

2012 年全国硕士研究生入学统一考试 数学二试题

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上。

(1) 曲线 $y = \frac{x^2 + x}{x^2 - 1}$ 渐近线的条数为 ()

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

(2) 设函数 $f(x) = (e^x - 1)(e^{2x} - 2) \cdots (e^{nx} - n)$ ，其中 n 为正整数，则 $f'(0) =$

(A) $(-1)^{n-1}(n-1)!$

(B) $(-1)^n(n-1)!$

(C) $(-1)^{n-1}n!$

(D) $(-1)^nn!$

(3) 设 $a_n > 0 (n=1, 2, \cdots)$ ， $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ ，则数列 (S_n) 有界是数列 (a_n) 收敛的

(A) 充分必要条件. (B) 充分非必要条件.

(C) 必要非充分条件. (D) 既非充分也非必要条件.

(4) 设 $I_k = \int_0^{k\rho} e^{x^2} \sin x dx (k=1, 2, 3)$ ，则有 ()

(A) $I_1 < I_2 < I_3$. (B) $I_3 < I_2 < I_1$.

(C) $I_2 < I_3 < I_1$. (D) $I_2 < I_1 < I_3$.

(5) 设函数 $f(x, y)$ 可微，且对任意 x, y 都有 $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} > 0, \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} < 0, f(x_1, y_1) < f(x_2, y_2)$ 成立的一个充分条件是

(A) $x_1 > x_2, y_1 < y_2$. (B) $x_1 > x_2, y_1 > y_2$.

(C) $x_1 < x_2, y_1 < y_2$. (D) $x_1 < x_2, y_1 > y_2$.

(6) 设区域 D 由曲线 $y = \sin x, x = \pm \frac{\pi}{2}, y = 1$, 围成, 则 $\iint_D (x^5 y - 1) dx dy = ()$

(A) π (B) 2 (C) -2 (D) $-\pi$

(7) 设 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ c_3 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ c_4 \end{pmatrix}$ 其中 c_1, c_2, c_3, c_4 为任意常数, 则下列向量组线性相关的是 ()

(A) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ (B) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$

(C) $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$ (D) $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$

(8) 设 A 为 3 阶矩阵, P 为 3 阶可逆矩阵, 且 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$, $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$,

$Q = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2, \alpha_3)$ 则 $Q^{-1}AQ = ()$

(A) $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

(B) $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

二、填空题: 9-14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 请将答案写在答题纸指定位置上。

(9) 设 $y = y(x)$ 是由方程 $x^2 - y + 1 = e^y$ 所确定的隐函数, 则 $\frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{x=0} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(10) 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1}{1+n^2} + \frac{1}{2^2+n^2} + \cdots + \frac{1}{n^2+n^2} \right) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(11) 设 $z = f\left(\ln x + \frac{1}{y}\right)$, 其中函数 $f(u)$ 可微, 则 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(12) 微分方程 $y dx + (x - 3y^2) dy = 0$ 满足条件 $y|_{x=1} = 1$ 的解为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

(13) 曲线 $y = x^2 + x (x < 0)$ 上曲率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的点的坐标是 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

(14) 设 A 为 3 阶矩阵, $|A|=3$, A^* 为 A 的伴随矩阵, 若交换 A 的第一行与第二行得到矩阵 B , 则

$$|BA^*| = \underline{\hspace{2cm}}.$$

三、解答题: 15—23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分)

已知函数 $f(x) = \frac{1+x}{\sin x} - \frac{1}{x}$, 记 $a = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

(1) 求 a 的值

(2) 若当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) - a$ 是 x^k 的同阶无穷小, 求 k

(16) (本题满分 10 分)

求函数 $f(x, y) = xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ 的极值。

微信公众号【最强考研】
考研人的精神家园!

(17) (本题满分 10 分)

过点 $(0, 1)$ 点作曲线 $L: y = \ln x$ 的切线, 切点为 A , 又 L 与 x 轴交于 B 点, 区域 D 由 L 与直线 AB 围成, 求区域 D 的面积及 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积。

(18) (本题满分 10 分)

计算二重积分 $\iint_D xy d\sigma$ ，其中区域 D 为曲线 $r = 1 + \cos \theta (0 \leq \theta \leq \pi)$ 与极轴围成。

(19) (本题满分 11 分) 已知函数 $f(x)$ 满足方程 $f''(x) + f'(x) - 2f(x) = 0$ 及 $f'(x) + f(x) = 2e^x$

1) 求表达式 $f(x)$

2) 求曲线 $y = f(x^2) \int_0^x f(-t^2) dt$ 的拐点

(20) (本题满分 10 分)

证明: $x \ln \frac{1+x}{1-x} + \cos x \geq 1 + \frac{x^2}{2}, (-1 < x < 1)$

(21) (本题满分 11 分)

(1) 证明方程 $x^n + x^{n-1} + \dots + x = 1$ ($n > 1$ 的整数), 在区间 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 内有且仅有一个实根;

(2) 记 (1) 中的实根为 x_n , 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 并求此极限。

(22) (本题满分 11 分)

$$\text{设 } A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ a & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(I) 求 $|A|$

(II) 已知线性方程组 $Ax = b$ 有无穷多解, 求 a , 并求 $Ax = b$ 的通解。

微信公众号【最强考研】
考研人的精神家园!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix}$$

(23) (本题满分 11 分) 已知 , 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x^T (A^T A)x$ 的秩为 2。

- 1) 求 a 的值
- 2) 求正交变换 $x=Qy$ 将 f 化为标准型。

微信公众号【最强考研】
考研人的精神家园!