极客大学算法训练营
第十九课
高级动态规划

覃超

Sophon Tech 创始人，前 Facebook 工程师

小结提纲

1. 动态规划复习；附带 递归、分治

2. 多种情况的动态规划的状态转移方程串讲

3. 进阶版动态规划的习题

递归、分治、回溯、动态规划复习

递归 - 函数自己调用自己

```java
public void recur(int level, int param) {

    // terminator
    if (level > MAX_LEVEL) {
      // process result
      return;
    }

    // process current logic
    process(level, param);

    // drill down
    recur(level: level + 1, newParam);

    // restore current status

}
```

分而治之

Divide & Conquer

分治代码模板

```
def divide_conquer(problem, param1, param2, ...):
  # recursion terminator
  if problem is None:
    print_result
    return

  # prepare data
  data = prepare_data(problem)
  subproblems = split_problem(problem, data)

  # conquer subproblems
  subresult1 = self.divide_conquer(subproblems[0], p1, ...)
  subresult2 = self.divide_conquer(subproblems[1], p1, ...)
  subresult3 = self.divide_conquer(subproblems[2], p1, ...)
  …

  # process and generate the final result
  result = process_result(subresult1, subresult2, subresult3, …)

  # revert the current level states
```

感触

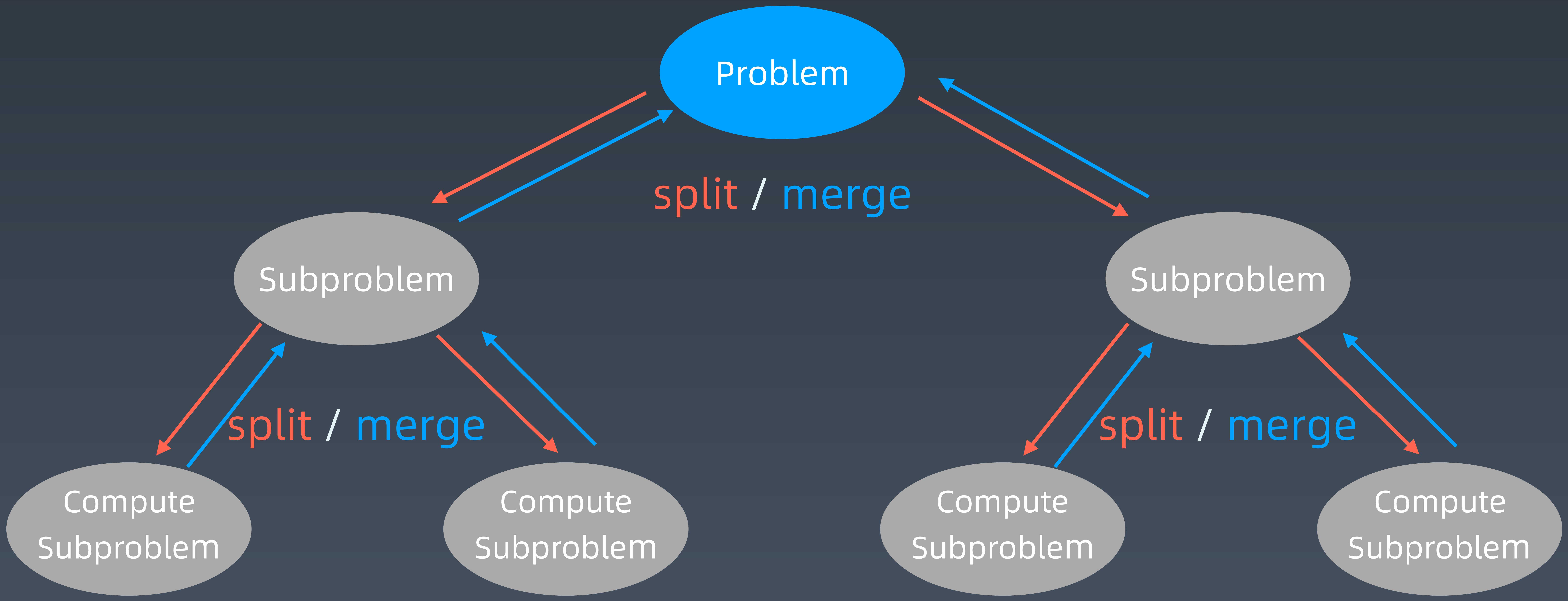
1. 人肉递归低效、很累

2. 找到最近最简方法，将其拆解成可重复解决的问题

3. 数学归纳法思维

本质：寻找重复性 —> 计算机指令集

递归状态树



Problem
split / merge
Subproblem
Subproblem
split / merge
split / merge
Compute Subproblem
Compute Subproblem
Compute Subproblem
Compute Subproblem

Fib(6) 状态树、重复子状态

动态规划 Dynamic Programming

1. “Simplifying a complicated problem by breaking it down into simpler sub-problems”
   (in a recursive manner)

2. Divide & Conquer + Optimal substructure
   分治 + 最优子结构

3. 顺推形式： 动态递推

DP 顺推模板

```
function DP():

  dp = [][] # 二维情况


  for i = 0 .. M {
    for j = 0 .. N {
       dp[i][j] = _Function(dp[i’][j’]…)
    }
  }

  return dp[M][N];
```

关键点

动态规划 和 递归或者分治 没有根本上的区别（关键看有无最优的子结构）

拥有共性：找到重复子问题

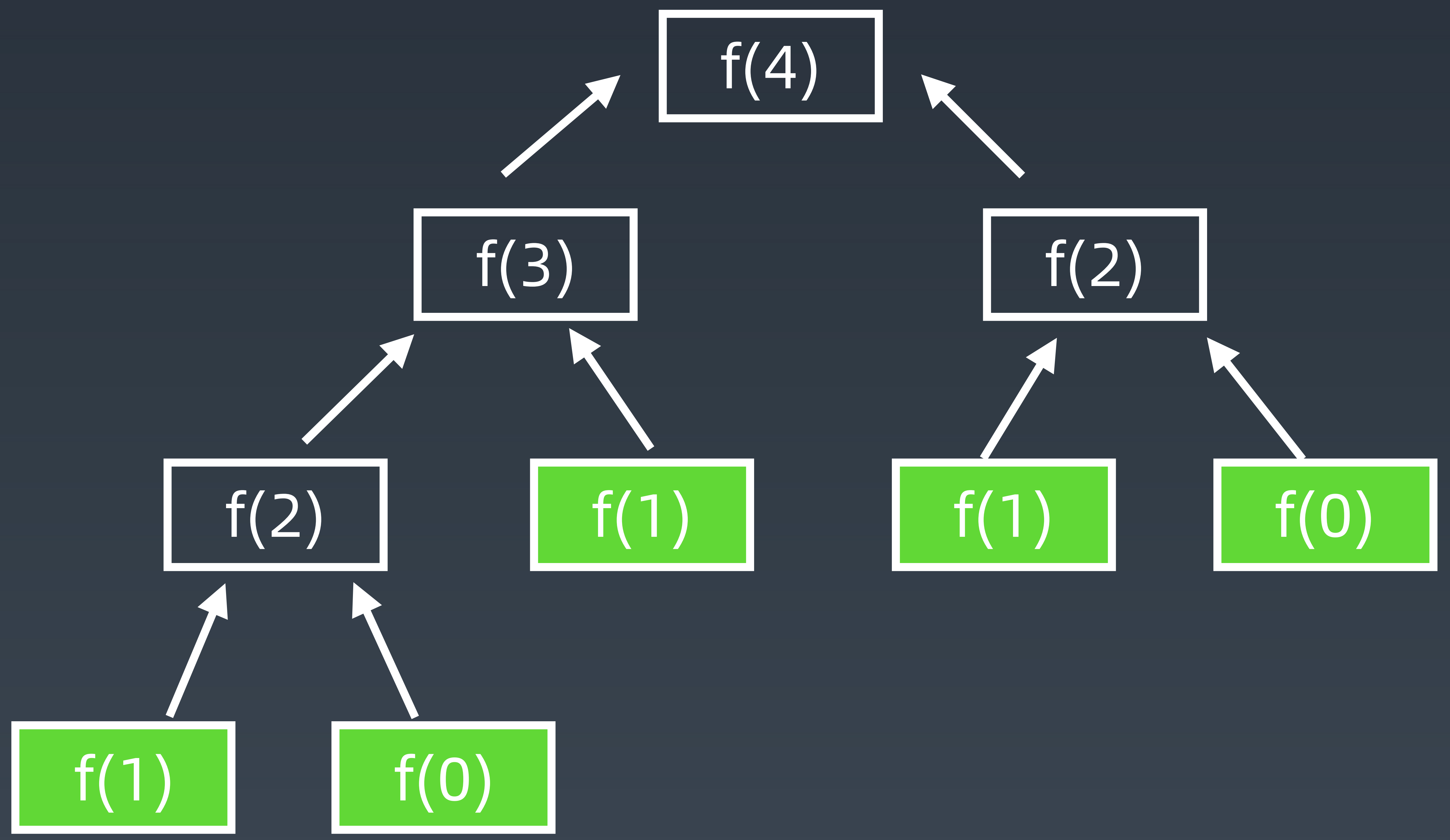
差异性：最优子结构、中途可以淘汰次优解

常见的 DP 题目和状态方程

爬楼梯

递归公式：

$f(n) = f(n - 1) + f(n - 2)$, $f(1) = 1, f(0) = 0$




```
def f(n):
  if n <= 1: return 1
  return f(n - 1) + f(n - 2)
```

O(2^n)

```
def f(n):
  if n <= 1: return 1
  if n not in mem:
    mem[n] = f(n - 1) + f(n - 2)
  return mem[n]
```

O(n)

```
def f(n):
  dp = [1] * (n + 1)
  for i in range(2, n + 1):
    dp[i] = dp[i - 1] + dp[i - 2]
  return dp[n]
```

O(n)

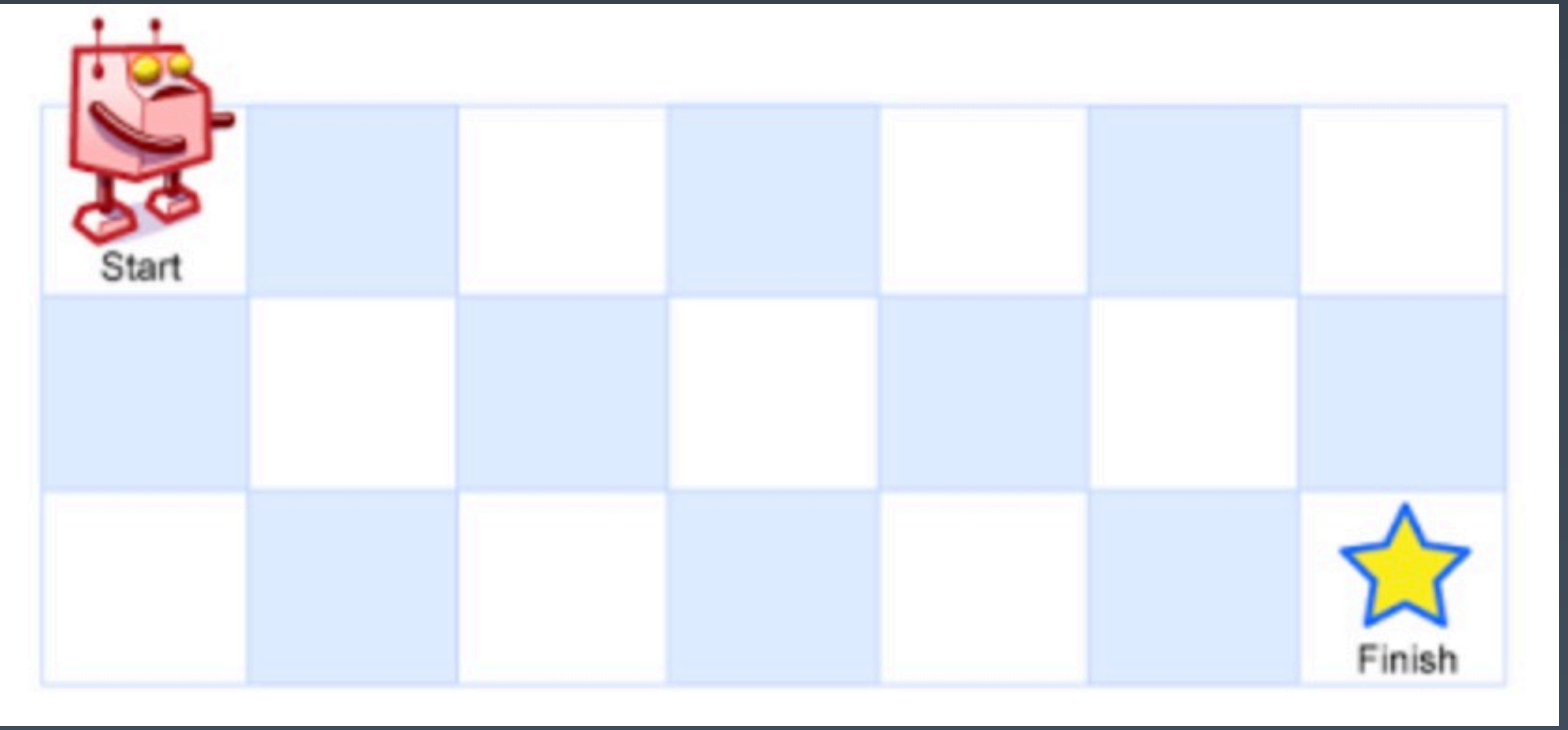
```
def f(n):
  x, y = 1, 1
  for i in range(1, n):
    y, x = x + y, y
  return y
```

O(n), O(1)

不同路径

递归公式：

$f(x, y) = f(x-1, y) + f(x, y-1)$




```
def f(x, y):
  if x <= 0 or y <= 0: return 0
  if x == 1 and y == 1: return 1
  return f(x - 1, y) + f(x, y - 1)
```

```
def f(x, y):
  if x <= 0 or y <= 0: return 0
  if x == 1 and y == 1: return 1
  if (x, y) not in mem:
    mem[(x, y)] = f(x - 1, y) + f(x, y - 1)
  return mem[(x, y)]
```

O(mn), O(mn)

O(mn), O(mn)

```
def f(x, y):
  dp = [[0] * (m + 1) for _ in range(n + 1)]
  dp[1][1] = 1
  for i in range(1, y + 1):
    for j in range(1, x + 1):
      dp[i][j] = dp[i - 1][j] + dp[j][i - 1]
  return dp[y][x]
```

打家劫舍

```
dp[i]状态的定义:  max $ of robbing A[0 -> i]

dp[i] = max(dp[i - 2] + nums[i], dp[i - 1])
```

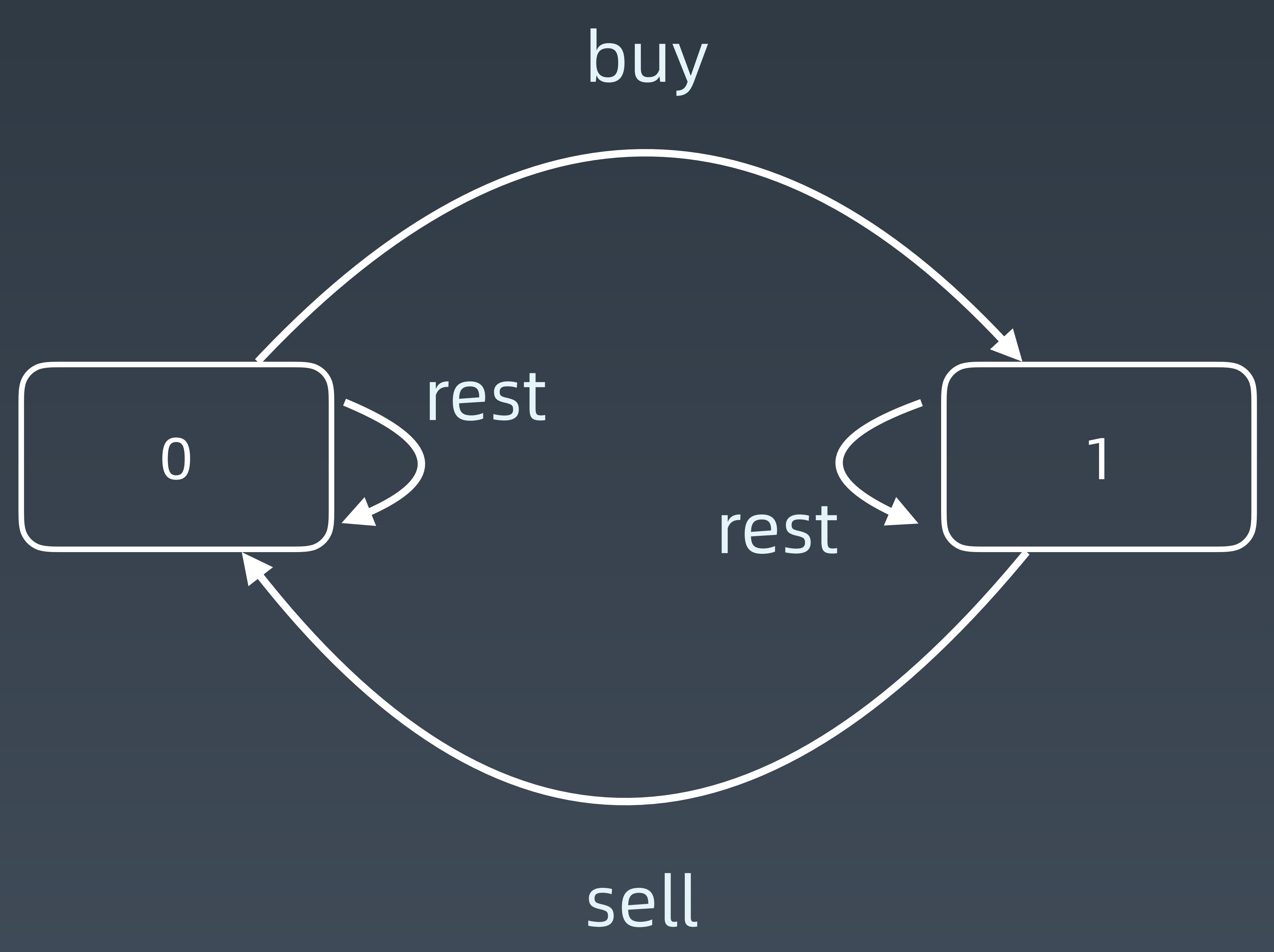
```
dp[i][0]状态定义: max $ of robbing A[0 -> i] 且没偷 nums[i]
dp[i][1]状态定义: max $ of robbing A[0 -> i] 且偷了 nums[i]


dp[i][0] = max(dp[i - 1][0], dp[i - 1][1]);
dp[i][1] = dp[i - 1][0] + nums[i];
```

最小路径和

dp[i][j]状态的定义： minPath(A[1 -> i][1 -> j])

dp[i][j] = min(dp[i - 1][j], dp[i][j - 1]) + A[i][j]

股票买卖



https://leetcode-cn.com/problems/best-time-to-buy-and-sell-stock/solution/yi-ge-fang-fa-tuan-mie-6-dao-gu-piao-wen-ti-by-l-3/

股票买卖

dp[i][k][0 or 1] (0 <= i <= n-1, 1 <= k <= K)

- i 为天数
- k 为最多交易次数
- [0,1] 为是否持有股票

总状态数： n * K * 2 种状态

```
for 0 <= i < n:
    for 1 <= k <= K:
        for s in {0, 1}:
            dp[i][k][s] = max(buy, sell, rest)
```

https://leetcode-cn.com/problems/best-time-to-buy-and-sell-stock/solution/yi-ge-fang-fa-tuan-mie-6-dao-gu-piao-wen-ti-by-l-3/

股票买卖

```
dp[i][k][0] = max(dp[i-1][k][0], dp[i-1][k][1] + prices[i])
              max(   选择 rest   ,           选择 sell        )
```

解释：今天我没有持有股票，有两种可能：

- 我昨天就没有持有，然后今天选择 rest，所以我今天还是没有持有；
- 我昨天持有股票，但是今天我 sell 了，所以我今天没有持有股票了。

```
dp[i][k][1] = max(dp[i-1][k][1], dp[i-1][k-1][0] - prices[i])
              max(   选择 rest   ,           选择 buy           )
```

解释：今天我持有着股票，有两种可能：

- 我昨天就持有着股票，然后今天选择 rest，所以我今天还持有着股票；
- 我昨天本没有持有，但今天我选择 buy，所以今天我就持有股票了。

股票买卖

初始状态：

```
dp[-1][k][0] = dp[i][0][0] = 0
dp[-1][k][1] = dp[i][0][1] = -infinity
```

状态转移方程：

```
dp[i][k][0] = max(dp[i-1][k][0], dp[i-1][k][1] + prices[i])
dp[i][k][1] = max(dp[i-1][k][1], dp[i-1][k-1][0] - prices[i])
```

https://leetcode-cn.com/problems/best-time-to-buy-and-sell-stock/solution/yi-ge-fang-fa-tuan-mie-6-dao-gu-piao-wen-ti-by-l-3/

高阶的 DP 问题

复杂度来源

1. 状态拥有更多维度（二维、三维、或者更多、甚至需要压缩）

2. 状态方程更加复杂

本质：内功、逻辑思维、数学

爬楼梯问题改进

- 1、2、3
- x1, x2, ..., xm 步
- 前后不能走相同的步伐
- Homework: https://leetcode-cn.com/problems/min-cost-climbing-stairs/

编辑距离

- 如果 word1[i] 与 word2[j] 相同，显然 dp[i][j]=dp[i-1][j-1]

- 如果 word1[i] 与 word2[j] 不同，那么 dp[i][j] 可以通过
    1. 在 dp[i-1][j-1] 的基础上做 replace 操作达到目的
    2. 在 dp[i-1][j] 的基础上做 insert 操作达到目的
    3. 在 dp[i][j-1] 的基础上做 delete 操作达到目的

  取三者最小情况即可

Homework

1. https://leetcode-cn.com/problems/longest-increasing-subsequence/
2. https://leetcode-cn.com/problems/decode-ways/
3. https://leetcode-cn.com/problems/longest-valid-parentheses/
4. https://leetcode-cn.com/problems/maximal-rectangle/
5. https://leetcode-cn.com/problems/distinct-subsequences/
6. https://leetcode-cn.com/problems/race-car/

THANKS!

极客大学