第五章　大数定律及中心极限定理

知识点

§1. 大数定律

定理（辛钦大数定律）

设 $X_1,\cdots,X_n,\cdots$ 相互独立同分布，且具有数学期望 $EX_i^l=\mu_l,\ \ i=1,2,\cdots,n,\cdots$ ，

$$A_l=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^l\xrightarrow{P}\mu_l,\quad l=1,2,\cdots,k.$$

§2. 中心极限定理

设 $X_1,\cdots,X_n,\cdots$ 是独立的随机变量序列，

EX_k，DX_k 存在，令：$Z_n=(\sum_{k=1}^{n}X_k-\sum_{k=1}^{n}EX_k)/\sqrt{\sum_{k=1}^{n}DX_k}$，

若对任意 $x\in R_1$，有 $\lim_{n->\infty}P\{Z_n\le x\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ 。

则称 $\{X_n\}$ 服从中心极限定理。

说明：$E(Z_n)=0$，$D(Z_n)=1$.

若 $\{X_n\}$ 服从中心极限定理，则当 n 很大时，

$$Z_n=(\sum_{k=1}^{n}X_k-\sum_{k=1}^{n}EX_k)/\sqrt{\sum_{k=1}^{n}DX_k}$$

近似服从标准正态分布。

定理（棣莫佛-拉普拉斯定理）(De Moivre--Laplace)

设随机变量 $\eta_n (n = 1,2,\cdots)$服从参数为n,p(0<p<1)的二项分布，即 $\eta_n \sim B(n, p)$.

则对于任意 x，恒有：

$$\lim_{n \to \infty} P\left\{\frac{\eta_n - np}{\sqrt{npq}} \le x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \qquad (q = 1 - p)$$