第四章　不定积分

大纲要求

会　求有理函数、三角函数有理式及简单无理函数的积分。

理解　原函数概念，不定积分和定积分的概念。

掌握　不定积分的基本公式，不定积分和定积分的性质及定积分中值定理，换元积分法与分部积分法。

内容精要

（一）　基本概念

定义 3.1 设 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，若存在一个可微函数 $F(x)$，使得对一切 $x\in I$,都有$F'(x)=f(x)$,则称$F(x)$是$f(x)$在区间I上的一个原函数 。

定义3.2 若 $f(x)$ 在区间 I 上存在原函数,则　$f(x)$ 在区间 I 上的全体原函数称为 $f(x)$ 在区间 I 上的不定积分，记作$\int f(x)dx$.

（二）重要定理与公式

定理 3.1　若 $F(x)$是$f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数,则 $f(x)$ 在区间 I 的全体原函数为 $\int f(x)dx=F(x)+C$，$C\in R,C$ 是常数.

注：根据定义可知求出的$F(x)$的定义域至少要与 $f(x)$ 的定义域一样。

基本积分表（略）

注：从不定积分表中可看出，求出不定积分形式可以不一样，如何验证所求不定积分的正确性，只要把所求的不定积分求导看是否为被积函数即可.

不定积分性质

性质 1　$\dfrac{d}{dx}\int f(x)dx=f(x)$或$d\int f(x)dx=f(x)dx$.

性质 2　$\int df(x)=f(x)+C$ 或$\int f'(x)dx=f(x)+c.$

性质 3　若 $f(x),g(x)$ 的原函数都存在，则

（i）$\int[f(x)\pm g(x)]dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$；

$(ii)\int af(x)dx=a\int f(x)dx,a$为常数$,a\neq 0$.

注 1：从性质 2 可知不定积分是导数的逆运算，正是利用这一性质，寻找哪个函数的导数为 $f(x)$，则这个函数就是 $f(x)$ 的一个原函数

注 2:　性质 2 告诉我们求不定积分的一个方法,即如何把$\int f(x)dx$表示成$\int dF(x)$形

式，实际上就是 $f(x)dx = dF(x)$, 这正是微分的逆过程，从而可以利用我们所学的微分基本公式，微分的四则运算，尤其是一阶微分形式不变性，把 $f(x)dx$ 写成 $dF(x)$ 形式, 从而求出了 $f(x)$ 的不定积分。

1.凑微分（第一换元法）

$$f(j(x))j'(x)dx = f(j(x))dj(x) \xlongequal{\text{设}j(x)=u} f(u)du \xlongequal[\text{利用一阶微分变性}]{\text{若}f(u)\text{的原函数}F(u)\text{存在}}$$

$dF(u) = dF(j(x))$, 知 $F(j(x))$ 是 $f(j(x))j'(x)$ 的一个原函数，由分析过程可知

定理（凑微分）设 $F'(u) = f(u), u = j(x)$ 可导, 则

$$\int f(j(x))j'(x)dx = \int f(j(x))dj(x) \xlongequal{\text{令}j(x)=u}$$

$$\int f(u)du = F(u) + c = F(j(x)) + C$$

注：给一个不定积分 $\int g(x)dx$，要想运用凑微分，关键是能否把被积表达式 $g(x)dx$ 表示成 $f(j(x))j'(x)dx$ 的形式，并且要求 f(u)的原函数能求出来，在具体运用此定理时，一般不引入中间变量 u (如果 $f(u)$ 的原函数直接求不出来就需要引入中间变量)，而直接写出结果，即

$$\int g(x)dx = \int f(j(x))j'(x)dx = \int f(j(x)) = F(j(x)) + c\ .$$

为了熟练运用凑微分，记住下列微分关系是必要的（其实就是求原函数）.

1. $dx = \dfrac{1}{a}d(ax+b)(a \neq 0)$
2. $xdx = -\dfrac{1}{2}d(a^2 - x^2)$
3. $\dfrac{1}{\sqrt{x}}dx = 2d\sqrt{x}$
4. $\sin xdx = -d\cos x$
5. $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = d\arcsin x$
6. $xdx = \dfrac{1}{2}d(x^2 \pm a^2)$
7. $\dfrac{1}{x}dx = d\ln|x|$
8. $e^x dx = de^x$
9. $\cos xdx = d\sin x$
10. $\dfrac{1}{1+x^2}dx = d\arctan x$

2. 变量代换法

由一阶微形式的不变性知

$$f(x)dx \xlongequal{\text{若}x=j(t)\text{可微}} f(j(t))dj(t) = f(j(t))j'(t)dt \xlongequal{\text{若}f(j(t))j'(t)\text{有原函数 }F(t)}$$

$$dF(t) \xlongequal{\text{若}x=j(t)\text{严格单调}} dF(j^{-1}(x)),$$

$t=\varphi^{-1}(x)$

知 $F(\varphi^{-1}(x))$ 是 $f(x)$ 的一个原函数,由此得

定理（变量代换法）若 $x=\varphi(t)$ 严格单调，可微，且 $F'(t)=f(\varphi(t))\varphi'(t)$，则

$$\int f(x)dx = F(\varphi^{-1}(x))+c$$

用变量代换求不定积分的具体步骤是

$$\int f(x)dx \xlongequal{\text{令}x=\varphi(t)\text{可导}} \int f(\varphi(t))d\varphi(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

$$\xlongequal{f(\varphi(t))\varphi'(t)\text{有原函数}F(t)} F(t)+C \xlongequal{t=\varphi^{-1}(x)} F(\varphi^{-1}(x))+c$$

变量代换适合被积函数中含有根式且不能直接求出,也不能用线性运算法则或凑微分求出时，则需用变量代换，目的是为了去掉根号，一般来说，当被积函数中含有

$\sqrt{a^2-x^2}$,令 $x=a\sin t, t\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, $\sqrt{a^2+x^2}$,令 $x=a\tan t, t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

$\sqrt{x^2-a^2}$,令 $x=a\sec t, t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\cup(\frac{\pi}{2},\pi\right]$, $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$,令 $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}=t$,解得 $x=\varphi(t)$,令 $x=\varphi(t)$

变量代换不仅适合于去根号，只要通过变量代换能求出原函数都可以用。

3．分部积分

定理（分部积分法）若

$u=u(x), v=v(x)$ 均可导,且 $\int u'(x)v(x)dx$ 存在,则 $\int u(x)v'(x)dx$ 也存在,且

$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)-\int u'(x)v(x)dx$，常写成 $\int udv = uv-\int vdu.$

在具体运用这个公式时，关键是把被积函数表示成 $u(x)v'(x)$ 的形式，而且目的是要把 $u(x)$ 转化，从而转化为求不定积分 $\int v(x)u'(x)dx.$

分部积分适合下列情形，当 $p_n(x)$ 是 x 的 n 次多项式时，

1．$\int \underset{u}{p_n(x)}\,\underset{v'}{e^{ax}}dx = \int p_n(x)d\frac{1}{a}e^{ax}\,(a\neq 0)$.

2．$\int p_n(x)\cos(ax+b)dx = \int p_n(x)d\frac{1}{a}\sin(ax+b)(a\neq 0)$.

3 ．$\int p_n(x)\sin(ax+b)dx = \int p_n(x)d[-\frac{1}{a}\cos(ax+b)](a\neq 0)$.

上面需要用 n 次分部积分.

在下列情形中，$p(x)$ 是 x 的多项式或其它 x 的表达式，当不能凑微分求出时，常常要用分部积分

4. $\int p(x)f(\ln x)dx$, 令 $f(\ln x)=u, v'=p(x)$.

5. $\int p(x)f(\arcsin x)dx$, 令 $f(\arcsin x)=u, v'=p(x)$.

6. $\int p(x)f(\arctan x)dx$, 令 $f(\arctan x)=u, v'=p(x)$.

在求不定积分时，需要基本不定积分表（还有一些重要的不定积结果），线性运算法则，凑微分，变量代换，分部积分综合运用。

重要的不定积分有

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}dx(a\neq 0)=\frac{a}{a^2}\int \frac{1}{1+(\frac{x}{a})^2}d(\frac{x}{a})=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+c \ .$$

$$\int \tan xdx=\int \frac{\sin x}{\cos x}dx=-\int \frac{1}{\cos x}d\cos x=-\ln|\cos x|+c.$$

$$\int \cot xdx=\int \frac{\cos x}{\sin x}dx=\int \frac{1}{\sin x}d\sin x=\ln|\sin x|+c.$$

$$\int \frac{1}{a^2-x^2}dx(a\neq 0)=\frac{1}{2a}\int (\frac{1}{a-x}+\frac{1}{a+x})dx.$$

$$=\frac{1}{2a}[-\int \frac{1}{a-x}d(a-x)+\int \frac{1}{a+x}d(a+x)]=\frac{1}{2a}[-\ln|a-x|+\ln|a+x|]+c=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+c$$

.

这些结果都要记住.

例 3.1.1　求 $\int \csc xdx$.

解法一　$\int \csc xdx=\int \frac{1}{\sin x}dx=\int \frac{\sin x}{\sin^2 x}dx=-\int \frac{1}{1-\cos^2 x}d\cos x$

$$=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right|+c=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right|+c$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{(1-\cos x)^2}{1-\cos^2 x}\right|+c=\ln\left|\frac{1-\cos x}{\sin x}\right|+c=\ln|\csc x-\cot x|+c.$$

解法二　$\int \csc xdx=\int \frac{1}{\sin x}dx=\int \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}dx$

$$=\int \frac{1}{\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}d\frac{x}{2}=\int \frac{1}{\tan\frac{x}{2}}d\tan\frac{x}{2}=\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+c$$

$$=\ln\left|\frac{1-\cos x}{\sin x}\right|+c=\ln|\csc x-\cot x|+c.$$

同理可求 $\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + c$，这两个结果要记住.

注：千万不要忘了加 C，加了 C 是一族原函数，不加 C 只是一个原函数，相差甚远。

例 3.1.2　求 $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} dx$　　（$a>0$）.

解　令 $x = a\tan t$，

$$\text{原式} = \int \frac{1}{\sqrt{a^2\tan^2 t + a^2}} d a\tan t = \int \frac{a\sec^2 t}{a|\sec t|} dt$$

$$\underline{\underline{t\in(-\frac{p}{2},\frac{p}{2})}} \int \frac{\sec^2 t}{\sec t} dt = \int \sec t dt = \ln|\sec t + \tan t| + c.$$

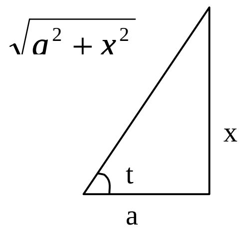

图 3-1

由 $\tan t = \frac{x}{a}$，作出直角三角形，可知 $\sec t = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a}$，于是

$$\text{原式} = \ln\left|\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a} + \frac{x}{a}\right| + c = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a^2}\right| + c - \ln|a|$$

$$= \ln\left|x + \sqrt{x^2+a^2}\right| + c_1 (c_1 = c - \ln|a|) .$$

同理可得 $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2-a^2}\right| + c$。

这两个结果要记住.

注 1 在利用三角变换时，代换回原变量时，尽管可以三角公式，但有时很麻烦，一般根据三角变换，画出直角三角形，求出三角形的各边长，然后根据三角函数的定义，非常方便地求出所需角 t 的三角函数。

注 2 在变量代换时，会遇到去绝对值，若绝对值中的式子，有时正，有时负，被积函数是初等函数，这时可不妨设绝对值中的式子大于零，不影响求不定积分，一般说，结果是一样的。

设 $P_n(x), Q_m(x)$ 分别是 n 次和 m 次多项式，称 $\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ 为有理函数，当 m<n 时，称为有理真分式，当 m≥n 时，称为有理假分式，利用多项式除法，有理假分式可以化成多项式与有理真分式之和。由于多项式的不定积分可用幂函数的不定积分与线性运算法则求出，而有理真分式通过待定系数法或赋值法可化为第一类最简分式与第二类最简分式之和.

第一类最简分式的不定积分 $\int \frac{A}{(x-a)^n} dx = \begin{cases} A\ln|x-a| + c, n=1, \\ \frac{A}{(-n+1)(x-a)^{n-1}} + c, n>1. \end{cases}$

第二类最简分式的不定积分 $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n} dx$，其中 $p^2-4q<0$.

$$\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}dx=\int\frac{Mx+N}{\left[(x+\frac{p}{2})^2+\frac{4q-p^2}{4}\right]^n}d(x+\frac{p}{2}),由于\frac{4q-p^2}{4}>0,设\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}=a,令$$

$x+\frac{p}{2}=t,$于是

$$\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}dx=\int\frac{M(t-\frac{p}{2})+N}{(t^2+a^2)^n}dt=M\int\frac{t}{(t^2+a^2)^n}dt+(N-\frac{MP}{2})\int\frac{1}{(t^2+a^2)^n}dt.$$

而 $\int\frac{t}{(t^2+a^2)^n}dt=\frac{1}{2}\int\frac{1}{(t^2+a^2)^n}d(t^2+a^2)=\begin{cases}\frac{1}{2}\ln(t^2+a^2)+c,n=1,\\ \frac{1}{2(1-n)}\cdot\frac{1}{(t^2+a^2)^{n-1}}+c,n>1\end{cases}$

对于积分 $\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^n}$ 可利用后面的例题的结果来计算，然后把 $t=x+\frac{P}{2}$ 代入，便可求出我们还有下面的结果。

定理　一切有理函数的原函数总可以用多项式、有理函数、对数函数及反正切函数表达出来，即有理函数的原函数一定是初等函数。

三角函数有理式的不定积分

由 $u_1(x),u_2(x),...,u_k(x)$ 及常数经过有限次四则运算所得到的函数称为关于 $u_1(x),u_2(x),...,u_k(x)$ 的有理式，记作 R$(u_1(x),u_2(x),...,u_k(x))$.

由于三角函数有理式 R（sinx,cosx,tanx,cotx,secx,cscx）=R(sinx,cosx)，所以，我们只要讨论 $\int R(\sin x,\cos x)dx.$ 对于这类积分，我们可以利用变换 t=tan$\frac{x}{2}$，x$\in(-p,p)$, 把它们转化为 t 的有理函数的积分，从而求得函数。这是因为

$$\text{sinx}=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2};\quad \text{cosx}=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2};x=2\arctan t;dx=\frac{2dt}{1=t^2},$$

故 $\int R(\sin x,\cos x)dx=\int R(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2})\frac{2}{1+t^2}dt$.

显然，上式右端是关于变量 t 的有理函数的积分。求出 t 的原函数后，只需将 t=tan$\frac{x}{2}$代

从理论上讲，对于$\int R(\sin x,\cos x)dx,$利用上述变量代换总可以算出它的积分，

然而有时候会导致很复杂的计算。因此，对某些特殊类型的积分，可选择一些更简单的变量代换，使得积分比较容易计算。

1. $\int \sin^m x\cos^n xdx,$其中 m,n 中至少有一个奇数（另外一个数可以是任何一个实数）。

对这类积分，把奇次幂的三角函数，分离出一次幂，用凑微分求出原函数。

2. $\int \sin^m x\cos^n xdx,$其中 m,n 均是偶数或零

计算这类不定积分主要利用下列三角恒等式：

$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2};\qquad \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2};\qquad \sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x.$

降幂，化成 1 的情况来计算。

3. $\int \sin mx\cos nxdx,\int \sin mx\sin nxdx,\int \cos mx\cos nxdx,$其中 m,n 是常数，且 $m\neq \pm n.$

计算这类积分，可利用下述积化和差公式

$\sin mx\cos nx=\frac{1}{2}\left[\sin(m+n)x+\sin(m-n)x\right];$

$\sin mx\sin nx=\frac{1}{2}\left[\cos(m-n)x-\cos(m+n)x\right];$

$\cos mx\cos nx=\frac{1}{2}\left[\cos(m+n)x+\cos(m-n)x\right]$

4. $\int R(\sin^2 x,\sin x\cos x,\cos^2 x)dx.$令 tanx=t，有 x=arctant.

$dx=\frac{1}{1+t^2}dt\qquad \sin^2 x=\frac{t^2}{1+t^2}\qquad \sin x\cos x=\frac{t}{1+t^2}\qquad \cos^2 x=\frac{1}{1+t^2},$于是

$$\int R(\sin^2 x,\sin x\cos x,\cos^2 x)dx=\int R\left(\frac{t^2}{1+t^2},\frac{t}{1+t^2},\frac{1}{1+t^2}\right)\frac{1}{1+t^2}dt$$

类型 1.1 形如$\int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{ax+d}}\right)dx$的积分

解题策略 令$\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}=t,$有$\frac{ax+b}{cx+d}=t^n$，

经整理得$x=\frac{dt^n-b}{a-ct^n}=j(t),$于是$\int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx=$

$\int R(j(t),t)j'(t)dt,$这样，就化成了以t为变量的有理函数积分。

类型 1.2 形如$\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$的积分，

解题策略 把$\sqrt{ax^2+bx+c}$化成如下三种形式之一：

$\sqrt{j^2(x)+k^2},\sqrt{j^2(x)-k^2},\sqrt{k^2-j^2(x)}$, 其中$j$（$x$）$=px+q(p\neq 0)$ 的一次多项式，k 为常数，能用凑微分就用凑微分，否则再用三角变换即可化三角函数有理式的不定积分

从以上不定积分的计算中可以看出，求不定积分要比 求导数更复杂，更灵活。计算不定积分的基础是利用基本积分、简单函数的不定积分、凑数分法、变量代换法及分部积分法。这几种都是将所求的不定积分化成基本积分表中被积函数的形式，从而求得不定积分，我们将一些常用的不定积分公式已在前面例子中给出，并要求读者记住，这些公式也是建立在基本积分方法基础上的。在基本积分方法熟练掌握的基础上，要多做一些练习，才能熟能生巧，最后还要指出，有些不定积分.