2010 年全国硕士研究生入学统一考试

数学二试题

一、**选择题**(1~8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求的,请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.)

(1) 函数 $f(x)=\frac{x^2-x}{x^2-1}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$ 的无穷间断点的个数为(　)

(A) 0.　　(B) 1.　　(C) 2.　　(D) 3.

(2) 设 y_1,y_2 是一阶线性非齐次微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的两个特解,若常数 λ, μ 使 $\lambda y_1+\mu y_2$ 是该方程的解, $\lambda y_1-\mu y_2$ 是该方程对应的齐次方程的解,则(　)

(A) $\lambda=\frac{1}{2},\mu=\frac{1}{2}$.　　(B) $\lambda=-\frac{1}{2},\mu=-\frac{1}{2}$.

(C) $\lambda=\frac{2}{3},\mu=\frac{1}{3}$.　　(D) $\lambda=\frac{2}{3},\mu=\frac{2}{3}$.

(3) 曲线 $y=x^2$ 与曲线 $y=a\ln x(a\neq 0)$ 相切,则 $a=$ (　)

(A) $4e$.　　(B) $3e$.　　(C) $2e$.　　(D) e.

(4) 设 m,n 是正整数,则反常积分 $\int_0^1\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$ 的收敛性(　)

(A) 仅与 m 的取值有关.　　(B) 仅与 n 的取值有关.

(C) 与 m,n 取值都有关.　　(D) 与 m,n 取值都无关.

(5) 设函数 $z=z(x,y)$, 由方程 $F(\frac{y}{x},\frac{z}{x})=0$ 确定, 其中 F 为可微函数, 且 $F_2'\neq 0$, 则 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=$ (　)

(A) x.　　(B) z.　　(C) $-x$.　　(D) $-z$.

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=$ (　)

(A) $\int_0^1dx\int_0^x\frac{1}{(1+x)(1+y^2)}dy$.　　(B) $\int_0^1dx\int_0^x\frac{1}{(1+x)(1+y)}dy$.

(C) $\int_0^1dx\int_0^1\frac{1}{(1+x)(1+y)}dy$.　　(D) $\int_0^1dx\int_0^1\frac{1}{(1+x)(1+y^2)}dy$.

(7) 设向量组 I: $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 可由向量组 II: $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表示,下列命题正确的是(　)

(A) 若向量组 I 线性无关,则 $r\leq s$.　　(B) 若向量组 I 线性相关,则 $r>s$.

(C) 若向量组II线性无关,则$r \le s$.　　(D) 若向量组II线性相关,则$r > s$.

(8) 设A为4阶实对称矩阵,且$A^2 + A = O$,若A的秩为3,则A相似于　(　)

(A) $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$.　　(B) $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$.　　(D) $\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$.

二、**填空题**(9~14小题,每小题4分,共24分.请将答案写在答题纸指定位置上.)

(9) 3阶常系数线性齐次微分方程$y''' - 2y'' + y' - 2y = 0$的通解为$y =$________.

(10) 曲线$y = \dfrac{2x^3}{x^2+1}$的渐近线方程为________.

(11) 函数$y = \ln(1-2x)$在$x=0$处的n阶导数$y^{(n)}(0) =$________.

(12) 当$0 \le \theta \le \pi$时,对数螺线$r = e^{\theta}$的弧长为________.

(13) 已知一个长方形的长l以2 cm/s的速率增加,宽w以3 cm/s的速率增加.则当$l = 12\text{cm}$,$w = 5\text{cm}$时,它的对角线增加的速率为________.

(14) 设A, B为3阶矩阵,且$|A| = 3, |B| = 2, |A^{-1} + B| = 2$,则$|A + B^{-1}| =$________.

三、**解答题**(15~23小题,共94分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分11分)

求函数$f(x) = \int_1^{x^2} (x^2 - t)e^{-t^2} d$的单调区间与极值.

(16) (本题满分10分)

(Ⅰ) 比较$\int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt$与$\int_0^1 t^n |\ln t| dt \ (n = 1, 2, \cdots)$的大小,说明理由;

(Ⅱ) 记$u_n = \int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt \ (n = 1, 2, \cdots)$,求极限$\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

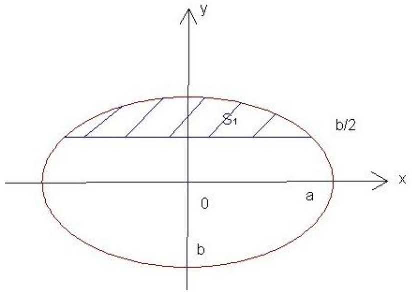
(17) (本题满分10分)

设函数$y = f(x)$由参数方程$\begin{cases} x = 2t + t^2, \\ y = \psi(t) \end{cases} (t > -1)$所确定,其中$\psi(t)$具有2阶导数,且

$\psi(1)=\frac{5}{2}$， $\psi'(1)=6$. 已知 $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{3}{4(1+t)}$, 求函数 $\psi(t)$.

(18) (本题满分 10 分)

一个高为 *l* 的柱体形贮油罐, 底面是长轴为 $2a$, 短轴为 $2b$ 的椭圆. 现将贮油罐平放, 当油罐中油面高度为 $\frac{3}{2}b$ 时 (如图), 计算油的质量. (长度单位为 m, 质量单位为 kg, 油的密度为常数 ρ kg/m^3)



(19) (本题满分 11 分)

设函数 $u=f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数, 且满足等式 $4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+12\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, 确定 a, b 的值, 使等式在变换 $\xi=x+ay,\eta=x+by$ 下化简为 $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0$.

(20) (本题满分 10 分)

计算二重积分 $I=\iint\limits_D r^2\sin\theta\sqrt{1-r^2\cos 2\theta}\,drd\theta$, 其中 $D=\left\{(r,\theta)\,\middle|\,0\le r\le\sec\theta,0\le\theta\le\frac{\pi}{4}\right\}$.

(21) (本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续, 在开区间 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0)=0$, $f(1)=\frac{1}{3}$, 证明: 存在 $\xi\in(0,\frac{1}{2})$, $\eta\in(\frac{1}{2},1)$, 使得 $f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^2+\eta^2$.

(22) (本题满分 11 分)

设 $A=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{pmatrix}$， $b=\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}$, 已知线性方程组 $Ax=b$ 存在两个不同的解.

(Ⅰ) 求 λ, a;

(Ⅱ) 求方程组 $Ax=b$ 的通解.

(23) (本题满分 11 分)

设 $A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 4\\ -1 & 3 & a\\ 4 & a & 0\end{pmatrix}$，正交矩阵 Q 使得 Q^TAQ 为对角矩阵，若 Q 的第 1 列为 $\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^T$，求 a,Q.

2010 年全国硕士研究生入学统一考试

数学二试题参考答案

一、选择题

(1)【答案】 (B).

【解析】因为 $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x^2-1}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$ 有间断点 $x=0,\pm1$，又因为

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0}x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}},$$

其中 $\lim\limits_{x\to0^+}x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}=1,\lim\limits_{x\to0^-}x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}=-1$，所以 $x=0$ 为跳跃间断点.

显然 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\dfrac{1}{2}\sqrt{1+1}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $x=1$ 为连续点.

而 $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}=\infty$，所以 $x=-1$ 为无穷间断点，故答案选择 B.

(2)【答案】 (A).

【解析】因 $\lambda y_1-\mu y_2$ 是 $y'+P(x)y=0$ 的解，故 $(\lambda y_1-\mu y_2)'+P(x)(\lambda y_1-\mu y_2)=0$，所以

$$\lambda\left[y_1'+P(x)y_1\right]-\mu\left[y_2'+p(x)y_2\right]=0,$$

而由已知 $y_1'+P(x)y_1=q(x),y_2'+P(x)y_2=q(x)$，所以

$$(\lambda-\mu)q(x)=0, \qquad ①$$

又由于一阶次微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 是非齐的，由此可知 $q(x)\neq0$，所以

$\lambda-\mu=0$.

由于 $\lambda y_1+\mu y_2$ 是非齐次微分方程 $y'+P(x)y=q(x)$ 的解, 所以

$$(\lambda y_1+\mu y_2)'+P(x)(\lambda y_1+\mu y_2)=q(x),$$

整理得

$$\lambda\left[y_1'+P(x)y_1\right]+\mu\left[y_2'+P(x)y_2\right]=q(x),$$

即

$$(\lambda+\mu)q(x)=q(x), \text{由 } q(x)\neq 0 \text{ 可知 } \lambda+\mu=1, \qquad ②$$

由①②求解得 $\lambda=\mu=\dfrac{1}{2}$, 故应选(A).

(3)【答案】 (C).

【解析】因为曲线 $y=x^2$ 与曲线 $y=a\ln x(a\neq 0)$ 相切, 所以在切点处两个曲线的斜率相同,

所以 $2x=\dfrac{a}{x}$, 即 $x=\sqrt{\dfrac{a}{2}}\ (x>0)$. 又因为两个曲线在切点的坐标是相同的, 所以在 $y=x^2$ 上,

当 $x=\sqrt{\dfrac{a}{2}}$ 时 $y=\dfrac{a}{2}$; 在 $y=a\ln x$ 上, $x=\sqrt{\dfrac{a}{2}}$ 时, $y=a\ln\sqrt{\dfrac{a}{2}}=\dfrac{a}{2}\ln\dfrac{a}{2}$.

所以 $\dfrac{a}{2}=\dfrac{a}{2}\ln\dfrac{a}{2}$. 从而解得 $a=2e$. 故答案选择(C).

(4)【答案】 (D).

【解析】 $x=0$ 与 $x=1$ 都是瑕点. 应分成

$$\int_0^1\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx+\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx,$$

用比较判别法的极限形式, 对于 $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$, 由于 $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{[\ln^2(1-x)]^{\frac{1}{m}}}{x^{\frac{1}{n}}}}{\dfrac{1}{x^{\frac{1}{n}-\frac{2}{m}}}}=1$.

显然, 当 $0<\dfrac{1}{n}-\dfrac{2}{m}<1$, 则该反常积分收敛.

当 $\dfrac{1}{n}-\dfrac{2}{m}\le 0$, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{[\ln^2(1-x)]^{\frac{1}{m}}}{x^{\frac{1}{n}}}$ 存在, 此时 $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$ 实际上不是反常积分, 故收敛.

故不论 m,n 是什么正整数, $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$ 总收敛. 对于 $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$, 取 $0<\delta<1$, 不论 m,n 是什么正整数,

$$\lim_{x\to1^-}\frac{\dfrac{[\ln^2(1-x)]^{\frac{1}{m}}}{x^{\frac{1}{n}}}}{\dfrac{1}{(1-x)^{\delta}}}=\lim_{x\to1^-}\ln^2(1-x)^{\frac{1}{m}}(1-x)^{\delta}=0,$$

所以$\int_{\frac{1}{2}}^{1}\dfrac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$收敛，故选(D).

(5) 【答案】(B).

【解析】$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_z'}=-\frac{F_1'\left(-\dfrac{y}{x^2}\right)+F_2'\left(-\dfrac{z}{x^2}\right)}{F_2'\cdot\dfrac{1}{x}}=\frac{F_1'\cdot\dfrac{y}{x}+F_2'\cdot\dfrac{z}{x}}{F_2'}=\frac{yF_1'+zF_2'}{xF_2'},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'}{F_z'}=-\frac{F_1'\cdot\dfrac{1}{x}}{F_2'\cdot\dfrac{1}{x}}=-\frac{F_1'}{F_2'},$$

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{yF_1'+zF_2'}{F_2'}-\frac{yF_1'}{F_2'}=\frac{F_2'\cdot z}{F_2'}=z.$$

(6) 【答案】(D).

【解析】$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{n^2+j^2}\right)=\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{n^2+j^2}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{n^2+j^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{1+(\frac{j}{n})^2}=\int_0^1\frac{1}{1+y^2}dy,$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{n+i}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+(\frac{i}{n})}=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx,$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n^2+j^2}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i}\right)$$

$$=\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{n^2+j^2}\right)\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{n+i}\right)$$

$$=\left(\int_0^1\frac{1}{1+x}dx\right)\left(\int_0^1\frac{1}{1+y^2}dy\right)=\int_0^1dx\int_0^1\frac{1}{(1+x)(1+y^2)}dy.$$

(7) 【答案】(A).

【解析】由于向量组I能由向量组II线性表示, 所以$r(\mathrm{I})\le r(\mathrm{II})$, 即

$$r(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)\le r(\beta_1,\cdots,\beta_s)\le s$$

若向量组I线性无关, 则$r(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)=r$, 所以$r=r(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)\le r(\beta_1,\cdots,\beta_s)\le s$, 即$r\le s$, 选(A).

(8) 【答案】 (D).

【解析】: 设λ为A的特征值, 由于$A^2+A=O$, 所以$\lambda^2+\lambda=0$, 即$(\lambda+1)\lambda=0$, 这样A的特征值只能为-1 或 0. 由于A为实对称矩阵, 故A可相似对角化, 即$A\sim\Lambda$, $r(A)=r(\Lambda)=3$, 因此, $\Lambda=\begin{pmatrix}-1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$, 即$A\sim\Lambda=\begin{pmatrix}-1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$.

二、**填空题**

(9)【答案】 $y=C_1e^{2x}+C_2\cos x+C_3\sin x$.

【解析】该常系数线性齐次微分方程的特征方程为 $\lambda^3-2\lambda^2+\lambda-2=0$, 因式分解得

$$\lambda^2(\lambda-2)+(\lambda-2)=(\lambda-2)(\lambda^2+1)=0,$$

解得特征根为$\lambda=2,\ \lambda=\pm i$, 所以通解为 $y=C_1e^{2x}+C_2\cos x+C_3\sin x$.

(10) 【答案】 $y=2x$.

【解析】因为$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{2x^3}{x^2+1}}{x}=2$, 所以函数存在斜渐近线, 又因为

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3}{x^2+1}-2x=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-2x^3-2x}{x^2+1}=0$$, 所以斜渐近线方程为$y=2x$.

(11)【答案】 $-2^n\cdot(n-1)!$.

【解析】由高阶导数公式可知$\ln^{(n)}(1+x)=(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{(1+x)^n}$,

所以 $\ln^{(n)}(1-2x)=(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{(1-2x)^n}\cdot(-2)^n=-2^n\dfrac{(n-1)!}{(1-2x)^n}$,

即 $y^{(n)}(0)=-2^n\dfrac{(n-1)!}{(1-2\cdot0)^n}=-2^n(n-1)!$.

(12)【答案】$\sqrt{2}\left(e^{\pi}-1\right)$.

【解析】因为 $0\le\theta\le\pi$，所以对数螺线 $r=e^{\theta}$ 的极坐标弧长公式为

$$\int_0^{\pi}\sqrt{\left(e^{\theta}\right)^2+\left(e^{\theta}\right)^2}d\theta=\int_0^{\pi}\sqrt{2}\,e^{\theta}d\theta=\sqrt{2}\left(e^{\pi}-1\right).$$

(13)【答案】$3\,\text{cm/s}$.

【解析】设 $l=x(t),w=y(t)$，由题意知，在 $t=t_0$ 时刻 $x(t_0)=12,y(t_0)=5$，且 $x'(t_0)=2$，$y'(t_0)=3$，设该对角线长为 $S(t)$，则 $S(t)=\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}$，所以

$$S'(t)=\frac{x(t)x'(t)+y(t)y'(t)}{\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}}.$$

所以 $$S'(t_0)=\frac{x(t_0)x'(t_0)+y(t_0)y'(t_0)}{\sqrt{x^2(t_0)+y^2(t_0)}}=\frac{12\cdot2+5\cdot3}{\sqrt{12^2+5^2}}=3.$$

(14)【答案】3.

【解析】由于 $A(A^{-1}+B)B^{-1}=(E+AB)B^{-1}=B^{-1}+A$，所以

$$\left|A+B^{-1}\right|=\left|A(A^{-1}+B)B^{-1}\right|=|A|\left|A^{-1}+B\right|\left|B^{-1}\right|$$

因为 $|B|=2$，所以 $\left|B^{-1}\right|=|B|^{-1}=\frac{1}{2}$，因此

$$\left|A+B^{-1}\right|=|A|\left|A^{-1}+B\right|\left|B^{-1}\right|=3\times2\times\frac{1}{2}=3.$$

三、解答题

(15)【解析】因为 $f(x)=\int_1^{x^2}(x^2-t)e^{-t^2}dt=x^2\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt-\int_1^{x^2}te^{-t^2}dt$，

所以 $f'(x)=2x\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt+2x^3e^{-x^4}-2x^3e^{-x^4}=2x\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt$，令 $f'(x)=0$，则 $x=0,x=\pm1$.

又 $f''(x)=2\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt+4x^2e^{-x^4}$，则 $f''(0)=2\int_1^{0}e^{-t^2}dt<0$，所以

$$f(0)=\int_1^{0}(0-t)e^{-t^2}dt=-\frac{1}{2}e^{-t^2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}(1-e^{-1})$$

是极大值.

而 $f''(\pm1)=4e^{-1}>0$，所以 $f(\pm1)=0$ 为极小值.

又因为当 $x\ge1$ 时，$f'(x)>0$；$0\le x<1$ 时，$f'(x)<0$；$-1\le x<0$ 时，$f'(x)>0$；$x<-1$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty,-1)\cup(0,1)$，$f(x)$ 的单调递增区

间为 $(-1,0)\cup(1,+\infty)$.

(16) 【解析】 (I) 当 $0<x<1$ 时 $0<\ln(1+x)<x$，故 $\left[\ln(1+t)\right]^n<t^n$，所以

$$|\ln t|\left[\ln(1+t)\right]^n<|\ln t|t^n,$$

则
$$\int_0^1|\ln t|\left[\ln(1+t)\right]^n dt<\int_0^1|\ln t|t^n dt\ (n=1,2,\cdots).$$

(II) $\int_0^1|\ln t|t^n dt=-\int_0^1\ln t\cdot t^n dt=-\dfrac{1}{n+1}\int_0^1\ln t d\left(t^{n+1}\right)=\dfrac{1}{(n+1)^2}$，故由

$$0<u_n<\int_0^1|\ln t|t^n dt=\frac{1}{(n+1)^2},$$

根据夹逼定理得 $0\le\lim\limits_{n\to\infty}u_n\le\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{(n+1)^2}=0$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

(17)【解析】根据题意得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\psi'(t)}{2t+2},\ \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d\left(\frac{\psi'(t)}{2t+2}\right)}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{\psi''(t)(2t+2)-2\psi'(t)}{(2t+2)^2}}{2t+2}=\frac{3}{4(1+t)}$$

即 $\psi''(t)(2t+2)-2\psi'(t)=6(t+1)^2$，整理有 $\psi''(t)(t+1)-\psi'(t)=3(t+1)^2$，解

$$\begin{cases}\psi''(t)-\dfrac{\psi'(t)}{t+1}=3(t+1)\\ \psi(1)=\dfrac{5}{2},\psi'(1)=6\end{cases}$$，令 $y=\psi'(t)$，即 $y'-\dfrac{1}{1+t}y=3(1+t)$.

所以 $y=e^{\int\frac{1}{1+t}dt}\left(\int 3(1+t)e^{-\int\frac{1}{1+t}dt}dt+C\right)=(1+t)(3t+C)$，$t>-1$. 因为 $y(1)=\psi'(1)=6$，

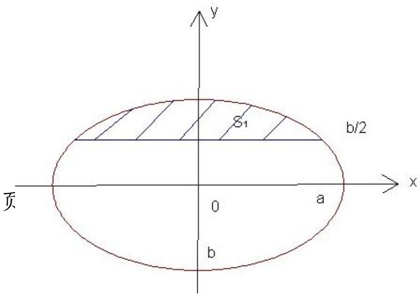
所以 $C=0$，故 $y=3t(t+1)$，即 $\psi'(t)=3t(t+1)$，

故 $\psi(t)=\int 3t(t+1)dt=\dfrac{3}{2}t^2+t^3+C_1$.

又由 $\psi(1)=\dfrac{5}{2}$，所以 $C_1=0$，故 $\psi(t)=\dfrac{3}{2}t^2+t^3,(t>-1)$.

(18)【解析】油罐放平，截面如图建立坐标系之后，边界椭圆的方程为：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



阴影部分的面积

$$S=\int_{-b}^{\frac{b}{2}}2xdy=\frac{2a}{b}\int_{-b}^{\frac{b}{2}}\sqrt{b^2-y^2}dy$$

令 $y=b\sin t, y=-b$ 时 $t=-\frac{\pi}{2}; y=\frac{b}{2}$ 时 $t=\frac{\pi}{6}$.

$$S=2ab\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 tdt=2ab\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2t)dt=(\frac{2}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{4})ab$$

所以油的质量 $m=(\frac{2}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{4})abl\rho$.

(19)【解析】由复合函数链式法则得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot a+b\cdot\frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}$$

$$=a\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+b\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+(a+b)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(a\frac{\partial u}{\partial \xi}+b\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=a(a\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+b\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta})+b(a\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+a\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta})$$

$$=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+b^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+2ab\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta},$$

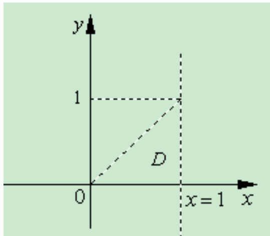
故 $4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+12\frac{\partial u^2}{\partial x\partial y}+5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

$$=(5a^2+12a+4)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+(5b^2+12b+4)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\left[12(a+b)+10ab+8\right]\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}=0,$$

所以
$$\begin{cases}5a^2+12a+4=0\\5b^2+12b+4=0\\12(a+b)+10ab+8\neq 0\end{cases},$$

则 $a=-\dfrac{2}{5}$ 或 -2，$b=-\dfrac{2}{5}$ 或 -2. 又因为当 (a,b) 为 $(-2,-2),(-\dfrac{2}{5},-\dfrac{2}{5})$ 时方程(3)不满足，所以当 (a,b) 为 $(-\dfrac{2}{5},-2)$，$(-2,-\dfrac{2}{5})$ 满足题意.

(20)【解析】$I=\iint\limits_D r^2\sin\theta\sqrt{1-r^2\cos 2\theta}drd\theta$



$$=\iint\limits_D r\sin\theta\sqrt{1-r^2\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)}\cdot rdrd\theta$$

$$=\iint\limits_D y\sqrt{1-x^2+y^2}dxdy$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^x y\sqrt{1-x^2+y^2}dy=\int_0^1\frac{1}{3}\left[1-\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]dx$$

$$=\int_0^1\frac{1}{3}dx-\frac{1}{3}\int_0^1\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}dx=\frac{1}{3}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta d\theta=\frac{1}{3}-\frac{\pi}{16}.$$

(21)【解析】令 $F(x)=f(x)-\dfrac{1}{3}x^3$，对于 $F(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ 上利用拉格朗日中值定理，得存在 $\xi\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$，使得

$$F\left(\frac{1}{2}\right)-F(0)=\frac{1}{2}F'(\xi).$$

对于 $F(x)$ 在 $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ 上利用拉格朗日中值定理，得存在 $\eta\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$，使得

$$F(1)-F\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}F'(\eta),$$

两式相加得
$$f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^2+\eta^2.$$

所以存在 $\xi\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right),\eta\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$，使 $f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^2+\eta^2$.

(22)【解析】因为方程组有两个不同的解，所以可以判断方程组增广矩阵的秩小于 3，进而可以通过秩的关系求解方程组中未知参数，有以下两种方法.

方法 1：（Ⅰ）已知 $Ax=b$ 有 2 个不同的解，故 $r(A)=r(\overline{A})<3$，对增广矩阵进行初等行

变换，得

$$\bar{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}\lambda & 1 & 1 & a\\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & \lambda & 1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & \lambda & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1\\ \lambda & 1 & 1 & a\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & \lambda & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1\\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & a-\lambda\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & \lambda & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1-\lambda^2 & a-\lambda+1\end{array}\right)$$

当 $\lambda=1$ 时，$\bar{A}\to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & a\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$，此时，$r(A)\neq r(\bar{A})$，故 $Ax=b$ 无解（舍去）.

当 $\lambda=-1$ 时，$\bar{A}\to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & -2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & a+2\end{array}\right)$，由于 $r(A)=r(\bar{A})<3$，所以 $a=-2$，故 $\lambda=-1$ ，$a=-2$.

方法 2：已知 $Ax=b$ 有 2 个不同的解，故 $r(A)=r(\bar{A})<3$，因此 $|A|=0$，即

$$|A|=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+1)=0,$$

知 $\lambda=1$ 或-1.

当 $\lambda=1$ 时，$r(A)=1\neq r(\bar{A})=2$，此时，$Ax=b$ 无解，因此 $\lambda=-1$. 由 $r(A)=r(\bar{A})$，得 $a=-2$.

（II）对增广矩阵做初等行变换

$$\bar{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}-1 & 1 & 1 & -2\\ 0 & -2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -1 & 1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & -1 & 2\\ 0 & 2 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -1 & \frac{3}{2}\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

可知原方程组等价为 $\begin{cases}x_1-x_3=\dfrac{3}{2}\\ x_2=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$，写成向量的形式，即 $\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=x_3\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\ -\frac{1}{2}\\ 0\end{pmatrix}$.

因此 $Ax=b$ 的通解为 $x=k\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\-\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$，其中 k 为任意常数.

(23)【解析】由于 $A=\begin{pmatrix}0&-1&4\\-1&3&a\\4&a&0\end{pmatrix}$，存在正交矩阵 Q，使得 Q^TAQ 为对角阵，且 Q 的第一列为 $\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^T$，故 A 对应于 λ_1 的特征向量为 $\xi_1=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^T$.

根据特征值和特征向量的定义，有 $A\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}=\lambda_1\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$，即

$\begin{pmatrix}0&-1&4\\-1&3&a\\4&a&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=\lambda_1\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$，由此可得 $a=-1,\lambda_1=2$. 故 $A=\begin{pmatrix}0&-1&4\\-1&3&-1\\4&-1&0\end{pmatrix}$.

由 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&1&-4\\1&\lambda-3&1\\-4&1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+4)(\lambda-2)(\lambda-5)=0$，

可得 A 的特征值为 $\lambda_1=2,\lambda_2=-4,\lambda_3=5$.

由 $(\lambda_2E-A)x=0$，即 $\begin{pmatrix}-4&1&-4\\1&-7&1\\-4&1&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0$，可解得对应于 $\lambda_2=-4$ 的线性无关的特征向量为 $\xi_2=(-1,0,1)^T$.

由 $(\lambda_3E-A)x=0$，即 $\begin{pmatrix}5&1&-4\\1&2&1\\-4&1&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0$，可解得对应于 $\lambda_3=5$ 的特征向量为 $\xi_3=(1,-1,1)^T$.

由于 A 为实对称矩阵，ξ_1,ξ_2,ξ_3 为对应于不同特征值的特征向量，所以 ξ_1,ξ_2,ξ_3 相互正

交，只需单位化：

$$\eta_1=\frac{\xi_1}{\|\xi_1\|}=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^T,\eta_2=\frac{\xi_2}{\|\xi_2\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)^T,\eta_3=\frac{\xi_3}{\|\xi_3\|}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)^T,$$

取 $Q=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$，则 $Q^TAQ=\Lambda=\begin{pmatrix}2 & & \\ & -4 & \\ & & 5\end{pmatrix}$.