第三章　中值定理及导数的应用

大纲要求

了解柯西中值定理，曲率、曲率圆与曲率半径的概念

会 用柯西中值定理，用导数判断函数图形的凹凸性（注：在区间(a,b)内，设函数 $f(x)$ 具有二阶导数。当 $f''(x)>0$ 时， $f(x)$ 的图形是凹的；当 $f''(x)<0$ 时， $f(x)$ 的图形是凸的），求函数图形的拐点以及水平、铅直和斜渐近线，描绘函数的图形，计算曲率和曲率半径．

理解罗尔定理、拉格朗日中值定理和泰勒定理，函数的极值概念，

掌握用罗尔定理、拉格朗日中值定理和泰勒定理，用导数判断函数的单调性和求函数极值的方法，函数最大值和最小值的求法及其应用．

内容精要

（一） 基本概念

1．定义 2.5　若存在 x_0的某邻域$U(x_0,d)$，使得对一切$x\in U(x_0,d)$，都有

$$f(x)\le f(x_0)\quad (f(x)\ge f(x_0)),$$

则称 $f(x_0)$为极大值（极小值），称 x_0为极大（小）值点。极大值、极小值统称为极值，极大值点、极小值点统称为极值点。

若 $f'(x_0)=0$ ，称$x=x_0$为驻点或稳定点。

定义 2.6　设 $f(x)$ 在(a,b)内可导,且曲线 $y=f(x)$ 在曲线上任意一点切线的上方,则称曲线在该区间内是上凹或下凸;如果曲线在曲线上任意一点切线的下方,则称曲线在该区间内是下凹或上凸.

定义 2.7　设 $f(x)$ 在 x_0 的某领域内连续,且$(x_0,f(x_0))$是曲线 $y=f(x)$ 上凹与下凹的分界点,称$(x_0,f(x_0))$为曲线 $y=f(x)$ 的拐点或变凹点。

注：极值点与拐点的区别,极值点是取到极值的横坐标 x_0 ,拐点是曲线上的点 是一对有序数组$(x_0,f(x_0))$.

拐点的横坐标一定包含在 $f''(x)=0$ 与 $f''(x)$不存在的点之中.

定义 2.8　设函数 $f(x)$ 在$(-\infty,a)\cup(b,+\infty)(a\le b)$ 上有意义,若存在一个已知的直线$L:y=ax+b$　(a,b 为常数),使得曲线 $y=f(x)$ 上的动点 $M:(x,y)$,当它沿着曲线无

限远离原点(即 $x\to\infty$)时,点 M 到直线 L 的距离 d 趋于 0，则称直线 L 是曲线 $y=f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的斜渐近线.

定义 2.9　若曲线上点 M $(x,f(x))$ 沿着曲线无限远离原点时,M 到直线 $x=x_0$ 距离的极限为零，则称 $x=x_0$ 是曲线 $y=f(x)$ 的垂直渐近线或铅垂渐近线.

（二）重要定理与公式

费马（Femat）定理 2.11（取到极值的必要条件）

设 f(x)在点 x_0 处取到极值，且 $f'(x_0)$ 存在，则 $f'(x_0)=0$.

反之不真，例如 $f(x)=x^3$,　$f'(x)=3x^2$,　$f'(0)=0$, 但 f(0)不是极值。

费马定理常用于证明 f(x)=0 有一个根，找一个 F(x)，使 $F'(x)=f(x)$. 证明 F（x）在某点 x_0 处取到极值且 $F'(x_0)$ 存在，由费马定理知 $F'(x)=0$, 即 $f(x_0)=0$.

罗尔（Rolle）定理 2.12　设 f(x)在闭区间 $[a,b]$ 上满足下列三个条件：

（1）$f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续；（2）f(x)在开区间（a,b）内可导；（3）$f(a)=f(b)$, 则至少存在一点 $x\in(a,b)$, 使 $f'(x)=0$.

推论 2.12.1　在罗尔定理中，若 f(a)=f(b)=0，则在（a,b）内必有一点 x，使 $f'(x)=0$, 即方程 f(x)=0 的两个不同实根之间，必存在方程 f'(x)=0 的一个根。

罗尔定理的应用：1. 证明 $f(x)$=0 有一个根，找到一个 F（x）,使 $F'(x)=f(x)$，验证 F（x）在某闭区间 $[a,b]$ 上满足罗尔定理条件，则至少存在一点 $x\in(a,b)$, 使 $F'(x)=0$, 即 $f(x)=0$。2. 证明适合某种条件 x 的等式：把待证含有 x 的等式，通过分析转化为 $F'(x)=0$ 形式，对 F(x)应用罗尔定理即可。

拉格朗日（Lanrange）定理 2.13　若 f(x)在闭区间[a,b]上满足下列二个条件：

（1）f(x)在闭区间[a,b]上连续 ；（2）f(x)在开区间（a,b）内可导，则至少存在一点 $x\in(a,b)$, 使 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(x)$.

拉格朗日定理的结论常写成下列形式：$f(b)-f(a)=f'(x)(b-a),\ a<x<b.$

上式中当 a>b 时公式仍然成立，即不论 a,b 之间关系如何，x 总介于 a,b 之间，由

$0<\dfrac{x-a}{b-a}=q<1$, 得 $x=a+q(b-a), 0<q<1$, 所以

$$f(b)-f(a)=f'[a+q(b-a)](b-a),0<q<1.$$

拉格朗日定理是连结函数值与导函数值之间的一座桥梁，特别适合给出导数条件，要证明函数值关系的有关结论，拉格朗日定理主要应用是证明不等式.

单调性定理 2.14　设 f(x)在区间 I （I 可以是开区间，可以是闭区间，也可以是半闭半开区间，也可以无穷区间)上连续，在 I 内部可导（不需要在端点可导），

（1）若 $x \in \mathrm{I}$ 内部，$f'(x) \geq 0$, 则 f(x)在区间 I 上递增。

（2）若 $x \in \mathrm{I}$ 内部，$f'(x) \leq 0$, 则 f(x)在区间 I 上递减。

（3）若 $x \in \mathrm{I}$ 内部，$f'(x) \equiv 0$, 则 f(x)在区间 I 上是常值函数。

若（1）中 $f'(x) \geq 0$ 改成 $f'(x) > 0$，则 f(x)在区间 I 上严格递增，

若（2）中 $f'(x) \leq 0$ 改成 $f'(x) < 0$，则 f(x)在区间 I 上严格递减。

推论 2.14.1　若 f(x)在区间 I 上连续，在区间 I 内部可导，当 $x \in \mathrm{I}$ 内部，$f'(x) \geq 0 (\leq 0)$ 且 f(x)在 I 的任何于区间上，$f'(x) \neq 0$, 则 f(x)在区间 I 上严格递增（减）。

证　由 $f'(x) \geq 0$，知 f(x)在区间 I 上递增，假设 f(x)在 I 上不是严格递增，即存在 $x_1, x_2 \in \mathrm{I}$ 且 $x_1 < x_2$, 有 $f(x_1) = f(x_2)$, 由 $f(x)$ 在 $[x_1, x_2]$ 上递增，所以任给 $x \in [x_1, x_2]$，有

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) = f(x_1), \quad \text{从而} \quad f(x) \equiv f(x_1), x \in [x_1, x_2]$$

所以 $f'(x) \equiv 0, x \in [x_1, x_2]$ 与条件矛盾，故 f(x)在区间 I 上严格递增，对于 $f'(x) \leq 0$，同理可证 f(x)在 I 上严格递减。

单调性定理及推论是证明函数在某区间上（严格）单调或是常值函数和求函数（严格）单调区间的重要方法。

柯西（Cau chy）定理 2.15　设 f(x),g(x)在闭区间 $[a,b]$ 上满足下列条件：

（1）f(x),g(x)在 $[a,b]$ 上连续　（2）f(x),g(x)在 (a,b), 内可导　（3）$g'(x) \neq 0, x \in (a,b)$，则至少存在一点 $x \in (a,b)$, 使 $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

证明与拉格朗日证明类似，只要把拉格朗日定理证明过程中 b 换成 g(b)，a 换成 g(a)，x 换成 g(x)即可，读者可自证。

柯西定理也可以用来证明不等式及适合某种条件 x 的存在性，但没有拉格朗日定理和罗尔定理用得多。

泰勒（Tay lor）定理 2.16　设 f(x)在区间Ⅰ上存在 n+1 阶导数，对每一个 $x_0 \in \mathrm{I}$,任给 $x \in \mathrm{I}$,且$x \neq x_0$，有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

其中x 是介于 x_0及 x 之间

$R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$称为拉格朗日余项，当 $x_0=0$ 时，称为麦克劳林公式，即

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

$R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}x^{n+1}$称为麦克劳林余项。

佩亚诺（Peano）定理 2.17　若 f(x)在点 x_0处存在 n 阶导数，则

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)(x \to x_0)$$

称 $R_n(x) = o((x-x_0)^n)$ 为泰勒公式的佩亚诺余项.

相应的麦克劳林公式为

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)(x \to 0).$$

读者要记住 5 个常用函数的带有佩亚诺余项的麦克劳林公式

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n);$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1});$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n});$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n);$$

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}x^n + o(x^n).$$

带有拉格朗日余项的泰勒公式可用以证明方程根的存在性、适合某种条件x的存在性及各种不等式。带有佩亚诺余项的泰勒公式仅适用于求函数极限。

若$f(x)$在x_0处取到极值，由$f(x)$在x_0处或者导数存在或者导数不存在。由费马定理知若$f'(x_0)$存在，则$f'(x_0)=0$，从而知x_0一定是驻点或导数不存在的点，因此极值点一定包含在$f(x)$的驻点或导数不存在点之中，对于判断极值点的杯疑点是否为极值点，我们有下述的方法

定理 2.18（取到极值的第一充分条件）若存在$d>0$，$f(x)$在(x_0-d,x_0+d)上连续，在$\overset{0}{U}(x_0,d)$内可导（不要求$f(x)$在x_0处可导），

（i）当$x\in(x-d,x_0)$时，$f'(x)>0$，当$x\in(x_0,x_0+d)$时，$f'(x)<0$，则$f(x_0)$为极大值；

（ii）当$x\in(x-d,x_0)$时，$f'(x)<0$，当$x\in(x_0,x_0+d)$时，$f'(x)>0$，则$f(x_0)$为极大值；

（iii）当$f'(x)$在x_0两侧符号相同，则$f(x_0)$不是极值。

定理 2.19（取到极值的第二充分条件）（仅适合驻点）

若$f'(x_0)=0, f''(x_0)$存在且$f''(x_0)\neq 0,$

当$f''(x_0)>0$时，则$f(x_0)$为极小值，当$f''(x_0)<0$时，则$f(x_0)$为极大值。

注：若$f''(x_0)=0$时，该方法无法判断，但我们有下述的方法

定理 2.20　若$f'(x_0)=f''(x_0)=\mathbf{K}=f^{(n-1)}(x_0), f^{(n)}(x_0)\neq 0,(n>1),$当 n 为奇数时，$f(x_0)$不是极值，当$n$为偶数时，$f(x_0)$为极值，且$f^{(n)}(x_0)<0,$则$f(x_0)$为极大值；$f^{(n)}(x_0)>0,$则$f(x_0)$为极小值。

注：读者可利用在$x=x_0$处展成带有佩亚诺余项的泰勒公式去证明。

定理 2.21　设函数$f(x)$在区间 I 上连续且在内部取到唯一的极值$f(x_0)$，,那么

(1)若$f(x_0)$为极大值，则$f(x_0)$为最大值，且在的x_0左边函数严格递增，在x_0的右边函数严格递减；

(2) 若$f(x_0)$为极小值，则$f(x_0)$为最小值，且在的x_0左边函数严格递减，在x_0的右边函数严格递增.

定理 2.22　设函数$f(x)$在(a,b)具有二阶导数,那么

(1)若$x\in(a,b)$时,有$f''(x)>0$,则曲线$y=f(x)$在(a,b)内是上凹的：

(2)若$x\in(a,b)$时，有$f''(x)<0$,则曲线$y=f(x)$在(a,b)内是下凹的.

定理2.23　设$f(x)$在x_0的某领域内连续,若$f''(x)$在x_0两侧的符号相反,则$(x_0,f(x_0))$为曲线的拐点.

定理2.24 若$f''(x_0)=0, f^{(3)}(x_0)\neq 0$,则$(x_0,f(x_0))$为曲线的拐点.

求曲线的凹向区间与拐点的步骤:

(1)求出$f(x)$的定义域;(2)求出$f''(x)=0$的点;(3)求出$f''(x)$不存在的点;(4)列表;(5)讨论.

1．曲率公式若曲线

$\Gamma:\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}$，且$x''(t),y''(t)$存在,在参数$t$对应的曲线上点$M(x,y)$处的曲率$k=\dfrac{|y''x'-x''y'|}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$

若曲线$y=f(x)$,在曲线上点$M(x,y)$处的曲率公式为$k=\dfrac{|y''|}{(1+y^{12})^{\frac{3}{2}}}$。

曲率圆

设
$y=f(x)$在点$M(x,y)$的曲率$k\neq 0$,在点M引法线MP,在位于曲线凹的一侧的法线上线段$|AM|=\dfrac{1}{k}$,A为中心,$\dfrac{1}{k}$为半径作一圆,这个圆就称为曲线在点M的曲率圆,这个圆具有下列性质：

（1）它通过点M，在点M与曲线相切（即两曲线有公共切线）；

（2）在点M与曲线有相同的凹向；

（3）圆的曲率与曲线在点M的曲率相同，曲率圆的中心，称为曲率中心，半径称为曲率半径.

一、证明方程根的存在性

把要证明的方程转化为 f(x)＝0 的形式。对方程 f(x)＝0 用下述方法：

1．根的存在定理 若函数 f(x)在闭区间[a,b]上连续，且 $f(a)\cdot f(b)<0,$**则至少存在一点**$x\in(a,b)$**，使** $f(x)=0.$

2．若函数 f(x)的原函数$F(x)$**在[a,b]上满足罗尔定理的条件，则 f(x)在（a,b）内至少有一个零值点.**

3．若函数 f(x)的原函数 F(x)在某点 x_0 **处取极值，在** x_0 **处导数也存在，由费马定理知** $F'(x_0)=0$**，即** $f(x_0)=0$**。**

4．实常系数的一元 n 次方程$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\mathbf{L}+a_{n-1}x+a_n=0(a_0\neq 0)$**，当 n 为奇数时，至少有一个实根。**

证 设

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\mathbf{L}+a_{n-1}x+a_n=x^n(a_0+a_1\frac{1}{x}+\mathbf{L}+a_{n-1}\frac{1}{x^{n-1}}+a_n\frac{1}{x^n})$$

由$a_0\neq 0,$**不妨设** $a_0>0$**。由于**$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty,$取$M=1,\exists N_0>0,$**当** $x>N_0$ **时，都有** $f(x)>1>0$**。**

取 $b>N_0$**，有** $f(b)>0$**，**$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty,$取$M=1,\exists N_1>0$ **，当** $x<-N_1$ **时，都有** $f(x)<-1<0$**。**

取 $a<-N_1<b$, $f(a)<0$**。由 f(x)在[a,b]连续，f(`a)f(b)<0，由根的存在定理知至少存在一点**$x\in(a,b),$使$f(x)=0.$

5．实系数的一元 n 次方程在复数范围内有 n 个复数根，至多有 n 个不同的实数根。

6．若 f(x)在区间 X 上连续且严格单调，则 f(x)在 X 内至多有一个零值点。若函数在两端点的函数（或极限）值同号，则 f(x)无零值点，若函数在两端点的函数（或极限）值异号，则 f(x)有一个零值点。

7．求具体连续函数 f(x)在其定义域内零值点的个数：首先求出 f(x)的严格单调区间的个数，若有 m 个严格单调区间，则至多有 m 个不同的零值点。至于具体有几个，按照 6 研究每个严格单调区间是否有一个零值点。

8．用泰勒公式证明方程根的存在性.

9．在证明方程根的存在性的过程中，我们经常要用拉格朗日定理，积分中值定理，有时也用到柯西中值定理来证明满足方程根的存在性所需的条件，然后利用上述的方法来证明方程根的存在性。

二、证明适合某种条件下x 的存在性

常用的方法有罗尔定理、拉格朗定理，泰勒公式，

三、证明不等式

证明不等式的方法：

1．拉格朗日定理适用于已知函数导数的条件，证明涉及函数（值）的不等式

2．泰勒公式适用于已知函数的高阶导数的条件，证明涉及函数（值）或低阶导函数（值）的不等式.

3．单调性定理.

（i）对于证明数的大小比较的不等式，转化为同一个函数在区间两端点函数（或极限）值大小的比较，利用函数在区间上的单调性进行证明.

(ii) 对于证明函数大小比较的不等式，转化为同一个函数在区间内上任意一点函数值与区间端点函数（或极限）值大小的比较，利用函数在区间上的单调性进行证明.

4．利用函数最大值，最小值证明不等式.

把待证的不等式转化为区间上任意一点函数值与区间上某点 x_0 处的函数值大小的比较，然后证明 $f(x_0)$ 为最大值或最小值，即可证不等式成立。

5．利用函数取到唯一的极值证明不等式.

把待证的不等式转化为区间上任意一点函值与区间内某点 x_0 处的函数值大小的比较，然后证明 $f(x_0)$ 为唯一的极值且为极大值或极小值，即 $f(x_0)$ 为最大值或最小值，即可证不等式成立。

6．用柯西定理证明不等式.

7．利用曲线的凹向性证明不等式.

（1）若 $x\in(a,b), f''(x)>0$（曲线上凹），知曲线在（a,b）内上凹，有不等式 $\forall x_1,x_2,\mathbf{K},x_n\in(a,b), l_1,l_2\,\mathbf{K}\,l_n$ 均为正数，且 $l_1+l_2+\mathbf{K}+l_n=1$，则 $f(l_1x_1+l_2x_2+\mathbf{K}+l_nx_n)\le l_1f(x_1)+l_2f(x_2)+\mathbf{K}+l_nf(x_n)$ 特别地 $0<l<1,$ 有 $f(lx_1+(1-l)x_2\le lf(x_1)+(1-l)f(x_2)$。

（2）若 $x\in(a,b), f''(x)<0$（曲线下凹），知曲线在（a,b）内下凹，有不等式 $\forall x_1,x_2,\mathbf{K},x_n\in(a,b), l_{1,}\,l_{2,}\,\mathbf{K},l_n$ 均为正数且 $l_1+l_2+\mathbf{K}+l_n=1,$ 则 $f(l_1x_{11}+l_2x_2+\mathbf{K}+l_nx_n)\ge l_1f(x_1)+l_2f(x_2)+\mathbf{K}+l_nf(x_n)$.特别地 $0<l<1,$ 有 $f(lx_1+(1-l)x_2)\ge l_1f(x_1)+(1-l)f(x_2)$

等号仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 时成立。

证（1）令 $x_0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i < \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b = b\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = b,$ 同理可证 $x_0 > a,$ 知 $x_0 \in (a,b),$ 对

每一个 $x_i \in (a,b), i = 1,2,\cdots,n,$ 由泰勒公式

$f(x_i) = f(x_0) + f'(x_0)(x_i - x_0) + \frac{f''(x_i)}{2!}(x_i - x_0)^2 \ge f(x_0) + f'(x_0)(x_i - x_0), x_i$ 介于

$x_{0,} x_i$ 之间。从而有 $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) \ge \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f'(x_0)(x_i - x_0)$

$$= f(x_0) + f'(x_0)\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i - x_0 \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) = f(x_0) + f'(x_0)(x_0 - x_0) = f(x_0) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right)$$

即 $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n) \le \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \cdots + \lambda_n f(x_n)$.由证明过程可知等号仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 时成立。

同理可证（2）成立

8．利用不等式：$\forall x_i > 0 (i = 1,2,\cdots,n),$ 有

$$\frac{1}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \le \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \le \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

（调和平均数≤几何平均数≤算术平均数）等号仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 时成立。

证若令 $f(x) = -\ln x (x > 0),$ 于是 $f''(x) = \frac{1}{x_2} > 0$.

由 7 知 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(-\ln x_i) \ge -\ln(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i) \Leftrightarrow \frac{1}{n}\ln(x_1 x_2 \cdots x_n) \le \ln(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n})$

即 $\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \le \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$.

在上面不等式中，用 $\frac{1}{x_i}$ 替代 x_i，有不等式 $\sqrt[n]{\frac{1}{x_1}\frac{1}{x_2}\cdots\frac{1}{x_n}} \le \frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}{n}$，

即 $\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \le \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$.

从而有 $\dfrac{n}{\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\cdots+\dfrac{1}{x_n}} \le \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \le \dfrac{x_1+x_2+\cdots+\dfrac{1}{x_n}}{n}$.

在证明不等式的过程中，我们也经常用绝对值的不等式 $\left|x_1+x_2+\cdots x_n\right| \le \left|x_1\right|+\left|x_2\right|+\cdots+\left|x_n\right|$**. 可以说知道有关不等式的结果越多对我们证明不等式越有利。**