2014 年全国硕士研究生入学统一考试

数学二试题

一、选择题　1—8 小题．每小题 4 分，共 32 分．

1．当 $x\to 0^+$ 时，若 $\ln^{\alpha}(1+2x)$，$(1-\cos x)^{\frac{1}{\alpha}}$ 均是比 x 高阶的无穷小，则 α 的可能取值范围是（　）

（A）$(2,+\infty)$　　（B）$(1,2)$　　（C）$(\frac{1}{2},1)$　　（D）$(0,\frac{1}{2})$

2．下列曲线有渐近线的是

（A）$y=x+\sin x$　　（B）$y=x^2+\sin x$　（C）$y=x+\sin\frac{1}{x}$　　（D）$y=x^2+\sin\frac{1}{x}$

3．设函数 $f(x)$ 具有二阶导数，$g(x)=f(0)(1-x)+f(1)x$，则在 $[0,1]$ 上（　）

（A）当 $f'(x)\ge 0$ 时，$f(x)\ge g(x)$　（B）当 $f'(x)\ge 0$ 时，$f(x)\le g(x)$

（C）当 $f''(x)\ge 0$ 时，$f(x)\ge g(x)$　（D）当 $f''(x)\ge 0$ 时，$f(x)\le g(x)$

4．曲线 $\begin{cases}x=t^2+7,\\ y=t^2+4t+1\end{cases}$ 上对应于 $t=1$ 的点处的曲率半径是（　）

（A）$\frac{\sqrt{10}}{50}$　（B）$\frac{\sqrt{10}}{100}$　（C）$10\sqrt{10}$　（D）$5\sqrt{10}$

5．设函数 $f(x)=\arctan x$，若 $f(x)=xf'(\xi)$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\xi^2}{x^2}=$（　　）

（A）1　　（B）$\frac{2}{3}$　　（C）$\frac{1}{2}$　　（D）$\frac{1}{3}$

6．设 $u(x,y)$ 在平面有界闭区域 D 上连续，在 D 的内部具有二阶连续偏导数，且满足 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\ne 0$ 及 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，则（　　）.

（A）$u(x,y)$ 的最大值点和最小值点必定都在区域 D 的边界上；

（B）$u(x,y)$ 的最大值点和最小值点必定都在区域 D 的内部；

（C）$u(x,y)$的最大值点在区域D的内部，最小值点在区域D的边界上；

（D）$u(x,y)$的最小值点在区域D的内部，最大值点在区域D的边界上.

7．行列式$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$等于

（A）$(ad-bc)^2$　　（B）$-(ad-bc)^2$　　（C）$a^2d^2-b^2c^2$　　（D）$-a^2d^2+b^2c^2$

8. 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$均是三维向量，则对任意的常数$k,l$，向量$\alpha_1+k\alpha_3$，$\alpha_2+l\alpha_3$线性无关是向量$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关的

（A）必要而非充分条件　　（B）充分而非必要条件

（C）充分必要条件　　（D） 非充分非必要条件

二、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分. 把答案填在题中横线上）

9. $\int_{-\infty}^{1}\frac{1}{x^2+2x+5}dx=$_______.

10．设$f(x)$为周期为 4 的可导奇函数，且$f'(x)=2(x-1),x\in[0,2]$，则$f(7)=$_______________.

11．设$z=z(x,y)$是由方程$e^{2yz}+x+y^2+z=\frac{7}{4}$确定的函数，则$dz|_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}=$_____________.

12．曲线L的极坐标方程为$r=\theta$，则L在点$(r,\theta)=\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$处的切线的直角坐标方程为______________.

13．一根长为 1 的细棒位于x轴的区间$[0,1]$上，若其线密度$\rho(x)=-x^2+2x+1$，则该细棒的质心坐标$\bar{x}=$______.

14．设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+2ax_1x_3+4x_2x_3$的负惯性指数是 1，则$a$的取值范围是______________.

三、解答题

15.（本题满分 10 分）

求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x\left(t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t\right)dt}{x^2\ln(1+\frac{1}{x})}$.

16.（本题满分 10 分）

已知函数 $y=y(x)$ 满足微分方程 $x^2+y^2y'=1-y'$，且 $y(2)=0$，求 $y(x)$ 的极大值和极小值.

17.（本题满分 10 分）

设平面区域 $D=\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4, x\ge 0, y\ge 0\}$. 计算 $\iint\limits_D \dfrac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxdy$

18.（本题满分 10 分）

设函数 $f(u)$ 具有二阶连续导数，$z=f(e^x\cos y)$ 满足 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(4z+e^x\cos y)e^{2x}$. 若 $f(0)=0, f'(0)=0$，求 $f(u)$ 的表达式.

19．（本题满分 10 分）

设函数 $f(x),g(x)$ 在区间 $[a.b]$ 上连续，且 $f(x)$ 单调增加，$0\le g(x)\le 1$，证明：

（1） $0\le\int_a^x g(t)dt\le x-a,\ x\in[a,b]$；

（2） $\int_a^{a+\int_a^b g(t)dt} f(x)dx\le\int_a^b f(x)g(x)dx$.

20．（本题满分 11 分）

设函数 $f(x)=\dfrac{x}{1+x},x\in[0,1]$，定义函数列

$$f_1(x)=f(x),\ \ f_2(x)=f(f_1(x)),\ \cdots,f_n(x)=f(f_{n-1}(x)),\cdots$$

设 S_n 是曲线 $y=f_n(x)$，直线 $x=1,\ y=0$ 所围图形的面积．求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} nS_n$.

21．（本题满分 11 分）

已知函数 $f(x,y)$ 满足 $\dfrac{\partial f}{\partial y}=2(y+1)$，且 $f(y,y)=(y+1)^2-(2-y)\ln y$，求曲线 $f(x,y)=0$ 所成的图形绕直线 $y=-1$ 旋转所成的旋转体的体积.

22.（本题满分 11 分）

设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$，E 为三阶单位矩阵.

（1） 求方程组 $\boldsymbol{AX}=0$ 的一个基础解系；

（2） 求满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$ 的所有矩阵 B.

23.（本题满分 11 分）

证明 $\boldsymbol{n}$ 阶矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \boldsymbol{n} \end{pmatrix}$ 相似.