第三章　定积分及其应用

大纲要求

了解反常积分的概念。

会　，求积分上限的函数的导数，计算反常积分。

理解定积分的概念，积分上限的函数。

掌握定积分的性质及定积分中值定理，换元积分法与分部积分法，牛顿一莱布尼茨公式，用定积分表达和计算一些几何量与物理量（平面图形的面积、平面曲线的弧长、旋转体的体积及侧面积、平行截面面积为已知的立体体积、功、引力、压力）及函数的平均值等.

内容精要

（一）　基本概念

定积分的概念是由求曲边梯形面积，变力作功，已知变速直线运动的速度求路程，密度不均质线段的质量所产生。

定义 3.3　设函数 f(x)在闭区间$\left[a,b\right]$上有定义，在闭区间[a,b]内任意插入 n-1 个分点将$\left[a,b\right]$分成

n 个小区间$[x_{x-i},x_i]$，记$\Delta x_i=x_i-x_i(i=1,2,\mathbf{L},n)$，$\forall x\in[x_{i-1},x_i]$，作乘积 $f(x_i)\Delta x_i$（称为积分元），把这些乘积相加得到和式$\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\Delta x_i$ （称为积分和式）设

$l=\max\left\{\Delta x_i:1\le i\le n\right\}$，若$\lim_{l\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\Delta x_i$ 极限存在唯一且该极限值与区是[a,b]的分法及分点x_i的取法无关，则称这个唯一的极限值为函数 f(x)在$\left[a,b\right]$上的定积分，记作

$\int_a^b f(x)dx$，即$\int_a^b f(x)dx=\lim_{l\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\Delta x_i$.

否则称 f(x)在$\left[a,b\right]$上不可积.

注 1 由牛顿莱布尼兹公式知,计算定积分与原函数有关,故这里借助了不定积分的符号。

注 2 若$\int_a^b f(x)dx$存在，区间$\left[a,b\right]$进行特殊分割，分点x_i进行特殊的取法得到的和式极限存在且与定积分的值相等，但反之不成立，这种思想在考题中经常出现，请读者要真正理解。

注 3 定积分是否存在或者值是多少只与被积函数式和积分区间有关与积分变量用什么字母表示无关，即$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt=\int_a^b f(u)du.$

定积分的几何意义： 若 f(x)在$[a,b]$上可积，且 $f(x)\geq 0,$ 则$\int_a^b f(x)dx$表示曲线 $y=f(x)$与直线$y=0,x=a,x=b$所围成的曲边梯形的面积.

同样，变力所作的功$w=\int_a^b f(x)dx$（其中 f(x)是变力）变速直线运动的路程 $S=\int_a^b v(t)dt$（$v(t)$是瞬时速度），密度不均质直线段$[a,b]$的质量$M=\int_a^b m(x)dx$（其中 $m(x)$是线密度）。

规定 $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx, \qquad \int_a^a f(x)dx=0.$

四、广义积分

定义 3.4 设函数$f(x)$在区间$[a,+\infty)$上连续，称记号$\int_a^{+\infty} f(x)dx \underline{\underline{记成}} \lim\limits_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)dx$（1）

为函数$f(x)$在无穷区间$[a,+\infty)$上的广义积分（或第一类广义积分）若（1）式右端极限存在，称广义积分$\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛，该极限值称为广义积分的值，否则称广义积分$\int_a^{+\infty} f(x)dx$发散。

由$f(x)$在$[a,+\infty)$连续必有原函数，设$f(x)$的原函数为$F(x)$。于是

$$\begin{aligned}\int_a^{+\infty} f(x)dx &= \lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)dx=\lim_{t\to+\infty}[F(t)-F(a)]\\ &=\lim_{t\to+\infty}F(t)-F(a)=\lim_{t\to+\infty}F(x)-F(a)\underline{\underline{记成}}F(x)\Big|_a^{+\infty},\end{aligned}$$

从而广义积分可以按照正常定积分计算方式来计算，即$\int_a^{+\infty} f(x)dx=F(x)\Big|_a^{+\infty}=\lim\limits_{t\to+\infty}F(x)-F(a)$

若$\lim\limits_{t\to+\infty}F(x)$（存在）=A，则$\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛，且$\int_a^{+\infty} f(x)dx=A-F(a).$若$\lim\limits_{t\to+\infty}F(x)$不存在，则$\int_a^{+\infty} f(x)dx$发散。

同理可得 $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx=F(x)\Big|_{-\infty}^{b}=F(b)-\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)$

若$\lim\limits_{t\to-\infty}F(x)$存在，则广义积分$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$收敛，否则发散。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}=\lim_{x\to+\infty}F(x)-\lim_{x\to-\infty}F(x)$$

若$\lim\limits_{t\to+\infty}F(x)$，$\lim\limits_{t\to-\infty}F(x)$都存在，则$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$收敛，否则发散。

定义 3.5 设$f(x)$在区间$(a,b]$上连续，$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$不存在（称 a 点为瑕点），$\forall e>0$且

$e<b-a$，称记号$\int_a^b f(x)dx \underline{\underline{记成}} \lim_{e\to 0^+}\int_{a+e}^b f(x)dx$

与上面研究方式相同，可得$\int_a^b f(x)dx = F(x)\big|_a^b = F(b)-\lim_{e\to a^+}F(x)$

若$\lim_{x\to a^+}F(x)$存在，则广义积分$\int_a^b f(x)dx$收敛，否则发散。

同理若$f(x)$在$[a,b)$上连续，$\lim_{x\to b^-}f(x)$不存在（称 b 点为瑕点），有

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\big|_a^b = \lim_{x\to b^-}F(x)-F(a)$$

若$f(x)$在$[a,c)\cup(c,b]$上连续，$\lim_{x\to c}f(x)$不存在（称 c 点为瑕点），定义

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

当且仅当$\int_a^c f(x)dx,\int_c^b f(x)dx$都收敛时，$\int_a^b f(x)dx$收敛，且$\int_a^b f(x)dx$值等于$\int_a^c f(x)dx与\int_c^b f(x)dx$的值之和。

注 若$f(x)$在$(a,b]$上连续，$\lim_{x\to a^+}f(x)=A$（常数），则$\int_a^b f(x)dx$可看成正常积分，

事实上，定义$F(x)=\begin{cases}A, & x=a,\\ f(x), & x\in(a,b].\end{cases}$知$F(x)$在$[a,b]$上连续，即$\int_a^b F(x)dx$存在，

而$\int_a^b f(x)dx=\lim_{e\to 0^+}\int_{a-e}^b f(x)dx=\lim_{e\to 0^+}\int_{a-e}^b F(x)dx$，由于$F(x)$在$[a,b]$上连续，知变下限函数$G(e)=\int_{a-e}^b F(x)dx$在$[0,b-a]$上连续，有$\lim_{e\to 0^+}G(e)=G(0)=\int_a^b F(x)dx$，即$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b F(x)dx.$故$\int_a^b f(x)dx$可看成正常积分。

若广义积分收敛，也有线性运算法则，不等式性质，也有凑微分，变量替换，分部积分公式，换句话说可以像正常的定积分一样运算。

第一 p 广义积分 $\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$（a>0，常数）.

当$p\neq 1$时，$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p}=\frac{1}{-p+1}x^{-p+1}\big|_a^{+\infty}=\begin{cases}\frac{a^{1-p}}{p-1}, & p>1\\ +\infty, & p<1\end{cases}$

当$p=1$时，$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x}dx=\ln x\big|_a^{+\infty}=+\infty,$ 知$p>1$时收敛，$p\le 1$时发散

第二 p 广义积分$\int_a^b\frac{dx}{(x-a)^p}$ $(b>a)$.

令$\frac{1}{x-a}=t,\qquad dx=-\frac{1}{t^2}dt$，有$\int_a^b\frac{dx}{(x-a)^p}=\int_{+\infty}^{\frac{1}{b-a}}t^p\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt=\int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty}\frac{1}{t^{2-p}}dt.$

由第一 p 广义积分知，当 $2-p>1$，即 $p<1$ 时收敛，当 $2-p\le 1$，即 $p\ge 1$ 时发散。

（二）重要定理与公式

定理 3.2 若函数 f(x) 在闭区间 $[a,b]$ 上可积，则 f(x) 在 $[a,b]$ 上有界，反之不成立。

例 $D(x)=\begin{cases} 1, & x\text{为有理数}, \\ 0, & x\text{为无理数}, \end{cases}$ 在[0,1]上有界但不可积 .

事实上，因为不论把[0，1]分割得多么细，在每个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 中，总能找到有理数 $h_i^{'}$，无理数 $h_i^{''}$，知

$$\lim_{l\to 0}\sum_{i=1}^{n} D(h_i^{'})\Delta x_i=\lim_{l\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=\lim_{l\to 0} 1=1,\qquad \lim_{l\to 0}\sum_{i=1}^{n} D(h_i^{''})\Delta x_i=\lim_{l\to 0} 0=0,\text{知}$$

$\lim\limits_{l\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} D(x_i)\Delta x_i$ 不存在。

定理 3.3　若 f(x) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 f(x) 在 $[a,b]$ 上可积，反之不成立.

定理 3.4　若 f(x) 在闭区间 $[a,b]$ 上只有有限个间断点且有界，则 f(x) 在 $[a,b]$ 上可积，反之不成立.

定理 3.5　若 f(x) 在闭区间 $[a,b]$ 上单调，则 f(x) 在 $[a,b]$ 上可积，反之不成立.

定积分的性质

性质 1　$\int_a^b 1dx=\int_a^b dx=b-a.$

性质 2　（线性运算法则）设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，对任何常数 a，b 则

$$\int_a^b[af(x)+bg(x)]dx=a\int_a^b f(x)dx+b\int_a^b g(x)dx\ .$$

该性质用于定积分的计算与定积分的证明.

性质 3　（区间的可加性），若 f(x) 在以 a,b,c 为端点构成的最大区间上可积，则不论 a,b,c 顺序如何，有 $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx.$

该性质用于计算分段函数的定积分与定积分的证明.

性质 4　若 f(x) 在 $[a,b]$ 上可积且 $f(x)\ge 0,$ 则 $\int_a^b f(x)dx\ge 0$.

性质 5　若 f(x),g(x) 在 $[a,b]$ 上可积且 $f(x)\ge g(x),$ 则 $\int_a^b f(x)dx\ge\int_a^b g(x)dx.$

性质 6　若 f(x) 在 $[a,b]$ 上连续，$f(x)\ge 0,$ 且 f(x) 0 则 $\int_a^b f(x)dx>0.$

性质 7　若 f(x),g(x) 在 $[a,b]$ 上连续且 $f(x)\ge g(x),$ 但 $f(x)\ne g(x)$,则

$\int_a^b f(x)dx > \int_a^b g(x)dx$.

性质 8　若 f(x)在$[a,b]$上可积，则$|\int_a^b f(x)dx| \le \int_a^b |f(x)|dx$.

性质 9　若 f(x)在$[a,b]$上可积，在区间$[a,b]$上，m≤f(x)≤M，m，M 是常数，则

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

性质 4、5、6、7、8、9 主要用于定积分不等式的证明及不通过定积分的计算，估计定积分值的范围.

性质 10　（积分中值定理）若 f(x)在闭区间$[a,b]$上连续，则至少存在一点$x \in [a,b]$，使

$$\int_a^b f(x)dx = f(x)(b-a).$$

而$f(x) = \dfrac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$称为 f(x)在区间$[a,b]$上的平均值，即闭区间[a,b]上连续函数 f(x)的平均值是$\dfrac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$.

注：这里的$x \in [a,b]$与$x \in (a,b)$是不同的。

性质 11　（推广的积分中值定理） 设 $f(x), g(x)$ 在$[a,b]$上连续，且 g(x)在$[a,b]$上不变号，则至少存在一点$x \in [a,b]$, 使$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(x)\int_a^b g(x)dx.$

性质 12（柯西----许瓦尔兹（Cauchy—schwarz）不等式）

设函数 f(x)，g(x)在$[a,b]$上连续，则

（1）$[\int_a^b f(x)g(x)dx]^2 \le \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx.$

（2）$\int_a^b [f(x)+g(x)]^2 dx \le \{[\int_a^b f^2(x)dx]^{\frac{1}{2}} + [\int_a^b g^2(x)dx]^{\frac{1}{2}}\}^2.$

性质 13　变上限积分求导定理　设 f(x)连续，$u(x), v(x)$可导，则

$$\frac{d}{dx}\int_{v(x)}^{u(x)} f(t)dt = f(u(x))u'(x) - f(v(x))v'(x).$$

1. 定积分计算的方法

（1）牛顿一莱布尼兹公式　若 f(x) 在 $[a,b]$ 上连续，则 $\int_a^b f(x)dx \xlongequal{F'(x)=f(x)} F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$.

（2）凑微分　$\int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(j(x))j'(x)dx$

$= \int_a^b f(j(x))dj(x) \xlongequal{F'(u)=f(u)} F(j(x))\Big|_a^b = F(j(b)) - F(j(a)).$

（3）变量替换 $\int_a^b f(x)dx \xlongequal[a=j(a),b=j(b)]{令x=j(t)} \int_a^b f(j(t))dj(t)$

$$= \int_a^b f(j(t))j'(t)dt \xlongequal{F'(t)=f(j(t))j'(t)} F(t)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

（4）分部积分　设 $u(x), v(x)$ 在 $[a,b]$ 上导数连续，则 $\int_a^b u(x)dv(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)du(x)$

具体的用法是 $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b u(x)v'(x)dx = \int_a^b u(x)dv(x)$

$$= u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)du(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx$$

如果能够计算出 $\int_a^b v(x)u'(x)dx,$ 就可以计算出 $\int_a^b f(x)dx.$

定积分的凑微分、变量替换、分部积分与不定积分中三种方法适合的被积函数相同，即不定积分用三种的哪一种方法，定积分也用三种方法的哪一种。

（5）设 f(x) 在 $[-a,a]$ 上连续，则 $\int_{-a}^a f(x)dx = \begin{cases} 0, & 若f(x)为奇函数, \\ 2\int_0^a f(x)dx, & 若f(x)为偶函数. \end{cases}$

事实上，$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx$

而 $\int_{-a}^0 f(x) \xlongequal{令x=-t} -\int_a^0 f(-t)dt = \int_0^a f(-x)dx = \begin{cases} -\int_0^a f(x)dx, & 若f(x)为奇数, \\ \int_0^a f(x)dx, & 若f(x)为偶函数. \end{cases}$

故得证

推论 $\int_{-a}^a f(x)dx = \int_0^a [f(x) + f(-x)]dx.$

证　由于 $f(x) = \dfrac{f(x)+f(-x)}{2} + \dfrac{f(x)-f(-x)}{2},$

且 $\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ 为偶函数，$\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$ 为奇函数，于是

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^a \left[\frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2}\right]dx$$

$$= \int_0^a \left[\frac{f(x)+f(-x)}{2}\right]dx = \int_0^a [f(x)+f(-x)]dx.$$

（6）设 f(x) 为周期函数且连续，周期为 T，则 $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$.

事实上 $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_a^0 f(x)dx + \int_0^T f(x)dx + \int_T^{a+T} f(x)dx$

由于 $\int_T^{a+T} f(x)dx \xlongequal{设x=t+T} \int_0^a f(t+T)dt = \int_0^a f(t)dt = -\int_a^0 f(x)dx,$ 于是

$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx.$

（7）设 f(x)在[0,1]上连续，则$\int_0^p xf(\sin x)dx = \frac{p}{2}\int_0^p f(\sin x)dx.$

事实上$\int_0^p xf(\sin x)dx \overset{令x=p-t}{=\!=\!=\!=} -\int_p^0 (p-t)f[\sin(p-t)]dt$

$$= \int_0^p (p-x)f(\sin x)dx = p\int_0^p f(\sin x)dx - \int_0^p xf(\sin x)dx.$$

移项两边同除以 2 得$\int_0^p xf(\sin x)dx = \frac{p}{2}\int_0^p f(\sin x)dx$.

（8）$\int_0^{\frac{p}{2}} \sin^n xdx = \int_0^{\frac{p}{2}} \cos^n xdx = \begin{cases} \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\mathbf{L}\,\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{2}, \text{当}n\text{为偶数}, \\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\mathbf{L}\,\frac{2}{3}, \text{当}n\text{为奇数}. \end{cases}$

事实上$\int_0^{\frac{p}{2}} \sin^n xdx \overset{令x=\frac{p}{2}-t}{=\!=\!=\!=} -\int_{\frac{p}{2}}^0 \sin^n(\frac{p}{2}-t)dt = \int_0^{\frac{p}{2}}, \cos^n tdt = \int_0^{\frac{p}{2}} \cos^n xdx.$

记$I_n = \int_0^{\frac{p}{2}} \cos^n xdx = \int_0^{\frac{p}{2}} \cos^{n-1} x\cos xdx = \int_0^{\frac{p}{2}} \cos^{n-1} xd\sin x$

$$= \cos^{n-1} x\sin x\Big|_0^{\frac{p}{2}} + \int_0^{\frac{p}{2}} \sin x(n-1)\cos^{n-2} x\sin xdx (n\geq 2)$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{p}{2}} \cos^{n-2} x(1-\cos^2 x)dx = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n,$$

于是$I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2} = \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}I_{n-4}\,\mathbf{L}$

由于递推公式每次降 2 次，要讨论 n 为奇偶数的情形，由 $I_1 = \int_0^{\frac{p}{2}} \cos xdx = 1, I_0 = \int_0^{\frac{p}{2}}, dx = \frac{p}{2}$, 故 $I_n = \begin{cases} \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\mathbf{L}\,\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{2}, \text{若}n\text{为偶数}, \\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\mathbf{L}\,\frac{2}{3}, \text{若}n\text{为奇数}. \end{cases}$

微元法

根据所给条件，画图，适当建立坐标系，在图中把所需曲线的方程表示出来，确定要求量 Q 所分布的区间$[a,b]$且区间$[a,b]$上的总量 Q 具有等于各小区间上部分量之和的特点.

（1）取近似求微元.选取区间$[x, x+\Delta x](\Delta x > 0)$。写出部分量$\Delta Q$ 的近似值 $f(x)\Delta x,$ 即

$$\Delta Q \approx f(x)\Delta x.$$

要求 $f(x)\Delta x$ 是ΔQ 的线性主部$dQ.$ 即计算的过程中，可以略Δx 的高阶无穷小。

这一步是关键、本质的一步，所以称为微元分析法或简称微元法.

（2）得微分.　　$dQ = f(x)dx$　　　（3）计算积分.　　$Q = \int_a^b f(x)dx.$

注：第一步一定要把ΔQ表示成 x 的函数与Δx的乘积形式.

由$\Delta x = dx$，于是又可写成下面的步骤：

（1）选取$[x, x+dx](dx > 0)$, 求ΔQ的线性主部dQ，$dQ = f(x)dx$，

（2）$Q = \int_a^b f(x)dx.$