第三章　多维随机变量及其分布

知识点

一、 要理解二维随机变量的分布函数的定义及性质

1 二维随机变量(X, Y)的联合分布函数

$$F(x, y) = P\{X \le x, Y \le y\}$$

2 分布函数具有以下的基本性质：

$$F(-\infty, y) = 0; \quad F(x, -\infty) = 0;$$

$$F(-\infty, -\infty) = 0; \quad F(+\infty, +\infty) = 1.$$

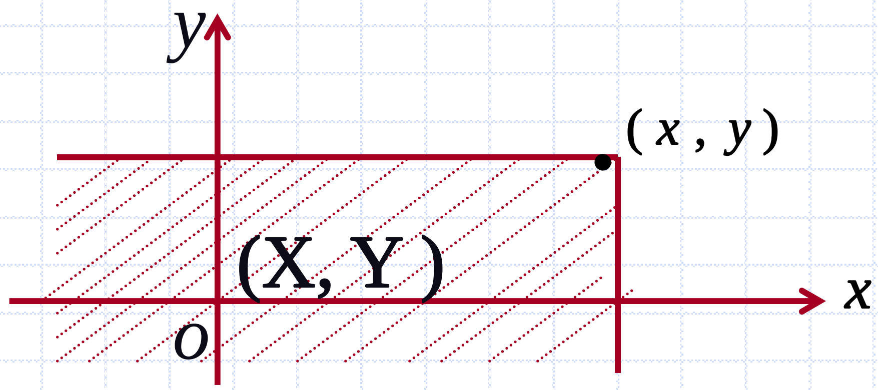
3 $F(x, y) = F(x+0, y)$, $F(x, y) = F(x, y+0)$, 即 $F(x, y)$关于 x 右连续，关于 y 也右连续.

4 已知联合分布函数求边缘分布函数

$$F_X(x) = F(x, +\infty) \qquad F_Y(y) = F(+\infty, y)$$

二维分布函数的几何意义

二维分布函数的几何意义是：$F(x, y)$ 表示平面上的随机点 (X, Y) 落在以 (x, y) 为右上顶点的无穷矩形中的概率.



二、 二维离散型随机变量

1. 会求二维离散型随机变量(X, Y)的（联合）分布律.

$$p_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\} \quad (i, j = 1, 2, \cdots)$$

性质 $\sum_{i, j} p_{ij} = 1$

2、已知联合分布律，会求边缘分布律

$$p_{i\bullet} = P\{X = x_i\} = \sum_j p_{ij}$$

$$p_{\bullet j} = P\{Y = y_j\} = \sum_i p_{ij}$$

3、会判断离散型随机变量的独立性；

$$p_{ij}=P\{X=x_i,\ Y=y_j\}=p_{i\cdot}\,p_{\cdot j}\ ,\forall\ i,j=1,2,\cdots$$

4、已知离散型随机变量X、Y的相互独立以及各自的（边缘）分布，会求联合分布；

三、 二维连续型随机变量

1、分布函数F(x,y)与密度函数f(x,y)的关系：

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}f(u,v)dudv\ ,$$

2、概率密度 $f(x,y)$ 具有以下性质：

1^0 $f(x,y) \geq 0$；

2^0 $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = F(\infty,\infty) = 1$；

3^0 若 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 连续，则有

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y).$$

4^0 设 G 是平面上的一个区域，点 (X,Y) 落在 G 内 的概率为：

$$P\{(X,Y) \in G\} = \iint_G f(x,y)dxdy .$$

3、已知联合密度函数，会求边缘密度函数

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,\ y)dy \qquad f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,\ y)dx$$

4、会判断连续型随机变量的独立性

对于几乎所有的 x，y 有，

$$f(x,\ y)=f_X(x)f_Y(y)$$

特别地，上式对 $f(x,\ y)$的所有连续点 $(x,\ y)$必须成立.

定义：设(X,Y)是二维离散型随机变量，对于固定的j，若$P\{Y=y_j\}>0$，则称

$$P\{X=x_i\mid Y=y_j\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}}=\frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}},\ i=1,2,\cdots$$

为在$Y=y_j$条件下随机变量X的条件分布律。

同样对于固定的i，若$P\{X=x_i\}>0$，则称

$$P\{Y=y_j\mid X=x_i\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{X=x_i\}}=\frac{p_{ij}}{p_{i\bullet}},\ j=1,2,\cdots$$

为在$X=x_i$条件下随机变量Y的条件分布律。

连续型随机变量的条件分布函数

$$F_{X|Y}(x \mid y) = \int_{-\infty}^{x} \frac{f(u, y)}{f_Y(y)} du,$$

称为在条件$Y = y$下X的条件分布函数，

连续型随机变量的条件密度函数

则当 $f_Y(y)>0$时，可得随机变量 X 在 $Y=y$的条件下的条件密度函数为

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,\quad y)}{f_Y(y)}$$

当 $f_X(x)>0$时，可得随机变量 Y 在 $X=x$的条件下的条件密度函数为

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,\quad y)}{f_X(x)}$$

5、 掌握二维均匀分布和二维正态分布

$$f(x, \quad y) = \begin{cases} \dfrac{1}{A} & (x, \quad y) \in D \\ 0 & (x, \quad y) \notin D \end{cases}$$

$$(X, \quad Y) \sim N(\mu_1, \quad \mu_2, \quad \sigma_1^2, \quad \sigma_2^2 \quad \rho)$$

$$f(x, \quad y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$\cdot \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

结 论 （一）

二维正态分布的边缘分布是一维正态分布.

即若 $(X, \ Y) \sim N(\mu_1, \ \mu_2, \ \sigma_1^2, \ \sigma_2^2, \ \rho)$ 则有,

$X \sim N(\mu_1, \ \sigma_1^2)$ $Y \sim N(\mu_2, \ \sigma_2^2)$

结 论 （二）

二维正态分布

X，Y独立 $\Leftrightarrow$ $\rho_{XY} = \rho$ =0 $\Leftrightarrow$ X，Y不相关。

连续型随机变量和的分布

$Z = X + Y$ 的密度函数为

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, \quad z - x)dx$$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z - y, \quad y)dy$$

连续型随机变量和的分布

特别地，如果随机变量 X 与 Y 相互独立，则有

$$f(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$$

此时，我们有

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx$$

或者

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y) f_Y(y) dy$$

多维随机变量的最值分布函数的分布

设 X_1， X_2， $\cdots$， X_n 是独立同分布的连续型 随机变量，
X_1 的分布函数为 $F(x)$，密度函数为 $f(x)$. 令：

$$X_{(n)} = \max(X_1, X_2, \cdots, X_n)$$
$$X_{(1)} = \min(X_1, X_2, \cdots, X_n)$$

$$f_{(n)}(x) = F'_{(n)}(x) = \frac{d}{dx}\left\{[F(x)]^n\right\} = n[F(x)]^{n-1} f(x)$$

$$f_{(1)}(x) = F'_{(1)}(x) = \frac{d}{dx}\left\{1-[1-F(x)]^n\right\} = n[1-F(x)]^{n-1} f(x)$$