有关函数渐近的界的定理

定理1

定理 设 f 和 g是定义域为自然数集合的函数.

(1) 如果 $\lim_{n\to\infty} f(n)/g(n)$存在, 并且等于某个常数$c>0$, 那么 $f(n) = \Theta(g(n))$.

(2) 如果 $\lim_{n\to\infty} f(n)/g(n)=0$，那么 $f(n) = o(g(n))$.

(3) 如果 $\lim_{n\to\infty} f(n)/g(n)=+\infty$，那么 $f(n) = \omega(g(n))$.

证明用到Θ,o,ω定义

证明定理1（1）

根据极限定义，对于给定正数 ε 存在某个n_0，只要$n \geq n_0$，就有

$$|f(n)/g(n)-c| < \varepsilon$$

$$c-\varepsilon < f(n)/g(n) < c+\varepsilon$$

$\boxed{取\varepsilon=c/2,}$

$$c/2 < f(n)/g(n) < 3c/2 < 2c$$

对所有$n \geq n_0$，$f(n) \leq 2cg(n)$, 于是 $f(n)=O(g(n))$；

对所有$n \geq n_0$，$f(n) \geq (c/2)g(n)$,于是 $f(n)=\Omega(g(n))$.

从而 $f(n) = \Theta(g(n))$.

例：估计函数的阶

例1 设 $f(n)=\frac{1}{2}n^2-3n$，证明 $f(n)=\Theta(n^2)$.

证 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n^2-3n}{n^2}=\frac{1}{2}$$

根据定理1，有 $f(n)=\Theta(n^2)$.

一些重要结果

可证明：多项式函数的阶低于指数函数的阶

$$\boxed{n^d = o(r^n),\ r > 1,\ d > 0}$$

证　不妨设d为正整数，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^d}{r^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{dn^{d-1}}{r^n \ln r} = \lim_{n\to\infty}\frac{d(d-1)n^{d-2}}{r^n(\ln r)^2}$$

$$= \ldots = \lim_{n\to\infty}\frac{d!}{r^n(\ln r)^d} = 0$$

分子分母
求导数

一些重要结果(续)

可证明：对数函数的阶低于幂函数的阶

$$\boxed{\ln n = o\,(n^d)，\quad d > 0}$$

证

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^d} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{dn^{d-1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{dn^d} = 0$$

定理 2

定理 设函数f, g, h的定义域为自然数集合，

(1) 如果 $f=O(g)$ 且 $g=O(h)$，那么 $f=O(h)$.

(2) 如果 $f=\Omega(g)$ 且 $g=\Omega(h)$，那么 $f=\Omega(h)$.

(3) 如果 $f=\Theta(g)$ 和 $g=\Theta(h)$，那么 $f=\Theta(h)$

函数的阶之间的关系具有传递性

例子

按照阶从高到低排序以下函数：

$f(n)=(n^2+n)/2$， $g(n)=10n$

$h(n)=1.5^n$， $t(n)=n^{1/2}$

$h(n) = \omega(f(n))$,

$f(n) = \omega(g(n))$,

$g(n) = \omega(t(n))$,

排序 $h(n), f(n), g(n), t(n)$

定理3

定理 假设函数f和g的定义域为自然数集，若对某个其它函数 h, 有 $f=O(h)$ 和 $g=O(h)$，那么

$$f+g=O(h).$$

该性质可以推广到有限个函数.

算法由有限步骤构成．若每一步的时间复杂度函数的上界都是 $h(n)$，那么该算法的时间复杂度函数可以写作 $O(h(n))$.

小结

- 估计函数的阶的方法：

  计算极限

  阶具有传递性

- 对数函数的阶低于幂函数的阶，多项式函数的阶低于指数函数的阶.

- 算法的时间复杂度是各步操作时间之和，在常数步的情况下取最高阶的函数即可.