# 2017 全国研究生入学考试考研数学二解析

本试卷满分 150，考试时间 180 分钟

**一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.**

（1）若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}, & x>0,\\ b, & x\le 0,\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则（　）

（A）$ab=\dfrac{1}{2}$　　（B）$ab=-\dfrac{1}{2}$

（C）$ab=0$　　（D）$ab=2$

**【答案】**（A）

**【解析】** 由连续的定义可知：$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)$，其中 $f(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=b$，

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{2}(\sqrt{x})^2}{ax}=\dfrac{1}{2a}$，从而 $b=\dfrac{1}{2a}$，也即 $ab=\dfrac{1}{2}$，故选（A）。

（2）设二阶可导函数 $f(x)$ 满足 $f(1)=f(-1)=1,\ f(0)=-1$ 且 $f''(x)>0$，则（　）

（A）$\int_{-1}^{1}f(x)dx>0$　　（B）$\int_{-1}^{1}f(x)dx<0$

（C）$\int_{-1}^{0}f(x)dx>\int_{0}^{1}f(x)dx$　　（D）$\int_{-1}^{0}f(x)dx<\int_{0}^{1}f(x)dx$

**【答案】**（B）

**【解析】** 由于 $f''(x)<0$，可知其中 $f(x)$ 的图像在其任意两点连线的曲线下方，也即 $f(x)\le f(0)+[f(1)-f(0)]x=2x-1$，$x\in(0,1)$，因此 $\int_0^1 f(x)dx<\int_0^1(2x-1)dx=0$。同理 $f(x)\le f(0)+[f(0)-f(-1)]x$，$x\in(-1,0)$。因此 $\int_{-1}^{0}f(x)dx<\int_{-1}^{0}(-2x-1)dx=0$，从而 $\int_{-1}^{1}f(x)dx<0$，故选（B）。

（3）设数列 $\{x_n\}$ 收敛，则（　）

（A）当 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n=0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$　　（B）当 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+\sqrt{|x_n|})=0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$

（C））当 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+x_n^2)=0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$　　（D）当 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+\sin x_n)=0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$

**【答案】**（D）

【解析】设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n = \sin a$，可知当 $\sin a = 0$，也即 $a = k\pi$，$(k = 0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 时，都有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n = 0$，故（A）错误。

$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + \sqrt{|x_n|}) = a + \sqrt{|a|}$，可知当 $a + \sqrt{|a|} = 0$，也即 $a = 0$ 或者 $a = -1$ 时，都有 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + \sqrt{|x_n|}) = 0$，故（B）错误。

$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + {x_n}^2) = a + a^2$，可知当 $a + a^2 = 0$，也即 $a = 0$ 或者 $a = -1$ 时，都有 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + {x_n}^2) = 0$，故（C）错误。

$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + \sin x_n) = a + \sin a$，而要使 $a + \sin a = 0$ 只有 $a = 0$，故（D）正确。

（4）微分方程 $y'' - 4y' + 8y = e^{2x}(1 + \cos 2x)$ 的特解可设为 $y^* =$（ ）

（A） $Ae^{2x} + e^{2x}(B\cos 2x + C\sin 2x)$　　（B） $Axe^{2x} + e^{2x}(B\cos 2x + C\sin 2x)$

（C） $Ae^{2x} + xe^{2x}(B\cos 2x + C\sin 2x)$　　（D） $Axe^{2x} + xe^{2x}(B\cos 2x + C\sin 2x)$

【答案】（C）

【解析】齐次方程的特征方程为 $\lambda^2 - 4\lambda + 8 = 0$，特征根为 $\lambda = 2 \pm 2i$，将非齐次方程拆分为：

$y'' - 4y' + 8y = e^{2x} \cdots (1)$ 与 $y'' - 4y' + 8y = e^{2x}\cos 2x \cdots (2)$。



方程 $(1)$ 的特解可以设为 $y_1^* = Ae^{2x}$，方程 $(2)$ 的特解可以设为 $y_2^* = xe^{2x}(B\cos 2x + C\sin 2x)$，由解的叠加原理可知：方程 $(1)$ 饿任意解和方程 $(2)$ 的任意解之和即为原方程的解，则原方程的特解可以设为 $y_2^* = Ae^{2x} + xe^{2x}(B\cos 2x + C\sin 2x)$，故选（C）。

（5）设 $f(x,)$ 具有一阶偏导数，且对任意的 (x, y)，都有 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} > 0, \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} < 0$，则（ ）

（A） $f(0,0) > f(1,1)$　　（B） $f(0,0) < f(1,1)$

（C） $f(0,1) > f(1,0)$　　（D） $f(0,1) < f(1,0)$

【答案】（D）

【解析】由于 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} > 0$，可知 $f(x,y)$ 关于单调 $x$ 递增，故 $f(0,1) < f(1,1)$。又由于

$\dfrac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial y}<0$，可知 $f\left(x,y\right)$ 关于单调 $y$ 递减，故 $f\left(1,1\right)<f\left(1,0\right)$，从而 $f\left(0,1\right)<f\left(1,0\right)$，故选（D）。

（6）甲乙两人赛跑，计时开始时，甲在乙前方 10（单位：m）处，图中实线表示甲的速度曲线 $v=v_1(t)$（单位：m/s），虚线表示乙的速度曲线 $v=v_2(t)$（单位：m/s），三块阴影部分的面积的数值依次为 10,20,3. 计时开始后乙追上甲的时刻记为（　）

（A）$t_0=10$　　（B）$15<t_0<20$

（C）$t_0=25$　　（D）$t_0>25$

**【答案】**（C）

**【解析】** 从 0 到 $t_0$ 时刻，甲乙的位移分别为 $\int_0^{t_0}V_1(t)dt$ 与 $\int_0^{t_0}V_2(t)dt$ 要使乙追上甲，则有 $\int_0^{t_0}[V_2(t)-V_1(t)]dt$，由定积分的几何意义可知，$\int_0^{25}[V_2(t)-V_1(t)]dt=20-10=10$，可知 $t_0=25$，故选（C）。

（7）设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 为可逆矩阵，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$，则

$A\left(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\right)$（　）

（A）$\alpha_1+\alpha_2$　　（B）$\alpha_2+2\alpha_3$　　（C）$\alpha_2+\alpha_3$　　（D）$\alpha_1+2\alpha_2$

**【答案】**（B）

**【解析】**

$$A(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^{-1}A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}=\alpha_2+2\alpha_3$$

（8）已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&0&1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，$\mathrm{C}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}$则（　）

（A）$\boldsymbol{A}$ 与 C 相似，　$\boldsymbol{B}$ 与 C 相似
（B）$\boldsymbol{A}$ 与 C 相似，　$\boldsymbol{B}$ 与 C 不相似
（C）$\boldsymbol{A}$ 与 C 不相似，　$\boldsymbol{B}$ 与 C 相似
（D）$\boldsymbol{A}$ 与 C 不相似，　$\boldsymbol{B}$ 与 C 不相似

**【答案】**（B）

**【解析】**由 $(\lambda E-A)=0$ 可知 $A$ 的特征值为 2, 2, 1。

$\because 3-r(2E-A)=1$。$\therefore$ $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化，且 $A\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$

由 $\left|\lambda E-B\right|=0$ 可知 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 2, 2, 1。

$\because 3-r(2E-B)=2$。$\therefore \boldsymbol{B}$ 不可相似对角化，显然 $\boldsymbol{C}$ 可相似对角化，

$\therefore A\sim C$。且 $\boldsymbol{B}$ 不相似于 $\boldsymbol{C}$。

**二、填空题：9–14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.**

（9）曲线 $y=x\left(1+\arcsin\dfrac{2}{x}\right)$ 的斜渐近线方程为______。

**【答案】** $y=x+2$。

【解析】 $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\left(1+\arcsin\dfrac{2}{x}\right)}{x}=1$， $b=\lim\limits_{x\to\infty}x\left(1+\arcsin\dfrac{2}{x}\right)-x=2$，则斜渐近线方程为

$y=x+2$。

（10）设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=t+e^t\\ y=sint\end{cases}$ 确定，则 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}=$_______。

【答案】 $-\dfrac{1}{8}$。

【解析】$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}=\dfrac{\cos t}{1+e^t}$， $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{\left(\dfrac{\cos t}{1+e^t}\right)'}{1+e^t}=\dfrac{\dfrac{-\sin t(1+e^t)-e^t\cos t}{(1+e^t)^2}}{1+e^t}=\dfrac{-\sin t-e^t\sin t-e^t\cos t}{(1+e^t)^3}$

$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}=-\dfrac{1}{8}$。

（11） $\int_0^{+\infty}\dfrac{\ln(1+x)}{(1+x)^2}dx=$_______。

【答案】1。

【解析】 $\int_0^{+\infty}\dfrac{\ln(1+x)}{(1+x)^2}dx=\int_0^{+\infty}\ln(1+x)d\left(-\dfrac{1}{1+x}\right)$

$=-\dfrac{1}{1+x}\ln(1+x)\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\left(\dfrac{1}{1+x}\right)^2dx$

$=-\dfrac{1}{1+x}\ln(1+x)\Big|_0^{+\infty}-\dfrac{1}{1+x}\Big|_0^{+\infty}$

$=0+1=1$。

（12）设函数 $f(x,y)$ 具有一阶连续偏导数，且 $df(x,y)=ye^ydx+x(1+y)e^ydy$， $f(0,0)=0$，则

$f(x,y)=$_______。

【答案】 $xye^y$。

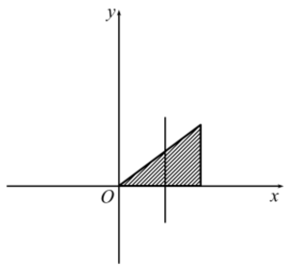
【解析】由题可知， $f_x'=ye^y$， $f_y'=x(1+y)e^y$， $f(x,y)=\int ye^ydx=xye^y+c(y)$，

$f_y'=xe^y+xye^y+c'(y)=xe^y+xye^y$，即 $c'(y)=0$，即 $c(y)=c$，$\because f(0,0)=0$，故 $c=0$，即 $f(x,y)=xye^y$。

（13） $\int_0^1dy\int_y^1\dfrac{\tan x}{x}dx=$_______。

【答案】$-\ln(\cos 1)$。

【解析】$\int_0^1 dy\int_y^1 \frac{\tan x}{x}dx=\int_0^1 dx\int_y^1 \frac{\tan x}{x}dy=\int_0^1 \tan x dx=-\ln|\cos x|\Big|_0^1=-\ln\cos 1+\ln\cos 0=-\ln\cos 1$。




（14）设矩阵 $A=\begin{pmatrix}4&1&-2\\1&2&a\\3&1&-1\end{pmatrix}$ 的一个特征向量为 $\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$，则 $a=$_______。

【答案】$-1$。

【解析】因为 $A\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3+2a\\2\end{pmatrix}$，即 $3+2a=1$，可得 $a=-1$。

**三、解答题：15—23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.**

(15)(本题满分 10 分)求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x\sqrt{x-t}e^t dt}{\sqrt{x^3}}$。

【解析】先对变上限积分 $\int_0^x\sqrt{x-t}e^t dt$ 作变量代换 $u=x-t$，得

$$\int_0^x\sqrt{x-t}e^t dt=\int_x^0\sqrt{u}e^{x-u}(-du)=e^x\int_0^x\sqrt{u}e^{-u}du$$

则由洛必达法则可知：

$$原式=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x\int_0^x\sqrt{u}e^{-u}du+\sqrt{x}}{\frac{3}{2}\sqrt{x}}$$

$$=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x\sqrt{u}e^{-u}du}{\sqrt{x}e^{-x}}+\frac{2}{3}$$

$$=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}e^{-x}}{-\sqrt{x}e^{-x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{-x}}+\frac{2}{3}$$

$$=\frac{2}{3}\lim_{x\to0^+}\frac{xe^{-x}}{-xe^{-x}+\frac{1}{2}e^{-x}}+\frac{2}{3}$$

$$\frac{2}{3}$$

(16)(本题满分 10 分)设函数 $f(u,v)$ 具有 2 阶连续偏导数，$y=f(e^x,\cos x)$，求 $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=0}$，$\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{x=0}$。

**【解析】**由复合函数求导法则，可得：

$$\frac{dy}{dx}=f_1'e^x+f_2'(-\sin x)$$

故 $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=0}=f_1'(1,1)$

进一步地：

$$\frac{d^2y}{dx^2}=e^x f_1'+e^x\frac{d(f_1')}{dx}-\cos xf_2'-\sin x\frac{d(f_2')}{dx}$$

$$=e^x f_1'+e^x(f_{11}''e^x-f_{12}''\sin x)-\cos xf_2'-\sin x(f_{21}''e^x-f_{22}''\sin x)$$

$$=e^x f_1'-\cos xf_2'+e^{2x}f_{11}''-2e^x\sin xf_{21}''+\sin^2 xf_{22}''$$

故 $\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{x=0}=f_1'(1,1)-f_2'(1,1)+f_{11}''(1,1)$

(17) (本题满分 10 分)求 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\ln(1+\frac{k}{n})$。

**【解析】**由定积分的定义式可知

原式 $=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 x\ln(1+x)dx$，再由分部积分法可知：

$$\int_0^1 x\ln(1+x)dx=\frac{1}{2}\int_0^1\ln(1+x)d\left(x^2-1\right)=\frac{x^2-1}{2}\ln(1+x)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x^2-1}{2}d\ln(1+x)$$
$$=-\frac{1}{2}\int_0^1(x-1)dx=-\frac{1}{4}(x-1)^2\Big|_0^1=\frac{1}{4}$$

(18) (本题满分 10 分)已知函数 $y(x)$ 由方程 $x^3+y^3-3x+3y-2=0$ 确定，求 $y(x)$ 的极值。

**【解析】**等式两边同时对 $x$ 求导可得，

$3x^2+3y^2y'-3+3y'=0\cdots\cdots(1)$

令 $y'=0$ 可得 $3x^2-3=0$，故 $x=\pm1$。由极限的必要条件可知，函数的极值之梦能取在 $x=-1$ 与 $x=1$ 处，为了检验该点是否为极值点，下面来计算函数的二阶导数，对(1)式两边同时求导可得，

$6x+6y\left(y'\right)^2+3y^2y''+3y''=0\cdots\cdots(2)$

当 $x=1$ 时，$y=1$，将 $x=1,y=1,y'=0$ 代入（2）式可得 $y''=-2$，故 $y\left(1\right)=1$ 是函数的极大值。

当 $x=-1$ 时，$y=0,y'=0$，代入（2）式可得 $y''=2$，故 $y\left(-1\right)=0$ 是函数的极小值。

(19)（本题满分 11 分）设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上具有二阶导数，且 $f(1)>0$，$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}<0$。

证明：（Ⅰ）方程 $f(x)=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在一个实根。

（Ⅱ）方程 $f(x)f''(x)+\left(f'(x)\right)^2=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在两个不同实根。

**【证明】**（I）由于 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}<0$，则由保号性可知：$\exists\delta>0$，使得当 $x\in(0,\delta)$ 时，$\dfrac{f(x)}{x}<0$，也即 $f(x)<0$。

又由于 $f(1)>0$，则由零点存在定理可知，$f(x)=0$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个实根。

（II）令 $F(x)=f(x)f'(x)$。由 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}<0$ 可知 $f(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}\cdot x=0$。

又由（I）可知：$\exists x_0\in(0,1)$ 使得 $f(x_0)=0$。

由罗尔定理可知：$\exists\xi_1\in(0,x_0)$ 使 $f'(\xi_1)=0$，从而 $F(0)=F(\xi_1)=F(x_0)=0$。

再由罗尔定理可知：$\exists\xi_2\in(0,\xi_1)$，$\xi_3\in(\xi_1,x_0)$ 使得 $F'(\xi_2)=F'(\xi_3)=0$。

也即 $F'(x)=f(x)f''(x)+[f'(x)]^2=0$ 在 $(0,x_0)\subset(0,1)$ 内有两个不同的实根。

（20）（本题满分 10 分）已知平面区域 $D=\{(x,y)\ x^2+y^2\le 2y\}$，计算二重积分 $\iint\limits_D (x+1)^2dxdy$ 。

【解析】令 $D_1=\{(x,y)\ x^2+(y-1)^2\le 1,\ x\ge 0\}$

$$\iint\limits_{D_1} x^2dxdy=\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{2\sin\theta}r^3\cos^2\theta dr$$

$$=4\int_0^{\pi}\sin^4\theta\cos^2\theta d\theta$$

$$=\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2\theta}{2}\sin^2 2\theta d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin^2 2\theta d\theta-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos 2\theta\sin^2 2\theta d\theta$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\pi}(1-\cos 4\theta)d\theta$$

$$=\frac{\pi}{4}$$

（21）（本题满分 11 分）设 $y(x)$ 是区间 $\left(0,\frac{3}{2}\right)$ 内的可导函数，且 $y(1)=0$，点 $P$ 是曲线 $l:y(x)$ 上的任意一点。$l$ 在 $P$ 处的切线与 $y$ 轴相交于点 $\left(0,Y_p\right)$，法线与 $x$ 轴相交于点 $\left(X_p,0\right)$，若 $X_p=Y_p$，求 $l$ 上点的坐标 $(x,y)$ 满足的方程。

【解析】设 $p(x,y(x))$ 的切线为 $Y-y(x)=y'(x)(X-x)$，令 $X=0$ 得，$Y_p=y(x)-y'(x)x$，法线

$Y-y(x)=-\frac{1}{y'(x)}(X-x)$，令 $Y=0$ 得，$X_p=x+y(x)y'(x)$。由 $Y_p=X_p$ 得，

$y-xy'(x)=x+yy'(x)$，即 $\left(\frac{y}{x}+1\right)y'(x)=\frac{y}{x}-1$。令 $\frac{y}{x}=u$，则 $y=ux$，$\frac{dy}{dx}=x\frac{du}{dx}+u$，那么，

$(u+1)\left(x\frac{du}{dx}+u\right)=(u-1)$，即 $\int\frac{u+1}{u^2+1}du=-\int\frac{dx}{x}$，解得，$\arctan\frac{y}{x}+\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)=0$。

（22）（本题满分 11 分）设3阶矩阵 $A=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)$ 有3个不同的特征值，且 $\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2$。

（I）证明：$r(A)=2$

（II）若 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，求方程组 $Ax=\beta$ 的通解。

（I）**【证明】**因为 $A$ 有三个不同的特征值，所以 $A\neq O$，$r(A)\geq 1$，假若 $r(A)=1$ 时，0 是二重的，故不符合，那么 $r(A)\geq 2$，又因为 $\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2$，所以 $r(A)\leq 2$，即 $r(A)=2$。

（II）**【解析】**因为 $r(A)=2$，所以 $Ax=0$ 的基础解析只有一个解向量，又因为 $\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2$，即 $\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3=0$，即基础解系的解向量为 $(1,2,-1)^T$，又因为 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，故 $Ax=\beta$ 的特解为 $(1,1,1)^T$，所以 $Ax=\beta$ 的通解为 $k(1,2,-1)^T+(1,1,1)^T$，$k\in R$。



（23）（本题满分 11 分）设二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-x_2^2+ax_3^2+2x_1x_2-8x_1x_3+2x_2x_3$$

在正交变换 $X=QY$ 下的标准型 $\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2$，求 $a$ 的值及一个正交矩阵 $Q$。

**【解析】**二次型对应的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}2&1&-4\\1&-1&1\\-4&1&a\end{pmatrix}$，因为标准型为 $\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2$，所以 $|A|=0$，从而 $a+4=6$，即 $a=2$，代入得 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&4\\-1&\lambda+1&-1\\4&-1&\lambda-2\end{vmatrix}=0$，解得 $\lambda=0,-3,6$；

当 $\lambda=0$ 时，$0E-A=\begin{pmatrix}-2&-1&4\\-1&1&-1\\4&-1&-2\end{pmatrix}$，化简得 $\begin{pmatrix}-1&1&-1\\0&-1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$，对应的特征向量为 $k_1(1,2,1)^T$；

当 $\lambda=-3$ 时，$-3E-A=\begin{pmatrix}-5 & -1 & 4\\ -1 & -2 & -1\\ 4 & -1 & -5\end{pmatrix}$，化简得 $\begin{pmatrix}-1 & -2 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，对应的特征向量为 $k_2(1,-1,1)^T$；

当 $\lambda=6$ 时，$6E-A=\begin{pmatrix}4 & -1 & 4\\ -1 & 7 & -1\\ 4 & -1 & 4\end{pmatrix}$，化简得 $\begin{pmatrix}-1 & 7 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，对应的特征向量为 $k_3(-1,0,1)^T$；

从而正交矩阵 $Q=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6}\\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{3}\\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6}\end{pmatrix}$。