2017 全国研究生入学考试考研数学二试题

本试卷满分 150，考试时间 180 分钟

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1）若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}, & x>0,\\ b, & x\le 0,\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则（　）

（A）$ab=\dfrac{1}{2}$　　（B）$ab=-\dfrac{1}{2}$

（C）$ab=0$　　（D）$ab=2$

（2）设二阶可导函数 $f(x)$ 满足 $f(1)=f(-1)=1, f(0)=-1$ 且 $f''(x)>0$，则（　）

（A）$\int_{-1}^{1} f(x)dx>0$　　（B）$\int_{-1}^{1} f(x)dx<0$

（C）$\int_{-1}^{0} f(x)dx>\int_{0}^{1} f(x)dx$　　（D）$\int_{-1}^{0} f(x)dx<\int_{0}^{1} f(x)dx$

（3）设数列 $\{x_n\}$ 收敛，则（　）

（A）当 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n=0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$　　（B）当 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n+\sqrt{|x_n|}\right)=0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$

（C））当 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+x_n^2)=0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$　　（D）当 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+\sin x_n)=0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$

（4）微分方程 $y''-4y'+8y=e^{2x}(1+\cos 2x)$ 的特解可设为 $y^*=$（　）

（A）$Ae^{2x}+e^{2x}\left(B\cos 2x+C\sin 2x\right)$　　（B）$Axe^{2x}+e^{2x}\left(B\cos 2x+C\sin 2x\right)$

（C）$Ae^{2x}+xe^{2x}\left(B\cos 2x+C\sin 2x\right)$　　（D）$Axe^{2x}+xe^{2x}\left(B\cos 2x+C\sin 2x\right)$

（5）设 $f(x,)$ 具有一阶偏导数，且对任意的 (x, y)，都有 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}>0, \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}<0$，则（　）

（A）$f(0,0)>f(1,1)$　　（B）$f(0,0)<f(1,1)$

（C）$f(0,1)>f(1,0)$　　（D）$f(0,1)<f(1,0)$

（6）甲乙两人赛跑，计时开始时，甲在乙前方 10（单位：m）处，图中实线表示甲的速度曲线 $v=v_1(t)$（单位：m/s），虚线表示乙的速度曲线 $v=v_2(t)$（单位：m/s），三块阴影部分的面积的数值依次为 10, 20, 3. 计时开始后乙追上甲的时刻记为（　）

（A）$t_0=10$　　（B）$15<t_0<20$

（C）$t_0=25$　　（D）$t_0>25$

（7）设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 为可逆矩阵，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$，则

$A(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)$（　）

（A）$\alpha_1+\alpha_2$　（B）$\alpha_2+2\alpha_3$　（C）$\alpha_2+\alpha_3$　（D）$\alpha_1+2\alpha_2$

（8）已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&0&1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}$ 则（　）

（A）$\boldsymbol{A}$ 与 C 相似，　$\boldsymbol{B}$ 与 C 相似
（B）$\boldsymbol{A}$ 与 C 相似，　$\boldsymbol{B}$ 与 C 不相似
（C）$\boldsymbol{A}$ 与 C 不相似，　$\boldsymbol{B}$ 与 C 相似
（D）$\boldsymbol{A}$ 与 C 不相似，　$\boldsymbol{B}$ 与 C 不相似

二、填空题：9–14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

（9）曲线 $y=x\left(1+\arcsin\dfrac{2}{x}\right)$ 的斜渐近线方程为_______。

（10）设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=t+e^t\\y=sint\end{cases}$ 确定，则 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}=$_______。

（11）$\int_0^{+\infty}\dfrac{\ln(1+x)}{(1+x)^2}dx=$_______。

（12）设函数 $f(x,y)$ 具有一阶连续偏导数，且 $df(x,y)=ye^ydx+x(1+y)e^ydy$，$f(0,0)=0$，则 $f(x,y)=$_______。

（13）$\int_0^1 dy\int_y^1\dfrac{\tan x}{x}dx=$_______。

（14）设矩阵 $A=\begin{pmatrix}4 & 1 & -2\\ 1 & 2 & a\\ 3 & 1 & -1\end{pmatrix}$ 的一个特征向量为 $\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$，则 $a=$_______。

三、解答题：15—23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^x\sqrt{x-t}e^t dt}{\sqrt{x^3}}$。

(16)(本题满分 10 分)设函数 $f(u,v)$ 具有 2 阶连续偏导数，$y=f(e^x,\cos x)$，求 $\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=0}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}\Big|_{x=0}$。

(17)（本题满分 10 分）求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2}\ln(1+\dfrac{k}{n})$。

(18)（本题满分 10 分）已知函数 $y(x)$ 由方程 $x^3+y^3-3x+3y-2=0$ 确定，求 $y(x)$ 的极值。

(19)（本题满分 11 分）设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上具有二阶导数，且 $f(1)>0$，$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}<0$。

证明：（Ⅰ）方程 $f(x)=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在一个实根。

（Ⅱ）方程 $f(x)f''(x)+\left(f'(x)\right)^2=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在两个不同实根。

(20)（本题满分 10 分）已知平面区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 2y\}$，计算二重积分 $\iint\limits_D (x+1)^2\,dxdy$。

（21）（本题满分 11 分）设 $y(x)$ 是区间 $\left(0,\dfrac{3}{2}\right)$ 内的可导函数，且 $y(1)=0$，点 P 是曲线 $l: y(x)$ 上的任意一点。l 在 P 处的切线与 y 轴相交于点 $\left(0,Y_p\right)$，法线与 x 轴相交于点 $\left(X_p,0\right)$，若 $X_p=Y_p$，求 l 上点的坐标 (x,y) 满足的方程。

（22）（本题满分 11 分）设 3 阶矩阵 $A=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)$ 有 3 个不同的特征值，且 $\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2$。

（I）证明：$r(A)=2$

（II）若 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，求方程组 $Ax=\beta$ 的通解。

（23）(本题满分 11 分)设二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^{\ 2}-x_2^{\ 2}+ax_3^{\ 2}+2x_1x_2-8x_1x_3+2x_2x_3$$

在正交变换 $X=QY$ 下的标准型 $\lambda_1 y_1^{\ 2}+\lambda_2 y_2^{\ 2}$，求 a 的值及一个正交矩阵 Q 。