最大团问题

最大团问题

问题: 无向图G=<V,E>, 求G的最大团.

G的子图: $G'=\langle V',E'\rangle$, 其中 $V'\subseteq V,E'\subseteq E$,

G的补图: $\overline{G}=<V, E'>, E'$ 是E关于完全图

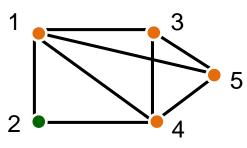
边集的补集

G中的 \Box : G 的完全子图

G的最大团: 顶点数最多的团

实例

最大团: {1,3,4,5},



独立集与团

G 的点独立集: G 的顶点子集 A,且 $\forall u, v \in A, \{u,v\} \notin E$.

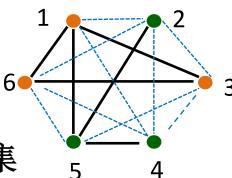
最大点独立集: 顶点最多的点独立集

 $\frac{\mathbf{o}}{G}$: $U \neq G$ 的最大团当且仅当 $U \neq G$ 的最大点独立集.

G 的最大团:

$$U = \{ 1, 3, 6 \}$$

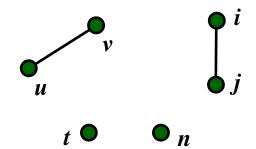
补图 \overline{G} 的最大点独立集



应用

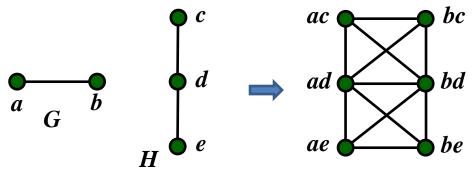
编码,故障诊断,计算机视觉,聚类分析, 经济学,移动通信,VLSI电路设计,...

例子: 噪音使信道传输字符发生混淆 混淆图 $G=\langle V,E\rangle$,V为有穷字符集, $\{u,v\}\in E\Leftrightarrow u$ 和v易混淆



编码设计

xy与uv混淆 $\Leftrightarrow x$ 与u混淆且y与v混淆 $\lor x=u$ 且y与v混淆 $\lor x$ 与u混淆且y=v



G与H 的正规积

为减少噪音干扰,设计代码应该找混淆图中的最大点独立集

最大团问题

问题: 给定无向图 $G = \langle V, E \rangle$, 其中顶点集 $V = \{1, 2, ..., n\}$, 边集为 E. 求 G 中的最大团.

解: $\langle x_1, x_2, ..., x_n \rangle$ 为 0-1向量, x_k =1当且仅当顶点 k属于最大团.

蛮力算法:对每个顶点子集,检查是 否构成团,即其中每对顶点之间是否 都有边.有 2ⁿ 个子集,至少需要指数 时间.

分支限界算法设计

搜索树为子集树.

结点 $< x_1, x_2, ..., x_k >$ 的含义: 已检索顶点 1, 2, ..., k, 其中 $x_i = 1$ 表示 顶点 i 在当前的团内, i = 1, 2, ..., k

约束条件:该顶点与当前团内每个顶 点都有边相连

界: 当前已检索到的极大团的顶点数

代价函数

代价函数:目前的团可能扩张为极大团的顶点数上界

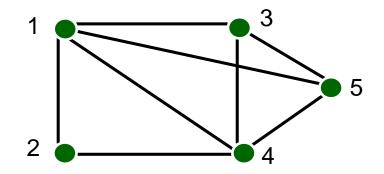
$$F = C_n + n - k$$

其中 C_n 为目前团的顶点数(初始为0)

k 为结点层数

最坏情况下时间: $O(n2^n)$

实例



顶点编号顺序为 1, 2, 3, 4, 5,

对应 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 ,

 $x_i = 1$ 当且仅当 i 在团内

分支规定左子树为1,右子树为0.

B 为界,F 为代价函数值.

搜索树

1 3 5

a: 极大团 {1,2,4}, 顶点数为 3, 界 *B*=3;

b:代价函数值 F=3, 回溯;

c: 极大团 {1,3,4,5}, 顶点数为 4,

修改界 B=4;

d: F=3,不必搜索;

e: F=4, 不必搜索.

输出最大团 {1,3,4,5}, 顶点数为 4.

小结

- 最大团问题的定义 与点独立集的关系
- 分支限界算法的设计 树的结构:子集树 分支约束条件 代价函数与界的设定
- 最坏情况的时间复杂度: $O(n2^n)$