动态规划
算法的例子

最短路径问题

问题：

输入：起点集合 $\{ S_1, S_2, \ldots, S_n \}$，

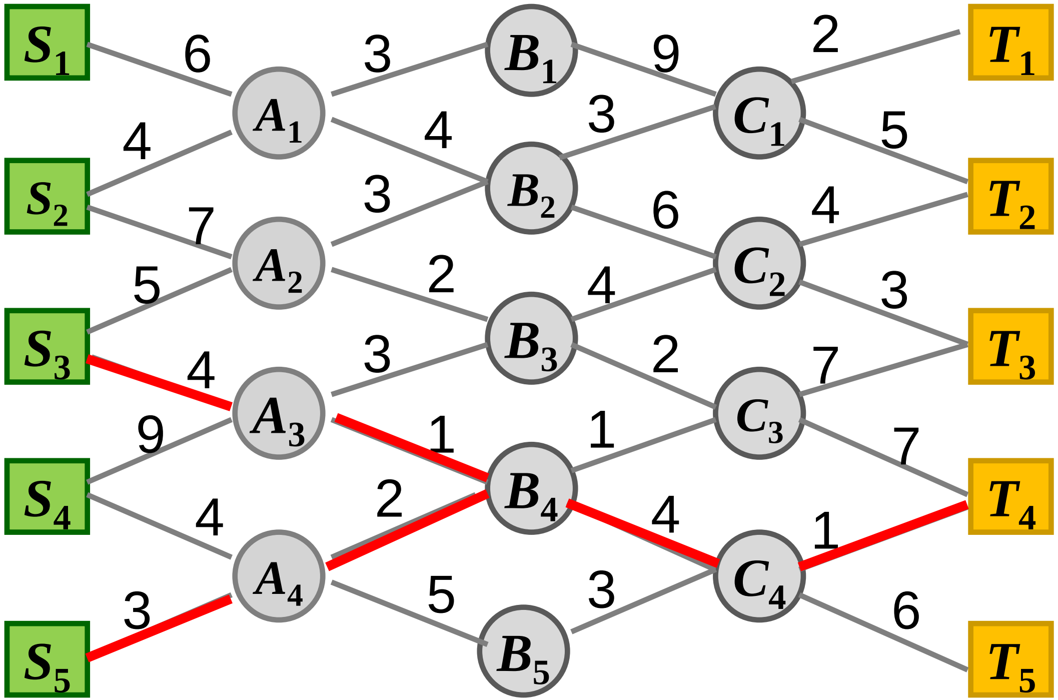
终点集合 $\{T_1, T_2, \ldots, T_m\}$，

中间结点集，

边集 E，对于任意边 e 有长度

输出：一条从起点到终点的最短路

一个实例



S_1
S_2
S_3
S_4
S_5
A_1
A_2
A_3
A_4
B_1
B_2
B_3
B_4
B_5
C_1
C_2
C_3
C_4
T_1
T_2
T_3
T_4
T_5
6
4
7
5
4
9
4
3
3
4
3
2
3
1
2
5
9
3
6
4
2
1
4
3
2
5
4
3
7
7
1
6

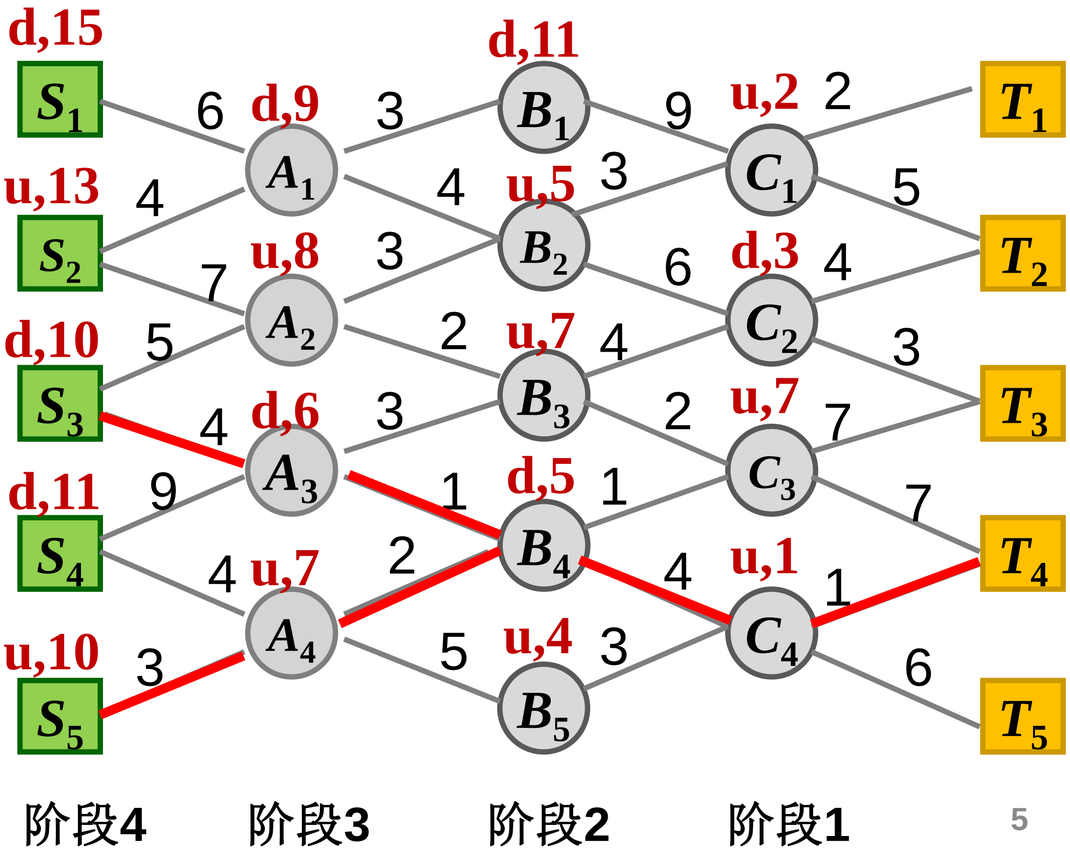
算法设计

蛮力算法：考察每一条从某个起点到某个终点的路径，计算长度，从其中找出最短路径 .

在上述实例中，如果网络的层数为 k，那么路径条数将接近于2^k

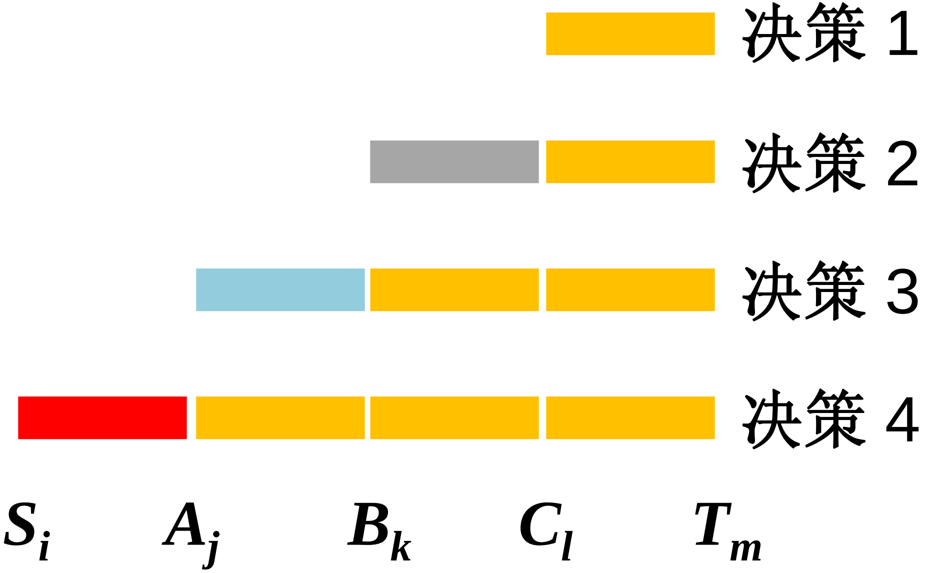
动态规划算法：多阶段决策过程. 每步求解的问题是后面阶段求解问题的子问题. 每步决策将依赖于以前步骤的决策结果.

动态规划求解


d,15
S_1
u,13
S_2
d,10
S_3
d,11
S_4
u,10
S_5
d,9
A_1
u,8
A_2
d,6
A_3
u,7
A_4
d,11
B_1
u,5
B_2
u,7
B_3
d,5
B_4
u,4
B_5
u,2
C_1
d,3
C_2
u,7
C_3
u,1
C_4
T_1
T_2
T_3
T_4
T_5
6 4 7 5 4 9 4 3
3 4 3 2 3 1 2 5
9 3 6 4 2 1 4 3
2 5 4 3 7 7 1 6
阶段4
阶段3
阶段2
阶段1

子问题界定

后边界不变, 前边界前移



最短路长的依赖关系

$$F(C_l)=\min_{m}\{C_lT_m\}$$ 决策 1

$$F(B_k)=\min_{l}\{B_kC_l+F(C_l)\}$$ 决策 2

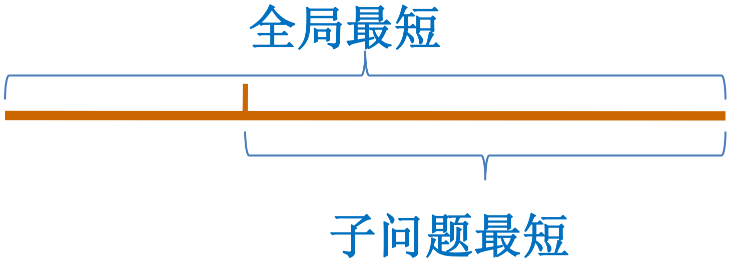
$$F(A_j)=\min_{k}\{A_jB_k+F(B_k)\}$$ 决策 3

$$F(S_i)=\min_{j}\{S_iA_j+F(A_j)\}$$ 决策 4

优化函数值之间存在依赖关系

优化原则:最优子结构性质

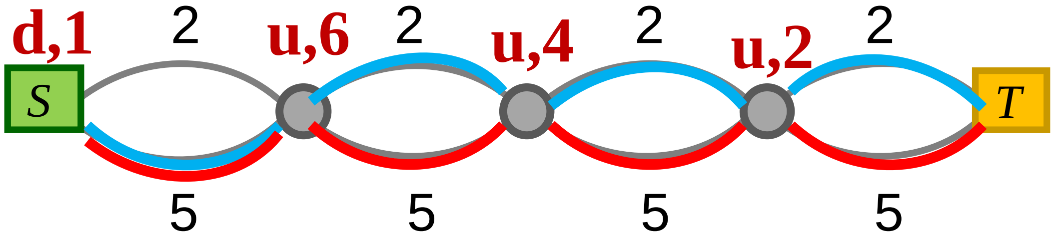
- 优化函数的特点：任何最短路的子路径相对于子问题始、终点最短



- 优化原则：一个最优决策序列的任何子序列本身一定是相对于子序列的初始和结束状态的最优决策序列

一个反例

求总长模10的最小路径



动态规划算法的解：下, 上, 上, 上

最优解：下, 下, 下, 下

不满足优化原则，不能用动态规划

小结

动态规划(Dynamic Programming)

- 求解过程是多阶段决策过程，每步处理一个子问题，可用于求解组合优化问题
- 适用条件：问题要满足优化原则或最优子结构性质，即：一个最优决策序列的任何子序列本身一定是相对于子序列的初始和结束状态的最优决策序列