递归树

递归树的概念

- 递归树是迭代计算的模型.
- 递归树的生成过程与迭代过程一致.
- 递归树上所有项恰好是迭代之后产生和式中的项.
- 对递归树上的项求和就是迭代后方程的解.

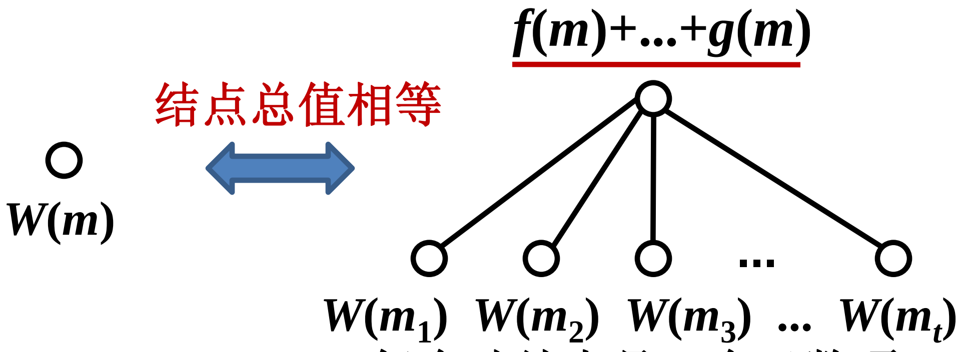
迭代在递归树中的表示

如果递归树上某结点标记为$W(m)$

$$W(m) = W(m_1)+\ldots+W(m_t)$$

$$+\ \underline{f(m)+\ldots+g(m)},\quad m_1, \ldots, m_t < m$$

其中$W(m_1),\ldots,W(m_t)$称为函数项.

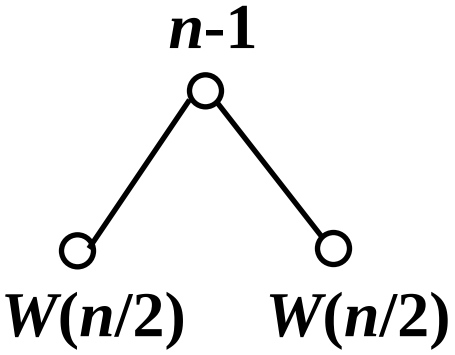


每个叶结点是一个函数项

二层子树的例子

二分归并排序

$$W(n) = 2W(n/2) + n\text{-}1$$



递归树的生成规则

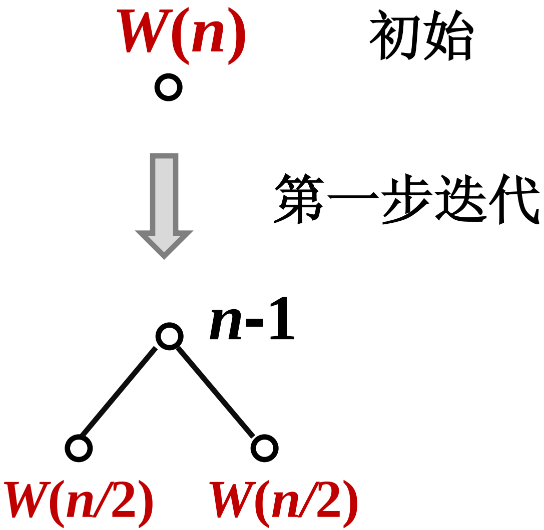
- 初始，递归树只有根结点，其值为$W(n)$
- 不断继续下述过程：

  将函数项叶结点的迭代式$W(m)$表示成二层子树

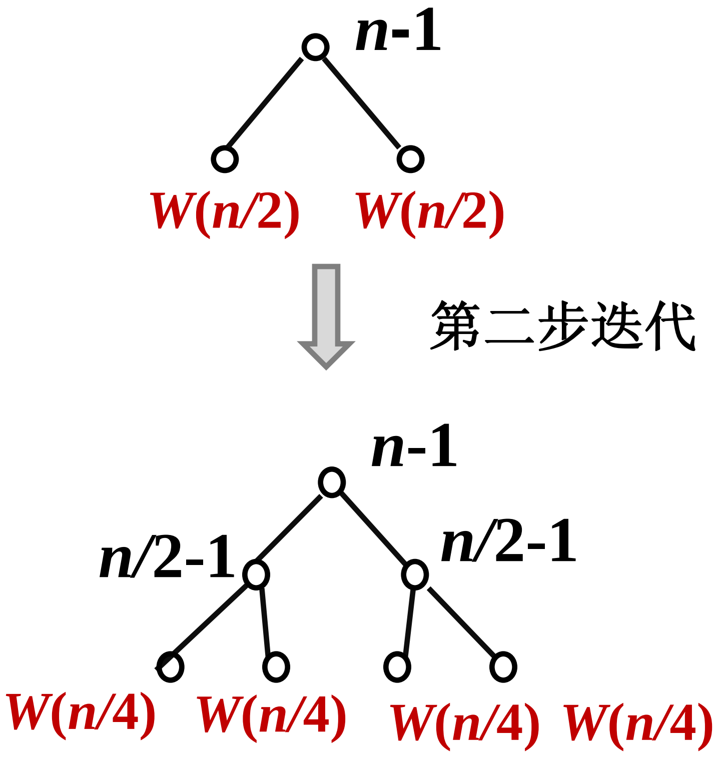
  用该子树替换该叶结点
- 继续递归树的生成，直到树中无函数项(只有初值)为止.

递归树生成实例

$$W(n) = 2W(n/2) + n\text{-}1$$



递归树生成实例



递归树

$$n-1 \qquad\qquad \boxed{n-1}$$

$$\frac{n}{2}-1 \quad \frac{n}{2}-1 \qquad\qquad n-2$$

$$\frac{n}{4}-1 \quad \frac{n}{4}-1 \quad \frac{n}{4}-1 \quad \frac{n}{4}-1 \qquad\qquad n-4$$

$$\cdots\cdots$$

$$1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 1 \quad 1 \quad 1 \qquad\qquad n-2^{k\text{-}1}$$

对递归树上的量求和

$$\boxed{\begin{aligned}&W(n)=2W(n/2)+n-1,\ n=2^k,\\&W(1)=0\end{aligned}}$$

$$\begin{aligned}W(n)&=n-1+n-2+\ldots+n-2^{k\text{-}1}\\&=kn-(2^k-1)\\&=n\log n-n+1\end{aligned}$$

递归树应用实例

求解方程：$T(n)=T(n/3)+T(2n/3)+n$

$$n \qquad\qquad\qquad n$$

$$\frac{n}{3} \qquad \frac{2n}{3} \qquad\qquad\qquad n$$

$$\frac{n}{9} \qquad \frac{2n}{9} \qquad \frac{2n}{9} \qquad \frac{4n}{9} \qquad\qquad n$$

……

………………………… 1 $\quad O(n)$

求和

方程：$T(n)=T(n/3)+T(2n/3)+n$

递归树层数 k，每层$O(n)$

$$n(2/3)^k=1$$
$$\Rightarrow (3/2)^k=n$$
$$\Rightarrow k=O(\log_{3/2}n)$$

$$T(n)=O(n\log n)$$

小结

- 递归树是迭代的图形表述
- 递归树的生成规则
- 如何利用递归树求解递推方程?