2012 年全国硕士研究生入学统一考试
数学二试题解析

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1）曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 渐近线的条数为（）

（A）0
（B）1
（C）2
（D）3

【答案】：C

【解析】：$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x}{x^2-1}=\infty$，所以 $x=1$ 为垂直的

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x}{x^2-1}=1$，所以 $y=1$ 为水平的，没有斜渐近线 故两条选 C

（2）设函数 $f(x)=(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)$，其中 n 为正整数，则 $f^{'}(0)=$

（A）$(-1)^{n-1}(n-1)!$

（B）$(-1)^{n}(n-1)!$

（C）$(-1)^{n-1}n!$

（D）$(-1)^{n}n!$

【答案】：A

【解析】：$f^{'}(x)=e^x(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)+(e^x-1)(2e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)+\cdots(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(ne^{nx}-n)$

所以 $f'(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!$

（3）设 $a_n>0(n=1,2,\cdots)$，$S_n=a_1+a_2+\cdots a_n$，则数列(s_n)有界是数列（a_n）收敛的

(A) 充分必要条件.　　(B) 充分非必要条件.

（C）必要非充分条件.　　（D）既非充分也非必要条件.

【答案】: (B)

（4）设 $I_k = \int_0^{k\pi} e^{x^2} \sin x dx (k=1,2,3)$,则有（）

（A）$I_1< I_2 <I_3.$ (B) $I_3< I_2< I_1.$

(C) $I_2< I_3 <I_1,$ (D) $I_2< I_1< I_3.$

【答案】: (D)

【解析】: :

$I_k = \int_e^k e^{x^2} \sin x dx$ 看为以 k 为自变量的函数，则可知 $I_k' = e^{k^2} \sin k \geq 0, k \in (0,\pi)$，即可知 $I_k = \int_e^k e^{x^2} \sin x dx$ 关于 k 在 $(0,\pi)$ 上为单调增函数，又由于 $1,2,3 \in (0,\pi)$，则 $I_1 < I_2 < I_3$，故选 D

（5）

设函数 $f(x, y)$ 可微，且对任意 x, y 都有 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} > 0$, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} < 0$, $f(x_1, y_1) < f(x_2, y_2)$ 成立的一个充分条件是

(A) $x_1> x_2, y_1< y_2.$ (B) $x_1> x_2, y_1>y_2.$

(C) $x_1< x_2, y_1< y_2.$ (D) $x_1< x_2, y_1> y_2.$

【答案】: (D)

【解析】: $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} > 0$，$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} < 0$ 表示函数 $f(x,y)$ 关于变量 x 是单调递增的，关于变量 y 是单调递减的。因此，当 $x_1 < x_2, y_1 > y_2$ 必有 $f(x_1,y_1) < f(x_2,y_2)$，故选 D

（6）设区域 D 由曲线 $y = \sin x, x = \pm\frac{\pi}{2}, y = 1,$ 围成，则 $\iint (x^5 y - 1) dxdy =$( )

$(A)\pi \quad (B)2 \quad (C)-2 \quad (D)-\pi$

【答案】:（D）

【解析】: 由二重积分的区域对称性，

$$\iint (x^5 y - 1) dxdy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dx \int_{\sin x}^{1} (x^5 y - 1) dy = -\pi$$

（7）设$\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\0\\c_1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\c_2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\c_3\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}-1\\1\\c_4\end{pmatrix}$其中$c_1,c_2,c_3,c_4$为任意常数，则下列向量组线性相关的是（　　）

（A）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$　　　　（B）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$

（C）$\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$　　　　（D）$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$

【答案】：（C）

【解析】：由于$\left|(\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4)\right|=\begin{vmatrix}0&1&-1\\0&-1&1\\c_1&c_3&c_4\end{vmatrix}=c_1\begin{vmatrix}1&-1\\-1&1\end{vmatrix}=0$，可知$\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$线性相关。故选（C）

（8）设 A 为 3 阶矩阵，P 为 3 阶可逆矩阵，且 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}$，$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$Q=(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3)$则$Q^{-1}AQ=$（　　）

（A）$\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&1\end{pmatrix}$　　　　（B）$\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}$

（C）$\begin{pmatrix}2&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}$　　　　（D）$\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&1\end{pmatrix}$

【答案】：（B）

【解析】：$Q=P\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则$Q^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^{-1}$，

故$Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^{-1}AP\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}$

故选（B）。

二、填空题：9–14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

（9）设$y=y(x)$是由方程$x^2-y+1=e^y$所确定的隐函数，则$\dfrac{d^2y}{dx^2}\Big|_{x=0}$ ________。

【答案】：**1**

【解析】：将 $x=0$ 代入原方程可得 $y=0$

方程 $x^2-y+1=e^y$ 两端对 x 求导，有 $2x-\frac{dy}{dx}=e^y\frac{dy}{dx}$ ， $x=0$、 $y=0$ 代入可得，所以

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=0$$

再次求导得 $2-\frac{d^2y}{dx^2}=e^y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+e^y\frac{d^2y}{dx^2}$ ，再将 $x=0$、 $y=0$、 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=0$ 代入可得

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}=1。$$

（10）计算 $\lim\limits_{x\to\infty}n\left(\frac{1}{1+n^2}+\frac{1}{2^2+n^2}+\cdots+\frac{1}{n^2+n^2}\right)=$________。

【答案】： $\frac{\pi}{4}$

【解析】：原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\arctan x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}.$

（11）设 $z=f\left(\ln x+\frac{1}{y}\right)$,其中函数 $f(u)$ 可微，则 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=$________。

【答案】： 0.

【解析】：因为 $\frac{\partial z}{\partial x}=f'\cdot\frac{1}{x},\frac{\partial z}{\partial y}=f'\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right)$，所以 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=0.$

（12）微分方程 $ydx+(x-3y^2)dy=0$ 满足条件 $y|_{x=1}=1$ 的解为________。

【答案】： $x=y^2$

【解析】： $ydx+(x-3y^2)dy=0\Rightarrow\frac{dx}{dy}=3y-\frac{1}{y}x\Rightarrow\frac{dx}{dy}+\frac{1}{y}x=3y$ 为一阶线性微分方程，

所以

$$x=e^{-\int\frac{1}{y}dy}\left[\int 3y\cdot e^{\int\frac{1}{y}dy}dy+C\right]=\frac{1}{y}\left[\int 3y^2dy+C\right]=(y^3+C)\frac{1}{y}$$

又因为 $y=1$ 时 $x=1$，解得 $C=0$，故 $x=y^2$.

（13）曲线 $y=x^2+x(x<0)$ 上曲率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 的点的坐标是________。

【答案】： $(-1,0)$

【解析】： 将 $y'=2x+1, y''=2$ 代入曲率计算公式，有

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}=\frac{2}{\left[1+(2x+1)^2\right]^{\frac{3}{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

整理有 $(2x+1)^2=1$，解得 $x=0$或-1，又 $x<0$，所以 $x=-1$，这时 $y=0$，

故该点坐标为$(-1,0)$

（14）设 A 为 3 阶矩阵，$|A|=3, A^*$ 为 A 的伴随矩阵，若交换 A 的第一行与第二行得到矩阵 B,则

$|BA^*|=$________。

【答案】：-27

【解析】： 由于 $B=E_{12}A$，故 $BA^*=E_{12}A\cdot A^*=|A|E_{12}=3E_{12}$，

所以，$|BA^*|=|3E_{12}|=3^3|E_{12}|=27*(-1)=-27$.

三、解答题：15—23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）（本题满分 10 分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{1+x}{\sin x}-\dfrac{1}{x}$，记 $a=\lim\limits_{x\to 0}f(x)$

（1）求 a 的值

（2）若当 $x\to 0$ 时，$f(x)-a$ 是 x^k 的同阶无穷小，求 k

【解析】：（1） $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}+1)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^2}+1=1$，即 $a=1$

（2）,当 $x\to 0$ 时，由 $f(x)-a=f(x)-1=\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-\sin x}{x\sin x}$

又因为,当 $x\to 0$ 时，$x-\sin x$ 与 $\dfrac{1}{6}x^3$ 等价，故 $f(x)-a\sim\dfrac{1}{6}x$，即 $k=1$

（16）（本题满分 10 分）

求函数 $f(x,y)=xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ 的极值。

【解析】: $f\left(x,y\right)=xe-\dfrac{x^2+y^2}{2}$，

先求函数的驻点. $f_x'(x,y)=1-x^2=0,\ f_y'(x,y)=-y=0$ ，解得函数为驻点为（-1,0）（1,0）.

在点（1,0）处 $f(1,0)=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ 为 $f(x,y)$ 的极大值；在点（-1,0）处 $f(\text{-}1,0)=\text{-}\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ 为 $f(x,y)$ 的极小值。

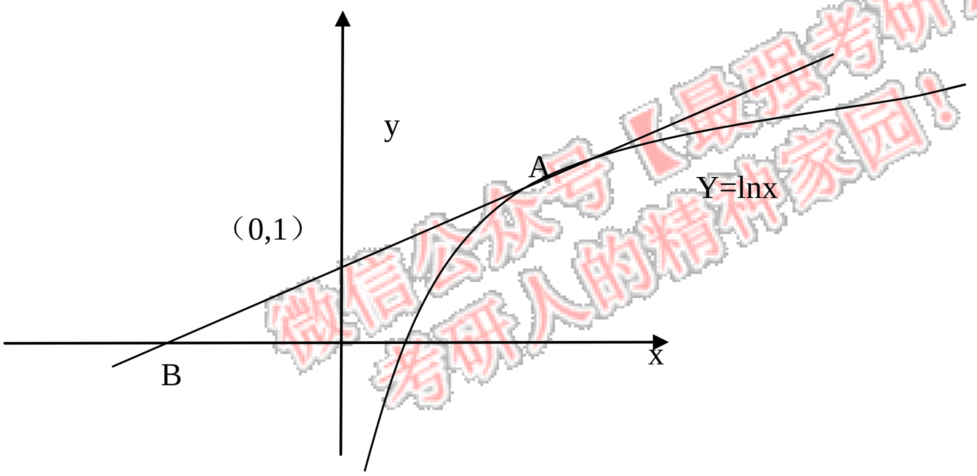
（17）（本题满分 10 分）

过点（0，1）点作曲线 L：$y=\ln x$ 的切线，切点为 A，又 L 与 x 轴交于 B 点，区域 D 由 L 与直线 AB 围成，求区域 D 的面积及 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积。

【解析】:

设切点坐标为 $A\left(x_0,\ln x_0\right)$，斜率为 $\dfrac{1}{x_0}$，所以设切线方程为 $y-\ln x_0=\dfrac{1}{x_0}\left(x-x_0\right)$，又因为该切线过 $B(0,1)$，所以 $x_0=e^2$，故切线方程为：$y=\dfrac{1}{e^2}x+1$

切线与 x 轴交点为 $B\left(-e^2,0\right)$



（1）所求面积为 $S=\int_1^{e^2}\ln x dx-\dfrac{1}{2}(e^2-1)\times 2=x\ln x\Big|_1^{e^2}-\int_1^{e^2}x\cdot\dfrac{1}{x}dx-e^2+1=2e^2-e^2+1=2$

（2）所求体积为 $V=\pi\int_1^{e^2}\ln^2 x dx-\dfrac{\pi}{3}\cdot 4\cdot(e^2-1)=\pi(x\ln^2 x-2x\ln x+2x)\Big|_1^{e^2}-\dfrac{4\pi}{3}\left(e^2-1\right)=\dfrac{2\pi}{3}\left(e^2-1\right)$

$$
\begin{aligned}
V&=\frac{1}{3}\pi\cdot 2^2\cdot\left[e^2-\left(-e^2\right)\right]-\pi\int_1^{e^2}\ln^2 x dx\\
&=\frac{8}{3}\pi e^2-\pi\left[\left(x\ln^2 x\right)_1^{e^2}-\int_1^{e^2}2\ln x dx\right]\\
&=\frac{8}{3}\pi e^2-\pi\left[4e^2-\left(2x\ln x\right)_1^{e^2}+\int_1^{e^2}2dx\right]\\
&=\frac{8}{3}\pi e^2-2\pi\left(e^2-1\right)=\frac{2}{3}\pi\left(e^2+3\right)
\end{aligned}
$$

（18）（本题满分 10 分）

计算二重积分 $\iint\limits_D xyd\sigma$，其中区域 D 为曲线 $r=1+\cos\theta\left(0\le\theta\le\pi\right)$ 与极轴围成。

【解析】：

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_D xyd\sigma&=\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{1+\cos\theta}r\cos\theta\cdot r\sin\theta\cdot rdr\\
&=\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\sin\theta\cdot\cos\theta\cdot(1+\cos\theta)^4d\theta\\
&=16\int_0^{\pi}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}(2\cos^2\frac{\theta}{2}-1)\cos^8\frac{\theta}{2}d\frac{\theta}{2}\\
&=32\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos^{11}tdt-16\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos^9 tdt\\
&=\frac{8}{3}-\frac{8}{5}\\
&=\frac{16}{15}
\end{aligned}
$$

（19）（本题满分 11 分）已知函数 $f(x)$ 满足方程 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 及 $f'(x)+f(x)=2e^x$

1）求表达式 $f(x)$

2）求曲线 $y=f(x^2)\int_0^x f(-t^2)dt$ 的拐点

【解析】：

1）特征方程为 $r^2+r-2=0$，特征根为 $r_1=1,r_2=-2$，齐次微分方程 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 的通解为 $f(x)=C_1e^x+C_2e^{-2x}$.再由 $f'(x)+f(x)=2e^x$ 得 $2C_1e^x-C_2e^{-2x}=2e^x$，可知 $C_1=1,C_2=0$。

故 $f(x)=e^x$

2）曲线方程为 $y=e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt$，则 $y'=1+2xe^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt$，$y''=2x+2\left(1+2x^2\right)e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt$

令 $y''=0$ 得 $x=0$。为了说明 $x=0$ 是 $y''=0$ 唯一的解，我们来讨论 y'' 在 $x>0$ 和 $x<0$ 时的符号。

当 $x>0$ 时，$2x>0,2\left(1+2x^2\right)e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt>0$，可知 $y'>'$；当 $x<0$ 时，

$2x<0, 2\left(1+2x^2\right)e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt<0$，可知 $y''<0$。可知 $x=0$ 是 $y''=0$ 唯一的解。

同时，由上述讨论可知曲线 $y=f(x^2)\int_0^x f(-t^2)dt$ 在 $x=0$ 左右两边的凹凸性相反，可知 $(0,0)$ 点是曲线 $y=f(x^2)\int_0^x f(-t^2)dt$ 唯一的拐点。

（20）（本题满分 10 分）

证明：$x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\geq 1+\frac{x^2}{2},(-1<x<1)$

【解析】：令 $f(x)=x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\frac{x^2}{2}$，可得

$$
\begin{aligned}
f'(x)&=\ln\frac{1+x}{1-x}+x\frac{1+x}{1-x}\bullet\frac{2}{(1-x)^2}-\sin x-x\\
&=\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{2x}{1-x^2}-\sin x-x\\
&=\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1+x^2}{1-x^2}\bullet x-\sin x
\end{aligned}
$$

当 $0<x<1$ 时，有 $\ln\frac{1+x}{1-x}\geq 0$，$\frac{1+x^2}{1-x^2}>1$，所以 $\frac{1+x^2}{1-x^2}\bullet x-\sin x\geq 0$，

故 $f'(x)\geq 0$，而 $f(0)=0$，即得 $x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\frac{x^2}{2}\geq 0$

所以 $x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\geq\frac{x^2}{2}+1$。

当 $-1<x<0$，有 $\ln\frac{1+x}{1-x}\leq 0$，$\frac{1+x^2}{1-x^2}>1$，所以 $\frac{1+x^2}{1-x^2}\bullet x-\sin x\leq 0$，

故 $f'(x)\geq 0$，即得 $x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\frac{x^2}{2}\geq 0$

可知，$x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\geq 1+\frac{x^2}{2},(-1<x<1)$

（21）（本题满分 11 分）

（1）证明方程 $x^n+x^{n-1}+\ldots+x=1(n>1\text{的整数})$，在区间 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 内有且仅有一个实根；

（2）记（1）中的实根为 x_n，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求此极限。

【解析】：(1) 由题意得：令 $f(x)=x^n+x^{n-1}+\cdots+x-1$，则 $f(1)>0$，再由

$$f(\frac{1}{2})=\frac{\frac{1}{2}(1-(\frac{1}{2})^n)}{1-\frac{1}{2}}-1=-(\frac{1}{2})^n<0$$，由零点定理得在 $(\frac{1}{2},1)$ 肯定有解 x_0，假设在此区间还有另外一根 x_1，

所以 $x_0{}^n+x_0{}^{n-1}+\cdots+x_0-1=x_n{}^n+x_n{}^{n-1}+\cdots+x_n-1$，由归纳法得到 $x_1=x_0$，即唯一性得证

（2）假设根为 x_n，即 $f(x_n)=x_n{}^n+x_n{}^{n-1}+\cdots+x_n-1=0$，所以 $f(x_n)=\dfrac{x_n(1-x_n{}^n)}{1-x_n}-1=0,(\dfrac{1}{2}<x_n<1)$，

由于 $x_{n+1}{}^{n+1}+x_{n+1}{}^n+\cdots+x_{n+1}-1=0$，可知 $x_{n+1}{}^n+x_{n+1}{}^{n-1}+\cdots+x_{n+1}-1<0$，由于 $x_n{}^n+x_n{}^{n-1}+\cdots+x_n-1=0$，可知 $x_{n+1}<x_n$。又由于 $\dfrac{1}{2}<x_n<1$，也即 $\{x_n\}$ 是单调的。则由单调有界收敛定理可知 $\{x_n\}$ 收敛，假设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，可知 $a<x_2<x_1=1$。

当 $n\to\infty$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n(1-x_n{}^n)}{1-x_n}-1=\dfrac{a}{1-a_n}-1=0$，得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1}{2}$

（22）（本题满分 11 分）

设 $A=\begin{pmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$

（Ⅰ）求 $|A|$

（Ⅱ）已知线性方程组 $Ax=b$ 有无穷多解，求 a，并求 $Ax=b$ 的通解。

【解析】:（Ⅰ）$\begin{vmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{vmatrix}=1\times\begin{vmatrix}1&a&0\\0&1&a\\0&0&1\end{vmatrix}+a\times(-1)^{4+1}\begin{vmatrix}a&0&0\\1&a&0\\0&1&a\end{vmatrix}=1-a^4$

（Ⅱ）$\begin{pmatrix}1&a&0&0&1\\0&1&a&0&-1\\0&0&1&a&0\\a&0&0&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&a&0&0&1\\0&1&a&0&-1\\0&0&1&a&0\\0&-a^2&0&1&-a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&a&0&0&1\\0&1&a&0&-1\\0&0&1&a&0\\0&0&a^3&1&-a-a^2\end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix}1&a&0&0&1\\0&1&a&0&-1\\0&0&1&a&0\\0&0&0&1-a^4&-a-a^2\end{pmatrix}$

可知当要使得原线性方程组有无穷多解，则有$1-a^4=0$及$-a-a^2=0$，可知$a=-1$。

此时，原线性方程组增广矩阵为$\begin{pmatrix}1&-1&0&0&1\\0&1&-1&0&-1\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$，进一步化为行最简形得$\begin{pmatrix}1&0&0&-1&0\\0&1&0&-1&-1\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

可知导出组的基础解系为$\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$，非齐次方程的特解为$\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$，故其通解为$k\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$

（23）（本题满分 11 分）已知 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\\0&a&-1\end{pmatrix}$，二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^T(A^TA)x$ 的秩为 2。

1）求 a 的值

2）求正交变换 $x=Qy$ 将 f 化为标准型。

【解析】：1）由$r(A^TA)=r(A)=2$可得，

$$\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\end{vmatrix}=a+1=0\Rightarrow a=-1$$

2）$f=x^TA^TAx=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}2&0&2\\0&2&2\\2&2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$

$=2x_1^{\ 2}+2x_2^{\ 2}+4x_3^{\ 2}+4x_1x_2+4x_2x_3$

则矩阵 $B=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&2&2\\2&2&4\end{pmatrix}$

$$|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&-2\\0&\lambda-2&-2\\-2&-2&\lambda-4\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)(\lambda-6)=0$$

解得 B 矩阵的特征值为：$\lambda_1=0;\lambda_2=2;\lambda_3=6$

对于 $\lambda_1=0$,解$(\lambda_1E-B)X=0$得对应的特征向量为：$\eta_1=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$

对于 $\lambda_2=2$,解 $(\lambda_2E-B)X=0$ 得对应的特征向量为：$\eta_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$

对于 $\lambda_3=6$,解 $(\lambda_3E-B)X=0$ 得对应的特征向量为：$\eta_3=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$

将 η_1,η_2,η_3 单位化可得：

$$\alpha_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}，\alpha_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}，\alpha_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$$

$Q=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$

于是得到正交矩阵

$$Q=\begin{vmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}}\end{vmatrix}$$

在正交变换 $xQ=y$ 下，二次型的标准形为 $f=2{y_2}^2+6{y_3}^2$.