差消法化简
高阶递推方程

快速排序

- 假设 $A[p..r]$ 的元素彼此不等

  以首元素$A[1]$对数组 $A[p..r]$划分,使得:

  小于x 的元素放在 $A[p..q-1]$

  大于 x 的元素放在 $A[q+1..r]$

- 递归对 $A[p..q-1]$和 $A[q+1..r]$ 排序

工作量：子问题工作量+划分工作量

输入情况

- 有 n 种可能的输入

x 排好序位置	子问题 1规模	子问题 2规模
1	0	$n-1$
2	1	$n-2$
3	2	$n-3$
...	...	...
$n-1$	$n-2$	1
n	$n-1$	0

对每个输入，划分的比较次数都是 $n-1$

工作量总和

$$T(0) + T(n-1) + n-1$$

$$T(1) + T(n-2) + n-1$$

$$T(2) + T(n-3) + n-1$$

$$\cdots$$

$$+ \quad T(n-1) + T(0) + n-1$$

$$2[T(1)+\ldots+T(n-1)]+n(n-1)$$

快速排序平均工作量

假设首元素排好序在每个位置是等概率的

$$T(n)=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n-1}T(i)+O(n),\ n\geq 2$$

$$T(1)=0$$

全部历史递推方程

对于高阶方程应该先化简，然后迭代

差消化简

利用两个方程相减，将右边的项尽可能消去，以达到降阶的目的

$$T(n)=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n-1}T(i)+cn$$

$$nT(n)=\boxed{2\sum_{i=1}^{n-1}T(i)}+cn^2$$

$$(n-1)T(n-1)=\boxed{2\sum_{i=1}^{n-2}T(i)}+c(n-1)^2$$

差消化简

$$nT(n) - \underline{(n-1)T(n-1)}$$
$$= \underline{2T(n-1)} + cn^2 - c(n-1)^2$$

⇩ 化简

$$nT(n) = (n+1)T(n-1) + c_1 n$$

⇩ 变形

$$\frac{T(n)}{n+1} = \frac{T(n-1)}{n} + \frac{c_1}{n+1}$$

迭代求解

$$\frac{T(n)}{n+1}=\frac{T(n-1)}{n}+\boxed{\frac{c_1}{n+1}}=\cdots$$

$$=c_1\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{3}\right]+\frac{T(1)}{2}$$

代入初值

$$=c_1\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{3}\right]$$

$$=\Theta(\log n)$$

$$T(n)=\Theta(n\log n)$$

小结

- 对于高阶递推方程先要用差消法化简为一阶方程
- 迭代求解