2018 全国研究生入学考试考研数学二试题

本试卷满分 150，考试时间 180 分钟

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的.

1. 若 $\lim\limits_{x\to 0}(e^x+ax^2+bx)^{\frac{1}{x^2}}=1$，则（）

（A）$a=\dfrac{1}{2},b=-1$　　（B）$a=-\dfrac{1}{2},b=-1$

（C）$a=\dfrac{1}{2},b=1$　　（D）$a=-\dfrac{1}{2},b=1$

2.下列函数中，在 $x=0$ 处不可导的是

（A） $f(x)=|x|\sin|x|$　　（B） $f(x)=|x|\sin\sqrt{|x|}$

（C） $f(x)=\cos|x|$　　（D） $f(x)=\cos\sqrt{|x|}$

3. 设函数 $f(x)=\begin{cases}-1, x<0\\ 1, \ x\ge 0\end{cases}$， $g(x)=\begin{cases}2-ax, x\le -1\\ x, -1<x<0\\ x-b, x\ge 0\end{cases}$，若 $f(x)+g(x)$ 在 R 上连续，则

（A） $a=3,b=1$　　（B） $a=3,b=2$

（C） $a=-3,b=1$　　（D） $a=-3,b=2$

4. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $\int_0^1 f(x)dx=0$，则

（A） $f'(x)<0$ 时， $f(\dfrac{1}{2})<0$　　（B） $f''(x)<0$ 时， $f(\dfrac{1}{2})<0$

（C） $f'(x)>0$ 时， $f(\dfrac{1}{2})<0$　　（D） $f''(x)>0$ 时， $f(\dfrac{1}{2})<0$

5. 设 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{(1+x)^2}{1+x^2}dx$， $N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1+x}{e^x}dx$， $K=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sqrt{\cos x})dx$ ，则

（A） $M>N>K$　　（B） $M>K>N$

（C） $K>M>N$　　（D） $K>N>M$

6. $\int_{-1}^{0}dx\int_{-x}^{2-x^2}(1-xy)dy+\int_0^1 dx\int_x^{2-x^2}(1-xy)dy=$

微信公众号【最强考研】考研人的精神家园！

（A）$\frac{5}{3}$　　（B）$\frac{5}{6}$

（C）$\frac{7}{3}$　　（D）$\frac{7}{6}$

7.下列矩阵中，与矩阵$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$相似的为

（A）$\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$　　（B）$\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$

（C）$\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$　　（D）$\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

8. 设 A，B 为 n 阶矩阵，记 $r(x)$ 为矩阵 X 的秩，$(X\ Y)$表示分块矩阵，则

（A）$r(A\ AB)=r(A)$　　（B）$r(A\ BA)=r(A)$

（C）$r(A\ B)=\max\{r(A),r(B)\}$　　（D）$r(A\ B)=r(A^TB^T)$

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分.

微信公众号【最强考研】考研人的精神家园！

9. $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2[\arctan(x+1)-\arctan x]=$______。

10. 曲线 $y=x^2+2\ln x$ 在其拐点处的切线方程是______。

11. $\int_5^{+\infty}\frac{1}{x^2-4x+3}dx=$______。

12. 曲线$\begin{cases}x=\cos^3 t\\ y=\sin^3 t\end{cases}$，在 $t=\frac{\pi}{4}$ 对应点处的曲率为______。

13. 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $\ln z+e^{z-1}=xy$ 确定，则 $\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(2,\frac{1}{2})}=$______。

14. 设 A 为 3 阶矩阵，α_1，α_2，α_3 为线性无关的向量组，若

$A\alpha_1=2\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，$A\alpha_2=\alpha_2+2\alpha_3$，$A\alpha_3=-\alpha_2+\alpha_3$，则 A 的实特征值为______。

三、解答题：**15～23 小题，共 94 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.**

15.（本题满分 10 分）求不定积分 $\int e^{2x}\arctan\sqrt{e^{x}-1}dx$.

16.（本题满分 10 分）已知连续函数 $f(x)$ 满足 $\int_0^x f(t)dt+\int_0^x tf(x-t)dt=ax^2$

（1）求 $f(x)$.

（2）若 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上的平均值为 1，求 a 的值.

17.（本题满分 10 分）

设平面区域 D 由曲线 $\begin{cases} x=t-\sin t \\ y=l-\cos t \end{cases}(0\le t\le 2\pi)$ 与 x 轴围成，计算二重积分 $\iint\limits_D (x+2y)dxdy$.

18.（本题满分 10 分）已知常数 $k\ge\ln 2-1$，证明：$(x-1)(x-\ln^2 x+2k\ln x-1)\ge 0$.

19.（本题满分 10 分）将长为 2m 的铁丝分成三段，依次围成圆、正方形与正三角形，三个图形的面积之和是否存在最小值？若存在，求出最小值.

20.（本题满分 11 分）

已知曲线 L：$y=\frac{4}{9}x^2(x\ge 0)$，点 $O(0,0)$，点 $A(0,1)$.设 P 是 L 上的动点，S 是直线 OA 与直线 AP 及曲线 L 所围图形的面积，若 P 运动到点（3,4）时沿 χ 轴正向的速度是 4，求此时 S 关于时间 t 的变化率.

21.（本题满分 11 分）

设数列 $\{\chi_n\}$ 满足：$x_1>0$，$x_n e^{x_{n+1}}=e^{x_n}-1(n=1,2......)$，证明 $\{x_n\}$ 收敛，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

22. （本小题 11 分）

设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2+x_3)^2+(x_2+x_3)^2+(x_1+\alpha x_3)^2$，其中 α 为是参数。

（1）求 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 的解。

（2）求 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的规范形。

23.（本题满分 11 分）

已知 a 是常数，且 $A=\begin{bmatrix}1&2&a\\1&3&0\\2&7&-a\end{bmatrix}$ 可经初等列变化为矩阵 $B=\begin{bmatrix}1&a&2\\0&1&1\\-1&1&1\end{bmatrix}$。

(1) 求 a；

(2) 求满足 AP=B 的可逆矩阵 P.

微信公众号【最强考研】考研人的精神家园!

微信公众号【最强考研】考研人的精神家园！