( )

(A) $\alpha-\beta>1$ (B) $0<\alpha-\beta\le1$

(C) $\alpha-\beta>2$ (D) $0<\alpha-\beta\le2$

【答案】(A)

【解析】$x<0$ 时，$f'(x)=0$ $f'_-(0)=0$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{x^\alpha\cos\frac{1}{x^\beta}-0}{x}=\lim_{x\to0^+}x^{\alpha-1}\cos\frac{1}{x^\beta}$$

$x>0$ 时，$f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}\cos\frac{1}{x^\beta}+(-1)x^\alpha\sin\frac{1}{x^\beta}(-\beta)\frac{1}{x^{\beta+1}}$

$$=\alpha x^{\alpha-1}\cos\frac{1}{x^\beta}+\beta x^{\alpha-\beta-1}\sin\frac{1}{x^\beta}$$

$f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续则：$f'_-(0)=f'_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}x^{\alpha-1}\cos\frac{1}{x^\beta}=0$ 得 $\alpha-1>0$

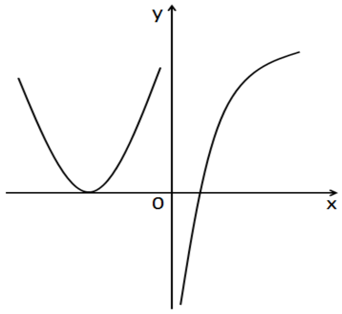
$$f'(0)=\lim_{x\to0^+}f'(x)=\lim_{x\to0^+}\left(\alpha x^{\alpha-1}\cos\frac{1}{x^\beta}+\beta x^{\alpha-\beta-1}\sin\frac{1}{x^\beta}\right)=0$$

得：$\alpha-\beta-1>0$，答案选择 A

(4)设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，其中二阶导数 $f''(x)$ 的图形如图所示，则曲线

$y=f(x)$ 的拐点的个数为(　)

(A) 0　(B) 1　(C) 2　(D) 3



【答案】(C)

【解析】根据图像观察存在两点，二阶导数变号.则拐点个数为 2 个.

(5) 设函数 $f(u,v)$ 满足 $f\left(x+y,\frac{y}{x}\right)=x^2-y^2$，则

$\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{\substack{u=1\\v=1}}$ 与 $\left.\frac{\partial f}{\partial v}\right|_{\substack{u=1\\v=1}}$ 依次是 (　)

(A) $\frac{1}{2},0$　(B) $0,\frac{1}{2}$　(C) $-\frac{1}{2},0$　(D) $0,-\frac{1}{2}$

【答案】(D)

【解析】此题考查二元复合函数偏导的求解.

令 $u=x+y,v=\frac{y}{x}$，则 $x=\frac{u}{1+v},y=\frac{uv}{1+v}$，从而 $f(x+y,\frac{y}{x})=x^2-y^2$ 变为

$f(u,v)=\left(\frac{u}{1+v}\right)^2-\left(\frac{uv}{1+v}\right)^2=\frac{u^2(1-v)}{1+v}$.故 $\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{2u(1-v)}{1+v},\frac{\partial f}{\partial v}=-\frac{2u^2}{(1+v)^2}$，

因而 $\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{\substack{u=1\\v=1}}=0,\left.\frac{\partial f}{\partial v}\right|_{\substack{u=1\\v=1}}=-\frac{1}{2}$.故选（D）.

(6)设 D 是第一象限由曲线 $2xy=1$，$4xy=1$ 与直线 $y=x$，$y=\sqrt{3}x$ 围成的平面区域，函数 $f(x,y)$ 在 D 上连续，则 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=$ (　)

(A) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_{\frac{1}{2\sin2\theta}}^{\frac{1}{\sin2\theta}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$

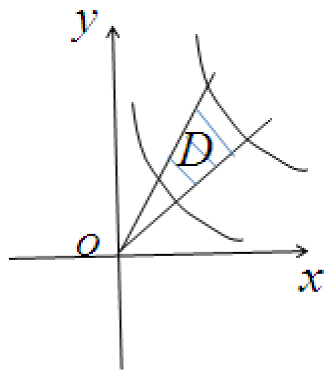
(B) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}} f\left(r\cos\theta, r\sin\theta\right) rdr$

(C) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f\left(r\cos\theta, r\sin\theta\right) dr$

(D) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}} f\left(r\cos\theta, r\sin\theta\right) dr$

【答案】(B)

【解析】根据图可得，在极坐标系下计算该二重积分的积分区域为



$$D=\left\{(r,\theta)\left|\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{3},\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}\le r\le\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}\right.\right\}$$

所以

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) rdr$$

故选 B.

(7) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&a\\1&4&a^2\end{pmatrix}, \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\d\\d^2\end{pmatrix}$.若集合 $\Omega=\{1,2\}$，则线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解的充分必要条件为（ ）

(A) $a\notin\Omega, d\notin\Omega$ (B) $a\notin\Omega, d\in\Omega$

(C) $a\in\Omega, d\notin\Omega$ (D) $a\in\Omega, d\in\Omega$

【答案】(D)

【解析】$(A,b)=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&a&d\\1&4&a^2&d^2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&a-1&d-1\\0&0&(a-1)(a-2)&(d-1)(d-2)\end{pmatrix}$,

由 $r(A)=r(A,b)<3$，故 $a=1$ 或 $a=2$，同时 $d=1$ 或 $d=2$.故选（D）

(8) 设二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Py}$ 下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2-y_3^2$，其中 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$，若 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{e}_1,-\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_2)$ 则 $f=(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$ 下的标准形为( )

(A) $2y_1^2-y_2^2+y_3^2$ (B) $2y_1^2+y_2^2-y_3^2$

(C) $2y_1^2-y_2^2-y_3^2$　　　　(D) $2y_1^2+y_2^2+y_3^2$

【答案】(A)

【解析】由 $x=Py$，故 $f=x^TAx=y^T(P^TAP)y=2y_1^2+y_2^2-y_3^2$.

且 $P^TAP=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$.

由已知可得 $Q=P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}=PC$

故 $Q^TAQ=C^T(P^TAP)C=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

所以 $f=x^TAx=y^T(Q^TAQ)y=2y_1^2-y_2^2+y_3^2$.选（A）

二、填空题：9～14 小题,每小题 4 分,共 24 分.请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) $\begin{cases}x=\arctan t\\ y=3t+t^3\end{cases}$ 则 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}=$

【答案】48

【解析】 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\Big/\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{3+3t^2}{\dfrac{1}{1+t^2}}=3(1+t^2)^2$

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dx}[3(1+t^2)^2]=\dfrac{d[3(1+t^2)^2]}{dt}\Big/\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{12t(1+t^2)}{\dfrac{1}{1+t^2}}=12t(1+t^2)^2$

$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}=48$.

(10)函数 $f(x)=x^2\cdot 2^x$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $f^n(0)=$________

【答案】 $n(n-1)(\ln 2)^{n-2}$

【解析】根据莱布尼茨公式得：

$f^{(n)}(0)=C_n^2 2\left(2^x\right)^{(n-2)}\Big|_{x=0}=\dfrac{n(n-1)}{2}2(\ln 2)^{n-2}=n(n-1)(\ln 2)^{n-2}$

(11) 设 $f(x)$ 连续，$\varphi(x)=\int_0^{x^2}xf(t)dt$，若 $\varphi(1)=1,\varphi'(1)=5$，则 $f(1)=$

【答案】 2

【解析】 已知 $\varphi(x)=x\int_0^{x^2} f(t)dt$，求导得 $\varphi'(x)=\int_0^{x^2} f(t)dt+2x^2 f(x^2)$，故有

$$\varphi(1)=\int_0^1 f(t)dt=1,$$

$\varphi'(1)=1+2f(1)=5,$ 则 $f(1)=2$.

(12)设函数 $y=y\left(x\right)$ 是微分方程 $y''+y'-2y=0$ 的解，且在 $x=0$ 处 $y\left(x\right)$ 取得极值 3，则

$y\left(x\right)$=________.

【答案】 $e^{-2x}+2e^{x}$

【解析】由题意知：$y\left(0\right)=3$，$y'\left(0\right)=0$，由特征方程：$\lambda^2+\lambda-2=0$ 解得 $\lambda_1=1,\lambda_2=-2$

所以微分方程的通解为：$y=C_1e^x+C_2e^{-2x}$ 代入 $y\left(0\right)=3$，$y'\left(0\right)=0$ 解得：$C_1=2$ $C_2=1$

解得：$y=2e^x+e^{-2x}$

(13)若函数 $Z=z\left(x,y\right)$ 由方程 $e^{x+2y+3z}+xyz=1$ 确定，则 $\mathrm{d}z\Big|_{(0,0)}$ =__________.

【答案】 $-\frac{1}{3}\left(\mathrm{d}x+2\mathrm{d}y\right)$

【解析】当 $x=0,y=0$ 时 $z=0$，则对该式两边求偏导可得

$$(3e^{x+2y+3z}+xy)\frac{\partial z}{\partial x}=-yz-e^{x+2y+3z}$$

$(3e^{x+2y+3z}+xy)\frac{\partial z}{\partial y}=-xz-2e^{x+2y+3z}$.将（0,0,0）点值代入即有

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,0)}=-\frac{1}{3},\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,0)}=-\frac{2}{3}.$$

则可得 $dz|_{(0,0)}=-\frac{1}{3}dx-\frac{2}{3}dy=-\frac{1}{3}\left(\mathrm{d}x+2\mathrm{d}y\right)$.

(14) 若3阶矩阵 A 的特征值为 $2,-2,1$，$B=A^2-A+E$，其中 E 为3阶单位阵，则行列式

$|B|=$____.

【答案】21

【解析】 A 的所有特征值为 $2,-2,1$. B 的所有特征值为 $3,7,1$.

所以 $|B|=3\times7\times1=21$.

三、解答题：15～23 小题,共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、

证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分）

设函数 $f(x)=x+a\ln(1+x)+bx\sin x$，$g(x)=kx^3$.若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x\to 0$ 时是等价无穷小，求 a,b,k 的值.

【答案】$a=-1,k=-\frac{1}{3},b=-\frac{1}{2}$

【解析】

方法一：

因为 $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$，$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$，

那么，

$$1=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x+a\ln(1+x)+bx\sin x}{kx^3}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+a)x+(b-\frac{a}{2})x^2+\frac{a}{3}x^3+o(x^3)}{kx^3},$$

可得：$\begin{cases}1+a=0\\ b-\frac{a}{2}=0\\ \frac{a}{3k}=1\end{cases}$，所以，$\begin{cases}a=-1\\ b=-\frac{1}{2}\\ k=-\frac{1}{3}\end{cases}$.

方法二：

由题意得

$$1=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x+a\ln(1+x)+bx\sin x}{kx^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{a}{1+x}+b\sin x+bx\cos x}{3kx^2}$$

由分母 $\lim_{x\to 0}3kx^2=0$，得分子 $\lim_{x\to 0}(1+\frac{a}{1+x}+b\sin x+bx\cos x)=\lim_{x\to 0}(1+a)=0$，求得 c；

于是 $1=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x}+b\sin x+bx\cos x}{3kx^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+b(1+x)\sin x+bx(1+x)\cos x}{3kx^2(1+x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+b(1+x)\sin x+bx(1+x)\cos x}{3kx^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+b\sin x+b(1+x)\cos x+b(1+x)\cos x+bx\cos x-bx(1+x)\sin x}{6kx}$$

由分母 $\lim\limits_{x\to 0}6kx=0$，得分子

$$\lim_{x\to 0}[1+b\sin x+2b(1+x)\cos x+bx\cos x-bx(1+x)\sin x]=\lim_{x\to 0}(1+2b\cos x)=0,$$

求得 $b=-\dfrac{1}{2}$；

进一步，b 值代入原式

$$1=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{2}\sin x-(1+x)\cos x-\frac{1}{2}x\cos x+\frac{1}{2}x(1+x)\sin x}{6kx}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}\cos x-\cos x+(1+x)\sin x-\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2}x\sin x+\frac{1}{2}(1+x)\sin x+\frac{1}{2}x\sin x+\frac{1}{2}x(1+x)\cos x}{6k}$$

$$=\frac{-\frac{1}{2}}{6k}$$，求得 $k=-\dfrac{1}{3}$.

(16) (本题满分 10 分)

设 A>0，D 是由曲线段 $y=A\sin x(0\le x\le\frac{\pi}{2})$ 及直线 $y=0$，$x=\frac{\pi}{2}$ 所围成的平面区域，V_1，

V_2 分别表示 D 绕 x 轴与绕 y 轴旋转成旋转体的体积，若 $V_1=V_2$，求 A 的值.

【答案】$\dfrac{8}{\pi}$

【解析】由旋转体的体积公式，得

$$V_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\pi f^2(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\pi(A\sin x)^2dx=\pi A^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{\pi^2A^2}{4}$$

$$V_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\pi xf(x)dx=-2\pi A\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\,d\cos x=2\pi A$$

由题 $V_1=V_2$，求得 $A=\dfrac{8}{\pi}$.

(17) (本题满分 11 分)

已知函数 $f(x,y)$ 满足 $f_{xy}''(x,y)=2(y+1)e^x$， $f_x'(x,0)=(x+1)e^x$， $f(0,y)=y^2+2y$，

求 $f(x,y)$ 的极值.

【答案】极小值 $f(0,-1)=-1$

【解析】 $f''_{xy}(x,y)=2(y+1)e^x$ 两边对 y 积分，得

$$f'_x(x,y)=2(\frac{1}{2}y^2+y)e^x+\varphi(x)=(y^2+2y)e^x+\varphi(x),$$

故 $f'_x(x,0)=\varphi(x)=(x+1)e^x$，

求得 $\varphi(x)=e^x(x+1)$，

故 $f'_x(x,y)=(y^2+2y)e^x+e^x(1+x)$，两边关于 x 积分，得

$$\begin{aligned} f(x,y)&=(y^2+2y)e^x+\int e^x(1+x)dx \\ &=(y^2+2y)e^x+\int(1+x)de^x \\ &=(y^2+2y)e^x+(1+x)e^x-\int e^x dx \\ &=(y^2+2y)e^x+(1+x)e^x-e^x+\mathrm{C} \\ &=(y^2+2y)e^x+xe^x+\mathrm{C} \end{aligned}$$

由 $f(0,y)=y^2+2y+\mathrm{C}=y^2+2y$，求得 $C=0.$

所以 $f(x,y)=(y^2+2y)e^x+xe^x.$

令 $\begin{cases} f'_x=(y^2+2y)e^x+e^x+xe^x=0 \\ f'_y=(2y+2)e^x=0 \end{cases}$，求得 $\begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases}$.

又 $f''_{xx}=(y^2+2y)e^x+2e^x+xe^x$，

$f''_{xy}=2(y+1)e^x$，$f''_{yy}=2e^x$，

当 $x=0,y=-1$ 时，$A=f''_{xx}(0,-1)=1,\ \mathrm{B}=f''_{xy}(0,-1)=0,\ C=f''_{yy}(0,-1)=2$，

$AC-B^2>0,\ f(0,-1)=-1$ 为极小值.

(18) (本题满分 10 分)

计算二重积分 $\iint\limits_D x(x+y)dxdy$，其中 $D=\left\{(x,y)\middle| x^2+y^2\le 2, y\ge x^2\right\}$

【答案】 $\frac{\pi}{4}-\frac{2}{5}$

【解析】 $\iint\limits_D x(x+y)dxdy=\iint\limits_D x^2dxdy$

$$=2\int_0^1 dx\int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} x^2dy$$

$$=2\int_0^1 x^2(\sqrt{2-x^2}-x^2)dx$$

$$=2\int_0^1 x^2\sqrt{2-x^2}dx-\frac{2}{5}\overset{x=\sqrt{2}\sin t}{=}2\int_0^{\frac{\pi}{4}}2\sin^2 t2\cos^2 tdt-\frac{2}{5}$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 2tdt-\frac{2}{5}\overset{u=2t}{=}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 udu-\frac{2}{5}=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{5}.$$

(19)(本题满分 11 分)

已知函数 $f(x)=\int_x^1\sqrt{1+t^2}dt+\int_1^{x^2}\sqrt{1+t}dt$，求 $f(x)$ 零点的个数.

【答案】2 个

【解析】 $f'(x)=-\sqrt{1+x^2}+2x\sqrt{1+x^2}=\sqrt{1+x^2}(2x-1)$

令 $f'(x)=0$,得驻点为 $x=\frac{1}{2}$,

在 $(-\infty,\frac{1}{2})$, $f(x)$ 单调递减,在 $(\frac{1}{2},+\infty)$, $f(x)$ 单调递增

故 $f(\frac{1}{2})$ 为唯一的极小值,也是最小值.

而 $f(\frac{1}{2})=\int_{\frac{1}{2}}^1\sqrt{1+t^2}dt+\int_1^{\frac{1}{4}}\sqrt{1+t}dt=\int_{\frac{1}{2}}^1\sqrt{1+t^2}dt-\int_{\frac{1}{4}}^1\sqrt{1+t}dt$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^1\sqrt{1+t^2}dt-\int_{\frac{1}{2}}^1\sqrt{1+t}d-\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+t}d$$

在 $(\frac{1}{2},1)$, $\sqrt{1+t^2}<\sqrt{1+t}$,故 $\int_{\frac{1}{2}}^1\sqrt{1+t^2}dt-\int_{\frac{1}{2}}^1\sqrt{1+t}dt<0$

从而有 $f(\frac{1}{2})<0$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}[\int_x^1\sqrt{1+t^2}dt+\int_1^{x^2}\sqrt{1+t}dt]=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}[\int_x^1\sqrt{1+t^2}dt+\int_1^{x^2}\sqrt{1+t}dt]=\lim_{x\to+\infty}[\int_1^{x^2}\sqrt{1+t}dt-\int_1^x\sqrt{1+t^2}dt]$$

考虑 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^{x^2}\sqrt{1+t}dt}{\int_1^x\sqrt{1+t^2}dt}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}=+\infty$，所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,\frac{1}{2})$ 及 $(\frac{1}{2},+\infty)$ 上各有一个零点，所以零点个数为 2.

(20) (本题满分 10 分)

已知高温物体置于低温介质中，任一时刻该物体温度对时间的变化率与该时刻物体和介质的温差成正比，现将一初始温度为 $120°C$ 的物体在 $20°C$ 的恒温介质中冷却，30min

后该物体降至$30°C$，若要将该物体的温度继续降至$21°C$，还需冷却多长时间?

【答案】$30\min$

【解析】设t时刻物体温度为$x(t)$，比例常数为$k(>0)$，介质温度为m,则

$\frac{dx}{dt}=-k(x-m)$，从而$x(t)=Ce^{-kt}+m$，

$x(0)=120, m=20$，所以$C=100$，即$x(t)=100e^{-kt}+20$

又$x(\frac{1}{2})=30$, 所以$k=2\ln 10$，所以$x(t)=\frac{1}{100^{t-1}}+20$

当$x=21$时，$t=1$，所以还需要冷却 3 0 min.

(21) (本题满分 10 分)

已知函数$f(x)$在区间$[a,+\infty)$上具有 2 阶导数，$f(a)=0$，$f'(x)>0$，$f''(x)>0$，设$b>a$，曲线$y=f(x)$在点$(b,f(b))$处的切线与x轴的交点是$(x_0,0)$，证明$a<x_0<b$.

【证明】根据题意得点$(b,f(b))$处的切线方程为$y-f(b)=f'(b)(x-b)$

令$y=0$，得$x_0=b-\frac{f(b)}{f'(b)}$

因为$f'(\mathrm{x})>0$所以$f(\mathrm{x})$单调递增，又因为$f(\mathrm{a})=0$

所以$f(\mathrm{b})>0$，又因为$f'(b)>0$

所以$x_0=b-\frac{f(b)}{f'(b)}<b$

又因为$x_0-a=b-a-\frac{f(b)}{f'(b)}$，而在区间（a,b）上应用拉格朗日中值定理有

$\frac{f(\mathrm{b})-\mathrm{f(a)}}{b-a}=f'(\xi),\xi\in(\mathrm{a},\mathrm{b})$

所以$x_0-a=b-a-\frac{f(b)}{f'(b)}=\frac{f(b)}{f'(\xi)}-\frac{f(b)}{f'(b)}=f(b)\frac{f'(b)-f'(\xi)}{f'(b)f'(\xi)}$

因为$f''(\mathrm{x})>0$所以$f'(\mathrm{x})$单调递增

所以$f'(b)>f'(\xi)$

所以$x_0-a>0$，即$x_0>a$，所以$a<x_0<b$，结论得证.

(22) (本题满分 11 分)

设矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$ 且 $A^3=O$.

(1) 求 a 的值;

(2) 若矩阵 X 满足 $X-XA^2-AX+AXA^2=E$，E 为 3 阶单位阵，求 X .

【答案】

$$a=0, X=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

【解析】

(I) $A^3=O \Rightarrow |A|=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1-a^2 & a & -1 \\ -a & 1 & a \end{vmatrix} = a^3=0 \Rightarrow a=0$

(II)由题意知

$$X-XA^2-AX+AXA^2=E \Rightarrow X\left(E-A^2\right)-AX\left(E-A^2\right)=E$$

$$\Rightarrow (E-A)X\left(E-A^2\right)=E \Rightarrow X=(E-A)^{-1}\left(E-A^2\right)^{-1}=\left[\left(E-A^2\right)(E-A)\right]^{-1}$$

$$\Rightarrow X=\left(E-A^2-A\right)^{-1}$$

$$E-A^2-A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\therefore X=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(23) (本题满分 11 分)

设矩阵 $A=\begin{pmatrix}0 & 2 & -3\\ -1 & 3 & -3\\ 1 & -2 & a\end{pmatrix}$ 相似于矩阵 $B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix}$.

（1）求 a,b 的值；

（2）求可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP$ 为对角阵.

【答案】

（1） $a=4,b=5$；

（2）

$$P=\begin{pmatrix}2 & -3 & -1\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

【解析】(I) $A\sim B\Rightarrow tr(A)=tr(B)\Rightarrow 3+a=1+b+1$

$$|A|=|B|\Rightarrow\begin{vmatrix}0 & 2 & -3\\ -1 & 3 & -3\\ 1 & -2 & a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -2 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 3 & 1\end{vmatrix}$$

$$\therefore\begin{cases}a-b=-1\\ 2a-b=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=4\\ b=5\end{cases}$$

$$\text{(II) } A=\begin{pmatrix}0 & 2 & -3\\ -1 & 3 & -3\\ 1 & -2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 2 & -3\\ -1 & 2 & -3\\ 1 & -2 & 3\end{pmatrix}=E+C$$

$$C=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -3\\ -1 & 2 & -3\\ 1 & -2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\end{pmatrix}$$

C 的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=0,\lambda_3=4$

$\lambda=0$ 时 $(0E-C)x=0$ 的基础解系为 $\xi_1=(2,1,0)^T;\xi_2=(-3,0,1)^T$

$\lambda=5$ 时 $(4E-C)x=0$ 的基础解系为 $\xi_3=(-1,-1,1)^T$

A 的特征值 $\lambda_A=1+\lambda_C:1,1,5$

令 $P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix}2 & -3 & -1\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$， $\therefore P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 5\end{pmatrix}$