卷积及其应用

向量计算

给定向量 $a = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$

$b = (b_0, b_1, \ldots, b_{n-1})$

向量和 $a+b = (a_0+b_0, a_1+b_1, \ldots, a_{n-1}+b_{n-1})$

内积 $a \cdot b = a_0 b_0 + a_1 b_1 + \ldots + a_{n-1} b_{n-1}$

卷积 $a*b = (c_0, c_1, \ldots, c_{2n-2})$，其中

$$c_k = \sum_{\substack{i+j=k \\ i,j<n}} a_i b_j, \quad k = 0,1,\ldots,2n-2$$

卷积的含义

在下述矩阵中，每个斜线的项之和恰好是卷积中的各个分量

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & ab_0 & ab_1 & \cdots & ab_{n-2} & ab_{n-1} \\
\hline
a_0 b & a_0b_0 & a_0b_1 & \cdots & a_0b_{n-2} & a_0b_{n-1} \\
a_1 b & a_1b_0 & a_1b_1 & \cdots & a_1b_{n-2} & a_1b_{n-1} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
a_{n-2} b & a_{n-2}b_0 & a_{n-2}b_1 & \cdots & a_{n-2}b_{n-2} & a_{n-2}b_{n-1} \\
a_{n-1} b & a_{n-1}b_0 & a_{n-1}b_1 & \cdots & a_{n-1}b_{n-2} & a_{n-1}b_{n-1}
\end{array}
$$

c_0 c_1 c_{n-1}

c_{2n-3} c_{2n-2}

计算实例

向量 $a = (1, 2, 4, 3)$, $b = (4, 2, 8, 0)$

则 $a+b = (5, 4, 12, 3)$

$a \cdot b = (4, 4, 32, 0)$

$a * b = (4, 10, 28, 36, 38, 24, 0)$

	ab_0	ab_1	ab_2	ab_3
a_0b	1×4	1×2	1×8	1×0
a_1b	2×4	2×2	2×8	2×0
a_2b	4×4	4×2	4×8	4×0
a_3b	3×4	3×2	3×8	3×0

$c_2 = 4\times4 + 2\times2 + 1\times8 = 28$

卷积与多项式乘法

多项式乘法： $C(x) = A(x)\, B(x)$

$$A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{m-1}x^{m-1}$$

$$B(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_{n-1}x^{n-1}$$

$$C(x) = \underline{a_0b_0 + (a_0b_1+a_1b_0)\,x + \dots}$$

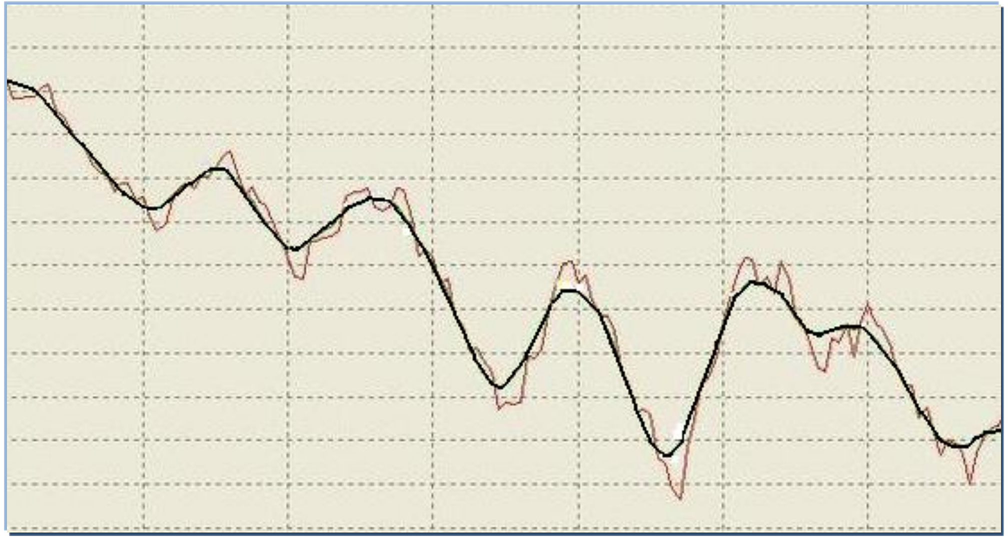
$$\underline{+\, a_{m-1}b_{n-1}\,x^{m+n-2}}$$

其中 x^k 的系数

$$c_k = \boxed{\sum_{\substack{i+j=k \\ i\in\{0,1,\dots,m-1\} \\ j\in\{0,1,\dots,n-1\}}} a_i b_j,} \quad k = 0, 1, \dots, m+n-2$$

卷积应用：信号平滑处理

由于噪音干扰，对信号需要平滑处理

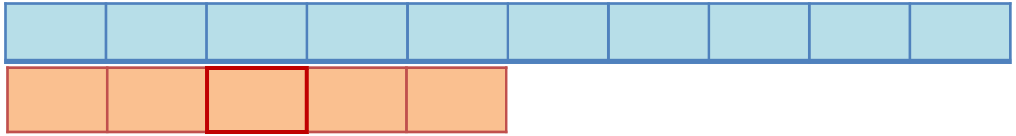


平滑处理

信号向量： $a=(a_0, a_1, \ldots, a_{m-1})$

$b=(b_{2k},b_{2k-1},\ldots,b_0)=(w_{-k}, \ldots, w_k)$

$$\boxed{a_i'=\sum_{s=-k}^{k} a_{i+s}b_{k-s}=\sum_{s=-k}^{k} a_{i+s}w_s}$$



把向量 b 看作$2k+1$长度窗口在a上移动计算 $a*b$, 得到 $(a_0', a_1',\ldots,a_{m-1}')$. 有少数项有误差.

实例

信号向量： $a = (a_0, a_1, \ldots, a_8)$

步长： $k = 2$

权值： $w = (w_{-2}, w_{-1}, w_0, w_1, w_2)$

$= (b_4, b_3, b_2, b_1, b_0)$

$$a_i' = a_{i-2}b_4 + a_{i-1}b_3 + a_ib_2 + a_{i+1}b_1 + a_{i+2}b_0$$

下标之和为 $i + k$

$\boxed{w_{-2} \quad w_{-1} \quad w_0 \quad w_1 \quad w_2}$

a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8

$$a_i' = a_{i-2}b_4 + a_{i-1}b_3 + a_i b_2 + a_{i+1}b_1 + a_{i+2}b_0$$

$a_0 b_0$	$a_0 b_1$	$a_0 b_2$	$a_0 b_3$	$a_0 b_4$	a_2'
$a_1 b_0$	$a_1 b_1$	$a_1 b_2$	$a_1 b_3$	$a_1 b_4$	a_3'
$a_2 b_0$	$a_2 b_1$	$a_2 b_2$	$a_2 b_3$	$a_2 b_4$	a_4'
$a_3 b_0$	$a_3 b_1$	$a_3 b_2$	$a_3 b_3$	$a_3 b_4$	a_5'
$a_4 b_0$	$a_4 b_1$	$a_4 b_2$	$a_4 b_3$	$a_4 b_4$	a_6'
$a_5 b_0$	$a_5 b_1$	$a_5 b_2$	$a_5 b_3$	$a_5 b_4$	
$a_6 b_0$	$a_6 b_1$	$a_6 b_2$	$a_6 b_3$	$a_6 b_4$	
$a_7 b_0$	$a_7 b_1$	$a_7 b_2$	$a_7 b_3$	$a_7 b_4$	
$a_8 b_0$	$a_8 b_1$	$a_8 b_2$	$a_8 b_3$	$a_8 b_4$	

小结

- 卷积的定义
- 卷积与多项式乘法的关系
- 卷积的应用——信号平滑处理