12. 若 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内连续,极限 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ 存在,则 $f(x)$ 在 (a,b) 内有界.

证　由条件知 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ 存在,设 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = A$(常数), $\lim\limits_{x\to b} f(x) = B$(常数),令 $F(x) = \begin{cases} A, & x = a, \\ f(x), & x \in (a,b), \\ B, & x = b. \end{cases}$ 由 $F(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,因此 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界,又 $(a,b) \subset [a,b]$,故 $F(x)$ 在 (a,b) 内有界,由于 $x \in (a,b)$ 时, $F(x) = f(x)$,所以 $f(x)$ 在 (a,b) 内有界.

13. 证明方程 $\dfrac{a_1}{x-b_1} + \dfrac{a_2}{x-b_2} + \dfrac{a_3}{x-b_3} = 0$;(其中 $a_1, a_2, a_3 > 0$ 且 $b_1 < b_2 < b_3$) 在 (b_1, b_2), (b_2, b_3) 内各有一根.

证法一　设 $f(x) = \dfrac{a_1}{x-b_1} + \dfrac{a_2}{x-b_2} + \dfrac{a_3}{x-b_3}$,由于 $\lim\limits_{x\to b^+} f(x) = +\infty$,由正无穷大定义知,存在 $b_1 < c_1 < b_2$,使 $f(c_1) > 0$,又 $\lim\limits_{x\to b_2^-} f(x) = -\infty$,由负无穷大定义知,存在 $c_1 < c_2 < b_2$,使 $f(c_2) < 0$. 而 $f(x)$ 在 $[c_1, c_2]$ 上连续, $f(c_1)f(c_2) < 0$,由根据的存在定理知,至少存在一点 $\xi_1 \in (c_1, c_2) \subset (b_1, b_2)$,使 $f(\xi_1) = 0$,同理可证在 $\xi_2 \in (b_2, b_3,)$,使 $f(\xi_2) = 0$,由于 $\dfrac{a_1}{x-b_1} + \dfrac{a_2}{x-b_2} + \dfrac{a_3}{x-b_3} = 0$ 等价于

$$a_1(x-b_2)(x-b_3) + a_2(x-b_1)(x-b_3) + a_3(x-b_1)(x-b_2) = 0 \tag{1}$$

而(1)式是一元二次方程,至多有两个实根,而已证明有两个实根 ξ_1, ξ_2,故方程在 (b_1, b_2), (b_2, b_3) 内各有一个根.

证法二　由于方程

$$\frac{a_1}{x-b_1} + \frac{a_2}{x-b_2} + \frac{a_3}{x-b_3} = 0 \tag{2}$$

等价于方程

$$a_1(x-b_2)(x-b_3) + a_2(x-b_1)(x-b_3) + a_3(x-b_1)(x-b_2) = 0 \tag{3}$$

设 $f(x) = a_1(x-b_2)(x-b_3) + a_2(x-b_1)(x-b_3) + a_3(x-b_1)(x-b_2)$,

由于 $f(x)$ 在 $[b_1, b_2]$,上连续,且

$f(b_1) = a_1(b_1-b_2)(b_1-b_3) > 0$, $f(b_2) = a_2(b_2-b_1)(b_2-b_3) < 0$,

有 $f(b_1)f(b_2)<0$,根据根的存在定理知至少存在一点 $\xi_1\in(b_1,b_2)$,使 $f(\xi_1)=0$.

由 $\xi_1\neq b_1,b_2,b_3$,得 $\dfrac{a_1}{\xi_1-b_1}+\dfrac{a_2}{\xi_1-b_2}+\dfrac{a_3}{\xi 1-b_3}=0$

即方程在 (b_1,b_2) 内至少有一个根,同理可证方程(3)在 (b_2,b_3) 内至少有一个根 ξ_2,即方程(3)在 (b_2,b_3) 内至少有一个根 ξ_2,由方程(3)至多有两个根,所以方程(3)只有两个根,因此,方程(2)在 (b_1,b_2),(b_2,b_3) 内各有一个根.

14.若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,$a<c<d<b$ 且 $k=f(c)+f(d)$,证明:

(1) 存在一个 $\xi\in(a,b)$,使 $k=2f(\xi)$;

证 (1) 由 $f(x)$ 在闭区间 $[c,d]$ 上连续,则 $f(x)$ 在 $[c,d]$ 上一定能取到最小值 m,最大值 M.对一切 $x\in[c,d]$,都有 $m\leqslant f(x)\leqslant M$.从而 $m\leqslant f(c)\leqslant M$,$m\leqslant f(d)\leqslant M$,于是 $m\leqslant\dfrac{f(c)+f(d)}{2}\leqslant M$,所以至少存在一点 $\xi\in[c,d]\subset(a,b)$,使 $f(\xi)=\dfrac{f(c)+f(d)}{2}=\dfrac{k}{2}$,即 $k=2f(\xi)$;

(2) 存在一个 $\xi\in(a,b)$,使 $mf(c)+nf(d)=(m+n)f(\xi)$,其中 m,n 为正数.

证 由(1)知 $m\leqslant\dfrac{mf(c)+nf(d)}{m+n}\leqslant M$,所以至少存在一点 $\xi\in[c,d]\subset(a,b)$,使 $f(\xi)=\dfrac{mf(c)+nf(d)}{m+n}$,即 $mf(c)+nf(d)=(m+n)f(\xi)$.

15.设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,$x_1,x_2,\cdots,x_n\in[a,b]$,若 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n>0$ 满足 $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=1$,证明:存在一点 $\xi\in[a,b]$.使得 $f(\xi)=\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)+\cdots+\lambda_n f(x_n)$.

证 由 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 一定能取到最小值 m,最大值 M.即 $f([a,b])=[m,M]$,又 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in[a,b]$,有 $m\leqslant f(x_1)\leqslant M$,$m\leqslant f(x_2)\leqslant M$,$\cdots m\leqslant f(x_n)\leqslant M$,又 $\lambda_i>0(i=1,2,\cdots,n)$,且 $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=1$,于是

$$m=m(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)\leqslant\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_1)+\cdots+\lambda_n f(x_n)$$
$$\leqslant(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)M=M$$

即 $\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)+\cdots+\lambda_n f(x_n)\in[m,M]$,所以至少存在一点 $\xi\in[a,b]$,使

$$\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)+\cdots+\lambda_n f(x_n)=f(\xi).$$

16. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且 $a \leqslant f(x) \leqslant b$, 证明存在 $\xi \in [a,b]$, 使 $f(\xi) = \xi$.

证 (i) 若 $f(a) = a$, 取 $\xi = a$, 有 $f(\xi) = \xi$.

(ii) 若 $f(b) = b$, 取 $\xi = b$, 有 $f(\xi) = \xi$.

(iii) 若 $f(a) \neq a, f(b) \neq b$, 由 $a \leqslant f(x) \leqslant b$ 知 $f(a) > a, f(b) < b$.

设 $F(x) = f(x) - x$, 由 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且 $F(a) = f(a) - a > 0, F(b) = f(b) - b < 0$, 由根的存在定理知, 至少存在一点 $\xi \in (a,b)$, 使 $F(\xi) = 0$, 即 $f(\xi) = \xi$, 总之, 存在 $\xi \in [a,b]$, 使 $f(\xi) = \xi$.

17. 证明: 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且对任何 $x \in [a,b]$, 存在相应的 $y \in [a,b]$, 使得 $|f(y)| \leqslant \frac{1}{2}|f(x)|$, 则至少存在一点 $\xi \in [a,b]$, 使 $f(\xi) = 0$.

证 取 $x_1 \in [a,b]$, 由条件知存在 $x_2 \in [a,b]$, 使 $|f(x_2)| \leqslant \frac{1}{2}|f(x_1)|$.

又存在 $x_3 \in [a,b]$, 使 $|f(x_3)| \leqslant \frac{1}{2}|f(x_2)| \leqslant \frac{1}{2^2}|f(x_1)|$. 如此下去, 存在

$$x_n \in [a,b] (n = 2,3,\cdots), \text{使} |f(x_n)| \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}|f(x_1)|. \tag{1}$$

由 $\{x_n\} \subset [a,b]$, 根据维尔斯特拉斯定理知存在一个收敛的子列 $\{x_{n_k}\}$, 使 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n_k} = \xi \in [a,b]$, 从而得

$$0 \leqslant \left|f(x_{n_k})\right| \leqslant \frac{1}{2^{n_k-1}}|f(x_1)| \tag{2}$$

由 $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{2^{n_k-1}}|f(x_1)| = 0$, 而 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续, 得 $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(\xi)$.

在(2)中, 令 $k \to \infty$, 有 $|f(\xi)| \leqslant 0$, 所以 $|f(\xi)| = 0$, 或 $f(\xi) = 0$.

18. 设 $f(x)$ 在 R 上有定义, 且在 $x = 0,1$ 两点连续, 证明: 若对任何 $x \in R$, 有 $f(x^2) = f(x)$, 则 $f(x)$ 为常值函数.

证 当 $|x| < 1$ 时, 由条件得

$f(x) = f(x^2) = f(x^4) = \cdots = f(x^{2^n})$, 知 $\{f(x^{2^n})\}$ 是常值数列.

又 $\lim\limits_{n\to\infty} x^{2^n} = 0$, 且 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 所以 $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x^{2^n}) = f(0)$.

当 $|x| > 1$ 时, 由条件得

$f(x) = f(x^2) = f[(x^2)^{\frac{1}{2}}] = f[(x^2)^{\frac{1}{2^2}}] = \cdots = f[(x^2)^{\frac{1}{2^n}}]$ 是常值数列,

知 $\lim\limits_{n\to\infty} f[(x^2)^{\frac{1}{2^n}}] = f(x)$. 由 $x^2 > 1$, 得 $1 < (x^2)^{\frac{1}{2^n}} < (x^2)^{\frac{1}{n}}$,

而$\lim\limits_{n\to\infty}(x^2)^{\frac{1}{n}}=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}1=1$，由夹逼定理知$\lim\limits_{n\to\infty}(x^2)^{\frac{1}{2^n}}=1$.

由条件 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，根据归结原则知$\lim\limits_{n\to\infty}f[(x^2)^{\frac{1}{2^n}}]=f(1)=f(x)$.

由于 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=f(0)$，$\lim\limits_{x\to 1^+}=f(x)=f(1)$. 得 $f(0)=f(1)$，且 $f(-1)=f[(-1)^2]=f(1)$，故对一切 $x\in R$，都有 $f(x)\equiv f(1)$，因此，$f(x)$ 在 R 上是常值函数.

19. 证明若函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，且对任何 $x\in[a,b]$，存在相应的 $y\in[a,b]$，使得$|f(x)|\leqslant\dfrac{1}{2}|f(y)|$，则 $f(x)=0$，$x\in[a,b]$.

证 $\forall x_0\in[a,b]$，由条件知存在 $y_1\in[a,b]$，使$|f(x_0)|\leqslant\dfrac{1}{2}|f(y_1)|$，同样存在 $y_2\in[a,b]$，使$|f(x_0)|\leqslant\dfrac{1}{2}|f(y_1)|\leqslant\dfrac{1}{2^2}|f(y_2)|$，如此下去，存在数列$\{y_n\}\subset[a,b]$，使$|f(x_0)|\leqslant\dfrac{1}{2^n}|f(y_n)|$，由 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，则在$[a,b]$上必有界，于是存在 $M>0$，对一切 $x\in[a,b]$，都有$|f(x)|\leqslant M$，从而$|f(x_0)|\leqslant\dfrac{1}{2^n}M$，令 $n\to\infty$，有$|f(x_0)|\leqslant 0$或$|f(x_0)|=0$，即 $f(x_0)=0$. 由 x_0是$[a,b]$上任意一点，所以 $f(x)\equiv 0$，$x\in[a,b]$.

20. 试确定常数 k,c 使得当 $x\to+\infty$ 时，$\arcsin(\sqrt{x^2+\sqrt{x}}-x)\sim\dfrac{c}{x^k}$.

解 由题意知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\arcsin(\sqrt{x^2+\sqrt{x}}-x)}{\dfrac{c}{x^k}}=1$.

由于 $\arcsin(\sqrt{x^2+\sqrt{x}}-x)=\arcsin\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+\sqrt{x}}+x}$

$$\sim\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+\sqrt{x}}+x}=\frac{\sqrt{x}}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}}}+1}\sim\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}(x\to+\infty),$$

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\arcsin(\sqrt{x^2+\sqrt{x}}-x)}{\dfrac{c}{x^k}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}}}{\dfrac{c}{x^k}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{x^k}{cx^{\frac{1}{2}}}=1$.

必有 $k=\dfrac{1}{2}$，这时 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{x^{\frac{1}{2}}}{cx^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{1}{2c}=1$，因此 $c=\dfrac{1}{2}$，$k=\dfrac{1}{2}$.

21. 设 $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+\sin x+\sin^2 x}-(\alpha+\beta\sin x)}{\sin^2 x}$，且点 $x=0$是 $f(x)$ 的可去间断

点，试求常数 α,β.

解 由题意知 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\dfrac{\sqrt{1+\sin x+\sin^2 x}-(\alpha+\beta\sin x)}{\sin^2 x}=c$（常数），

设 $\sin x=t$，有 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sqrt{1+t+t^2}-(\alpha+\beta t)}{t^2}=c$.

由 $\lim\limits_{t\to 0}t^2=0$，$c$ 为常数，有 $\lim\limits_{t\to 0}\left[\sqrt{1+t+t^2}-(\alpha+\beta t)\right]=0=1-\alpha$，得 $\alpha=1$，于是

$$\lim_{t\to 0}\frac{1+t+t^2-(1+\beta t)^2}{\left[\sqrt{1+t+t^2}+(1+\beta t)\right]}=\lim_{t\to 0}\frac{1+t+t^2-(1+\beta t)^2}{2t^2}\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{(1-2\beta)t+(1-\beta^2)t^2}{2t^2}=c,$$

知 $1-2\beta=0$，$\beta=\dfrac{1}{2}$，从而 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\left(1-\dfrac{1}{4}\right)t^2}{2t^2}=\dfrac{3}{8}=c$.

22. 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}f(x)}-1}{x^2}=c$，求常数 τ 和 k，使当 $x\to 0$ 时，$f(x)\sim\tau x^k$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}f(x)}-1}{x^2}=c$，由 $\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$，$c$ 为常数，知

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x}f(x)}-1\right)=0$，必有 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，

从而 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}f(x)}-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{x}f(x)}{x^2\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x}f(x)}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{2x^3}=c$（常数）.

得 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{2cx^3}=1$，即 $f(x)\sim 2cx^3$，所以 $k=3$，$\tau=2c$.