函数的渐近的界

大O符号

定义：设 f 和 g是定义域为自然数集N上的函数．若存在正数 c 和 n_0，使得对一切 $n \geq n_0$有

$$0 \leq f(n) \leq c\, g(n)$$

成立, 则称 $f(n)$ 的渐近的上界是 $g(n)$，记作

$$f(n) = O(g(n))$$

例子

设 $f(n) = n^2 + n$，则

$f(n)=O(n^2)$，取 $c = 2$，$n_0 =1$ 即可

$f(n)=O(n^3)$，取 $c = 1$，$n_0 =2$ 即可

1. $f(n) = O(g(n))$，$f(n)$的阶不高于$g(n)$的阶.
2. 可能存在多个正数c，只要指出一个即可.
3. 对前面有限个值可以不满足不等式.
4. 常函数可以写作$O(1)$.

大Ω 符号

定义：设 f 和 g是定义域为自然数集N上的函数. 若存在正数 c 和 n_0，使得对一切 $n \geq n_0$有

$$0 \leq cg(n) \leq f(n)$$

成立, 则称 $f(n)$ 的渐近的下界是 $g(n)$, 记作

$$f(n) = \Omega(g(n))$$

例子

设 $f(n) = n^2 + n$，则

$f(n) = \Omega(n^2)$, 取 $c = 1, n_0 = 1$即可

$f(n) = \Omega(100n)$, 取 $c=1/100$, $n_0 = 1$即可

1. $f(n)=\Omega(g(n))$，$f(n)$的阶不低于$g(n)$的阶.
2. 可能存在多个正数c，指出一个即可.
3. 对前面有限个 n 值可以不满足上述不等式.

小o符号

定义 设 f 和 g是定义域为自然数集 N上的函数. 若对于任意正数 c 都存在 n_0，使得对一切 $n \geq n_0$有

$$0 \leq f(n) < c\, g(n)$$

成立, 则记作

$$f(n) = o(g(n))$$

例子

例子：$f(n)=n^2+n$，则

$$f(n)=o(n^3)$$

$c\geq 1$显然成立，因为$n^2+n<cn^3$（$n_0=2$）

任给$1>c>0$, 取 $n_0>\lceil 2/c \rceil$即可. 因为

$$cn \geq cn_0 > 2 \qquad （当 n \geq n_0）$$

$$n^2+n < 2n^2 < cn^3$$

1. $f(n)=o(g(n))$, $f(n)$的阶低于$g(n)$的阶
2. 对不同正数c, n_0不一样. c越小n_0越大.
3. 对前面有限个 n 值可以不满足不等式.

小 ω 符号

定义：设 f 和 g是定义域为自然数集 N上的函数. 若对于任意正数 c 都存在 n_0，使得对一切 $n \geq n_0$有

$$0 \leq cg(n) < f(n)$$

成立, 则记作

$$f(n) = \omega(g(n))$$

例子

设 $f(n) = n^2 + n$，则

$$f(n) = \omega(n),$$

不能写 $f(n) = \omega(n^2)$，因为取 $c = 2$，不存在 n_0 使得对一切 $n \geq n_0$ 有下式成立

$$c\,n^2 = \boxed{2n^2 < n^2 + n \;\times}$$

1. $f(n)=\omega(g(n))$, $f(n)$的阶高于$g(n)$ 的阶.
2. 对不同的正数c, n_0不等，c 越大n_0 越大.
3. 对前面有限个 n 值可以 不满足不等式.

Θ 符号

若 $f(n) = O(g(n))$ 且 $f(n) = \Omega(g(n))$,
则记作

$$f(n) = \Theta(g(n))$$

例子：$f(n) = n^2 + n$, $g(n) = 100n^2$，那么有

$$f(n)=\Theta(g(n))$$

1. $f(n)$ 的阶与 $g(n)$ 的阶相等.
2. 对前面有限个n 值可以不满足条件.

例子：素数测试

算法PrimalityTest(n)

输入：n,大于2的奇整数

输出：true 或者false

```
1．  s←⌊n^{1/2}⌋
2．  for  j←2  to  s
3．        if  j 整除 n
4．        then return false
5．  return true
```

问题：

若$n^{1/2}$ 可在$O(1)$计算, 基本运算是整除,以下表示是否正确?

$W(n)=O(n^{1/2})$

$W(n)=\Theta(n^{1/2})$

为什么?

小结

- 五种表示函数的阶的符号
  $O, \Omega, o, \omega, \Theta$
- 定义
- 如何用定义证明函数的阶？