

## 2016 全国研究生入学考试考研数学二试题

本试卷满分 150，考试时间 180 分钟

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题卡指定位置上。

(1) 设  $a_1 = x(\cos \sqrt{x} - 1)$ ,  $a_2 = \sqrt{x} \ln(1 + \sqrt[3]{x})$ ,  $a_3 = \sqrt[3]{x+1} - 1$ , 当  $x \rightarrow 0^+$  时, 以上 3 个无穷小量按照从低阶到高阶的排序是 ( )

- (A)  $a_1, a_2, a_3$  (B)  $a_2, a_3, a_1$  (C)  $a_2, a_1, a_3$  (D)  $a_3, a_2, a_1$

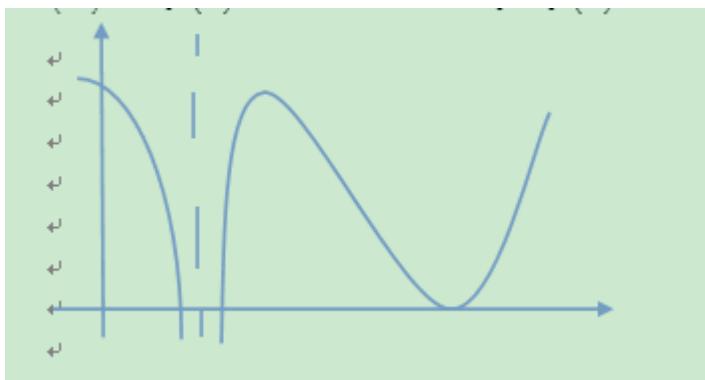
(2) 已知函数  $f(x) = \begin{cases} 2(x-1), & x < 1 \\ \ln x, & x \geq 1 \end{cases}$ , 则  $f(x)$  的一个原函数是 ( )

- (A)  $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1 \\ x(\ln x - 1), & x \geq 1 \end{cases}$  (B)  $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1 \\ x(\ln x + 1) - 1, & x \geq 1 \end{cases}$   
(C)  $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1 \\ x(\ln x + 1) + 1, & x \geq 1 \end{cases}$  (D)  $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1 \\ x(\ln x - 1) + 1, & x \geq 1 \end{cases}$

(3) 反常积分 (1)  $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx$  与 (2)  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx$  的敛散性为 ( )

- (A) (1) 收敛, (2) 收敛 (B) (1) 收敛, (2) 发散  
(C) (1) 发散, (2) 收敛 (D) (1) 发散, (2) 发散

(4) 设函数  $y = f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内连续, 其导数的图像, 如图所示, 则



- (A) 函数  $f(x)$  有 2 个极值点, 曲线  $y = f(x)$  有 2 个拐点

(B) 函数  $f(x)$  有 2 个极值点, 曲线  $y=f(x)$  有 3 个拐点

(C) 函数  $f(x)$  有 3 个极值点, 曲线  $y=f(x)$  有 1 个拐点

(D) 函数  $f(x)$  有 3 个极值点, 曲线  $y=f(x)$  有 2 个拐点

(5) 设函数  $y=f_i(x)$  ( $i=1,2$ ) 具有二阶连续导数, 且  $f_i''(x)<0$  ( $i=1,2$ ), 若两条曲线  $y=f_i(x)$  ( $i=1,2$ ) 在点  $(x_0, y_0)$  处具有公切线  $y=g(x)$ , 且在该点处曲线  $y=f_1(x)$  的曲率大于曲线  $y=f_2(x)$  的曲率, 则在点  $x_0$  的某个邻域内, 有 ( )

(A)  $f_1(x) \leq f_2(x) \leq g(x)$

(B)  $f_2(x) \leq f_1(x) \leq g(x)$

(C)  $f_1(x) \leq g(x) \leq f_2(x)$

(D)  $f_2(x) \leq g(x) \leq f_1(x)$

(6) 已知函数  $f(x, y) = \frac{e^x}{x-y}$ , 则

(A)  $f'_x - f'_y = 0$

(B)  $f'_x + f'_y = 0$

(C)  $f'_x - f'_y = f$

(D)  $f'_x + f'_y = f$

(7) 设  $A, B$  是可逆矩阵, 且  $A$  与  $B$  相似, 则下列结论错误的是 ( )

(A)  $A^T$  与  $B^T$  相似

(B)  $A^{-1}$  与  $B^{-1}$  相似

(C)  $A+A^T$  与  $B+B^T$  相似

(D)  $A+A^{-1}$  与  $B+B^{-1}$  相似

(8) 设二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_1x_3$  的正负惯性指数分别为 1, 2,

则

( )

(A)  $a > 1$

(B)  $a < -2$

(C)  $-2 < a < 1$

(D)  $a=1$  或  $a=-2$

二、填空题: 9-14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 曲线  $y = \frac{x^3}{1+x^2} + \arctan(1+x^2)$  的斜渐近线方程为 \_\_\_\_\_.

(10) 极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \left( \sin \frac{1}{n} + 2 \sin \frac{2}{n} + \cdots + n \sin \frac{n}{n} \right) =$  \_\_\_\_\_.

(11) 以  $y = x^2 - e^x$  和  $y = x^2$  为特解的一阶非齐次线性微分方程为 \_\_\_\_\_.

(12) 已知函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上连续, 且  $f(x) = (x+1)^2 + 2 \int_0^x f(t) dt$ , 则当  $n \geq 2$  时,  $f^{(n)}(0) =$  \_\_\_\_\_.

(13) 已知动点  $P$  在曲线  $y = x^3$  上运动, 记坐标原点与点  $P$  间的距离为  $l$ . 若点  $P$  的横坐标对时间的变化率为常数  $v_0$ , 则当点  $P$  运动到点  $(1,1)$  时,  $l$  对时间的变化率是 \_\_\_\_\_.

(14) 设矩阵  $\begin{bmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{bmatrix}$  与  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  等价, 则  $a =$  \_\_\_\_\_.

三、解答题: 15—23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分)

求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x + 2x \sin x)^{\frac{1}{x^4}}$

(16) (本题满分 10 分)

设函数  $f(x) = \int_0^1 |t^2 - x^2| dt$  ( $x > 0$ ), 求  $f'(x)$ , 并求  $f(x)$  的最小值.

(17) (本题满分 10 分) 已知函数  $z = z(x, y)$  由方程  $(x^2 + y^2)z + \ln z + 2(x + y + 1) = 0$  确定, 求  $z = z(x, y)$  的极值.

(18) (本题满分 11 分)

设  $D$  是由直线  $y=1, y=x, y=-x$  围成的有界区域，计算二重积分  $\iint_D \frac{x^2 - xy - y^2}{x^2 + y^2} dx dy$

(19) (本题满分 10 分)

已知  $y_1(x) = e^x, y_2(x) = u(x)e^x$  是二阶微分方程  $(2x-1)y'' - (2x+1)y' + 2y = 0$  的两个解，若  $u(-1) = e, u(0) = -1$ ，求  $u(x)$ ，并写出该微分方程的通解。

(20) (本题满分 11 分)

设  $D$  是由曲线  $y = \sqrt{1-x^2} (0 \leq x \leq 1)$  与  $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases} (0 \leq t \leq \frac{\pi}{2})$  围成的平面区域，求  $D$  绕  $x$  轴旋转一周所得旋转体的体积和表面积。

(21) (本题满分 11 分)

已知  $f(x)$  在  $[0, \frac{3\pi}{2}]$  上连续, 在  $(0, \frac{3\pi}{2})$  内是函数  $\frac{\cos x}{2x-3\pi}$  的一个原函数  $f(0)=0$

- (1) 求  $f(x)$  在区间  $[0, \frac{3\pi}{2}]$  上的平均值;
- (2) 证明  $f(x)$  在区间  $(0, \frac{3\pi}{2})$  内存在唯一零点.

(22) (本题满分 11 分) 设矩阵  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1-a \\ 1 & 0 & a \\ a+1 & 1 & a+1 \end{bmatrix}$ ,  $\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2a-2 \end{pmatrix}$ , 且方程组  $Ax = \beta$  无解.

- (1) 求  $a$  的值.
- (2) 求方程组  $A^T Ax = A^T \beta$  的通解.

(23) (本题满分 11 分) 已知矩阵  $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ .

(1) 求  $A^{99}$ .

(2) 设三阶矩阵  $B = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  满足  $B^2 = BA$ , 记  $B^{100} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ , 将  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  分别表示为  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  的线性组合。

微信公众号【最强考研】  
考研人的精神家园!