最优装载问题

最优装载问题

问题：

n 个集装箱1, 2, … , n 装上轮船，集装箱 i 的重量 w_i, 轮船装载重量限制为C, 无体积限制. 问如何装使得上船的集装箱最多？不妨设每个箱子的重量 $w_i \le C$.

该问题是0-1背包问题的子问题. 集装箱相当于物品，物品重量是 w_i，价值 v_i 都等于1，轮船载重限制 C 相当于背包重量限制 b.

建模

设 $<x_1, x_2, \ldots, x_n>$ 表示解向量，$x_i = 0,1$，
$x_i = 1$当且仅当第 i 个集装箱装上船

目标函数 $\max \sum_{i=1}^{n} x_i$

约束条件 $\sum_{i=1}^{n} w_i x_i \le C$

$x_i = 0,1 \quad i = 1,2,\ldots,n$

算法设计

- 贪心策略：轻者优先
- 算法设计：
  将集装箱排序，使得

$$w_1 \leq w_2 \leq \dots \leq w_n$$

  按照标号从小到大装箱，直到装入下一个箱子将使得集装箱总重超过轮船装载重量限制，则停止.

正确性证明思路

- 命题：对装载问题任何规模为 *n* 的输入实例，算法得到最优解.
- 设集装箱从轻到重记为1, 2, … , *n*.

  归纳基础 证明对任何只含 1个箱子的输入实例，贪心法得到最优解. 显然正确.
- 归纳步骤 证明：假设对于任何*n*个箱子的输入实例贪心法都能得到最优解，那么对于任何*n*+1个箱子的输入实例贪心法也得到最优解.

归纳步骤证明思路

$N=\{1,2,\ldots,n+1\}$, $w_1 \le w_2 \le \ldots \le w_{n+1}$

⇩

去掉箱子1，令 $C' = C-\{w_1\}$，
得到规模 n 的输入 $N'=\{2,3,\ldots,n+1\}$

⇩

关于输入 N' 和C'的最优解 I'

⇩

在 I' 加入箱子1，得到 I

⇩

证明 I 是关于输入 N 的最优解

正确性证明

假设对于 n 个集装箱的输入，贪心法都可以得到最优解，考虑 输入

$$N = \{ 1, 2, \dots , n+1 \}$$

其中 $w_1 \le w_2 \le \dots \le w_{n+1}$.

由归纳假设，对于

$$N' = \{2, 3, \dots, n+1\}, \quad C' = C - w_1,$$

贪心法得到最优解 I'. 令

$$I = I' \cup \{1\}$$

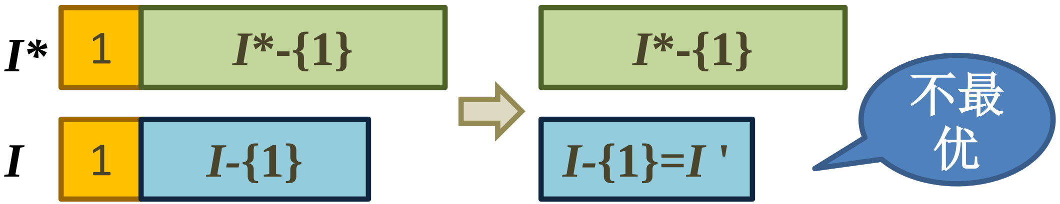
正确性证明(续)

***I* (算法解)是关于 *N* 的最优解.**

若不然，存在包含 1 的关于 N 的最优解 I^*(如果 I^* 中没有1，用 1 替换 I^* 中的第一个元素得到的解也是最优解), 且 $|I^*|>|I|$；那么$I^*-\{1\}$是 N' 和C' 的解且

$$|I^*-\{1\}|>|I-\{1\}|=|I'|$$

与 I'是关于N' 和C' 的最优解矛盾.



小结

- **装载问题是0-1背包的子问题 (每件物品重量为1)，NP难的问题存在多项式时间可解的子问题.**
- 贪心法证明：对规模归纳