

# 第一章 函数、极限、连续

## 大纲要求

**了解** 函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性，反函数及隐函数的概念，初等函数的概念，连续函数的性质和初等函数的连续性，

**会** 建立应用问题中的函数关系式。利用极限存在的两个准则求极限，用等价无穷小量求极限，判别函数间断点的类型。应用闭区间上连续函数的性质。

**理解** 函数的概念，复合函数及分段函数的概念，极限的概念，函数左极限与右极限的概念，以及函数极限存在与左、右极限之间的关系，无穷小、无穷大的概念，无穷小的比较，函数连续性的概念（含左连续与右连续），闭区间上连续函数的性质（有界性、最大值和最小值定理、介值定理），

**掌握** 函数的表示法，基本初等函数的性质及其图形，极限的性质及四则运算法则，极限存在的两个准则，利用两个重要极限求极限的方法。无穷小的比较方法，用洛必达法则求未定式极限的方法。

## 第一节 函 数

### 内容精要

#### （一）基本概念

##### 1. 函数的定义

定义 1.1 设  $A$ 、 $B$  是两个非空实数集，如果存在一个对应法则  $f$ ，使得对  $A$  中任何一个实数  $x$ ，在  $B$  中都有唯一确定的实数  $y$  与  $x$  对应，则称对应法则  $f$  是  $A$  上的函数，记为

$$f: x \rightarrow y \quad \text{或} \quad f: A \rightarrow B.$$

$y$  称为  $x$  对应的函数值，记为  $y = f(x), x \in A.$

其中  $x$  叫做自变量， $y$  又叫因变量， $A$  称为函数  $f$  的定义域，记为  $D(f)$ ， $\{f(x) | x \in A\}$ ，称为函数的值域，记为  $R(f)$ ，在平面坐标系  $Oxy$  下，集合  $\{(x, y) | y = f(x), x \in D\}$  称为函数  $y=f(x)$  的图形。

(1) 函数是微积分中最重要最基本的一个概念, 因为微积分是以函数为研究对象, 运用无穷小及无穷大过程分析处理问题的一门数学学科。

(2) 函数与函数表达式的区别: 函数表达式指的是解析式子, 是表示函数的主要形式, 而函数除了用表达式来表示, 还可以用表格法、图象法等形式来表示, 不要把函数与函数表达式等同起来。

## 2. 反函数

定义 1.2 设  $y=f(x)$ ,  $x \in D$ , 若对  $R(f)$  中每一个  $y$ , 都有唯一确定且满足  $y=f(x)$  的  $x \in D$  与之对应, 则按此对应法则就能得到一个定义在  $R(f)$  上的函数, 称这个函数为  $f$  的反函数, 记作

$$f^{-1}: R(f) \rightarrow D \text{ 或 } x = f^{-1}(y), y \in R(f).$$

由于习惯上用  $x$  表示自变量,  $y$  表示因变量, 所以常把上述函数改写成  $y = f^{-1}(x)$ ,  $x \in R(f)$ 。

(1) 由函数、反函数的定义可知, 反函数的定义域是原来函数的值域, 值域是原来函数的定义域。

(2) 函数  $y=f(x)$  与  $x=f^{-1}(y)$  的图象相同, 这因为满足  $y=f(x)$  点  $(x, y)$  的集合与满足  $x=f^{-1}(y)$  点  $(x, y)$  的集合完全相同, 而函数  $y=f(x)$  与  $y=f^{-1}(x)$  图象关于直线  $y=x$  对称。

$$(3) \text{ 若 } y=f(x) \text{ 的反函数是 } x=f^{-1}(y), \text{ 则 } y = f[f^{-1}(y)], \quad x = f^{-1}[f(x)]$$

## 3. 复合函数

定义 1.3 设  $y = f(u)$ ,  $u \in E$ ,  $u = \varphi(x)$ ,  $x \in D$ , 若  $D(f) \cap R(\varphi) \neq \emptyset$ , 则  $y$  通过  $u$  构成  $x$  的函数, 称为由  $y=f(u)$  与  $u = \varphi(x)$  复合而成的函数, 简称为复合函数, 记作  $y = f(\varphi(x))$ 。

复合函数的定义域为  $\{x|x \in D \text{ 且 } \varphi(x) \in E\}$ , 其中  $x$  称为自变量,  $y$  称为因变量,  $u$  称为中间变量,  $\varphi(x)$  称为内函数,  $f(u)$  称为外函数。

(1) 在实际判断两个函数  $y = f(u)$ ,  $u = \varphi(x)$  能否构成复合函数, 只要看  $y = f(\varphi(x))$  的定义域是否为非空集, 若不为空集, 则能构成复合函数, 否则不能构成复合函数。

(2) 在求复合函数时, 只要指出谁是内函数, 谁是外函数, 例如  $y=f(x)$ ,  $y=g(x)$ , 若  $y=f(x)$  作为外函数,  $y=g(x)$  作为内函数。则复合函数  $y=f(g(x))$ , 若  $y=g(x)$  作为外函数,  $y=f(x)$  作为内函数, 则复合函数为  $y=g(f(x))$ 。

(3) 我们要学会分析复合函数的复合结构, 既要会把几个函数复合成一个复合函数, 又要会把一个复合函数分拆成几个函数的复合。

#### 4. 初等函数

常值函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数统称为基本初等函数。

大家一定要记住基本初等函数的定义域, 值域, 会画它们的图象, 并且要知道这些函数在哪些区间递增, 在哪些区间递减, 是否经过原点? 与坐标轴的交点是什么? 以后我们常常要用到。

由基本初等函数经过有限次四则运算或有限次复合运算所得到的函数统称为初等函数。

不是初等函数称为非初等函数。一般来说, 分段函数不是初等函数, 但有些分段函数可能是初等函数, 例如

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0 \\ x, & x > 0 \end{cases} = |x| = \sqrt{x^2}, \text{ 是由 } y = \sqrt{u}, \quad u = x^2 \text{ 复合而成。}$$

#### 5. 具有某些特性的函数

##### (1) 奇(偶)函数

定义 1.4 设  $D$  是关于原点对称的数集,  $y=f(x)$  为定义在  $D$  上的函数, 若对每一个  $x \in D$  ( $\square \square$  也有  $-x \in D$ ), 都有  $f(-x) = -f(x)$  ( $f(-x) = f(x)$ ), 则称  $y=f(x)$  为  $D$  上的奇(偶)函数。

定义域关于原点对称是函数为奇(偶)函数的必要条件。

若  $f(x)$  为奇函数, 则  $f(0)=0$ , 事实上, 由定义知  $f(-0)=-f(0)$ , 有  $f(0)=-f(0)$ , 得  $f(0)=0$ 。

偶函数  $f(x)$  的图象关于  $y$  轴对称; 奇函数  $f(x)$  的图象关于原点对称。

奇偶函数的运算性质:

奇函数的代数和仍为奇函数;偶函数的代数和仍为偶函数;偶数个奇(偶)函数之积为偶函数;奇数个奇函数的积为奇函数;一奇一偶的乘积为奇函数;两个奇函数复合仍为奇函数;一奇一偶复合为偶函数;两个偶函数复合仍为偶函数.

## (2) 周期函数

定义 1.5 设  $y=f(x)$  为定义在  $D$  上的函数, 若存在某个非零常数  $T$ , 使得对一切  $x \in D$ , 都有

$f(x+T)=f(x)$ , 则称  $y=f(x)$  为周期函数,  $T$  称为  $y=f(x)$  的一个周期.

显然, 若  $T$  是  $f(x)$  的周期, 则  $kT(k \in \mathbb{Z}, k \neq 0)$  也是  $f(x)$  的周期, 若周期函数  $f(x)$  的所有正周期中存在最小正周期, 则称这个最小正周期为  $f(x)$  的基本周期, 一般地, 函数的周期是指的是基本周期.

必须指出的是不是所有的周期函数都有最小正周期, 例如  $f(x)=c$  ( $c$  为常数), 因为对任意的正实常数  $T$ , 都有  $f(x+T)=f(x)=c$ . 所以  $f(x)=c$  是周期函数, 但在正实数里没有最小正常数, 所以, 周期函数  $f(x)=c$  没有最小正周期.

## (3) 单调函数

定义 1.6 设  $y=f(x)$  为定义在  $D$  上的函数, 若对  $D$  中任意两个数  $x_1, x_2$  且  $x_1 < x_2$ , 总有

$$f(x_1) \leq f(x_2) \quad (f(x_1) \geq f(x_2)),$$

则称  $y=f(x)$  为  $D$  上的递增(递减)函数, 特别地, 若总成立严格不等式

$$f(x_1) < f(x_2) \quad (f(x_1) > f(x_2)),$$

则称  $y=f(x)$  为  $D$  上严格递增(递减)函数.

递增和递减函数统称为单调函数, 严格递增和严格递减函数统称为严格单调函数.

## (4) 分段函数

如果一个函数在其定义域内, 对应于不同的  $x$  范围有着不同的表达形式, 则称该函数为分段函数.

注意分段函数不是由几个函数组成的, 而是一个函数, 我们经常构造分段函数来举反例, 常见的分段函数有符号函数、狄里克雷函数、取整函数.

## (5) 有界函数与无界函数

定义 设  $y=f(x)$  为定义在  $D$  上的函数，若存在常数  $N \leq M$ ，使对每一个  $x \in D$ ，都有

$$N \leq f(x) \leq M$$

则称  $f(x)$  为  $D$  上的有界函数，此时，称  $N$  为  $f(x)$  在  $D$  上的一个下界，称  $M$  为  $f(x)$  在  $D$  上的一个上界。

由定义可知上、下界有无数个，我们也可写成如下的等价定义，使用更加方便。

定义 1.7 设  $y=f(x)$  为定义在  $D$  上的函数，若存在常数  $M > 0$ ，使得对每一个  $x \in D$ ，都有

$$|f(x)| \leq M$$

则  $f(x)$  为  $D$  上的有界函数。

定义 1.8 设  $y=f(x)$  为定义在  $D$  上的函数，若对每一个正常数  $M$ （无论  $M$  多么大），都存在  $x_0 \in D$ ，使  $|f(x_0)| > M$ ，则称  $f(x)$  为  $D$  上的无界函数。

## (6) 函数的延拓与分解

有时我们需要由已知函数产生新的函数来解决实际问题，这里我们从函数的特性出发，开拓由已知产生新的函数的方法。

设  $y = f(x)$ ,  $x \in [0, a]$ ，我考虑区间  $[-a, a]$  上的函数  $F(x)$ ，它是偶函数，且在  $[0, a]$  上，使  $F(x) = f(x)$ ，则应有  $F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [0, a] \\ f(-x) & x \in [-a, 0) \end{cases}$ 。

称  $F(x)$  是  $f(x)$  的偶延拓

同样可给出  $f(x)$  的奇延拓，即函数  $F(x)$  在  $[-a, a]$  上的奇函数，且在  $(0, a)$  上， $F(x) = f(x)$ ，则应有  $F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (0, a] \\ 0, & x = 0 \\ -f(-x), & x \in [-a, 0) \end{cases}$  这样，研究  $f(x)$  只要，研究  $F(x)$  就可以了。

同样，对于函数  $y=f(x)$ ,  $x \in (a, b)$ ，可以构造一个以  $(b-a)$  为周期的周期函数  $F(x)$ ，在  $(a, b)$  上， $F(x) = f(x)$ ，则有  $F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (a, b) \\ f[x - n(b-a)], & x \in (nb - (n-1)a, (n+1)b - na), n \in \mathbb{Z} \end{cases}$

这就是函数  $f(x)$  的周期延拓，研究  $f(x)$  只要研究  $F(x)$  就可以了。

## (二) 重要定理与公式

定理 1.1 (反函数存在定理) 严格增(减)的函数必有严格增(减)的反函数。

## 第二节 函数极限与连续

### 一、内容精要

#### (一) 基本概念

##### 1. 函数极限的概念

(1) 定义 1.9  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ : 若存在一个常数  $A, \forall \varepsilon > 0, \exists X > 0$ , 当  $x > X$  时, 都有

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

(2.) 定义 1.10  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ : 把(1)中“ $x > X$ ”换成“ $x < -X$ ”。

(3) 定义 1.11  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ : 把(1)中“ $x > X$ ”换成“ $|x| > X$ ”。

(4) 定义 1.12  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ : 设  $f(x)$  在  $x_0$  的某空心邻域内  $U^0(x_0)$  有定义, 若存在一个常数  $A, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ , 当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时, 都有  $|f(x) - A| < \varepsilon$ 。

(5) 定义 1.13  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ : 设  $f(x)$  在  $x_0$  的某左半邻域  $U^-(x_0)$  内有定义, 若存在一个常数  $A, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ , 当  $-\delta < x - x_0 < 0$  时, 都有  $|f(x) - A| < \varepsilon$ 。

此时也可用记号  $f(x_0 - 0)$  或  $f(x_0^-)$  表示左极限值  $A$ , 因此可写成

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0 - 0) \text{ 或 } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0^-)$$

(6) 定义 1.14  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ : 设  $f(x)$  在  $x_0$  的某右半邻域  $U^+(x_0)$  内有定义, 若存在一个常数  $A, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ , 当  $0 < x - x_0 < \delta$  时, 都有  $|f(x) - A| < \varepsilon$ 。此时也可用  $f(x_0 + 0)$  或  $f(x_0^+)$  表示右极限  $A$ 。因此可写成

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0 + 0) \text{ 或 } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0^+).$$

该定理是求分界点两侧表达式不同的分段函数在该分界点极限是否存在的方法, 而如果在  $x_0$  的左右极限存在且相等, 则在该点的极限存在, 否则不存在。

(7) 定义 1.15  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty : \forall M > 0, \exists \delta > 0, \text{当 } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ 时, 都有 } |f(x)| > M$ 。此时称  $x \rightarrow x_0$  时,  $f(x)$  是无穷大量。

而  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ , 只要把公式中 " $|f(x)| > M$ " 改成 " $f(x) > M$ ",  
 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ , 只要把上式中 " $|f(x)| > M$ " 改成 " $f(x) < -M$ "。

(8) 定义 1.16  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty : \forall M > 0, \exists X > 0$ 。当  $|x| > X$  时, 都有  $|f(x)| > M$ 。

读者同理可给出  $\lim_{x \rightarrow \infty} (+\infty \text{ 或 } -\infty) f(x) = +\infty \text{ 或 } -\infty$  定义。

注:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$  (常数) 与  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$  的区别, 前者是表明函数极限存在, 后者指函数极限不存在, 但还是有个趋于无穷大的趋势。因此, 给它一个记号, 但还是属于极限不存在之列, 以后, 我们说函数极限存在, 指的是函数极限值是个常数。

(9) 定义 1.17  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ 。称  $f(x)$  当  $x \rightarrow x_0$  是无穷小量。

(这里  $x_0$  可以是常数, 也可以是  $\infty, +\infty, -\infty$ , 以后我们不指出都是指的这个意思)

(10) 定义 1.18 若  $\exists \delta > 0, \exists M > 0, \text{当 } x \in U(x_0, \delta) \text{ 时, 都有 } |f(x)| \leq M$ , 称  $f(x)$  当  $x \rightarrow x_0$  时是有界量。

## 2. 无穷小量阶的比较, 无穷小量与无穷大量关系

设  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ ,

(1) 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ , 称  $f(x)$  当  $x \rightarrow x_0$  时是  $g(x)$  的高阶无穷小量,

记作  $f(x) = o(g(x))(x \rightarrow x_0)$ 。

(2) 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ , 称  $f(x)$  当  $x \rightarrow x_0$  时是  $g(x)$  的等价无穷小量, 记作

$f(x) \sim g(x)(x \rightarrow x_0)$ 。

(3) 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = c(\text{常数}) \neq 0$ , 称  $f(x)$  当  $x \rightarrow x_0$  时是  $g(x)$  的同价无穷小量。

记作  $f(x) \sim c g(x)(x \rightarrow x_0)$

(4) 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{(x-x_0)^k} = c(\text{常数}) \neq 0 (k > 0 \text{ 常数})$ , 称  $f(x)$  当  $x \rightarrow x_0$  时是  $x-x_0$  的

$k$  阶无穷小量。

由等价无穷量在求极限过程中起到非常重要的作用, 因此, 引入

若  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ 。记作  $f(x) \sim g(x) (x \rightarrow x_0)$ ,

如果  $f(x), g(x)$  均是无穷小量, 称为等价无穷小量; 如果  $f(x), g(x)$  均是无穷大量, 称为等价无穷大量; 如果  $f(x), g(x)$  既不是无穷小也不是无穷大, 我们称为等价量。

例如  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A(\text{常数}) \neq 0$ , 则  $f(x) \sim A(x \rightarrow x_0)$ 。

注:  $A$  不能为零, 若  $A=0$ ,  $f(x)$  不可能和  $0$  等价。

### 3. 函数连续的概念。

定义 1.19 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ , 称  $f(x)$  在  $x = x_0$  处连续。

用  $\varepsilon - \delta$  语言可写为

定义 1.20 设  $f(x)$  在  $x_0$  的某邻域  $U(x_0)$  内有定义, 若

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ , 当  $|x - x_0| < \delta$  时, 都有  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ , 称  $f(x)$  在  $x = x_0$  处连续。

用函数值增量  $\Delta y$  形式可写为

定义 1.21 若  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$ , 称  $f(x)$  在  $x = x_0$  处连续。

如果  $f(x)$  在  $x = x_0$  处不连续, 称  $x = x_0$  为  $f(x)$  的间断点

若  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$ , 称  $f(x)$  在  $x = x_0$  处左连续。若  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$ , 称

$f(x)$  在  $x = x_0$  处右连续。

间断点的分类:

(1) 若

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A(\text{常数})$ , 但  $f(x)$  在  $x = x_0$  处不连续, 称  $x = x_0$  是  $f(x)$  的可去间断点。

若  $x = x_0$  为函数  $f(x)$  的可去间断点, 只须补充定义或改变

$f(x)$  在  $x = x_0$  处的函数值, 使函数在该点连续。但须注意, 这时函数与  $f(x)$  已经不是同一个函数但仅在  $x = x_0$  处不同, 在其它点相同。我们正是利用这一性质去构造一个



新的函数  $F(x)$  , 使  $F(x)$  在某闭区间上处处连续 , 因而有某种性质。当  $x \neq x_0$  时 , 也具有这种性质。而  $x \neq x_0$  时 ,  $F(x) = f(x)$  , 所以  $f(x)$  在  $x \neq x_0$  的范围内也具有这种性质 , 从而达到了我们的目的。

$$\text{例如 } f(x) = \frac{\sin x}{x}, \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 ,$$

但  $f(x)$  在  $x=0$  处没定义, 知  $f(x)$  在  $x=0$  处不连续, 设  $F(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$  则  $F(x)$  在

$x=0$  处连续 , 但  $F(x)$  与  $f(x)$  定义域不同 , 虽然  $F(x)$  与  $f(x)$  不是同一函数, 但在  $x \neq 0$  处完全相同 ,

(2) 若  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0 - 0)$  ,  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0 + 0)$  , 但  $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$  , 称  $x = x_0$  为  $f(x)$  的跳跃间断点 , 称  $|f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)|$  为  $f(x)$  的跳跃度。

(1) (2) 两种类型的特点是左右极限都存在 , 我们统称为第一类间断点。

(3) 若  $x_0$  处 , 左、右极限至少有一个不存在 , 我们称  $x = x_0$  为  $f(x)$  的第二类间断点。

若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$  , 我们也称  $x = x_0$  为  $f(x)$  的无穷型间断点 , 属于第二类间断点。

## (二) 重要定理与公式

定理 1.2  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$  且  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$  .

定理 1.3  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$  且  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$  .

定理 1.4  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A(\text{常数}) \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x)$  , 其中  $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$  .

1. 无穷小量的性质 :

若  $\alpha_1(x), \alpha_2(x), \dots, \alpha_m(x)$  当  $x \rightarrow x_0$  时, 均为无穷小量 , 则

$$(i) \lim_{x \rightarrow x_0} [c_1 \alpha_1(x) + c_2 \alpha_2(x) + \dots + c_m \alpha_m(x)] = 0 .$$

其中  $c_1, c_2, \dots, c_m$  均为常数。

$$(ii) \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha_1(x) \alpha_2(x) \dots \alpha_m(x) = 0 .$$

(iii) 若  $f(x)$  当  $x \rightarrow x_0$  时是有界量,  $\alpha(x)$  当  $x \rightarrow x_0$  时是无穷小量, 则  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)\alpha(x) = 0$ 。

2. 无穷大量的性质:

(1) 有限个无穷大量之积仍是无穷大量。

(2) 有界量与无穷大量之和仍是无穷大量。

无穷小量与无穷大量之间的关系:

若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ , 则  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$ ;

若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ , 且  $\exists \delta > 0$ , 当  $x \in U^0(x_0, \delta)$  时  $f(x) \neq 0$ , 则  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = \infty$ 。

3. 函数极限的性质

在下述六种类型的函数极限:

(1)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$       (2)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$       (3)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$       (4)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

(4)  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$       (6)  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$

它们具有与数列极限相类似的一些性质, 我们以  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  为例, 其它类型极限的相应性质的叙述只要作适当修改就可以了。

性质 1 (唯一性) 若极限  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  存在, 则它只有一个极限。

性质 2 (局部有界性) 若极限  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  存在, 则存在  $x_0$  的某空心邻域  $U^0(x_0)$ , 使  $f(x)$  在  $U^0(x_0)$  内有界。

注意:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  存在, 只能得出  $f(x)$  在  $x_0$  的某邻域内有界, 得不出  $f(x)$  在其定义域内有界。

性质 3 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$ , 且  $A < B$ , 则存在  $x_0$  的某空心邻域  $U^0(x_0, \delta_0)$ , 使  $x \in U^0(x_0, \delta_0)$  时, 都有  $f(x) < g(x)$ 。

性质4 (局部保号性) 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A > 0$  (或  $< 0$ ) , 则对任何常数

$0 < \eta < A$  (或  $A < \eta < 0$ ) , 存在  $x_0$  的某空心邻域  $U(x_0)$  , 使得对一切  $x \in U(x_0)$  , 都有  $f(x) > \eta > 0$  (或  $f(x) < \eta < 0$ ) 成立。

性质5 (不等式) 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$  , 且存在  $x_0$  的某空心邻域  $U(x_0, \delta_0)$  , 使得对一切  $x \in U(x_0, \delta_0)$  , 都有  $f(x) \leq g(x)$  , 则  $A \leq B$  。

性质6 (复合函数的极限) 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = u_0$  ,  $\lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = A$  , 且存在  $x_0$  的某空心邻域  $U(x_0, \delta')$  , 当  $x \in U(x_0, \delta')$  时,  $\varphi(x) \neq u_0$  , 则  $\lim_{x \rightarrow x_0} f[\varphi(x)] = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = A$  。

性质6 是求极限的一个重要方法——变量替换法, 即

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(\varphi(x)) \stackrel{\text{令 } \varphi(x) = u}{=} \lim_{\substack{u \rightarrow u_0 \\ \text{且 } x \rightarrow x_0, \varphi(x) \rightarrow u_0}} f(u) = A \text{ 。$$

性质7 (函数极限的四则运算) 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  与  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$  均存在, 则函数  $f(x) \pm g(x), f(x) \cdot g(x), cf(x)$  ( $c$  为常数) 在  $x \rightarrow x_0$  时极限均存在且

$$(1) \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x); \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x);$$

(3)  $\lim_{x \rightarrow x_0} cf(x) = C \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ ; 又若  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$ , 则  $\frac{f(x)}{g(x)}$  在  $x \rightarrow x_0$  时的极限也存在, 且有

$$(4) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} \text{。}$$

利用极限的四则运算, 可得下列重要结果。

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_{m-1} x + b_m} \quad (a_0, \cdots, a_n, b_0, \cdots, b_m \text{ 均为常数, } a_0 \neq 0, b_0 \neq 0)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{x^m} \frac{a_0 + a_1 \frac{1}{x} + \cdots + a_{n-1} \frac{1}{x^{n-1}} + a_n \frac{1}{x^n}}{b_0 + b_1 \frac{1}{x} + \cdots + b_{m-1} \frac{1}{x^{m-1}} + b_m \frac{1}{x^m}} = \begin{cases} 0, & n < m \\ \frac{a_0}{b_0}, & n = m \\ \infty, & n > m \end{cases}$$

上面的结论可作为公式用。

性质 8 ( 归结原则或海涅 ( Heine ) 定理 )  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  存在的充要条件是 :

$\forall \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 (x_n \neq x_0, n = 1, 2, \dots)$ , 极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$  都存在且相等。

逆否定理: 若存在两个数列  $\{x'_n\}, \{x''_n\} \subset U^0(x_0)$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x'_n = x_0, \lim_{n \rightarrow \infty} x''_n = x_0$ , 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n) = A, \lim_{n \rightarrow \infty} f(x''_n) = B, A \neq B$  或存在  $\{x_n\} \subset U^0(x_0)$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0, \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$  不存在, 则  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  不存在。

此定理是判断函数极限不存在的一个重要方法。

#### 4. 函数连续的性质

若函数  $f(x)$  在点  $x = x_0$  处连续, 即  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ , 利用极限的性质 1-5 可得到函数在  $x = x_0$  连续的局部有界性, 局部保号性, 不等式等, 只要把  $U^0(x_0)$  改成  $U(x_0)$  即可, 读者自己叙述出来。

利用极限的四则运算, 我们有

性质 1 ( 连续函数的四则运算 ) 若  $f(x), g(x)$  在点  $x = x_0$  处连续, 则  $f(x) \pm g(x), f(x)g(x), cf(x) (c \text{ 为常数}) \frac{f(x)}{g(x)} (g(x_0) \neq 0)$  在  $x = x_0$  处也连续。

性质 2 若  $u = \varphi(x)$  在  $x_0$  处连续,  $y = f(u)$  在  $u_0 = \varphi(x_0)$  处连续, 则  $y = f(\varphi(x))$  在  $x = x_0$  处也连续且  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(\varphi(x)) = f(\varphi(x_0)) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x))$

在满足性质 2 的条件下, 极限符号与外函数  $f$  可交换顺序, 如果仅要可交换顺序, 有

推论 若

$\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = u_0, y = f(u)$  在  $u = u_0$  处连续, 则  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(\varphi(x)) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x))$ 。

证 设  $g(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \neq x_0, \\ u_0, & x = x_0, \end{cases}$  则  $g(x)$  在  $x = x_0$  处连续, 又

$y = f(u)$  在  $u = u_0 = g(x_0)$

处连续, 由性质 2 知  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x))$ 。

由于  $x \rightarrow x_0$ , 要求  $x \neq x_0$ , 有  $g(x) = \varphi(x)$ , 所以  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(\varphi(x)) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x))$ 。

在这里,我们巧妙地利用可去间断点的性质,构造一个连续函数,以满足所需的条件,上面的性质2及推论也是求函数极限的一个重要方法。

即极限符号与外函数  $f$  交换顺序,把复杂函数极限转化为简单函数极限。

定理 1.5  $f(x)$  在  $x_0$  处连续  $\Leftrightarrow f(x)$  在  $x_0$  处既是左连续又是右连续。

定理 1.6 初等函数在其定义域上连续。

## 5. 闭区间上连续函数的性质

定理 1.7 (最大值与最小值定理) 若  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上连续, 则  $f(x)$  在  $[a, b]$  上一定能取到最大值与最小值, 即存在  $x_1, x_2 \in [a, b]$ ,  $f(x_1) = M, f(x_2) = m$ , 使得对一切  $x \in [a, b]$ , 都有  $m \leq f(x) \leq M$ 。

推论 1.7.1 若  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上连续, 则  $f(x)$  在  $[a, b]$  上有界。

定理 1.8 (根的存在定理或零值点定理) 若函数  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上连续,  $f(a)f(b) < 0$ , 则至少存在一点  $\xi \in (a, b)$ , 使  $f(\xi) = 0$ 。

推论 1.8.1 若函数  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上连续, 且  $f(a) \neq f(b)$ ,  $c$  为介于  $f(a), f(b)$  之间的任何常数, 则至少存在一点  $\xi \in (a, b)$ , 使  $f(\xi) = c$ 。

推论 1.8.2 若函数  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上连续, 则值域  $R(f) = [m, M]$ 。

这几个定理非常重要, 请大家要记住这些定理的条件与结论, 并会运用这些定理去解决问题。

## 6. 重要的函数极限与重要的等价量

利用初等函数的连续性 & 极限符号与外函数的可交换性及等价量替换, 夹逼定理可得到下面的重要的函数极限。

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln(1+x) = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1.$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \stackrel{\text{设 } e^x - 1 = t}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\ln(1+t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\ln(1+t)}{t}} = 1.$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln a} - 1}{x \ln a} \cdot \ln a = \ln a (a > 0, a \neq 1 \text{ 为常数}).$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^b - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{b \ln(1+x)} - 1}{b \ln(1+x)} \cdot \frac{\ln(1+x)}{x} \cdot b = b (b \text{ 为常数}, b \neq 0).$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} \stackrel{\text{设 } \arcsin x = t}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin t}{t}} = 1.$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} \stackrel{\text{设 } \arctan x = t}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\tan t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin t} \cdot \cos t = 1 \times 1 = 1.$$

$$(9) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^k} = 0 (k > 0 \text{ 常数}).$$

$$(10) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^k}{a^x} = 0 (a > 1 \text{ 常数}, k \text{ 为常数}).$$

$$(11) \text{ 若 } \lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = a > 0, \lim_{x \rightarrow x_0} v(x) = b (a, b \text{ 均为常数}), \text{ 则}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x)^{v(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} e^{v(x) \ln u(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} v(x) \ln u(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} v(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \ln u(x)} = e^{b \ln a} = e^{\ln a^b} = a^b$$

$$\text{即 } \lim_{x \rightarrow x_0} u(x)^{v(x)} = a^b.$$

注：不仅要记住这些公式的标准形式，更要明白一般形式。即上面公式中的  $x$  可换成  $f(x)$ ，只要  $x \rightarrow x_0$  时， $f(x) \rightarrow 0$ ，结论依然成立。

利用上述重要极限，我们可以得到下列对应的重要的等价无穷小量，在解题中经常要利用他们

当  $x \rightarrow 0$  时， $\sin x \sim x, \ln(1+x) \sim x, e^x - 1 \sim x, a^x - 1 \sim x \ln a (a > 0, a \neq 1, \text{常数}).$

$$(1+x)^b - 1 \sim bx (b \neq 0, \text{常数}), \arcsin x \sim x, \arctan x \sim x, 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2.$$

注：上式中的  $x$  可换成  $f(x)$ ，只要  $x \rightarrow x_0$  时， $f(x) \rightarrow 0$ 。结论依然成立。

例如  $\sin f(x) \sim f(x)$  (若  $x \rightarrow x_0$  时， $f(x) \rightarrow 0$ )。

此外，若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A (\text{常数}) \neq 0, f(x) \sim A (x \rightarrow x_0)$ 。

## 7. 等价量替换定理 1.9

若 (1)  $f(x) \sim f_1(x), g(x) \sim g_1(x), h(x) \sim h_1(x) (x \rightarrow x_0)$  ;

$$(2) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)g_1(x)}{h_1(x)} = A(\text{或}\infty); , \text{ 则}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x)}{h(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)g_1(x)}{h_1(x)} = A(\text{或}\infty).$$

$$\text{证 } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x)}{h(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)g_1(x)}{h_1(x)} \cdot \frac{f(x)}{f_1(x)} \cdot \frac{g(x)}{g_1(x)} \cdot \frac{h_1(x)}{h(x)} = A \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = A(\text{或}\infty),$$

$$\text{即 } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x)}{h(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)g_1(x)}{h_1(x)} = A(\text{或}\infty).$$

这个定理告诉我们，在求函数极限时，分子、分母中的因式可用它们的简单的等价的量来替换，以便化简，容易计算。但替换以后函数极限要存在或为无穷大。需要注意的是，分子、分母中加减的项不能替换，应分解因式，用因式替换，包括用等价无穷小量、等价无穷大量或一般的等价量来替换。

## 8. 夹逼定理 1.10

若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A$ ，且存在  $x_0$  的某空心邻域  $\overset{0}{U}(x_0, \delta')$ ，使得对一切  $x \in \overset{0}{U}(x_0, \delta')$ ，都有  $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ ，则  $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = A$ 。

## 9. 定理 1.11 洛必达(L'Hospital)法则 I

设 (1)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$  ;

(2) 存在  $x_0$  的某邻域  $\overset{0}{U}(x_0)$ ，当  $x \in \overset{0}{U}(x_0)$  时， $f'(x), g'(x)$  都存在，且  $g'(x) \neq 0$  ;

$$(3) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A(\text{或}\infty), \text{ 则 } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A(\text{或}\infty).$$

## 定理 1.12 洛必达(L'Hospital)法则 II，设

(1)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$  ;

(2) 存在  $x_0$  的某邻域  $\overset{0}{U}(x_0)$ ，当  $x \in \overset{0}{U}(x_0)$  时， $f'(x), g'(x)$  都存在且  $g'(x) \neq 0$  ;

$$(3) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A(\text{或}\infty), \text{ 则 } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A(\text{或}\infty).$$

注 1：上述两个法则中的  $x \rightarrow x_0$  改成  $x \rightarrow x_0^+, x \rightarrow x_0^-, x \rightarrow \infty, x \rightarrow +\infty, x \rightarrow -\infty$  时，条件 (2) 只须作相应的修改，结论依然成立。

注 2：在用洛必达法则求极限之前，应尽可能把函数化简，或把较复杂的因式用简单等价的因式来替换，以达到简化，再利用洛必达法则。

注 3：利用洛必达法则求极限时，可在计算的过程中论证是否满足洛必达法则的条件，若满足洛必达法则的条件，结果即可求出；若不满足，说明不能使用洛必达法则，则需用其它求极限的方法。此外，可重复使用洛必达法则，但只能用有限次。

### 第三节 数列极限

#### §3.2 内容提要与释疑解难

##### 一、内容精要

##### (一) 基本概念



数列极限

数列极限的定义

用定义证明数列极限的方法

直接证法

间接证法

收敛数列的性质

唯一性

有界性

不等式

保号性

四则运算

判断数列收敛的准则

夹逼定理

单调有界定理

判断数列发散的准则

两个子列极限存在但不相等

有一个子列发散

数列无界

重要的数列极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = 0 \quad (k > 0 \text{ 常数})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0 \quad (|q| < 1 \text{ 常数})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad (a > 0 \text{ 常数})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n^k} = 0 \quad (k > 0 \text{ 常数})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0 \quad (a > 1, a, k \text{ 为常数})$$

## 1. 数列极限的概念

定义 1.22 设  $\{a_n\}$  是一个数列,  $a$  是一个确定的常数, 若对任意给定的正数  $\varepsilon$ , 总存在一个自然数  $N$ , 使得  $n > N$  时, 都有  $|a_n - a| < \varepsilon$ , 则称数列  $\{a_n\}$  的极限是  $a$ , 或者说数列  $\{a_n\}$  收敛于  $a$ , 记作  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ 。

注意: (1)  $\varepsilon$  的任意性,  $\varepsilon$  的作用在于衡量  $a_n$  与  $a$  的接近程度, 从而限制  $\varepsilon$  小于某一个正常数, 不影响衡量  $a_n$  与  $a$  接近的程度, 但不能限制大于某一个正常数, 定义中的  $\varepsilon$  可用  $2\varepsilon$ 、 $\sqrt{\varepsilon}$  或  $\varepsilon^2$  等本质上是任意的正常数来替代, 同样也可把 “ $<$ ” 号换成 “ $\leq$ ” 号。

(2)  $N$  的相应性。一般说,  $N$  是随着  $\varepsilon$  的变小而变大, 但并不是由  $\varepsilon$  唯一确定, 因为给定  $\varepsilon$ , 确定  $N$ , 当  $n > N$ , 有  $|a_n - a| < \varepsilon$ , 则  $N+1, N+2, \dots$  同样也符合要求。此外,  $n > N$  中的  $N$  只是下标的一个界线, 要求  $n$  是自然数, 故  $N$  可以是实数, 而且  $n > N$  也可改成  $n \geq N$ 。

(3) 几何意义:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , 表明  $a$  的任何给定的  $\varepsilon$  邻域中都含有数列  $\{a_n\}$  中除了有限项以外的全有项。

## (二) 重要定理与公式

夹逼定理 1.12 设  $\{a_n\}, \{b_n\}$  为收敛数列, 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$ , 若存在  $N_0$ , 当  $n > N_0$  时, 都有  $a_n \leq c_n \leq b_n$ , 则数列  $\{c_n\}$  收敛, 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$ 。

夹逼定理适合数列的项有多项相加或相乘式  $n \rightarrow \infty$  时, 有无穷项相加或相乘, 且不能化简, 不能利用极限的四则运算, 此时可尝试用夹逼定理。夹逼定理不仅能证明数列极限并可求出极限的值。

单调有界定理 1.13 数列  $\{a_n\}$  递增 (递减) 有上界 (下界), 则数列  $\{a_n\}$  收敛, 即单调有界数列有极限。

单调有界定理适合数列的项用递推关系式给出的数列。单调有界定理仅能证明数列极限存在, 至于数列极限的值是多少只能用别的方法去解决。

## 1. 收敛数列的性质

性质 1 (唯一性) 若数列  $\{a_n\}$  极限存在, 则极限值是唯一的。

性质 2 改变数列的有限项, 不改变数列的收敛性与极限。

有了性质 2, 对于判定数列敛散性的定理中要求从第一项就具有某种性质的条件可减弱为从某一项开始具有该性质, 结论依然成立。

性质3 (有界性) 数列 $\{a_n\}$ 收敛, 则 $\{a_n\}$ 为有界数列, 即存在某正常数 $M$ , 使得对一切正整数 $n$ , 都有 $|a_n| \leq M$ 。

推论 若数列 $\{a_n\}$ 无界, 则数列 $\{a_n\}$ 发散。

该推论是判断数列 $\{a_n\}$ 发散的一个简单有效的办法。

性质4 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ 且 $a < b$ , 则存在 $N_0$ , 当 $n > N_0$ 时 (即 $n$ 充分大时), 都有 $a_n < b_n$ 。

推论 (保号性), 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a > 0$  ( $a < 0$ ), 则对于满足 $0 < \eta < a$  ( $a < \eta < 0$ ) 的任何常数 $\eta$ , 存在 $N$ , 当 $n > N$ 时, 都有 $a_n > \eta > 0$  ( $a_n < \eta < 0$ )。

性质5 (不等式) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ , 且存在 $N_0$ , 当 $n > N_0$ 时, 都有 $a_n \geq b_n$ , 则 $a \geq b$ 。

注意在性质5中, 即使存在 $N_0$ , 当 $n > N_0$ 时, 都有 $a_n > b_n$ , 也不能保证 $a > b$ 。

例如  $a_n = \frac{1}{n}$ ,  $b_n = -\frac{1}{n}$ ,  $a_n > b_n$  ( $n=1, 2, \dots$ ), 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ , 而 $0=0$ 。

性质6 数列 $\{a_n\}$ 收敛的充要条件是: 数列 $\{a_n\}$ 的任何一个子数列都收敛且极限相等。

逆否定理 若数列 $\{a_n\}$ 有两个子数列极限存在不相等或有一个子数列极限不存在, 则数列 $\{a_n\}$ 发散。

该定理是判断数列 $\{a_n\}$ 发散的一个重要方法。

性质7 (数列极限的四则运算) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ , 则数列 $\{a_n \pm b_n\}$ ,  $\{a_n b_n\}$ ,  $\left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\}$  ( $b \neq 0$ ) 的极限都存在, 且

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a \pm b; \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a \cdot b;$$

特别地, 当 $k$ 为常数时, 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} k a_n = k \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = k a$ ; (3)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{a}{b} \quad (b \neq 0).$$

注意: 数列极限的四则运算前提是两个数列极限都存在, 并可把数列极限推广到有限项极限的四则运算, 但数列极限的运算法则不能推广到无限项。

$$\text{公式 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_0 n^m + a_1 n^{m-1} + \cdots + a_{m-1} n + a_m}{b_0 n^k + b_1 n^{k-1} + \cdots + b_{k-1} n + b_k} = \begin{cases} 0, & m < k, \\ \frac{a_0}{b_0}, & m = k, \\ \infty, & m > k. \end{cases}$$

( 其中  $a_0, a_1, \dots, a_m, b_0, b_1, \dots, b_k$  均为常数且  $a_0 \neq 0, b_0 \neq 0$  )

这个例子表明当分子最高次幂小于分母最高次幂时，分式极限为零；当分子最高次幂等于分母最高次幂时，分式极限就是分子、分母最高次幂的系数之比；当分子最高次幂大于分母最高次幂时，分式的极限为  $\infty$ ，以后该例题的结果可以作为结论用，同理可证对分子、分母的每一项幂指数是正数时结果仍成立.