卷积计算

卷积计算：蛮力算法

向量 $a=(a_0,a_1,\ldots,a_{n-1})$和$b=(b_0,b_1,\ldots,b_{n-1})$

$$A(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_{n-1}x^{n-1}$$

$$B(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_{n-1}x^{n-1}$$

$$C(x)=A(x)B(x)$$

$$=a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)x+\ldots+a_{n-1}b_{n-1}x^{2n-2}$$

$C(x)$的系数向量就是$a*b$.

卷积 $a*b$ 计算等价于多项式相乘

蛮力算法的时间：$O(n^2)$

计算2*n*-1次多项式*C*(*x*)

1. 选择值 $x_0, x_1, \ldots, x_{2n-1}$,
   求出 $A(x_j)$ 和 $B(x_j)$,
   $j = 0, 1, \ldots, 2n-1$

主要步骤:多项式求值

2. 对每个 j,计算$C(x_j)=A(x_j)B(x_j)$

3. 利用多项式插值方法，由$C(x)$ 在

$$x = x_0,\ x_1, \ldots, x_{2n-1}$$

   的值求出多项式 $C(x)$的系数

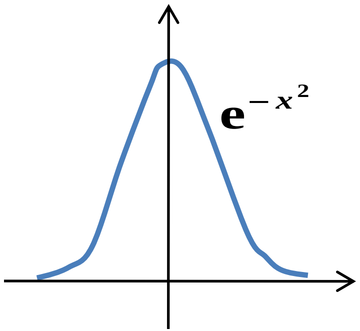
如何选择$x_0,x_1,\ldots,x_{2n-1}$的值？
高效多项式求值算法

高斯滤波的权值函数

高斯滤波的权值函数为

$$w_s = \frac{1}{z} e^{-s^2}, \quad s = 0, \pm 1, \ldots, \pm k$$

$$w = (w_{-k}, \ldots, w_{-1}, w_0, w_1, \ldots, w_k)$$



其中 z 用于归一化处理，使所有的权值之和为1. 处理结果

$$a_i' = \sum_{s=-k}^{k} a_{i+s} w_s$$

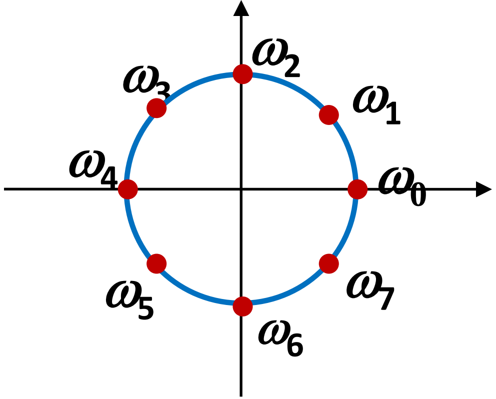
2*n*个数的选择:1的2*n*次根

$$\omega_j = \mathrm{e}^{\frac{2\pi j}{2n}\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\frac{\pi j}{n}\mathrm{i}}$$

$$= \cos\frac{\pi j}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi j}{n}$$

$j=0,1,\ldots,2n-1$，$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$

n=4 的实例



$$\omega_0 = 1, \qquad \omega_1 = e^{\frac{\pi}{4}i} = \sqrt{2}/2 + \sqrt{2}/2 \cdot i,$$

$$\omega_2 = e^{\frac{\pi}{2}i} = i, \quad \omega_3 = e^{\frac{3\pi}{4}i} = -\sqrt{2}/2 + \sqrt{2}/2 \cdot i,$$

$$\omega_4 = e^{\pi i} = -1, \ \omega_5 = e^{\frac{5\pi}{4}i} = -\sqrt{2}/2 - \sqrt{2}/2 \cdot i,$$

$$\omega_6 = e^{\frac{3\pi}{2}i} = -i, \ \omega_7 = e^{\frac{7\pi}{4}i} = \sqrt{2}/2 - \sqrt{2/2} \cdot i$$

快速傅立叶变换FFT

1. 对 $x=1, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{2n-1}$, 分别计算 $A(x)$，$B(x)$

2. 利用步1的结果对每个 $x=1, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{2n-1}$, 计算 $C(x)$，得到 $C(1)=d_0, C(\omega_1)=d_1, \ldots, C(\omega_{2n-1})=d_{2n-1}$

3. 构造多项式
   $$D(x) = d_0+d_1x+d_2x^2+\ldots+d_{2n-1}x^{2n-1}$$

4. 对$x=1, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{2n-1}$, 计算$D(x)$, $D(1)$, $D(\omega_1)$, $\ldots$, $D(\omega_{2n-1})$

快速傅立叶变换FFT(续)

可以证明：

$$D(1) = 2n\,c_0$$
$$D(\omega_1) = 2n\,c_{2n\text{-}1}$$
$$\cdots$$
$$D(\omega_{2n\text{-}1}) = 2nc_1$$

$\Rightarrow$

$$c_0 = D(1)/2n$$
$$c_{2n\text{-}1} = D(\omega_1)/2n$$
$$\cdots$$
$$c_1 = D(\omega_{2n\text{-}1})/2n$$

知道了$D(x)$的值，就能求$C(x)$的系数

算法的关键

令 $x = 1, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{2n-1}$,

- 步 1对 2n个x值分别求值多项式 $A(x)$, $B(x)$
- 步2 做 2n次乘法
- 步3 对2n个x值求值多项式 $D(x)$

关键：一个对所有的 x 快速多项式求值算法

小结

卷积计算

- 蛮力算法$O(n^2)$
- 快速傅立叶变换FFT算法

  确定x的取值：1 的 $2n$ 次根

  关键步骤：多项式对x求值

如何设计多项式求值的快速算法?