高等数学在经济中的应用

大纲要求

了解 导数的经济意义（含边际与弹性的概念）.

会利用定积分求解简单的经济应用问题， 用微分方程和差分方程求解简单的经济应用问题

一、极限在经济中的应用

1.复利.

一笔 P 元的存款，以年复利方式计息，年利率为 r，在 t 年后的将来，余额为 B 元，那么有

$$B=P(1+r)^t \quad .$$

2.连续复利

由此，我们可以得出：如果年利率为 r 的利息一年支付 n 次，以复利方式计息，那么当初始存款为 P 元时，t 年后余额为

$$P(1+\frac{r}{n})^{nt}$$

在上式中，令 $n\to\infty$，得 Pe^{rt}，从而知如果初始存款为 P 元，利息水平是年率利为 r 的连续复利，则 t 年后，余额 B 可用以下公式计算：

$B=Pe^{rt}$.

在现实世界中，有许多事情的变化都类似连续复利.例如，放射物质的衰变；细胞的繁殖；物体被周围介质冷却或加热；大气随地面上的高度的变化；电路的接通或切断时，直流电流的产生或消失过程等等.

3.现值与将来值

一笔现值 P 元的存款，以年复利方式计息，年利率为 r，在 t 年后的将来，余额为 B 元，那么有 将来值 $B=P(1+r)^t$ 或现值 $P=\dfrac{B}{(1+r)^t}$.

若为连续复利，$B=Pe^{rt}$ 或 $P=\dfrac{B}{e^{rt}}=Be^{-rt}$.

例 7.1 你买的彩票中奖 1 百万元，你要在两种兑奖方式中进行选择，一种为分四年每年支付 250 000 元的分期支付方式，从现在开始支付；另一种为一次支付总额为 920000 元的一次付清方式，也就是现在支付.假设银行利率为 6%，以连续复利方式计息，又假设不交税，那么你选择哪种兑奖方式？

解 我们选择时考虑的是要使现在价值（即现值）最大，那么设分四年每年支付 250 000 元的支付方式的现总值为 P，则 $P=250\ 000+250\,000e^{-0.06}+250000e^{-0.06\times2}+250\,000e^{-0.06\times3}$

$$\approx 250000+235\,411+221\,730+208\ 818=915\ 989<920\ 000.$$

因此，最好是选择现在一次付清 920 000 元这种兑奖方式.

例 7.2　设某酒厂有一批新酿的好酒，如果现在（假定 $t=0$）就售出，总收入为 R_0（元），如果窖藏起来待来日按陈酒价格出售，t 年末总收入为 $R=R_0e^{\frac{2}{5}\sqrt{t}}$.
假定银行的年利率为 r，并以连续复利计息，试求窖藏多少年售出可使总收入的现值最大，并求 $r=0.06$ 时的 t 值.

解　根据连续复利公式，这批酒在窖藏 t 年末售出总收入 R 的现值为 $A(t)=\mathrm{Re}^{-rt}$，而 $R=R_0e^{\frac{2}{5}\sqrt{t}}$，所以 $A(t)=R_0e^{\frac{2}{5}\sqrt{t}-rt}$. 令 $\frac{dA}{dt}=R_0e^{\frac{2}{5}\sqrt{t}-rt}(\frac{1}{5\sqrt{t}}-r)=0$，得唯一驻点 $t_0=\frac{1}{25r^2}$.

又 $\frac{d_2A}{dt^2}=R_0e^{\frac{2}{5}\sqrt{t}-rt}[(\frac{1}{5\sqrt{t}}-r)^2-\frac{1}{10\sqrt{t^3}}]$, 则有 $\frac{d^2A}{dt^2}\Big|_{t=t_0}=R_0e^{\frac{1}{25r}}(-12.5r^3)<0.$

于是，$t_0=\frac{1}{25r^2}$ 是极大值点即最大值点，故窖藏 $t=\frac{1}{25r^2}$（年）售出，总收入的现值最大.

当 $r=0.06$ 时，$t=\frac{100}{9}\approx 11$（年）.

二、导数在经济中的应用

1．成本函数

某产品的总成本 C 是指生产一定数量的产品所需的全部经济资源投入（如劳动力、原料、设备等）的价格或费用的总额，它由固定成本 C_1 与可变成本 C_2 组成，平均成本 $\overline{C}$ 是生产一定量产品，平均每单位产品的成本.

2．收益函数

总收益 R 是企业出售一定量产品所得到的全部收入.
平均收益 p 是企业出售一定量产品，平均每出售单位产品所得到的收入，即单位产品的价格，用 p 表示. p 与 q 有关，因此，$p=p(q)$. 设总收益为 R，则 $R=qp=qp(q)$.

3．利润函数

设利润为 L，则利润=收入— 成本，即 $L=R-C$.

4．需求函数

“需求”指的是顾客购买同种商品在不同价格水平的商品的数量.一般来说，价格的上涨导致需求量的下降.
设 p 表示的商品价格，q 表示需求量.需求量是由多种因素决定的，这里略去价格以外的其它因素，只讨论需求量与价格的关系，则 $q=f(p)$ 是单调减少函数，称为需求函数（图 12-3）.

若 $q=f(p)$ 存在反函数，则 $p=f^{-1}(q)$ 也是单调减少函数，也称为需求函数.

5．供给函数

“供给”指的是生产者将要提供的不同价格水平的商品的数量.一般说来，当价格上涨时，供给量增加.设 p 表示商品价格，q 表示供给量，略去价格以外的其它因素，只讨论供给与价格的关系，则 $q = j\,(p)$ 是单调增加函数，称为供给函数（图 12-3）.

若 $q = j\,(p)$ 存在反函数，则 $q = j^{-1}(p)$ 也是单调增函数.

我们常用以下函数拟合供给函数，建立经验曲线.

6．边际分析

一般地，若函数 $y = f(x)$ 可导，则导函数 $f'(x)$ 也称为边际函数. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ 称为 $f(x)$ 在 $[x_0, x_0 + \Delta x]$ 上的平均变化率，它表示在 $[x_0, x_0 + \Delta x]$ 内 $f(x)$ 的平均变化速度. $f(x)$ 在点 x_0 处的变化率 $f'(x_0)$ 也称为 $f(x)$ 在点 x_0 处的边际函数值，它表示 $f(x)$ 在点 x_0 处的变化速度.

在点 x_0 处，x 从 x_0 改变一个单位，y 相应的改变值为 $\Delta y\Big|_{\substack{x=x_0\\ \Delta x=1}} = f(x_0 + 1) - f(x_0)$，当 x 的一个单位与 x_0 值相比很小时，则有 $\Delta y\Big|_{\substack{x=x_0\\ \Delta x=1}} = f(x_0 + 1) - f(x_0) \approx dy\Big|_{\substack{x=x_0\\ dx=1}} = f'(x)dx\Big|_{\substack{x=x_0\\ \Delta x=1}} = f'(x_0).$

（当 $\Delta x = -1$ 时，标志着 x 由 x_0 减小一个单位）.

这说明 $f(x)$ 在点 x_0 处，当 x 产生一个单位的改变时，y 近似地改变 $f'(x_0)$ 个单位.在实际应用中解释边际函数值的具体意义也略去“近似”二字.

因此，我们称 $C'(q), R'(q), L'(q)$ 分别为边际成本，边际收益，边际利润，而 $C'(q_0)$ 称为当产量为 q_0 时的边际成本，其经济意义是当产量达到 q_0 时，再生产一个单位产品所增添的成本（即成本的瞬时变化率）.同样 $R'(q_0)$ 称为当产量为 q_0 时的边际收益，其经济意义是当产量达到 q_0 时，再生产一个单位产品所得到的收益（即收益的瞬时变化率）.

7．最大利润

利润函数为 $L(q) = R(q) - C(q)$，可利用求函数最大值、最小值的方法来求最大利润.

例 7.3　一商家销售某种商品的价格 p 满足关系式 $p = 7 - 0.2x$，其中 x 为销售量（单位：kg)，商品的成本函数（单位：百元）是 C=3x+1.

（1）若每销售 1kg 商品，政府要征税 t（单位：百元)，求该商家获得最大利润时的销售量;

（2）t 为何值时，政府税收总额量大.

解　（1）当销售了 x　kg 商品时，总税额为 $T = tx.$ 商品销售总收入为 $R = px = (7 - 0.2x)x$，利润

函数为 $L=R-C-T=-0.2x^2+(4-t)x-1,\qquad \frac{dL}{dx}=-0.4x+4-t$，

令 $\frac{dL}{dx}=0$，解得 $x=\frac{5}{2}(4-t)$.又 $\frac{d^2L}{dx^2}<0,$ 所以 $x=\frac{5}{2}(4-t)$ 为利润最大时的销售量.

（2）将 $x=\frac{5}{2}(4-t)$ 代入 $T=tx$，得 $T=10t-\frac{5}{2}t^2,\frac{dT}{dt}=10-5t.$ 令 $\frac{dT}{dt}=0$，解得 $t=2.$ 又

$\frac{d^2T}{dt^2}=-5<0,$ 所以 $t=2$ 时, T 有唯一极大值，同时也是最大值.此时，政府税收总额最大.

例 7.4　某商品进价为 a（元/件），当销售价为 b（元/件）时，销售量为 c 件（a,b,c 均为正常数，且 $b\ge\frac{4}{3}a$），市场调查表明，销售价每下降 10%，销售量可增加 40%，现决定一次性降价.试问，当销售价定为多少时，可获得最大利润？并求出最大利润.

解　设 p 表示降价后的销售价，x 为增加的销售量，$L(x)$ 为总利润，那么 $\frac{x}{b-p}=\frac{0.4c}{0.1b},$

则 $p=b-\frac{b}{4c}x.$ 从而 $L(x)=(b-\frac{b}{4c}x-a)(c+x).$

对 x 求导，得 $L'(x)=-\frac{b}{2c}x+\frac{3}{4}b-a.$ 令 $L'(x)=0$，得惟一驻点 $x_0=\frac{(3b-4a)c}{2b}.$

由问题的实际意义或 $L''(x_0)=-\frac{b}{2c}<0$ 可知，x_0 极大值点，也是最大值点，故定价为

$p=b-(\frac{3}{8}b-\frac{1}{2}a)=\frac{5}{8}b+\frac{1}{2}a$（元）时，得最大利润 $L(x_0)=\frac{c}{16b}(5b-4a)^2$（元）.

8．弹性分析

（1）弹性的概念

定义　　函数 $y=f(x)$ 的相对改变量 $\frac{\Delta y}{y_0}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{y_0}$ 与自变量的相对改变量 $\frac{\Delta x}{x_0}$ 之比 $\frac{\Delta y}{y_0}\Big/\frac{\Delta x}{x_0}$ 称为函数 $f(x)$ 从 $x=x_0$ 到 $x=x_0+\Delta x$ 两点间的相对变化率或称两点间的弹性.

若 $f'(x_0)$ 存在，则极限值 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y/y_0}{\Delta x/x_0}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{x_0}{y_0}\cdot\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)\dfrac{x_0}{y_0}$，称为 $f(x)$ 在点 x_0 处的相对变化率，或相对导数或弹性，记作 $\dfrac{Ey}{Ex}\Big|_{x=x_0}$ 或 $\dfrac{E}{Ex}f(x_0)$. 即 $\dfrac{Ey}{Ex}\Big|_{x=x_0}=\dfrac{E}{Ex}f(x_0)=f'(x_0)\dfrac{x_0}{y_0}$.

若 $f'(x)$ 存在，则 $\dfrac{Ey}{Ex}=\dfrac{E}{Ex}f(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y/y}{\Delta x/x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{x}{y}\cdot\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)\dfrac{x}{y}$（是 x 的函数），称为 $f(x)$ 的弹性函数.

由于 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y/y_0}{\Delta x/x_0}=\dfrac{E}{Ex}f(x_0)$. 当 $|\Delta x|$ 充分小时，$\dfrac{\Delta y/y_0}{\Delta x/x_0}\approx\dfrac{E}{Ex}f(x_0)$，从而 $\dfrac{\Delta y}{y_0}\approx\dfrac{\Delta x}{x_0}\dfrac{E}{Ex}f(x_0)$. 若取 $\dfrac{\Delta x}{x_0}=1\%$, 则 $\dfrac{\Delta y}{y_0}\approx\dfrac{E}{Ex}f(x_0)\%$.

弹性的经济意义：若 $f'(x_0)$ 存在，则 $\dfrac{E}{Ex}f(x_0)$ 表示在点 x_0 处，x 改变 1%时，$f(x)$ 近似地改变 $\dfrac{E}{Ex}f(x_0)\%$（我们常略去近似二字）.

因此，函数 $f(x)$ 在点 x 的弹性 $\dfrac{E}{Ex}f(x)$ 反映随 x 变化的幅度所引起函数 $f(x)$ 变化幅度的大小，也就是 $f(x)$ 对 x 变化反应的强烈程度或灵敏度.

例 7.5　设 $y=x^a$, 求 $\dfrac{Ey}{Ex}$,

解　$\dfrac{Ey}{Ex}=y'\cdot\dfrac{x}{y}=ax^{a-1}\dfrac{x}{x^a}=a\cdot$

（2）需求弹性

需求弹性反映了当商品价格变动时需求变动的强弱. 由于需求函数 $q=f(p)$ 为递减函数，所以 $f'(p)\le 0$，从而 $f'(p_0)\dfrac{p_0}{q_0}$ 为负数. 经济学家一般用正数表示需求弹性，因此，采用需求函数相对变化率的相反数来定义需求弹性.

定义　设某商品的需求函数为$q=f(p)$，则称$\overline{h}(p_0,p_0+\Delta p)=-\dfrac{\Delta q}{\Delta p}\cdot\dfrac{p_0}{q_0}$为该商品从$p=p_0$到$p=p_0+\Delta P$两点间的需求弹性.若$f'(p_0)$存在，则称$h\big|_{p=p_0}=h(p_0)=-f'(p_0)\cdot\dfrac{p_0}{f(p_0)}$为该商品在$p=p_0$上的需求弹性.

（3）供给弹性

供给弹性与一般函数弹性定义一致.

定义　设某商品供给函数为$q=j(p)$，则称$\overline{e}(p_0,p_0+\Delta p)=\dfrac{\Delta q}{\Delta p}\cdot\dfrac{p_0}{q_0}$为该商品在$p=p_0$与$p=p_0+\Delta p$两点间的供给弹性.若$j'(p_0)$存在，则称$e\big|_{p=p_0}=e(p_0)=j'(p_0)\cdot\dfrac{p_0}{j(p_0)}$为该商品在$p=p_0$处的弹性

例 7.6　设$q=e^{2p}$,求$e(2)$，并解释其经济意义.

解　由于$(e^{2p})'=2e^{2p}$,所以$e(p)=j'(p)\cdot\dfrac{p}{j(p)}=2e^{2p}\cdot\dfrac{p}{e^{2p}}=2p$.有$e(2)=4\cdot e(2)=4$说明当p=2 时，价格上涨 1%，供给增加 4%；价格下跌 1%，供给减少 4%.

例 7.7　设某产品的需求函数为$q=q(p)$，收益函数为$R=pq$，其中 p 为产品价格，q 为需求量（产品的产量），$q(p)$是单调减函数.如果当价格为p_0 对应的产量为q_0时，边际收益$\dfrac{dR}{dq}\Big|_{q=q_0}=a>0$，收益对价格的边际效应为$\dfrac{dR}{dp}\Big|_{p=p_0}=c<0$，需求 q 对价格 p 的弹性为$h_p=b>1$,求$p_0$和$q_0$。

解　因为收益$R=pq$，所以有$\dfrac{dR}{dq}=p+q\dfrac{dp}{dq}=p+\left(-\dfrac{1}{\dfrac{dq}{dp}\cdot\dfrac{p}{q}}\right)(-p)=p(1-\dfrac{1}{h_p})$,

于是$\dfrac{dR}{dq}\Big|_{q=q_0}=p_0(1-\dfrac{1}{b})=a$,解得$p_0=\dfrac{ab}{b-1}$.

又$\dfrac{dR}{dp}=q+p\cdot\dfrac{dq}{dp}=q-(-\dfrac{dq}{dp}\cdot\dfrac{p}{q})q=q(1-h_p)$,

于是有$\frac{dR}{dp}\Big|_{p=p_0}=q_0(1-h_p)=c$,得$q_0=\frac{c}{1-b}$.

例 7.8　设某商品需求量 Q 是价格 p 的单调减少函数；$Q=Q(p)$，其中需求弹性$h=\frac{2p^2}{192-p^2}>0.$

（1）设 R 为总收益函数，证明$\frac{dR}{dp}=Q(1-h)$;

（2）求 $p=6$时，总收益对价格的弹性，并说明其经济意义.

解　（1）$R(p)=pQ(p)$.上式两边对 p 求导数，得

$$\frac{dR}{dp}=Q+p\frac{dQ}{dp}=Q(1+\frac{p}{Q}\frac{dQ}{dp})=Q(1-h).$$

（2）$\frac{ER}{Ep}=\frac{p}{R}\frac{dR}{dp}=\frac{p}{pQ}Q(1-h)=1-h=1-\frac{2P^2}{192-P^2}=\frac{192-3P^2}{192-P^2}.$

$$\frac{ER}{Ep}\Big|_{p=6}=\frac{192-3\times6^2}{192-6^2}=\frac{7}{13}\approx0.54.$$

经济意义：当 $p=6$时，若价格上涨 1%，则总收益将增加 0.54%.

三、偏导数在经济中的应用

例 7.9　某厂家生产的一种产品同时在两个市场销售，售价分别为p_1和p_2，销售量分别为q_1和q_2，需求函数分别为$q_1=24-0.2p_1$和$q_2=10-0.05p_2$,总成本函数为$C=35+40(q_1+q_2)$,

试问：厂家如何确定两个市场的售价，能使其获得的总利润最大？最大总利润为多少？

解法一　总收入函数为$R=p_1q_1+p_2q_2=24p_1-0.2p_1^2+10p_2-0.05p_2^2$.

总利润函数为$L=R-C=32p_1-0.2p_1^2-0.05p_2^2-1395+12p_2$

由极值的必要条件，得方程组$\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial p_1}=32-0.4p_1=0,\\ \frac{\partial L}{\partial p_2}=12-0.1p_2=0.\end{cases}$解此方程组得　$p_1=80,p_2=120$

由问题的实际含义可知，当 $p_1=80,p_2=120$时，厂家所获得的总利润最大，其最大总利润为

$$L\Big|_{p_1=80,p_2=120}=605.$$

解法二　两个市场的价格函数分别为 $p_1=120-5q_1$，　和　$p_2=200-20q_2$，

总收入函数为 $R=p_1q_1+p_2q_2=(120-5q_1)q_1+(200-20q_2)q_2$，

总利润函数为 $L=R-C=(120-5q_1)q_1+(200-20q_2)q_2-[35+40(q_1+q_2)]$

$=80q_1-5q_1^2+160q_2-20q_2^2-35.$

由极值的必要条件，得方程组 $\begin{cases}\dfrac{\partial L_1}{\partial q_1}=80-10q_1=0,\\ \dfrac{\partial L_2}{\partial q_2}=160-40q_2=0.\end{cases}$

解方程组得 $q_1=8.q_2=4$ 由问题的实际含义可知，当 $q_1=8,q_2=4$,即$p_1=80,p_2=120$ 时，厂家所获得的总利润最大，共最大利润为 $L/.q_1=8,q_2=4=605.$

四、差分方程

函数 $y(t)$ 的自变量 t 只取整数值，简记为 y_t，方程 $y_{t+1}+py_t=f(t)$

称为一阶常系数线性差分方程，其中 $p\neq 0$ 是常数，$f(t)$ 为 t 的已知函数，t 取整数值。

若 $f(t)\equiv 0$，称为一阶常系数齐次差分方程，若 $f(t)\neq 0$，称为一阶常系数非齐次差分方程，

方程 $y_{t+1}+py_t=0$，对应的方程 $l+p=0$ 称为齐次差分方程对应的特征方程，$l=-p$ 称为特征根.

$Y_t=Cl^t=C(-p)^t$ 为齐次差分方程的通解，其中 C 为任意常数．若 $\tilde{y}_t$ 为非齐次差分方程的一个特解，Y_t 为对应的齐次差分方程的通解，则 $y_t=Y_t+\tilde{y}_t$ 为非齐次方程的通解.

对于一些特殊的 $f(t)$，$\tilde{y}_t$ 可用待定系数法求之如下:

1. 设 $f(t)=P_m(t)$ 为 t 的 m 次已知多项式．则令 $\tilde{y}_t=t^kR_m(t)$,其中 $R_m(t)$ 为 t 的 m 次多项式，系数待定；当 1 不是特征根，即$1\neq -p$ 时，取 $k=0$；当 $p=-1$ 时，取 $k=1$.

2．设 $f(t)=P_m(t)a^t$，其中 $P_m(t)$ 的意义同上，a 为常数，则令 $\tilde{y}_t=t^kR_m(t)a^t$, 其中 $R_m(t)$ 的意义同上；当 a 不是特征根，即 $a\neq -p$ 时，取 $k=0$；当 $a=-p$ 时，取 $k=1$.

3． 设 $f(t)=b_1\cos bt+b_2\sin bt,$ 其中 b_1,b_2,b 为常数， b_1,b_2 不同时为零， $b>0$． 则令 $\tilde{y}_t=t^k(B_1\cos bt+B_2\sin bt),$ 其中 B_1,B_2 为待定常数．当 $e^{ib}\neq -p$

取 $k=0$； 当 $e^{ib}=-p$ 时，取 $k=1$．其中 $e^{ib}=\cos b+i\sin b$

例 7.10　求差分方程 $2y_{t+1}+10y_t-5t=0$ 的通解。

解　原方程化为 $2y_{t+1}+10y_t=5t$，该方程所对应的齐次差分方程为 $y_{t+1}+5y_t=0$，

其特征方程为 $l+5=0,$ 即 $l=-5.$ 其通解 $Y_t=c(-5)^t$． 由 1 不是特征根，且 $5t$ 是一次多项式，故设特解 $\tilde{y}_t=at+b$ 代入原方程，得

$$2a(t+1)+2b+10at+10b=5t\Leftrightarrow 12at+2a+12b=5t,$$

比较系数可知 $a=\dfrac{5}{12},b=-\dfrac{5}{72},$ 故 $\tilde{y}_t=\dfrac{5}{12}(t-\dfrac{1}{6}),$ 从而原差分方程的通解为

$$y_t=Y_t+\tilde{y}_t=c(-5)^t+\frac{5}{12}(t-\frac{1}{6}).$$

例 7.11　求差分方程 $y_{t+1}-2y_t=\sin t$ 的通解。

解　对应的齐次差分方程的特征方程为 $l-2=0,$ 即 $l=2.$ 知齐次差分方程的通解为 $Y_t=c2^t.$ 由 $p=-2,b=1,$ 知 $e^i\neq -2,$ 设 $\tilde{y}_t=A\cos t+B\sin t$ 代入原方程得 $A\cos(t+1)+B\sin(t+1)-2A\cos t-2B\sin t=\sin t$，利用三角公式，比较两边 $\cos t$ 和 $\sin t$ 的系数得 $\begin{cases}A(\cos 1-2)+B\sin 1=0,\\ -A\sin 1+B(\cos 1-2)=1.\end{cases}$ 解得 $A=-\dfrac{\sin 1}{5-4\cos 1},B=\dfrac{\cos 1-2}{5-4\cos 1}$ 。故原方程的通解为

$$y_t=c2^t+\frac{1}{5-4\cos 1}\left[-\sin 1\cos t+(\cos 1-2)\sin t\right].$$

五、常微分方程与差分方程在经济中的应用

例 7.12　已知某商品的需求量 x 对价格 p 的弹性 $h=-3p^2$，而市场对该商品的最大需求量为 1（万件）．求需求函数．

解　根据弹性的定义，有 $h=\dfrac{dx}{x}\Big/\dfrac{dp}{p}=-3p^2,\dfrac{dx}{x}=-3p^3dp.$ 由此得 $x=Ce^{-p^3}$，C 为待定常数．由

题设知 $P=0$ 时，x=1，从而 C=1．于是，所求的需求函数为 $x=e^{-p^3}$．

例 7.13　已知某商品的需求量 D 和供给量 S 都是价格 p 的函数；

$D=D(p)=\frac{a}{p^2}$，　$S=S(p)=bp$，其中 $a>0$，和 $b>0$ 为常数；价格 p 是时间 t 的函数且满足方程

$\frac{dp}{dt}=k[D(p)-S(p)]$　　（k 为正的常数）．假设当 $t=0$ 时价格为 1，试求

（1）需求量等于供给量时的均衡价格 P_e；（2）价格函数 $p(t)$；（3）极限 $\lim\limits_{t\to\infty}p(t)$.

解　（1）当需求量等于供给量时，有 $\frac{a}{p^2}=bp, p^3=\frac{a}{b}$，因此均衡价格为 $p_e=(\frac{a}{b})^{1/3}$.

（2）由条件知 $\frac{dp}{dt}=k[D(p)-S(p)]=k\left[\frac{a}{p^2}-bp\right]=\frac{kb}{p^2}(\frac{a}{b}-p^3)$.

因此有 $\frac{dp}{dt}=\frac{kb}{p^2}(p_e^2-p^3)$，　即　$\frac{p^2dp}{p^3-p_e^3}=-kbdt.$ 在该式两边同时积分，得 $p^3=p_e^3+Ce^{-3kbt}$.

由条件 $p(0)=1$，可得 $C=1-p_e^3$．于是价格函数为 $p(t)=[p_e^3+(1-p_e^3)e^{-3kbt}]^{1/3}$.

（3）$\lim\limits_{t\to\infty}p(t)=\lim[p_e^3+(1-p_e^3)e^{-3kbt}]^{1/3}=p_e$.

例 7.14　某公司每年的工资总额在比上一年增加 20%的基础上再追加 2 百万元，若以 W_t 表示七年的工资总额（单位：百万元），求 W_t 所满足的方程，并求解。

解　$W_t=1.2W_{t-1}+2$　即　$W_{t+1}-1.2W_t=2$。由特征方程为 $l-1.2=0$，得 $l=1.2$，故对应的齐次差分方程的通解为 $C(1.2)^t$，由于 $1\neq1.2$，设特解 $\overline{W_t}=b$ 代入有 $b-1.2b=2$，得 $b=-10$，所以差分方程的通解为 $W_t=C(1.2)^t-10$.