第一章　概率与随机事件

知识点

1 阐述了随机试验的特征以及随机事件之间的关系及运算。要求：理解

1^0 包含关系 $A \subset B$ “A发生必然导致B发生”

2^0 和事件 $A \cup B$ “A，B中至少有一发生”

3^0 积事件 $A \cap B = AB$ “A与B同时发生”

4^0 差事件 $A - B$ “A发生但B不发生”

5^0 互不相容 $A \cap B = \varnothing$ “A与B不能同时发生”

6^0 对立（互逆）事件 $A \cap B = \varnothing$ 且 $A \cup B = S$

记 $A = \overline{B}$ 或 $B = \overline{A}$

随机事件的运算规律

De Morgan定律:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \qquad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

事件间的关系与运算举例;

“A，B，C中至少有一发生”： $A \cup B \cup C$

“A，B，C中至少有两发生”： $AB \cup BC \cup AC$

“A，B，C中最多有一发生”：

$$A\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} = \overline{AB \cup BC \cup AC}$$

（1）　概率的（公理化）定义

1^0　$0 \le P(A)$；　（非负性）

2^0　$P(S)=1$；　（正则性或正规性）

3^0　若 $A_1, A_2, \cdots$ 是两两互不相容事件，则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots .$$

（可列可加性）

（2）概率的性质与推广

性质 1　$P(\varnothing)=0$；

性质 2　若$A_1, A_2, \cdots, A_n$是两两互不相容事件，则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$$

（有限可加性）

性质 3　$A \subset B \Rightarrow P(B-A)=P(B)-P(A)$　（包含可减性）

$$P(B) \geq P(A)$$

（非降性）

性质 4　$P(A) \leq 1$；

性质 5　$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$；（逆事件的概率公式）

性质 6　$P(A \cup B) = P(A)+P(B)-P(AB)$。

（加法公式）

重 要 推 广

1) $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)$

$$-P(AB)-P(AC)-P(BC)$$

$$+P(ABC)$$　（加法公式）

2) $P(B\overline{A})=P(B-A)=P(B)-P(AB)$

常用公式

$$P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})=P(\overline{A\cup B\cup C})=1-P(A\cup B\cup C)$$

加法公式的推广

对任意 n 个事件 A_1, A_2, $\cdots$, A_n ，有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

$$-\sum_{1\le i<j\le n} P(A_i A_j) + \sum_{1\le i<j<k\le n} P(A_i A_j A_k)$$

$$-\cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \cdots A_n)$$

等可能概型（古典概型）

特点是:

- ♣ 样本空间的元素只有有限个；　　(有限性)
- ♣ 每个基本事件发生的可能性相同。（等可能性）

随机事件的概率:

即:
$$P(A)=\frac{A\text{ 包含的基本事件数}}{S\text{ 中基本事件总数}}.$$

几何概型

一般，设某个区域 D (线段，平面区域，空间区域），具有测 度 m_D(长度，面积，体积)。如果随机实验 E 相当于向区域内任意地取点，且取到每一点都是等可能的，则称此类试验为 几何概型。

如果试验 E 是向区域内任意取点，事件 A 对应于点落在 D 内的某区域 A，则

$$P(A)=\frac{m_A}{m_D}.$$

设A、B是某随机试验中的两个事件，且

$$P(A) > 0$$

则 $$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

称为在事件A已发生的条件下事件B的条件概率，简称为B在A之下的条件概率。

两个事件的乘法公式

由条件概率的计算公式

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

我们得

$$P(AB)=P(A)P(B|A)$$

这就是两个事件的乘法公式.

多个事件的乘法公式

设 A_1，A_2，$\cdots$，A_n 为 n 个随机事件，且

$$P(A_1 A_2 \cdots A_{n-1}) > 0$$

则有

$$P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1) P(A_3|A_1 A_2)\cdots P(A_n|A_1 A_2 \cdots A_{n-1})$$

这就是n个事件的乘法公式.

设随机事件 $A_1, \quad A_2, \quad \cdots, \quad A_n \quad \cdots$ 以及 B

满足：

(1). $A_1, \quad A_2, \quad \cdots, \quad A_n \quad \cdots$ 两两互不相容；

(2). $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = S$ 或 $B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$；

(3). $P(A_n) > 0 \quad (n = 1, \quad 2, \quad \cdots)$

则有 $$P(B) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) P(B|A_n)$$

$$P(A_n \mid B) = \frac{P(A_n B)}{P(B)} = \frac{P(B \mid A_n) P(A_n)}{\sum_{j=1}^{\infty} P(B \mid A_j) P(A_j)}, \quad n = 1, 2, \cdots, \infty$$

1、两事件独立的定义

设 A、B 是两个随机事件，如果

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

则称 A 与 B 是相互独立的随机事件.

事件独立性的性质：

如果事件A 与 B 相互独立，而且 $P(A) > 0$

则 $P(B|A) = P(B)$

若随机事件 A 与 B 相互独立，则

$\overline{A}$ 与 B、A 与 $\overline{B}$、$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$

也相互独立.

必然事件S与任意随机事件A相互独立；

不可能事件Φ与任意随机事件A相互独立.

注意1：两事件相互独立与互不相容的区别：

"A与B互不相容"，指两事件不能同时发生，

即 P（AB）=0。

"A与B相互独立"，指A是否发生不影响B发生的概率，

即P（AB）=P（A）P（B）或

$$P(B|A) = P(B) \quad (P(A) > 0)$$

注意2：设事件 A 与 B 满足：$P(A)P(B) \neq 0$

则互不相容与相互独立不能同时成立。

即：若事件 A 与 B 相互独立，则 AB≠Φ；

若 AB =Φ，则事件 A 与 B 不相互独立。.

2、三个事件的独立性

设A、B、C是三个随机事件，如果

$$\begin{cases} P(AB) = P(A)P(B) \\ P(BC) = P(B)P(C) \\ P(AC) = P(A)P(C) \\ P(ABC) = P(A)P(B)P(C) \end{cases}$$

则称A、B、C是相互独立的随机事件.

注意3：

在三个事件独立性的定义中，四个等式是缺一不可的．
即：前三个等式的成立不能推出第四等式的成立；
反之，最后一个等式的成立也推不出前三个等式的成立．

注意4　三个事件相互独立的性质：

若A，B，C是相互独立的三个事件，则

A 与 $B\cup C$，A 与 BC，A 与 $B-C$，A 与 $\overline{B\cup C}$，

A 与 $\overline{BC}$，$A,\overline{B},\overline{C}$，$A,B,\overline{C}$，$\overline{A},\overline{B},\overline{C},\cdots$ 相互独立

3 、 n个事件的相互独立性

设 A_1， A_2， $\cdots$， A_n 为 n 个随机事件，如果下列 等式成立：

$$\begin{cases} P(A_iA_j) = P(A_i)P(A_j) & (1 \le i < j \le n) \\ P(A_iA_jA_k) = P(A_i)P(A_j)P(A_k) & (1 \le i < j < k \le n) \\ \cdots\cdots \\ P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_m}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_n}) & (1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_m \le n) \\ \cdots\cdots \\ P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n) \end{cases}$$

则称 A_1， A_2， $\cdots$， A_n 这 n 个随机事件相互独立.

独立随机事件的性质：

如果 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 这 n 个随机事件相互独立.

则 (1) $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 这 n 个随机事件中任意 k 个也相互独立.

(2) $A'_{i_1}, \cdots, A'_{i_m}, A'_{i_{m+1}}, \cdots, A'_{i_n}$ 这 n 个随机事件也相互独立. 其中 $A'_{i_k} = A_{i_k}$ 或 $\overline{A}_{i_k}$,

$i_1, i_2, \cdots, i_n$ 是 $1, 2, \cdots, n$ 的一个排列.

(3) 将 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 这 n 个随机事件分成 k 组（不重不漏）. 设 $B_1, B_2, \cdots B_K$ 分别由第 $1,2,\cdots,k$ 组内的 A_i 经过和，积，差，求余运算所得，则 $B_1, B_2, \cdots B_k$ 相互独立。