序列求和的方法

数列求和公式

等差、等比数列与调和级数

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

$$\sum_{k=0}^{n} aq^k = \frac{a(1-q^{n+1})}{1-q}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} aq^k = \frac{a}{1-q} (q<1)$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + O(1)$$

求和的例子

$$\sum_{t=1}^{k} t2^{t-1} = \sum_{t=1}^{k} t(2^{t} - 2^{t-1})$$

拆项

$$= \sum_{t=1}^{k} t2^{t} - \sum_{t=1}^{k} t2^{t-1} = \sum_{t=1}^{k} t2^{t} - \sum_{t=0}^{k-1} (t+1)2^{t}$$

变限

$$= \sum_{t=1}^{k} t2^{t} - \sum_{t=0}^{k-1} t2^{t} - \sum_{t=0}^{k-1} 2^{t}$$

拆项

$$= k2^{k} - (2^{k} - 1) = (k-1)2^{k} + 1$$

二分检索算法

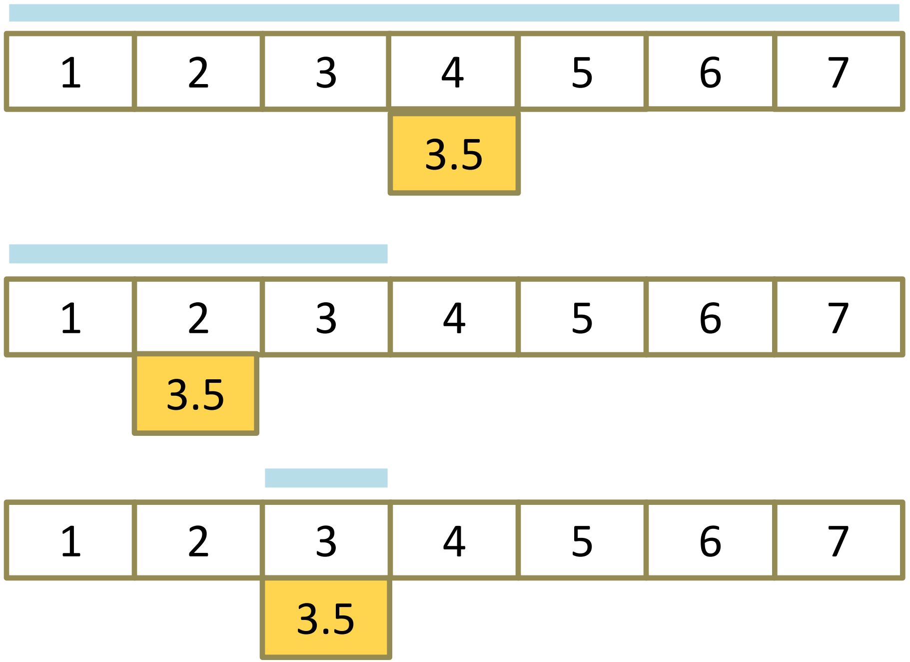
算法 BinarySearch (T, l, r, x)

输入：数组 T，下标从 l 到 r；数x

输出：j

1. $l \leftarrow 1$; $r \leftarrow n$
2. while $l \leq r$ do
3. $\boxed{m \leftarrow \lfloor (l+r)/2 \rfloor}$
4. if $T[m]=x$ then return m //x中位元素
5. else if $T[m] > x$ then $r \leftarrow m-1$
6. else $l \leftarrow m+1$
7. return 0

二分检索运行实例



第1次

$3.5 < 4$

第2次

$3.5 > 2$

第3次

$3.5 > 3$

$2n+1$个输入

假设 $n = 2^k - 1$，输入有 $2n + 1$ 种：

$x = T[1]$

$x = T[2]$

…

$x = T[n\text{-}1]$

$x = T[n]$

x在T中

$x < T[1]$

$T[1] < x < T[2]$

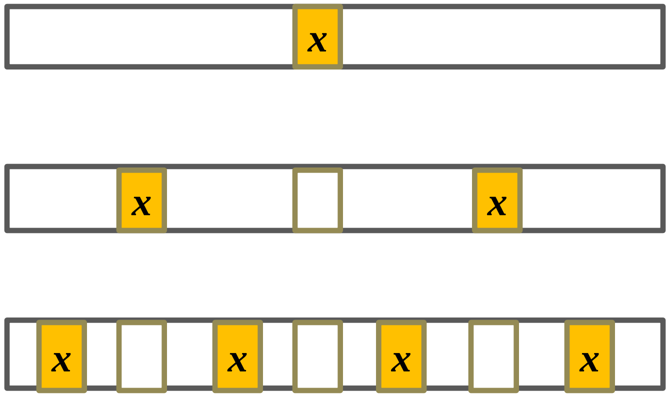
…

$T[n\text{-}1] < x < T[n]$

$T[n] < x$

x不在T中

比较t次的输入个数



比较1次:1个

比较2次:2个

比较3次:4个

对t =1, 2, …, k-1, 比较 t 次: 2^{t-1} 个

比较 k 次的输入有 $2^{k-1} + n + 1$个

总次数：对每个输入乘以次数并求和

二分检索平均时间复杂度

假设 $n = 2^k-1$，各种输入概率相等

$$A(n) = \frac{1}{2n+1}[\underline{\sum_{t=1}^{k-1} t2^{t-1} + k(2^{k-1} + n + 1)}]$$

$$= \frac{1}{2n+1}[\underline{\sum_{t=1}^{k} t2^{t-1}} + k(n+1)]$$

$$= \frac{1}{2n+1}[\underline{(k-1)2^k + 1} + k(n+1)]$$

$$= \frac{k2^k - 2^k + 1 + k2^k}{2^{k+1} - 1} \approx k - \frac{1}{2} = \lfloor \log n \rfloor + \frac{1}{2}$$

估计和式上界的放大法

放大法：

1. $\sum_{k=1}^{n} a_k \le n a_{\max}$ 放大

2. 假设存在常数 $r<1$，使得 对一切 $k \ge 0$有 $a_{k+1}/a_k \le r$ 成立

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \le \sum_{k=0}^{\infty} a_0 r^k = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{a_0}{1-r}$$

$a_1 \le a_0 r$， $a_2 \le a_1 r \le a_0 r^2$, ...

放大法的例子

估计 $\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{3^k}$ 的上界.

解 由 $a_k=\frac{k}{3^k}$, $a_{k+1}=\frac{k+1}{3^{k+1}}$

$$\boxed{\frac{a_{k+1}}{a_k}}=\frac{1}{3}\frac{k+1}{k}\le\frac{2}{3}$$

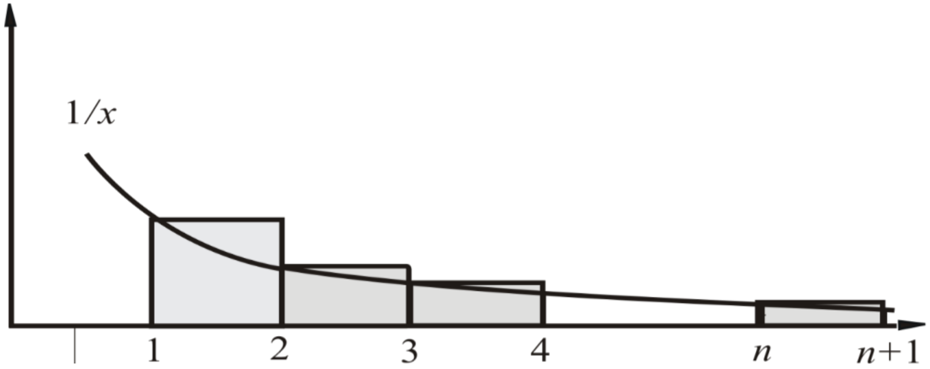
得

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{3^k}\le\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}}=\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{2}{3}}=1$$

估计和式渐近的界

估计 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ 的渐近的界.

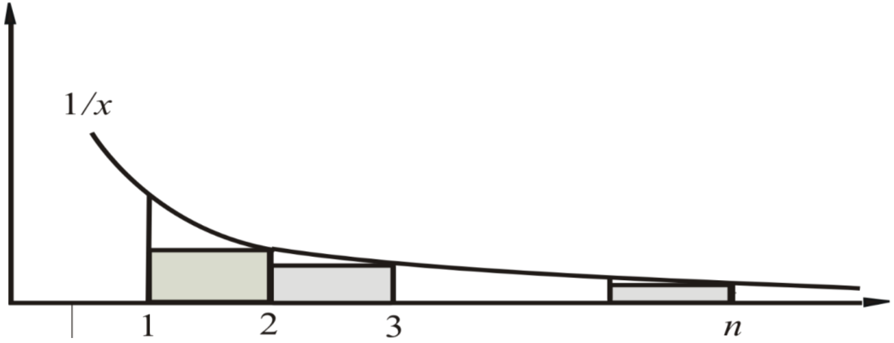
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\geq\int_{1}^{n+1}\frac{dx}{x}=\ln(n+1)$$



估计和式渐近的界

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\frac{1}{1}+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}\le 1+\int_{1}^{n}\frac{dx}{x}$$

$$=\ln n+1$$



$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\Theta(\log n)$$

小结

- 序列求和基本公式：
  等差数列
  等比数列
  调和级数
- 估计序列和：
  放大法求上界
  用积分做和式的渐近的界
- 应用：计数循环过程的基本运算次数