第二章　随机变量及其分布

知识点

1. 分布函数及其性质

定义： 设 X是一个随机变量，x 是任意实数， 函数

$$F(x) = P\{X \le x\}$$

称为 X 的分布函数.

分 布 函 数 的 性 质

1. $F(x)$是一个不减的函数，

即当 $x_2 > x_1$时， $F(x_2) \ge F(x_1)$.

2. $0 \le F(x) \le 1$, 且

$$F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0; \quad F(\infty) = \lim_{x \to \infty} F(x) = 1.$$

3. $F(x+0) = F(x)$, 即 $F(x)$是右连续的 .

2.离散型随机变量及其分布列

若随机变量的所有可能取的值是有限多个或可列多个, 则称该随机变量为离散型随机变量， 它的概率分布规律通常用分布列表示.

设离散型随机变量 X 的所有可能取值为 $x_1, x_2, \cdots$, 并且

$$P\{X = x_i\} = p_i \qquad i = 1,2,\cdots$$

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_i	$\cdots$

分布列的性质为:

$$(1) \quad p_i \geq 0 \quad i = 1,2\cdots$$

$$(2) \quad \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$$

用分布函数计算某些事件的概率

设 $F(x)=P\{X\le x\}$是随机变量 X 的分布函数，则

$$P\{X<a\}=F(a-0)$$

$$P\{X=a\}=P\{X\le a\}-P\{X<a\}$$
$$=F(a)-F(a-0)$$

$$P\{a<X\le b\}=P\{X\le b\}-P\{X\le a\}$$
$$=F(b)-F(a)$$

返回主目录

用分布函数计算某些事件的概率

$$P\{a \le X \le b\} = P\{X \le b\} - P\{X < a\}$$
$$= F(b) - F(a-0)$$

$$P\{a < X < b\} = P\{X < b\} - P\{X \le a\}$$
$$= F(b-0) - F(a)$$

$$P\{a \le X < b\} = P\{X < b\} - P\{X < a\}$$
$$= F(b-0) - F(a-0)$$

用分布函数计算某些事件的概率

$$P\{X > b\} = 1 - P\{X \le b\}$$
$$= 1 - F(b)$$

$$P\{X \ge b\} = 1 - P\{X < b\}$$
$$= 1 - F(b - 0)$$

3. 连续型随机变量的概念与性质

定义: 如果对于随机变量X 的分布函数$F(x)$, 存在非负实函数 $f(x)$, 使得对于任意 实数 x ，有

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt,$$

则称 X 为连续型随机变量, 其中函数$f(x)$称为X 的概率密度函数,简称密度函数.

连续型随机变量 X 由其密度函数唯一确定.

密度函数的性质：

(1) $f(x) \geq 0$

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

(3) 对于 x 轴上任意区间 S，有 $P(X \in S) = \int_{S} f(x)dx$

(4) 对于 $f(x)$ 的连续点 x，有 $f(x) = F'(x)$

4. 一些常用的概率分布

离散型

(1) 二项分布 $B(n,p)$ $0<p<1$

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \qquad k=0,1,\cdots,n$$

(2) $0-1$分布 $B(1,p)$ $0<p<1$

$$P(X=x)=p^x(1-p)^{1-x} \qquad x=0,1$$

(3) Poisson 分布 $\pi(\lambda)$ $\lambda>0$

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \qquad k=0,1,\cdots$$

(4) 超几何分布

$$P(X=k)=\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}\quad k=0,1,\cdots,\min\{M,N\}$$

这里 $M \le N, n \le N, n, M, N$ 均为正整数

(5) 几何分布

$$P(X=k)=(1-p)^{k-1}p\quad k=1,2,\cdots$$

连续型：

(1) 均匀分布 $U(a,b)$ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a\le x\le b\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

(2) 指数分布 $Exp(\lambda)$ $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

(3) 正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ $\sigma>0$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

标准正态分布的计算

对于$x \geq 0$我们们可直接查表求出 $\Phi(x) = P\{X \leq x\}$

如果 $x < 0$，我们可由公式

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

一般正态分布的计算

设 $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$，则 $Y = \dfrac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

故对任意的 $a < b$，有

$$P\{a < X < b\} = \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right).$$

连续型随机变量函数的分布

设 X 是一连续型随机变量， 其密度函数为 $f_X(x)$,

再设 $Y=g(X)$是 X 的函数，我们假定 Y 也是连续型随机变量． 我们要求的是 $Y=g(X)$的密度函数 $f_Y(y)$.

解 题 思 路

(1)．先求 $Y=g(X)$的分布函数

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{g(X)\le y\}=\int_{g(x)\le y} f_X(x)dx$$

(2)．利用 $Y=g(X)$的分布函数与密度函数之间的关系求 $Y=g(X)$的密度函数 $f_Y(y)=F_Y'(y)$

定理

设随机变量 X 具有概率密度 $f_X(x)$，$-\infty < x < \infty$，

又设函数 $g(x)$ 处处可导，且有 $g'(x) > 0$ (或恒有 $g'(x) < 0$).

则 $Y = g(X)$ 是一个连续型随机变量 Y，其概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X[h(y)]\,|h'(y)|, & \alpha < y < \beta, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

其中 $h(y)$ 是 $g(x)$ 的反函数，$\alpha = \min\{g(-\infty), g(\infty)\}$,

即 $x = g^{-1}(y) = h(y)$ $\quad \beta = \max\{g(-\infty), g(\infty)\}$.