2016 全国研究生入学考试考研数学二解析

本试卷满分 150，考试时间 180 分钟

一、选择题： 1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在**答题纸**指定位置上.

（1）设 $a_1=x\left(\cos\sqrt{x}-1\right),a_2=\sqrt{x}\ln\left(1+\sqrt[3]{x}\right),a_3=\sqrt[3]{x+1}-1$，当 $x\to0^+$ 时，以上 3 个无穷小量按照从低阶到高阶的排序是（　）

$(A)\ a_1,a_2,a_3$　　$(B)\ a_2,a_3,a_1$　　$(C)\ a_2,a_1,a_3$　　$(D)\ a_3,a_2,a_1$

【答案】：B

【解析】 $a_1\sim-\dfrac{1}{2}x^2$，$a_2\sim x^{\frac{5}{6}}$，$a^3\sim\dfrac{1}{3}x$，则 a_1,a_2,a_3 从低阶到高阶排列应为 a_2,a_3,a_1。

（2）已知函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}2\left(x-1\right),x<1\\ \ln x,x\ge1\end{cases}$，则 $f\left(x\right)$ 的一个原函数是（　）

$(A)\ F(x)=\begin{cases}\left(x-1\right)^2,x<1\\ x\left(\ln x-1\right),x\ge1\end{cases}$　　$(B)\ F(x)=\begin{cases}\left(x-1\right)^2,x<1\\ x\left(\ln x+1\right)-1,x\ge1\end{cases}$

$(C)\ F(x)=\begin{cases}\left(x-1\right)^2,x<1\\ x\left(\ln x+1\right)+1,x\ge1\end{cases}$　　$(D)\ F(x)=\begin{cases}\left(x-1\right)^2,x<1\\ x\left(\ln x-1\right)+1,x\ge1\end{cases}$

【答案】：(D)

【解析】：由于原函数一定是连续，可知函数 $F\left(x\right)$ 在 $x=1$ 连续，而 (A)、(B)、(C) 中的函数在 $x=1$ 处均不连续，故选 (D)。

（3）反常积分 $(1)\int_{-\infty}^{0}\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx$ 与 $(2)\int_{0}^{+\infty}\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx$ 的敛散性为（　）

(A)　(1) 收敛，(2) 收敛　　(B)　(1) 收敛，(2) 发散

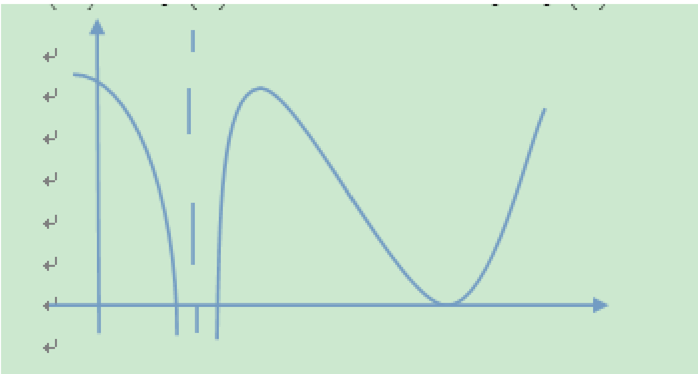
(C)　(1) 发散，(2) 收敛　　(D)　(1) 发散，(2) 发散

【答案】 B

【解析】 $\int_{-\infty}^{0}\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx=-e^{\frac{1}{x}}\Big|_{-\infty}^{0}=1$，故 (1) 收敛。

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx=-e^{\frac{1}{x}}\Big|_0^{+\infty}，由于\lim_{x\to0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty，故(2)发散$$

（4）设函数 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，其导数的图像，如图所示，则



（A）函数 $f(x)$ 有 2 个极值点，曲线 $y=f(x)$ 有 2 个拐点

（B）函数 $f(x)$ 有 2 个极值点，曲线 $y=f(x)$ 有 3 个拐点

（C）函数 $f(x)$ 有 3 个极值点，曲线 $y=f(x)$ 有 1 个拐点

（D）函数 $f(x)$ 有 3 个极值点，曲线 $y=f(x)$ 有 2 个拐点

【答案】:（B）

【解析】由图可知曲线有两个点左右两边导数符号不一样，有三个点左右两边导函数单调性不一样，故有 2 个极值点，3 个拐点.

（5）设函数 $y=f_i(x)\ (i=1,2)$ 具有二阶连续导数，且 $f_i''(x)<0\ (i=1,2)$，若两条曲线 $y=f_i(x)$ $(i=1,2)$ 在点 (x_0,y_0) 处具有公切线 $y=g(x)$，且在该点处曲线 $y=f_1(x)$ 的曲率大于曲线 $y=f_2(x)$ 的曲率，则在点 x_0 的某个邻域内，有（　　）

$(A)\ f_1(x)\le f_2(x)\le g(x)$　　　　$(B)\ f_2(x)\le f_1(x)\le g(x)$

$(C)\ f_1(x)\le g(x)\le f_2(x)$　　　　$(D)\ f_2(x)\le g(x)\le f_1(x)$

【答案】A

【解析】：由于 $f_i''(x)<0$ 可知，$f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 均为凸函数，可知 $y=f_1(x)$，$y=f_2(x)$ 的图像

均在其切线下方，故 $f_1(x), f_2(x) \le g(x)$，由曲率公式 $k_1 = \dfrac{-f_1''(x)}{\left[1+(f_1'(x))^2\right]^{\frac{3}{2}}}, k_2 = \dfrac{-f_2''(x)}{\left[1+(f_2'(x))^2\right]^{\frac{3}{2}}}$，

由 $k_1 > k_2$ 可知， $f_1''(x_0) < f_2''(x_0)$，则 $f_1(x) < f_2(x)$.

（6）已知函数 $f(x,y) = \dfrac{e^x}{x-y}$，则

（A） $f_x' - f_y' = 0$　　（B） $f_x' + f_y' = 0$　　（C） $f_x' - f_y' = f$　　（D） $f_x' + f_y' = f$

【答案】：（D）

【解析】 $f_x' = \dfrac{e^x}{x-y} - \dfrac{e^x}{(x-y)^2}, f_y' = \dfrac{e^x}{(x-y)^2}, f_x' + f_y' = f$.

（7）设 A, B 是可逆矩阵，且 A 与 B 相似，则下列结论错误的是（　）

(A) A^T 与 B^T 相似　　(B) A^{-1} 与 B^{-1} 相似

(C) $A+A^T$ 与 $B+B^T$ 相似　　(D) $A+A^{-1}$ 与 $B+B^{-1}$ 相似

【答案】：(C)

【解析】：因为 A 与 B 相似，所以存在可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP = B$，两端取转置与逆可得：$P^TA^T\left(P^T\right)^{-1} = B^T$，$P^{-1}A^{-1}P = B^{-1}$，$P^{-1}\left(A+A^{-1}\right)P = B+B^{-1}$，可知 (A)、(B)、(D) 均正确，故选择 (C)。

（8）设二次型 $f(x_1,x_2,x_3) = a\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)+2x_1x_2+2x_2x_3+2x_1x_3$ 的正负惯性指数分别为 $1,2$，则

（A） $a > 1$　　（B） $a < -2$　　（C） $-2 < a < 1$　　（D） $a = 1$ 或 $a = -2$

【答案】（C）

【解析】 二次型矩阵为 $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$，其特征值为 $a-1, a-1, a+2$，可知 $a-1<0, a+2>0$，即 $-2 < a < 1$，故选择（C）

二、填空题：9–14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

（9）曲线 $y=\dfrac{x^3}{1+x^2}+\arctan(1+x^2)$ 的斜渐近线方程为__________.

【答案】: $y=x+\dfrac{\pi}{2}$.

【解析】: 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{y}{x}=1$ 知 $k=1$，又

$$\lim_{n\to\infty} y-x=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x^3}{1+x^2}+\arctan(1+x^2)-x\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{-x}{1+x^2}+\lim_{n\to\infty}\arctan(1+x^2)=\frac{\pi}{2}$$

则斜渐近线方程为 $y=x+\dfrac{\pi}{2}$.

（10）极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\left(\sin\dfrac{1}{n}+2\sin\dfrac{2}{n}+\cdots+n\sin\dfrac{n}{n}\right)=$__________.

【答案】： $-\cos1+\sin1$

【解析】 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\left(\sin\dfrac{1}{n}+2\sin\dfrac{2}{n}+\cdots+n\sin\dfrac{n}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{i=1}^{n}i\sin\dfrac{i}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{i}{n}\sin\dfrac{i}{n}$

$$=\int_0^1 x\sin x dx=-\int_0^1 xd\cos x=-x\cos x\Big|_0^1+\int_0^1\cos xdx=-\cos1+\sin1$$

（11）以 $y=x^2-e^x$ 和 $y=x^2$ 为特解的一阶非齐次线性微分方程为__________.

【答案】: $y'-y=2x-x^2$.

【解析】: 由线性微分方程解的性质可知 $x^2-(x^2-e^x)=e^x$ 为齐次方程的解， 可知齐次方程为 $y'-y=0$。非齐次方程为 $y'-y=f(x)$，将 $y=x^2$ 代入可得： $f(x)=2x-x^2$，故方程为 $y'-y=2x-x^2$.

（12）已知函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且 $f(x)=(x+1)^2+2\int_0^x f(t)dt$，则当 $n\geq2$ 时， $f^{(n)}(0)=$ __________.

【答案】: $5\cdot2^{n-1}$

【解析】: $f(0)=1, f'(x)=2(x+1)+2f(x)$，则 $f'(0)=4, f''(x)=2+2f'(x)$，则 $f''(0)=10$.

两边同时求 $n-2$ 阶导可得 $f^{(n)}(x)=2f^{(n-1)}(x)$.则 $f^{(n)}(0)=2f^{(n-1)}(0)=2^{n-2}f''(0)=5\cdot2^{n-1}$。

（13）已知动点 P 在曲线 $y=x^3$ 上运动，记坐标原点与点 P 间的距离为 l.若点 P 的横坐标对时间的

变化率为常数 v_0，则当点 P 运动到点 $(1,1)$ 时，l 对时间的变化率是__________.

【答案】：$2\sqrt{2}v_0$

【解析】：$l=\sqrt{x^2+x^6},\dfrac{dl}{dx}=\dfrac{x+3x^5}{\sqrt{x^2+x^6}},\dfrac{dl}{dt}=\dfrac{dl}{dx}\cdot\dfrac{dx}{dt}=v_0\dfrac{x+3x^5}{\sqrt{x^2+x^6}}$

则 $\dfrac{dl}{dx}\Big|_{x=1}=2\sqrt{2}v_0$.

（14）设矩阵 $\begin{bmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 等价，则 $a=$__________.

【解析】 $r\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\to r\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}=2$,则 $r\begin{bmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{bmatrix}=2$,且 $\begin{vmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{vmatrix}=0$，则 a=2

三、解答题：15—23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15)（本题满分 10 分）

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos 2x+2x\sin x\right)^{\frac{1}{x^4}}$

【解析】由重要极限得，原式为

$$e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos 2x+2x\sin x-1}{x^4}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\frac{1}{2}(2x)^2+\frac{1}{24}(2x)^4+2x\left(x-\frac{1}{6}x^3\right)-1+o(x^4)}{x^4}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{3}x^4+o(x^4)}{x^4}}=e^{\frac{1}{3}}$$

（16）（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)=\int_0^1\left|t^2-x^2\right|dt\quad(x>0)$，求 $f'(x)$，并求 $f(x)$ 的最小值。

【解析】：$0<x<1$ 时，

$f(x)=\int_0^x\left(x^2-t^2\right)dt+\int_x^1\left(t^2-x^2\right)dt=\dfrac{4}{3}x^3-x^2+\dfrac{1}{3}$

当 $x\geq 1$ 时，$f(x)=\int_0^1\left(x^2-t^2\right)dt=x^2-\dfrac{1}{3}$

所以，$f(x)=\begin{cases}\dfrac{4}{3}x^3-x^2+\dfrac{1}{3},0\leq x<1\\ x^2-\dfrac{1}{3},x\geq 1\end{cases}$，从而 $f'(x)=\begin{cases}4x^2-2x,0<x<1\\ 2x,x>1\end{cases}$

由导数的定义可知 $f'(1)=2,$，可知 $f'(x)=\begin{cases}4x^2-2x,0\le x<1\\2x,x\ge 1\end{cases}$

易知，当 $x\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$时， $f'(x)<0$；当 $x\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$时， $f'(x)>0$；当 $x\in(1,+\infty)$时， $f'(x)>0$。

可知， $f(x)$的最小值为 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{4}$

（17）（本题满分 10 分）已知函数 $z=z(x,y)$由方程$\left(x^2+y^2\right)z+\ln z+2(x+y+1)=0$确定，求 $z=z(x,y)$的极值。

【解析】:

$$2xz+\left(x^2+y^2\right)\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x}+2=0\cdots(1)$$
$$2yz+\left(x^2+y^2\right)\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial y}+2=0\cdots(2)$$

令 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$ 得 $x=-\dfrac{1}{z},y=-\dfrac{1}{z}$代入方程可得， $\ln z-\dfrac{2}{z}+2=0$。解得， $z=1$，故 $x=y=-1$。

方程$(1),(2)$两边再同时求导，得

$$2z+2x\frac{\partial z}{\partial x}+2x\frac{\partial z}{\partial x}+\left(x^2+y^2\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{1}{z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{z}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0$$
$$2x\frac{\partial z}{\partial y}+2y\frac{\partial z}{\partial x}+\left(x^2+y^2\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{1}{z^2}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{z}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0$$
$$2z+2y\frac{\partial z}{\partial y}+2y\frac{\partial z}{\partial y}+\left(x^2+y^2\right)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\frac{1}{z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+\frac{1}{z}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

将 $x=-1,y=-1,z=1,\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$ 代入，可得

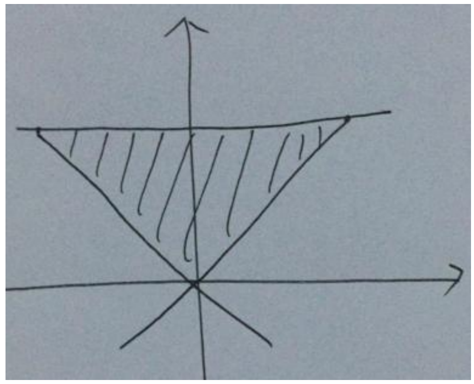
$$A=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(-1,1)}=-\frac{2}{3},B=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(-1,1)}=0,C=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(-1,1)}=-\frac{2}{3},$$

由 $AC-B^2>0,A<0$ 可知， Z（-1,-1）=1为 Z（x， y）极大值。

（18）（本题满分 11 分）

设 D 是由直线 $y=1, y=x, y=-x$ 围成的有界区域，计算二重积分 $\iint\limits_D \frac{x^2-xy-y^2}{x^2+y^2}dxdy$

【解析】：积分区域如图所示：



由对称性可知，

$\iint\limits_D \frac{x^2-xy-y^2}{x^2+y^2}dxdy = 2\iint\limits_{D_1}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}dxdy$（$D_1$ 为 D 在第一象限的部分）

$$\iint\limits_{D_1}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}dxdy=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{1}{\sin\theta}}\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)rdr$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\cot^2\theta-1\right)d\theta$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}$$

故 $\iint\limits_D \frac{x^2-xy-y^2}{x^2+y^2}dxdy=1-\frac{\pi}{2}$

（19）（本题满分 10 分）

已知 $y_1(x)=e^x, y_2(x)=u(x)e^x$ 是二阶微分方程 $(2x-1)y''-(2x+1)y'+2y=0$ 的两个解，若 $u(-1)=e, u(0)=-1$，求 $u(x)$，并写出该微分方程的通解。

【解析】：$y_2'=u'(x)e^x+u(x)e^x=\left(u(x)+u'(x)\right)e^x$，$y_2''=e^x\left(u''(x)+2u'(x)+u(x)\right)$

所以 $(2x-1)e^x\left(u''(x)+2u'(x)+u(x)\right)-(2x+1)\left(u'(x)+u(x)\right)e^x+2u(x)e^x=0$

所以 $(2x-1)u''(x)+(2x-3)u'(x)=0$

解得 $u(x)=C_1(2x+1)e^{-x}+C_2$，由于 $u(-1)=e, u(0)=-1$

所以 $u(x)=-(2x+1)e^{-x}$

原方程通解为 $y=C_1e^x-C_2(2x+1)$

（20）（本题满分 11 分）

设 D 是由曲线 $y=\sqrt{1-x^2}\ (0\le x\le 1)$ 与 $\begin{cases}x=\cos^3 t\\ y=\sin^3 t\end{cases}\left(0\le t\le\frac{\pi}{2}\right)$ 围成的平面区域，求 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积和表面积.

【解析】（1）$V=V_1-V_2$

V_1 为 $y=\sqrt{1-x^2}$ 绕 x 轴旋转一周所得旋转体体积；V_2 为 $\begin{cases}x=\cos^3 t\\ y=\sin^3 t\end{cases}\left(0\le t\le\dfrac{\pi}{2}\right)$ 绕 x 轴旋转一周所得旋转体体积。

$V_1=\dfrac{2}{3}\pi$

$V_2=-\int_0^1 \pi y^2dx=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\pi\sin^6 td\cos^3 t$

$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 t\cdot 3\cdot\cos^2 t\cdot\sin tdt$

$=3\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^7 t\left(1-\sin^2 t\right)dt$

$=3\pi\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^7 tdt-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^9 tdt\right]$

$=3\pi\left[\dfrac{6}{7}\cdot\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{2}{3}-\dfrac{8}{9}\cdot\dfrac{6}{7}\cdot\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{2}{3}\right]=\dfrac{16}{105}\pi$

所以 $V=V_1-V_2=\dfrac{2}{3}\pi-\dfrac{16}{105}\pi=\dfrac{18}{35}\pi$

（2）$S=S_1+S_2$，其中 S_1 分别为两函数绕 x 轴的旋转体侧面积

$S_1=2\pi$

$S_2=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 t\cdot 3\cdot\sin t\cdot\cos tdt=\dfrac{6}{5}\pi$

$S=2\pi+\dfrac{6}{5}\pi=\dfrac{16}{5}\pi$

（21）（本题满分 11 分）

已知 $f\left(x\right)$ 在 $[0,\dfrac{3\pi}{2}]$ 上连续，在 $\left(0,\dfrac{3\pi}{2}\right)$ 内是函数 $\dfrac{\cos x}{2x-3\pi}$ 的一个原函数 $f\left(0\right)=0$

（1）求 $f\left(x\right)$ 在区间 $[0,\dfrac{3\pi}{2}]$ 上的平均值；

（2）证明 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left(0,\dfrac{3\pi}{2}\right)$ 内存在唯一零点.

【答案】:（1）由题设可知 $f\left(x\right)=\int_0^x\dfrac{\cos t}{2t-3\pi},x\in\left(0,\dfrac{3}{2}\pi\right)$

$$\int_0^{\frac{3}{2}\pi} f(x)dx=\int_0^{\frac{3}{2}\pi} f(x)d\left(x-\frac{3}{2}\pi\right)=\left(x-\frac{3}{2}\pi\right)f(x)\Big|_0^{\frac{3}{2}\pi}-\int_0^{\frac{3}{2}\pi}\left(x-\frac{3}{2}\pi\right)\frac{\cos x}{2x-3\pi}dx=\frac{1}{2}$$

则 $f(x)$ 在区间 $\left[0,\frac{3}{2}\pi\right]$ 上的平均值 $k=\dfrac{\int_0^{\frac{3}{2}\pi} f(x)dx}{\frac{3}{2}\pi}=\dfrac{1}{3\pi}$

（2） $f'(x)<0,x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$， $f'(x)>0,x\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ 从而 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 单减，在 $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ 单增，注意到 $f(0)=0,\ f\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$

$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\int_0^{\frac{3}{2}\pi}\frac{\cos t}{2t-3\pi}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{2t-3\pi}dt+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\frac{\cos t}{2t-3\pi}dt>\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{-2\pi}dt+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\frac{\cos t}{-2\pi}dt=\frac{1}{2\pi}>0$$

从而 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{3}{2}\pi\right)$ 上有唯一实根

（22）（本题满分 11 分）设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&1&1-a\\1&0&a\\a+1&1&a+1\end{bmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix}0\\1\\2a-2\end{pmatrix}$，且方程组 $Ax=\beta$ 无解.

（1）求 a 的值.

（2）求方程组 $A^TAx=A^T\beta$ 的通解.

【解析】：（1） $(A\vdots\beta)\to\begin{pmatrix}1&1&1-a&\vdots&0\\0&-1&2a-1&\vdots&0\\0&0&-a^2+2a&\vdots&a-2\end{pmatrix}$，方程组 $Ax=\beta$ 无解，可知 $a=0$。

（2） $A^TA=\begin{pmatrix}3&2&2\\2&2&2\\2&2&2\end{pmatrix}$，　$A^T\beta=\begin{pmatrix}-1\\-2\\-2\end{pmatrix}$

$(A^TA\vdots A^T\beta)=\begin{pmatrix}3&2&2&\vdots&-1\\2&2&2&\vdots&-2\\2&2&2&\vdots&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&\vdots&1\\0&1&1&\vdots&-2\\0&0&0&\vdots&0\end{pmatrix}$，则通解为 $k\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix},k\in R$

（23）（本题满分 11 分）已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}0&-1&1\\2&-3&0\\0&0&0\end{bmatrix}$.

（1）求 A^{99}.

（2）设三阶矩阵 $B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 满足 $B^2=BA$，记 $B^{100}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，将 β_1,β_2,β_3 分别表示为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的线性组合。

【解析】：（1）$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & -1\\ -2 & \lambda+3 & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{vmatrix}=\left(\lambda^2+3\lambda+2\right)\lambda$，可知 A 的特征值为：$0,-1,-2$。

$A\to\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 2 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -\frac{3}{2}\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，则 0 的特征向量为 $\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}$

$A+E\to\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，则 -1 的特征向量为 $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

$A+2E\to\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，则 -2 的特征向量为 $\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$

令 $P=\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & 0 & 0\end{pmatrix}$，则 $P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}0 & & \\ & -1 & \\ & & -2\end{pmatrix}$，$A=P\Lambda P^{-1}$，

则有

$$A^{99}=P\Lambda^{99}P^{-1}=\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & & \\ & -1 & \\ & & -2^{99}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & \frac{1}{2}\\ 2 & -1 & -2\\ -1 & 1 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^{99}-2 & 1-2^{99} & 2-2^{98}\\ 2^{100}-2 & 1-2^{100} & 2-2^{99}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

（2）$B^2=BA$ 可知 $B^{100}=BA^{99}$，即

$$\begin{pmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \beta_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^{99}-2 & 1-2^{99} & 2-2^{98}\\ 2^{100}-2 & 1-2^{100} & 2-2^{99}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

则 $\beta_1=\left(2^{99}-2\right)\alpha_1+\left(2^{100}-2\right)\alpha_2$，$\beta_2=\left(1-2^{99}\right)\alpha_1+\left(1-2^{100}\right)\alpha_2$，$\beta_3=\left(2-2^{98}\right)\alpha_1+\left(2-2^{99}\right)\alpha_2$