2010 年全国硕士研究生入学统一考试

数学二试题参考答案

一、选择题

(1)【答案】 (B).

【解析】因为 $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x^2-1}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$ 有间断点 $x=0,\pm1$, 又因为

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0}x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}},$$

其中 $\lim\limits_{x\to0^+}x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}=1,\ \lim\limits_{x\to0^-}=x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}=-1$, 所以 $x=0$ 为跳跃间断点.

显然 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\dfrac{1}{2}\sqrt{1+1}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 所以 $x=1$ 为连续点.

而 $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}=\infty$, 所以 $x=-1$ 为无穷间断点, 故答案选择 B.

(2)【答案】 (A).

【解析】因 $\lambda y_1-\mu y_2$ 是 $y'+P(x)y=0$ 的解, 故 $(\lambda y_1-\mu y_2)'+P(x)(\lambda y_1-\mu y_2)=0$, 所以

$$\lambda\left[y_1'+P(x)y_1\right]-\mu\left[y_2'+p(x)y_2\right]=0,$$

而由已知 $y_1'+P(x)y_1=q(x),y_2'+P(x)y_2=q(x)$, 所以

$$(\lambda-\mu)q(x)=0, \qquad ①$$

又由于一阶次微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 是非齐的, 由此可知 $q(x)\neq0$, 所以 $\lambda-\mu=0$.

由于 $\lambda y_1+\mu y_2$ 是非齐次微分方程 $y'+P(x)y=q(x)$ 的解, 所以

$$(\lambda y_1+\mu y_2)'+P(x)(\lambda y_1+\mu y_2)=q(x),$$

整理得
$$\lambda\left[y_1'+P(x)y_1\right]+\mu\left[y_2'+P(x)y_2\right]=q(x),$$

即
$$(\lambda+\mu)q(x)=q(x), \text{由 } q(x)\neq0 \text{ 可知 } \lambda+\mu=1, \qquad ②$$

由①②求解得 $\lambda=\mu=\dfrac{1}{2}$，故应选(A).

(3)【答案】 (C).

【解析】因为曲线 $y=x^2$ 与曲线 $y=a\ln x(a\neq 0)$ 相切，所以在切点处两个曲线的斜率相同，

所以 $2x=\dfrac{a}{x}$，即 $x=\sqrt{\dfrac{a}{2}}$ $(x>0)$. 又因为两个曲线在切点的坐标是相同的，所以在 $y=x^2$ 上，

当 $x=\sqrt{\dfrac{a}{2}}$ 时 $y=\dfrac{a}{2}$；在 $y=a\ln x$ 上，$x=\sqrt{\dfrac{a}{2}}$ 时，$y=a\ln\sqrt{\dfrac{a}{2}}=\dfrac{a}{2}\ln\dfrac{a}{2}$.

所以 $\dfrac{a}{2}=\dfrac{a}{2}\ln\dfrac{a}{2}$. 从而解得 $a=2e$. 故答案选择(C).

(4)【答案】 (D).

【解析】 $x=0$ 与 $x=1$ 都是瑕点. 应分成

$$\int_0^1\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx+\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx,$$

用比较判别法的极限形式，对于 $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$，由于 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\dfrac{[\ln^2(1-x)]^{\frac{1}{m}}}{x^{\frac{1}{n}}}}{\dfrac{1}{x^{\frac{1}{n}-\frac{2}{m}}}}=1$.

显然，当 $0<\dfrac{1}{n}-\dfrac{2}{m}<1$，则该反常积分收敛.

当 $\dfrac{1}{n}-\dfrac{2}{m}\leq 0$，$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{[\ln^2(1-x)]^{\frac{1}{m}}}{x^{\frac{1}{n}}}$ 存在，此时 $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$ 实际上不是反常积分，故收敛.

故不论 m,n 是什么正整数，$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$ 总收敛. 对于 $\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$，取 $0<\delta<1$，不论 m,n 是什么正整数，

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{\dfrac{[\ln^2(1-x)]^{\frac{1}{m}}}{x^{\frac{1}{n}}}}{\dfrac{1}{(1-x)^{\delta}}}=\lim_{x\to 1^-}\ln^2(1-x)^{\frac{1}{m}}(1-x)^{\delta}=0,$$

所以 $\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$ 收敛，故选(D).

(5) 【答案】(B).

【解析】$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x'}{F_z'}=-\dfrac{F_1'\left(-\dfrac{y}{x^2}\right)+F_2'\left(-\dfrac{z}{x^2}\right)}{F_2'\cdot\dfrac{1}{x}}=\dfrac{F_1'\cdot\dfrac{y}{x}+F_2'\cdot\dfrac{z}{x}}{F_2'}=\dfrac{yF_1'+zF_2'}{xF_2'}$,

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'}{F_z'}=-\frac{F_1'\cdot\dfrac{1}{x}}{F_2'\cdot\dfrac{1}{x}}=-\frac{F_1'}{F_2'},$$

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{yF_1'+zF_2'}{F_2'}-\frac{yF_1'}{F_2'}=\frac{F_2'\cdot z}{F_2'}=z.$$

(6) 【答案】(D).

【解析】$\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{n+i}(\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{n}{n^2+j^2})=(\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{n}{n^2+j^2})(\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{n+i})$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{n^2+j^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{1+(\frac{j}{n})^2}=\int_0^1\frac{1}{1+y^2}dy,$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{n+i}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+(\frac{i}{n})}=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx,$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=\lim_{n\to\infty}(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n^2+j^2})(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i})$$

$$=(\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{n^2+j^2})\ (\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{n+i})$$

$$=(\int_0^1\frac{1}{1+x}dx)(\int_0^1\frac{1}{1+y^2}dy)=\int_0^1dx\int_0^1\frac{1}{(1+x)(1+y^2)}dy.$$

(7) 【答案】(A).

【解析】由于向量组I能由向量组II线性表示, 所以$r(\mathrm{I})\le r(\mathrm{II})$, 即

$$r(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)\le r(\beta_1,\cdots,\beta_s)\le s$$

若向量组I线性无关, 则$r(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)=r$, 所以$r=r(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)\le r(\beta_1,\cdots,\beta_s)\le s$, 即$r\le s$, 选(A).

(8) 【答案】(D).

【解析】: 设λ为A的特征值, 由于$A^2+A=O$, 所以$\lambda^2+\lambda=0$, 即$(\lambda+1)\lambda=0$, 这样A的

特征值只能为-1 或 0. 由于 A 为实对称矩阵，故 A 可相似对角化，即 $A\sim\Lambda$，

$r(A)=r(\Lambda)=3$，因此，$\Lambda=\begin{pmatrix}-1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$，即 $A\sim\Lambda=\begin{pmatrix}-1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$.

二、填空题

(9)【答案】$y=C_1e^{2x}+C_2\cos x+C_3\sin x$.

【解析】该常系数线性齐次微分方程的特征方程为 $\lambda^3-2\lambda^2+\lambda-2=0$，因式分解得

$$\lambda^2(\lambda-2)+(\lambda-2)=(\lambda-2)(\lambda^2+1)=0,$$

解得特征根为 $\lambda=2,\ \lambda=\pm i$，所以通解为 $y=C_1e^{2x}+C_2\cos x+C_3\sin x$.

(10) 【答案】$y=2x$.

【解析】因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{2x^3}{x^2+1}}{x}=2$，所以函数存在斜渐近线，又因为

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3}{x^2+1}-2x=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-2x^3-2x}{x^2+1}=0$，所以斜渐近线方程为 $y=2x$.

(11)【答案】$-2^n\cdot(n-1)!$.

【解析】由高阶导数公式可知 $\ln^{(n)}(1+x)=(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{(1+x)^n}$，

所以 $\ln^{(n)}(1-2x)=(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{(1-2x)^n}\cdot(-2)^n=-2^n\dfrac{(n-1)!}{(1-2x)^n}$，

即 $y^{(n)}(0)=-2^n\dfrac{(n-1)!}{(1-2\cdot 0)^n}=-2^n(n-1)!$.

(12)【答案】$\sqrt{2}(e^\pi-1)$.

【解析】因为 $0\le\theta\le\pi$，所以对数螺线 $r=e^\theta$ 的极坐标弧长公式为

$$\int_0^\pi\sqrt{(e^\theta)^2+(e^\theta)^2}d\theta=\int_0^\pi\sqrt{2}\,e^\theta d\theta=\sqrt{2}(e^\pi-1).$$

(13)【答案】$3\,\mathrm{cm/s}$.

【解析】设 $l=x(t),w=y(t)$，由题意知，在 $t=t_0$ 时刻 $x(t_0)=12,y(t_0)=5$，且 $x'(t_0)=2$，

$y'(t_0)=3$，设该对角线长为 $S(t)$，则 $S(t)=\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}$，所以

$$S'(t)=\frac{x(t)x'(t)+y(t)y'(t)}{\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}}.$$

所以
$$S'(t_0)=\frac{x(t_0)x'(t_0)+y(t_0)y'(t_0)}{\sqrt{x^2(t_0)+y^2(t_0)}}=\frac{12\cdot 2+5\cdot 3}{\sqrt{12^2+5^2}}=3.$$

(14)【答案】3.

【解析】由于 $A(A^{-1}+B)B^{-1}=(E+AB)B^{-1}=B^{-1}+A$，所以

$$\left|A+B^{-1}\right|=\left|A(A^{-1}+B)B^{-1}\right|=|A|\left|A^{-1}+B\right|\left|B^{-1}\right|$$

因为 $|B|=2$，所以 $\left|B^{-1}\right|=|B|^{-1}=\dfrac{1}{2}$，因此

$$\left|A+B^{-1}\right|=|A|\left|A^{-1}+B\right|\left|B^{-1}\right|=3\times 2\times\frac{1}{2}=3.$$

三、**解答题**

(15)【解析】因为 $f(x)=\int_1^{x^2}(x^2-t)e^{-t^2}dt=x^2\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt-\int_1^{x^2}te^{-t^2}dt$，

所以 $f'(x)=2x\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt+2x^3e^{-x^4}-2x^3e^{-x^4}=2x\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt$，令 $f'(x)=0$，则 $x=0,x=\pm 1$.

又 $f''(x)=2\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt+4x^2e^{-x^4}$，则 $f''(0)=2\int_1^{0}e^{-t^2}dt<0$，所以

$$f(0)=\int_1^0(0-t)e^{-t^2}dt=-\frac{1}{2}e^{-t^2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}(1-e^{-1})$$

是极大值.

而 $f''(\pm 1)=4e^{-1}>0$，所以 $f(\pm 1)=0$ 为极小值.

又因为当 $x\ge 1$ 时，$f'(x)>0$；$0\le x<1$ 时，$f'(x)<0$；$-1\le x<0$ 时，$f'(x)>0$；$x<-1$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty,-1)\cup(0,1)$，$f(x)$ 的单调递增区间为 $(-1,0)\cup(1,+\infty)$.

(16)【解析】(I) 当 $0<x<1$ 时 $0<\ln(1+x)<x$，故 $\left[\ln(1+t)\right]^n<t^n$，所以

$$|\ln t|\left[\ln(1+t)\right]^n<|\ln t|t^n,$$

则
$$\int_0^1|\ln t|\left[\ln(1+t)\right]^n dt<\int_0^1|\ln t|t^n dt\ (n=1,2,\cdots).$$

(II) $\int_0^1|\ln t|t^n dt=-\int_0^1\ln t\cdot t^n dt=-\frac{1}{n+1}\int_0^1\ln t\,d\left(t^{n+1}\right)=\frac{1}{(n+1)^2}$，故由

$$0<u_n<\int_0^1|\ln t|t^n dt=\frac{1}{(n+1)^2},$$

根据夹逼定理得 $0\le\lim\limits_{n\to\infty}u_n\le\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)^2}=0$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

（17）【解析】根据题意得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\psi'(t)}{2t+2},\ \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d\left(\frac{\psi'(t)}{2t+2}\right)}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{\psi''(t)(2t+2)-2\psi'(t)}{(2t+2)^2}}{2t+2}=\frac{3}{4(1+t)}$$

即 $\psi''(t)(2t+2)-2\psi'(t)=6(t+1)^2$，整理有 $\psi''(t)(t+1)-\psi'(t)=3(t+1)^2$，解

$$\begin{cases}\psi''(t)-\dfrac{\psi'(t)}{t+1}=3(t+1)\\ \psi(1)=\dfrac{5}{2},\psi'(1)=6\end{cases}$$，令 $y=\psi'(t)$，即 $y'-\frac{1}{1+t}y=3(1+t)$.

所以 $y=e^{\int\frac{1}{1+t}dt}\left(\int 3(1+t)e^{-\int\frac{1}{1+t}dt}dt+C\right)=(1+t)(3t+C)$，$t>-1$. 因为 $y(1)=\psi'(1)=6$，

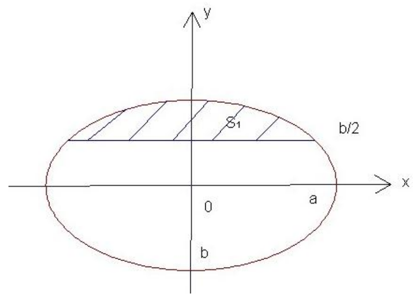
所以 $C=0$，故 $y=3t(t+1)$，即 $\psi'(t)=3t(t+1)$，

故 $\psi(t)=\int 3t(t+1)dt=\frac{3}{2}t^2+t^3+C_1$.

又由 $\psi(1)=\frac{5}{2}$，所以 $C_1=0$，故 $\psi(t)=\frac{3}{2}t^2+t^3,(t>-1)$.

（18）【解析】油罐放平，截面如图建立坐标系之后，边界椭圆的方程为：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



阴影部分的面积

$$S=\int_{-b}^{\frac{b}{2}}2xdy=\frac{2a}{b}\int_{-b}^{\frac{b}{2}}\sqrt{b^2-y^2}dy$$

令 $y=b\sin t, y=-b$ 时 $t=-\frac{\pi}{2}$；$y=\frac{b}{2}$ 时 $t=\frac{\pi}{6}$.

$$S=2ab\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 tdt=2ab\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2t)dt=(\frac{2}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{4})ab$$

所以油的质量 $m=(\frac{2}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{4})abl\rho$.

(19)【解析】由复合函数链式法则得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot a+b\cdot\frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}$$

$$=a\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+b\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+(a+b)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(a\frac{\partial u}{\partial \xi}+b\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=a(a\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+b\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta})+b(a\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+a\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta})$$

$$=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+b^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+2ab\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta},$$

故 $4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+12\frac{\partial u^2}{\partial x\partial y}+5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

$$=(5a^2+12a+4)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+(5b^2+12b+4)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\left[12(a+b)+10ab+8\right]\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}=0,$$

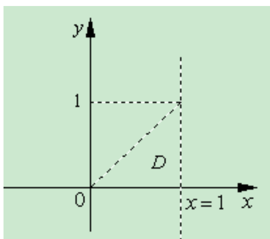
所以
$$\begin{cases}5a^2+12a+4=0\\5b^2+12b+4=0\\12(a+b)+10ab+8\neq 0\end{cases},$$

则 $a=-\frac{2}{5}$ 或 -2，$b=-\frac{2}{5}$ 或 -2. 又因为当 (a,b) 为 $(-2,-2),(-\frac{2}{5},-\frac{2}{5})$ 时方程(3)不满足,

所以当 (a,b) 为 $(-\frac{2}{5},-2)$，$(-2,-\frac{2}{5})$ 满足题意.

(20)【解析】$I=\iint\limits_D r^2\sin\theta\sqrt{1-r^2\cos 2\theta}drd\theta$

$$=\iint\limits_D r\sin\theta\sqrt{1-r^2\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)}\cdot rdrd\theta$$



$$=\iint_D y\sqrt{1-x^2+y^2}dxdy$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^x y\sqrt{1-x^2+y^2}dy=\int_0^1\frac{1}{3}\left[1-\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]dx$$

$$=\int_0^1\frac{1}{3}dx-\frac{1}{3}\int_0^1\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}dx=\frac{1}{3}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 4\theta d\theta=\frac{1}{3}-\frac{3}{16}\pi.$$

(21)【解析】令 $F(x)=f(x)-\frac{1}{3}x^3$，对于 $F(x)$ 在 $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ 上利用拉格朗日中值定理，得存在 $\xi\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$，使得

$$F\left(\frac{1}{2}\right)-F(0)=\frac{1}{2}F'(\xi).$$

对于 $F(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 上利用拉格朗日中值定理，得存在 $\eta\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，使得

$$F(1)-F\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}F'(\eta),$$

两式相加得
$$f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^2+\eta^2.$$

所以存在 $\xi\in\left(0,\frac{1}{2}\right),\eta\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，使 $f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^2+\eta^2$.

(22)【解析】因为方程组有两个不同的解，所以可以判断方程组增广矩阵的秩小于 3，进而可以通过秩的关系求解方程组中未知参数，有以下两种方法.

方法 1：（Ⅰ）已知 $Ax=b$ 有 2 个不同的解，故 $r(A)=r(\bar{A})<3$，对增广矩阵进行初等行变换，得

$$\bar{A}=\left(\begin{array}{ccc:c}\lambda&1&1&a\\0&\lambda-1&0&1\\1&1&\lambda&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&\lambda&1\\0&\lambda-1&0&1\\\lambda&1&1&a\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&\lambda&1\\0&\lambda-1&0&1\\0&1-\lambda&1-\lambda^2&a-\lambda\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&\lambda&1\\0&\lambda-1&0&1\\0&0&1-\lambda^2&a-\lambda+1\end{array}\right)$$

当 $\lambda=1$ 时，$\bar{A}\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&a\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{array}\right)$，此时，$r(A)\neq r(\bar{A})$，故 $Ax=b$ 无解（舍去）.

当 $\lambda=-1$ 时，$\bar{A}\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&-1&1\\0&-2&0&1\\0&0&0&a+2\end{array}\right)$，由于 $r(A)=r(\bar{A})<3$，所以 $a=-2$，故 $\lambda=-1$ ，$a=-2$.

方法 2：已知 $Ax=b$ 有 2 个不同的解，故 $r(A)=r(\bar{A})<3$，因此 $|A|=0$，即

$$|A|=\begin{vmatrix}\lambda&1&1\\0&\lambda-1&0\\1&1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+1)=0,$$

知 $\lambda=1$ 或-1.

当 $\lambda=1$ 时，$r(A)=1\neq r(\bar{A})=2$，此时，$Ax=b$ 无解，因此 $\lambda=-1$. 由 $r(A)=r(\bar{A})$，得 $a=-2$.

（ II ）对增广矩阵做初等行变换

$$\bar{A}=\left(\begin{array}{ccc:c}-1&1&1&-2\\0&-2&0&1\\1&1&-1&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&-1&-1&2\\0&2&0&-1\\0&0&0&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&-1&\frac{3}{2}\\0&1&0&-\frac{1}{2}\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

可知原方程组等价为 $\begin{cases}x_1-x_3=\frac{3}{2}\\x_2=-\frac{1}{2}\end{cases}$，写成向量的形式，即 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=x_3\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\-\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$.

因此 $Ax=b$ 的通解为 $x=k\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\-\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$，其中 k 为任意常数.

(23)【解析】由于 $A=\begin{pmatrix}0&-1&4\\-1&3&a\\4&a&0\end{pmatrix}$，存在正交矩阵 Q，使得 Q^TAQ 为对角阵，且 Q 的第一

列为 $\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^T$，故 A 对应于 λ_1 的特征向量为 $\xi_1=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^T$.

根据特征值和特征向量的定义，有 $A\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}=\lambda_1\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$，即

$\begin{pmatrix}0&-1&4\\-1&3&a\\4&a&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=\lambda_1\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$，由此可得 $a=-1,\lambda_1=2$. 故 $A=\begin{pmatrix}0&-1&4\\-1&3&-1\\4&-1&0\end{pmatrix}$.

由 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&1&-4\\1&\lambda-3&1\\-4&1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+4)(\lambda-2)(\lambda-5)=0$，

可得 A 的特征值为 $\lambda_1=2,\lambda_2=-4,\lambda_3=5$.

由 $(\lambda_2E-A)x=0$，即 $\begin{pmatrix}-4&1&-4\\1&-7&1\\-4&1&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0$，可解得对应于 $\lambda_2=-4$ 的线性无关的特征向量为 $\xi_2=(-1,0,1)^T$.

由 $(\lambda_3E-A)x=0$，即 $\begin{pmatrix}5&1&-4\\1&2&1\\-4&1&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0$，可解得对应于 $\lambda_3=5$ 的特征向量为 $\xi_3=(1,-1,1)^T$.

由于 A 为实对称矩阵，ξ_1,ξ_2,ξ_3 为对应于不同特征值的特征向量，所以 ξ_1,ξ_2,ξ_3 相互正交，只需单位化：

$$\eta_1=\frac{\xi_1}{\|\xi_1\|}=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^T,\eta_2=\frac{\xi_2}{\|\xi_2\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)^T,\eta_3=\frac{\xi_3}{\|\xi_3\|}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)^T,$$

取 $Q=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}}&0&-\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$，则 $Q^TAQ=\Lambda=\begin{pmatrix}2&&\\&-4&\\&&5\end{pmatrix}$.