综合题

1. 判断方程 $|x|^{\frac{1}{4}} + |x|^{\frac{1}{2}} - \cos x = 0$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 有几个根,并证明之.

解 设 $f(x) = |x|^{\frac{1}{4}} + |x|^{\frac{1}{2}} - \cos x$, 由 $f(-x) = f(x)$, 因此考虑区间 $(0, +\infty)$, 当 $x \geqslant 1$ 时, $f(x) \geqslant 1 + 1 - \cos x > 0$. 而 $f(0) = -\cos = -1 < 0$, $f(1) = 1 + 1 - \cos 1 > 0$, 知 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内至少有一根. 又 $x \in (0,1)$ 时, $f'(x) = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \sin x > 0$, 知 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内只有一个根, 由于 $f(x)$ 是偶函数, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内仅有两个根.

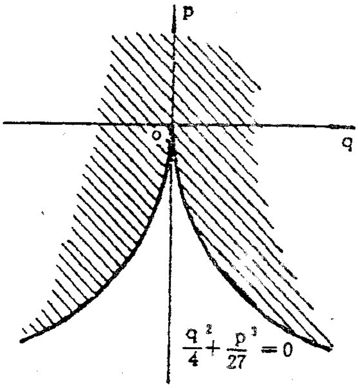

图 3-22

2. 就 k 的不同取值情况, 确定下列方程实根的数目, 确定这些根所在的范围.

(1) $x^3 - 3x^2 - 9x + k = 0$;　　(2) $\ln x = kx$.

解 (1) 设 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + k$, 则

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$.

令 $f'(x) = 0$, 得驻点 $x = -1$ 或 3. 由于

$f(-1) = 5 + k$, $f(3) = k - 27$,

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, 故当 $k < -5$ 时, $f(1) < 0$, $f(3) < 0$, 且 $f'(x) > 0$　$x \in (-\infty, -1)$, $f'(x) < 0$; $x \in (-1, 3)$; $f'(x) > 0$, $x \in (3, +\infty)$, 因此, 有且仅有一实根位于 $(3, +\infty)$ 内.

当 $-5 < k < 27$ 时, $f(1) > 0$, $f(3) < 0$, 导数 $f(x)$ 的符号变化同上, 于是, 有三个实根, 分别位于 $(-\infty, -1)$, $(1, 3)$ 及 $(3, +\infty)$ 内.

当 $k > 27$ 时, $f(3) > 0$, $f(1) > 0$, 因此, 有且仅有一实根位于 $(-\infty, -1)$ 内.

(2) $\ln x = kx$.

解 当 $k = 0$ 时方程显然仅有一个根 $x = 1$. 因此, 不妨设 $k \neq 0$. 令

$f(x) = \ln x - kx\ (x > 0)$, 则 $f'(x) = \frac{1}{x} - k$.

令 $f'(x) = 0$, 得驻点 $x = \frac{1}{k}$. 由于 $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$, 故曲线的图形终呈凸状.

当 $x \in (0, \frac{1}{k})$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $x \in (\frac{1}{k}, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$. 又因

$f(\frac{1}{k}) = \ln\frac{1}{k} - 1$, 故当 $k > \frac{1}{e}$ 时, $f(\frac{1}{k}) < 0$, 此时方程无根. 当 $0 < k < \frac{1}{e}$ 时, $f(\frac{1}{k}) > 0$, 因此, 方程有两个实根, 分别位于 $(0, \frac{1}{k})$ 和 $(\frac{1}{k}, +\infty)$ 内.

当 $-\infty < k, 0$ 时, 由于 $\lim\limits_{x \to +0} f(x) = -\infty$, $f(1) = -k > 0$, $f'(x) = \frac{1}{x} - k > 0$, 故此

时方程有且仅有一实根位于$(0,1)$内.

3. 证明：若$\dfrac{a_0}{1}+\dfrac{a_1}{2}+\cdots+\dfrac{a_n}{n+1}=0$，则在$(0,1)$内必有某个$x_0$，使得

$a_0+a_1x_0+\cdots+a_nx_0^n=0$.

证　设$f(x)=\dfrac{a_0}{1}x+\dfrac{a_1}{2}x^2+\cdots+\dfrac{a_n}{n+1}x^{n+1}$，$f'(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$，由$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可等，且$f(0)=0=f(1)$，由罗尔定理知至少存在一点$x_0\in(0,1)$，使$f'(x_0)=0$. 由$f'(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$，知

$a_0+a_1x_0+\cdots+a_nx_0^n=0$.

4. 证明方程$x^3+px+q=0$.

(1) 有唯一实根的条件是$\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}\geqslant 0$；(2) 有三个实根的条件是$\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}<0$.

证　设$f(x)=x^3+px+q$，则$f'(x)=3x^2+p$.

若$p\geqslant 0$，则$f'(x)>0(x\neq 0)$，故$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上严格增大的，并且显然$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，故$f(x)=0$有唯一实根.

若$p<0$，令$f'(x)=0$解得$x_2=\sqrt{-\dfrac{p}{3}}$，$x_1=-\sqrt{-\dfrac{p}{3}}$. 且$x_1<x_2$在$(-\infty,x_1)$和$(x_2,+\infty)$上$f(x)$严格增大，在$[x_1,x_2]$上$f(x)$严格减小，曲线如图 3－23 所示.

因此，若$f(x_1)f(x_2)>0$，则方程$f(x)=0$仅有一个实根. 若$f(x_2)>0$，$f(x_1)<0$，则方程$f(x)=0$恰有三个实根. 由于

$f(x_2)=-\dfrac{p}{3}\cdot\sqrt{-\dfrac{p}{3}}+p\cdot\sqrt{-\dfrac{p}{3}}+q$，

$f(x_1)=\dfrac{p}{3}\cdot\sqrt{-\dfrac{p}{3}}-p\cdot\sqrt{-\dfrac{p}{3}}+q$，故

$f(x_1)f(x_2)>0$相当于$\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}>0$，此即方程仅有一实根的条件（前面$p\geqslant 0$的情形可合并到条件中去），而$f(x_2)<0$及$f(x_1)>0$相当于$\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}<0$，此即方程有三实根的条件.

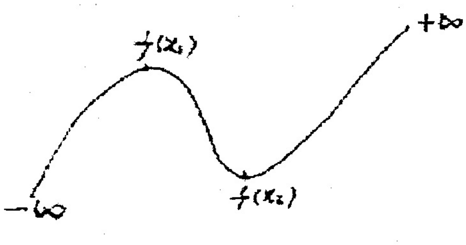

图 3－23

5. 若$3a^2-5b<0$，证明方程$x^5+2ax^3+3ax+4c=0$仅有一实根.

证　设$f(x)=x^5+2ax^3+3bx+c$，由$f(x)$是奇次多项式，由第一章 § 4 例 8 结

论知 $f(x)=0$ 在$(-\infty,+\infty)$内至少有一个根,又

$$f'(x)=5x^4+6ax^2+3b=5(x^2)^2+6ax^2+3b,$$

且判别式 $\Delta=36a^2-4\cdot5\cdot3b=12(3a^2-5b)<0$,知 $f'(x)>0$,所以方程在$(-\infty,+\infty)$内仅有一个根.

6.设当 $x>0$ 时,方程 $kx+\dfrac{1}{x^2}=1$ 有且仅有一解,求 k 的取值范围.

解 设 $f(x)=kx+\dfrac{1}{x^2}-1$,得 $f'(x)=k-\dfrac{2}{x^3}$,$f''(x)=\dfrac{6}{x^4}>0$.

(1)当 $k\leqslant0$,$f'(x)<0$,$f(x)$ 在$(0,+\infty)$内严格递减且 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=+\infty$,

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\begin{cases}-1, & k=0,\\ -\infty, & k<0.\end{cases}$ 知 $k\leqslant0$ 时,$f(x)=0$ 在$(0,+\infty)$内仅有一个根.

(2)当 $k>0$,$f'(x)=0$,解得 $x_0=\sqrt[3]{\dfrac{2}{k}}$.

且 $f''(x_0)>0$,$f(x_0)$是唯一极小值,知 $f(x_0)$为最小值,要使 $f(x)=0$ 在$(0,+\infty)$内仅有一个根,由 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=+\infty$,$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$,必须使 $f(x_0)=0$,解得 $k=\dfrac{2}{9}\sqrt{3}$.

因此,当 $k=\dfrac{2}{9}\sqrt{3}$ 或 $k\leqslant0$ 时方程仅有一个根.

7.设 $f(x)$ 是 m 次多项式,且 $x=a$ 是$f(x)=0$ 的 n 重根($n\leqslant m$),即 $f(x)=(x-a)^n\varphi(x)$,其中 $\varphi(x)$ 是 $m-n$ 次多项式,且 $\varphi(a)\neq0$,试证明 $x=a$ 分别是$f'(x)=0,f''(x)=0,\cdots,f^{(n-1)}(x)=0$ 的 $n-1$ 重根,$n-2$ 重根,$\cdots$,单根.

证 由题意知 $\varphi(a)\neq0$,且

$$f'(x)=n(x-a)^{n-1}\varphi(x)+(x-a)^n\varphi'(x)$$
$$=(x-a)^{n-1}[n\varphi(x)+(x-a)\varphi'(x)]$$

设 $\varphi_1(x)=n\varphi(x)+(x-a)\varphi'(x)$,$\varphi_1(a)=n\varphi(a)\neq0$,知 $x=a$ 是$f'(x)=0$ 的$(n-1)$重根,又 $f'(x)=(x-a)^{n-1}\varphi_1(x)$与上面证明类似,同理可证 $x=a$ 是$f''(x)=0$ 的$(n-2)$重根,$\cdots$,$x=a$ 是$f^{(n-1)}(x)=0$ 的一重根.

8.试证明:若具有实系数 $a_k(k=0,1,\cdots,n)$ 多项式

$$p_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n \qquad (a_0\neq0)$$

之一切实根为实数,则其逐次的导数函数 $p'_n(x),p''_n(x),\cdots,p_n^{(n-1)}(x)$ 也仅有实

根,

证　根据假设,此处 n 次多项式 $p_n(x)$ 有 n 个实根.记诸实根为 $a_1, a_2, \cdots, a_l$,并且 a_i 是 k_i 重根,$k_i \geqslant 1(i = 1,2,\cdots,l)$,有 $k_1 + k_2 + \cdots + k_l = n$.于是可改写 $p_n(x)$ 为

$$p_n(x) = a_0(x - a_1)^{k_1}(x - a_2)^{k_2}\cdots(x - a_i)^{k}.$$

显见 a_i 为 $p'_n(x)$ 的 $k_i - 1$ 重根$(i = 1,2,\cdots,l)$.由 $p_n(a_1) = p_n(a_2) = \cdots = p_n(a_1) = 0$,$p_n(x)$ 可微,据洛尔定理,存在 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{l-1}$,而 $\xi_i \in (a_i, a_{i+1})$,使 $p'_n(\xi_i) = 0(i = 1,2,\cdots,l - 1)$ 于是有

$p'_n(x)$ 根		$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{l-1}$	a_1	a_2	$\cdots$	a_l
重数		单根	$k_1 - 1$	$k_2 - 1$	$\cdots$	$k_i - 1$

即 $n - 1$ 次多项式 $p'_n(x)$ 的根恰有$(k_1 - 1) + (k_2 - 1) + \cdots + (k_l - 1) + (l - 1) = k_1 + k_2 + \cdots + k_l - 1 = n - 1$ 个,这就是说,一个 n 次多项式,若 n 个根均为实根的话,则其导函数 $n - 1$ 次多项式的 $n - 1$ 个根也必全为实根.反复运用这一结果,由 $p'_n(x)$ 的 $n - 1$ 个根皆为实根,便可推知 $p''_n(x)$ 的 $n - 2$ 个根也均为实根.如此下去,即知关于 $p_n(x)$ 的一切低阶导函数 —— 直至 $p^{(n-1)}(x)$ 也仅有实根.

9.证明:勒让德多项式 $p_n(x) = \dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{d^n}{dx^n}[(x^2 - 1)^n]$的一切根都是实数且包含于区间(1,1)中.

证　显然,$2n$ 次多项式 $Q_{2n}(x) = (x^2 - 1)^n = (x + 1)^n(x - 1)^n$ 仅有实根(-1)是 n 重根,1 也是 n 重根.因此,根据 8 题的结果知 $p_n(x) = \dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{d^n}{dx^n}Q_{2n}(x)$ 仅有实根,且都含于$[-1,1]$中.但显然 1 和 1 都不是 $p_n(x)$ 的根(因为,例如,1 是 $Q_{2n}(x)$ 的 n 重根,故 1 是$\dfrac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}Q_{2n}(x)$ 的单根.因而 1 不是$\dfrac{d^n}{dx^n}Q_{2n}(x)$ 的根).因此,$p_n(x)$ 的根全部位于$(-1,1)$中,证毕.

10.设 $f'(x)$ 在(a,b)内存在,a,b 均为常数且 $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = \lim\limits_{x\to b-} f(x) = A$(常数),证明至少存在一点 $\xi \in (a,b)$,使 $f'(\xi) = 0$(a,b 均为有限数).

证　令 $F(x) = \begin{cases} A, & x = a, \\ f(x), & x \in (a,b) \\ A, & x = b, \end{cases}$ 由 $\lim\limits_{x\to a+} F(x) = \lim\limits_{x\to a+} f(x) = A = F(a)$,

知 $F(x)$ 在 $x = a$ 处连续,同理可证 $F(x)$ 在 $x = b$ 处连续,当 $x \in (a,b)$ 时,$F(x) = f(x)$ 显然连续,因此,$F(x)$ 在闭区间$[a,b]$上连续,在开区间内可导,且 $F(a) = F(b)$

$= A$，由罗尔定理知，至少存在一点 $\xi \in (a,b)$，使 $F'(\xi) = 0$，又 $x \in (a,b)$ 时，$F(x) = f(x)$ 或 $F'(x) = f'(x)$，所以 $f'(\xi) = 0$.

11. 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上恰有二阶导数，且 $f(a) = f(b) = 0, f'(a)f'(b) > 0$，证明存在 $\xi \in (a,b)$ 和 $\tau \in (a,b)$，使 $f(\xi) = 0, f''(\tau) = 0$.

证法一 用反证法证明至少存在一点 $\xi \in (a,b)$，使 $f(\xi) = 0$，若不然，假设对每一个 $x \in (a,b)$，都有 $f(x) \neq 0$，则如有对每一 $x \in (a,b)$，或者 $f(x)$ 都大于零或者 $f(x)$ 都小于零，否则，存在 $x_1 < x_2, x_1, x_2 \in (a,b)$ 使 $f(x_1)f(x_2) < 0$，由根的存在定理知存在一点 $c \in (a,b)$，使 $f(c) = 0$ 假设条件 $f(x) \neq 0$ 相矛盾，不妨设对每一个 $x \in (a,b)$，$f(x) > 0$.

$$f(a) = \lim_{x \to a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{x - a} \geqslant 0,$$

$f'(b) = \lim\limits_{x \to b-} \dfrac{f(x) - f(b)}{x - b} = \lim\limits_{x \to b} \dfrac{f(x)}{x - b} \leqslant 0$，得 $f'(a)f'()b \leqslant 0$ 与条件 $f'(a)f'(b) > 0$ 相矛盾，故至少存在一点 $\xi \in (a,b)$，使 $f(\xi) = 0$.

由 $f(x)$ 在 $[a,\xi]$ 上满足罗尔定理，至少存在一点 $c_1 \in (a,\xi)$，使 $f'(c_1) = 0, f(x)$ 满足罗尔定理，至少存在一点 $\tau \in (c_1, c_2) \subset (a,b)$，使 $f''(\tau) = 0$.

证法二 由条件 $f'(a)f'(b) > 0$，不妨设 $f'(a) > 0, f'(b) > 0$，由导数定义

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{x - a} = f'(a) > 0,$$

由极限的保号性知存在 $\delta_1 > 0$，当 $x \in (a, a + \delta_1)$ 时，$\dfrac{f(x)}{x - a} > 0$，又 $x - a > 0$，有 $f(x) > 0$ 取 $a_1 \in (a, a + \delta_1), f(a_1) > 0$. 又 $\lim\limits_{x \to b-} \dfrac{f(x) - f(b)}{x - b} = \lim\limits_{x \to b-} \dfrac{f(x)}{x - b} = f'(b) > 0$，由极限的保号性知存在 $\delta_2 > 0$（使 $b - \delta_2 > a_1$），当 $x \in (b - \delta_2, b)$ 时，$\dfrac{f(x)}{x - b} > 0$，又 $x - b < 0$，有 $f(x) < 0$，取 $b_1 \in (b - \delta_2, b), f(b_1) > 0$，且 $a_1 < b_1$. 由 $f(x)$ 在 $[a_1, b_1]$ 上连续，且 $f(a_1) \cdot f(b_1) < 0$，根根的存在定理知至少存在一点 $\xi \in (a,b)$，使 $f(\xi) = 0$，证明存在 $\tau \in (a,b)$，使 $f''(\tau) = 0$ 与证法一相同.

12. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f'(x) \neq 0$，证明存在 $\xi, \tau \in (a,b)$，使得 $\dfrac{f'(\xi)}{f'(\tau)} = \dfrac{e^b - e^a}{b - a} e^{-\tau}$.

证 要证原等式成立，由 $f'(x) \neq 0$ 只要证 $f'(\xi) = \dfrac{e^b - e^a}{b - a} \cdot \dfrac{f'(\tau)}{e^\tau}$ 成立，由 $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) \neq 0$，只要证