2018 考研数学二参考答案

一、选择题

1.B 2.D 3. D 4. D 5.C 6.C 7.A 8. A

二、填空题

9. 1 **10.** $y = 4x - 3$ **11.** $\frac{1}{2}\ln 2$ **12.** $\frac{2}{3}$ **13.** $\frac{1}{4}$ **14.** 2

三、 解答题

15. 解：

$$\int e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}dx=\frac{1}{2}\int\arctan\sqrt{e^x-1}de^{2x}$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\cdot\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{2}\int e^{2x}\cdot\frac{\frac{e^x}{2\sqrt{e^x-1}}}{1+(e^x-1)}dx$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\cdot\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{4}\int\frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x-1}}dx$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\cdot\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{4}\int\frac{e^x-1+1}{\sqrt{e^x-1}}de^x$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\cdot\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{4}\int\sqrt{e^x-1}+\frac{1}{\sqrt{e^x-1}}d(e^x-1)$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\cdot\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}(e^x-1)^{\frac{3}{2}}+2\sqrt{e^x-1}\right)+C$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\cdot\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{6}(e^x-1)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}\sqrt{e^x-1}+C$$

16.

(1)对$\int_0^x f(t)dt+\int_0^x tf(x-t)dt=ax^2$

$\because \int_0^x tf(x-t)dt \overset{x-t=u}{=} \int_0^x (x-u)f(u)du$

$\therefore \int_0^x f(t)dt + x\int_0^x f(u)du - \int_0^x uf(u)du = ax^2$

两边对x求导有：$f(x)+\int_0^x f(u)du + xf(x) - xf(x) = 2ax$

$\therefore f(x)+\int_0^x f(u)du = 2ax$，当$x=0$时，$f(0)=0$

两边再对x求导有：$f'(x)+f(x)=2a$

$\therefore f(x)=e^{-\int dx}\left[\int 2ae^{\int dx}dx + C\right] = e^{-x}\left[2ae^x + C\right]$

$\because f(0)=0 \quad \therefore C=-2a$

$\therefore f(x)=2a-2ae^{-x}$

(2)当$x=1$时，由$f(x)+\int_0^x f(u)du=2ax$得$f(1)+\int_0^1 f(t)dt=2a$

由$f(1)=2a-2ae^{-1}$

$\therefore \int_0^1 f(t)dt = 2ae^{-1}$

又$\dfrac{\int_0^1 f(t)dt}{1-0}=1, \therefore 2ae^{-1}=1$

$\therefore a=\dfrac{e}{2}$

17

$$\iint\limits_D (x+2y)dxdy=\int_0^{2\pi}dx\int_0^{y(x)}(x+2y)dy$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(xy+y^2\right)\Big|_0^{y(x)}dx$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(xy(x)+y^2(x)\right)dx$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[(t-\sin t)(1-\cos t)+(1-\cos t)^2\right](1-\cos t)dt$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[(t-\sin t)(1-\cos t)^2+(1-\cos t)^3\right]dt$$

$$=\int_0^{2\pi}(t-\sin t)(1-\cos t)^2dt+\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3dt$$

$$=\int_0^{2\pi}(t-\sin t)4\sin^4\frac{t}{2}dt+\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3dt$$

$$=\int_0^{2\pi}4t\sin^4\frac{t}{2}dt-\int_0^{2\pi}4\sin^4\frac{t}{2}\bullet 2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}dt+\int_0^{2\pi}8\sin^6\frac{t}{2}dt$$

$$=\int_0^{\pi}16t\sin^4 tdt-16\int_0^{2\pi}\sin^5\frac{t}{2}d\left(\sin\frac{t}{2}\right)+16\int_0^{\pi}\sin^6 tdt$$

$$=16\times\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\sin^4 tdt-16\times\frac{1}{6}\sin^6\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi}+16\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 tdt$$

$$=16\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 tdt-\frac{8}{3}(0-0)+32\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 tdt$$

$$=16\pi\bullet\frac{3}{4}\bullet\frac{1}{2}\bullet\frac{\pi}{2}+32\bullet\frac{5}{6}\bullet\frac{3}{4}\bullet\frac{1}{2}\bullet\frac{\pi}{2}$$

$$=3\pi^2+5\pi$$

18

①当$x\in(0,1)$时，令$f(x)=x-\ln^2 x+2k\ln x-1$

$f'(x)=1-\frac{2\ln x}{x}+\frac{2k}{x}>0$

$\therefore f(x)$在$(0,1)$上单调递增

$\therefore f(x)<f(1)=0$

$\because x-1<0$

$\therefore (x-1)(x-\ln^2 x+2k\ln x-1)\geq 0$成立

②当$x\geq 1$时，令$f(x)=x-\ln^2 x+2k\ln x-1$

$f'(x)=\frac{2k+x-2\ln x}{x}$

再令$g(x)=2k+x-2\ln x$

$g'(x)=1-\frac{2}{x}=\frac{x-2}{x}$

$\because$ 当$x\in(1,2)$时,$g'(x)<0$

当$x\in(2,+\infty)$时,$g'(x)>0$

$\therefore g(x)\geq g(2)=2k+2-2\ln 2$

$\because k\geq \ln 2-1$

$\therefore g(x)\geq 0$

$\therefore f'(x)\geq 0,$

$\therefore f(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增

$\therefore f(x)\geq f(1)=0$

$\because$ 此时$x-1\geq 0$

$\therefore (x-1)(x-\ln^2 x+2k\ln x-1)\geq 0$成立

综上，结论得证。

19 解：

设圆的周长为x，正三角周长为y，正方形的周长为z，由题设$x+y+z=2$，则目标函数：

$S=\pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{y}{3}\right)^2+\left(\frac{z}{4}\right)^2=\frac{x^2}{4\pi}+\frac{\sqrt{3}}{36}y^2+\frac{z^2}{16}$，故拉格朗日函数为

$L(x,y,z,\lambda)=\frac{x^2}{4\pi}+\frac{\sqrt{3}}{36}y^2+\frac{z^2}{16}+\lambda(x+y+z-2)$则：

$L_x=\dfrac{x}{2\pi}+\lambda=0$

$L_y=\dfrac{2\sqrt{3}y}{36}+\lambda=0$

$L_z=\dfrac{2z}{16}+\lambda=0$

$L_\lambda=x+y+z-2=0$

解得 $x=\dfrac{2\pi}{\pi+3\sqrt{3}+4}$， $y=\dfrac{6\sqrt{3}\pi}{\pi+3\sqrt{3}+4},z=\dfrac{8}{\pi+3\sqrt{3}+4},\lambda=\dfrac{-1}{\pi+3\sqrt{3}+4}$.

此时面积和有最小值 $S=\dfrac{1}{\pi+3\sqrt{3}+4}$.

20.

令点P为$\left(x_0,\dfrac{4}{9}{x_0}^2\right)$,$\therefore$ 直线AP为$y=\dfrac{\frac{4}{9}{x_0}^2-1}{x_0}x+1$

$S=\int_0^{x_0}(\dfrac{\frac{4}{9}{x_0}^2-1}{x_0}x+1-\dfrac{4}{9}x^2)dx=\dfrac{1}{2}x_0+\dfrac{2}{27}{x_0}^3$

$\dfrac{dS}{dt}=\dfrac{dS}{dx_0}\bullet\dfrac{dx_0}{dt}=\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{9}{x_0}^2\right)\bullet\dfrac{dx_0}{dt}$

$\because x_0=3,\dfrac{dx_0}{dt}=4$

$\therefore$ 上式$=\left(\dfrac{1}{2}+2\right)\times4=10$

21.

证明：设 $f(x)=e^x-1-x,x>0,$则有

$f'(x)=e^x-1>0,$因此$f(x)>0,\dfrac{e^x-1}{x}>1$，

从而$e^{x_2}=\dfrac{e^{x_1}\text{-}1}{x_1}>1,x_2>0;$

猜想 $x_1>0,$现用数学归纳法证明；

$n=1$时，$x_1>0$,成立；

假设 $n=k(k=1,2,......)$时，有$x_k>0$,则$n=k+1$时有

$e^{x_{k+1}}=\dfrac{e^{x_k}-1}{x_e}>1$,所以$x_{k+1}>0$;

因此$x_n>0$,有下界.

又 $x_{n+1}-x_n=\ln\dfrac{e^{x_n}-1}{x_n}-\ln e^{x_n}=\ln\dfrac{e^{x_n}-1}{x_ne^{x_n}}$;

设 $g(x)=e^x-1-xe^x$,

$x>0$时，$g'(x)=e^x-e^x-xe^x=-xe^x<0$.

22 解：(1)由 $f(x_1,x_2,x_3)=0$得 $\begin{cases}x_1-x_2+x_3=0,\\x_2+x_3=0,\\x_1+ax_3=0,\end{cases}$ 系数矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&0&1\\1&0&a\end{pmatrix}\xrightarrow{\vee}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\\0&0&a-2\end{pmatrix},$$

$a\neq2$时，$r(A)=3$,方程组有唯一解：$x_1=x_2=x_3=0$;

$a=2$时，$r(A)=2$,方程组有无穷解：$x=k\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix},k\in R.$

(2) $a\neq2$时，令$\begin{cases}y_1=x_1-x_2+x_3,\\y_2=x_2+x_3,\\y_3=x_1+ax_3,\end{cases}$ 这是一个可逆变换，

因此其规范形为 $y_1^2+y_2^2+y_3^2$;

$a=2$时，$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2+x_3)^2+(x_1+2x_3)^2$

$=2x_1^2+2x_2^2+6x_3^2-2x_2x_3+6x_1x_3$

$=2(x_2-\dfrac{x_2-3x_3}{2})^2+\dfrac{3(x_2+x_3)^2}{2}$,

此时规范形为$y_1^2+y_2^2$.

因此其规范形为 $y_1^2+y_2^2+y_3^2$;

23 解：

（1）A 与 B 等价，则 r(A)=r(B),

$$|A|=\begin{vmatrix}1&2&a\\1&3&0\\2&7&-a\end{vmatrix}\overset{r_3-r_1}{=\!=}\begin{vmatrix}1&2&a\\1&3&0\\3&9&0\end{vmatrix}=0$$

$$\text{又所以}|B|=\begin{vmatrix}1&a&2\\0&1&1\\-1&1&1\end{vmatrix}\overset{r_3+r_1}{=\!=}\begin{vmatrix}1&a&2\\0&1&1\\0&a+1&3\end{vmatrix}=2-a=0,$$

$$a=2$$

(2)AP=B，即解矩阵方程 AX=B:

$$(A,B)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&2&2\\1&3&0&0&1&1\\2&7&-2&-1&1&1\end{array}\right)\xrightarrow{r}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&6&3&4&4\\0&1&-2&-1&-1&-1\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

$$\text{得}P=\begin{pmatrix}-6k_1+3&-6k_2+4&-6k_3+4\\2k_1-1&2k_2-1&2k_3-1\\k_1&k_2&k_3\end{pmatrix};$$

又P可逆，所以$|P|\neq 0$，即$k_2\neq k_3$,

$$\text{最终}P=\begin{pmatrix}-6k_1+3&-6k_2+4&-6k_3+4\\2k_1-1&2k_2-1&2k_3-1\\k_1&k_2&k_3\end{pmatrix}\text{，其中}k_1\text{，}k_2\text{，}k_3\text{为任意常数，且}k_2\neq k_3$$