$$f'(\xi)\cdot\frac{f(b)-f(a)}{e^b-e^a}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot\frac{f'(\tau)}{e^\tau} \tag{1}$$

成立，由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足拉格朗日定理条件，有 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ (2)

又 $f(x),e^x$ 在 $[a,b]$ 上满足柯西定理条件，有 $\dfrac{f(b)-f(a)}{e^b-e^a}=\dfrac{f'(\tau)}{e^\tau}$. (3)

(2),(3) 两式两端相乘得 $f'(\xi)\cdot\dfrac{f(b)-f(a)}{e^b-e^a}=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot\dfrac{f'(\tau)}{e^\tau}$

即等式(1) 成立，由每一步可逆，所以原等式成立.

13. 设 $f(x)$ 可微，证明 $f(x)$ 的任意两个零点之间必有 $f(x)+f'(x)$ 的零点.

证 由条件知，存在 $x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，使 $f(x_1)=0,f(x_2)=0$. 要证结论成立，只要证 $[f(x)+f'(x)]e^x=0$ 在 x_1,x_2 之间有一个根.

设 $F(x)=f(x)e^x$，有 $F'(x)=[f(x)+f'(x)]e^x$，只要证至少存在一点 $\xi\in(x_1,x_2)$ 使 $F'(\xi)=0$(1) 成立，由 $F(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上连续，在 (x_1,x_2) 内可导，且 $F(x_1)=f(x_1)e^{x_1}=0=F(x_2)=f(x_2)e^{x_2}$. 根据罗尔定理知至少存在一点 $\xi\in(x_1,x_2)$，使 $F'(\xi)=0$，即等式(1) 成立，由每一步可逆，所以结论成立.

14. 设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，在 $(0,2)$ 内可导，且有 $f(2)=5f(0)$，试证明在 $(0,2)$ 内至少存在一点 ξ，使得 $(1+\xi^2)f'(\xi)=2\xi f(\xi)$.

证 要证原等式成立，只要证 $\dfrac{(1+\xi^2)f'(\xi)-2\xi f(\xi)}{(1+\xi^2)^2}=0$

成立，只要证 $\left[\dfrac{(1+x^2)f'(x)-2xf(x)}{(1+x^2)^2}\right]_{x=\xi}=0$，成立，只要证 $\left[\dfrac{f(x)}{1+x^2}\right]'_{x=\xi}=0$

成立，设 $F(x)=\dfrac{f(x)}{1+x^2}$，只要证 $F'(\xi)=0$ (1)

成立，由 $F(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，在 $(0,2)$ 内可导，又 $f(2)=5f(0)$ 或 $\dfrac{f(2)}{5}=f(0)$，知

$$F(0)=f(0)=F(2)=\frac{f(2)}{1+2^2}=\frac{f(2)}{5}$$

根据罗尔定理，至少存在一点 $\xi\in(0,2)$，使 $F'(\xi)=0$，即等式(1) 成立，由每一步可逆，所以原等式成立.

15. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上三阶可导，证明至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，有

$$f(b)=f(a)+(b-a)f'\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{24}(b-a)^3f'''(\xi).$$

证 令 $\dfrac{24}{(b-a)^3}\left[f(b)-f(a)-f'\left(\dfrac{a+b}{2}\right)(b-a)\right]=k$，有

$$f(b)-f(a)-f'(\frac{a+b}{2})(b-a)-\frac{1}{24}k(b-a)^3=0,$$

其中 k 为常数，只要证 $k=f'''(\xi)$.

设 $F(x)=f(x)-f(a)-f'(\frac{a+x}{2})(x-a)-\frac{1}{24}k(x-a)^3$,

则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足罗尔定理条件，故存在一点 $c\in(a,b)$，使

$$F'(c)=f'(c)-f'(\frac{a+c}{2})-\frac{1}{2}(c-a)f''(\frac{a+c}{2})-\frac{1}{8}k(c-a)^2$$

对 $f'(x)$ 在点 $\frac{1}{2}(a+c)$ 处应用一阶泰勒公式，有

$$f'(c)=f'(\frac{a+c}{2})+f''(\frac{a+c}{2})(c-\frac{a+c}{2})+\frac{1}{2!}f'''(\xi)(c-\frac{a+c}{2})^2,$$

其中 $\xi\in(\frac{a+c}{2},c)\subset(a,b)$ 把它代入上式得 $k=f'''(\xi)$，所以原等式成立.

16. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $f'(a)<f'(b)$，证明对一切适合不等式 $f'(a)<c<f'(b)$ 的 c，必存在 $\xi\in(a,b)$ 使 $f'(\xi)=c$（导数的价值定理或导数的达布定理）.

证 任给常数 c，且 $f'(a)<c<f'(b)$，设 $F(x)=f(x)-cx$，有 $F'(x)=f'(x)-c$，而且 $F'(a)=f'(a)-c<0$, $F'(b)=f'(b)-c>0$,

由导数定义知 $\lim\limits_{x\to a+}\frac{F(x)-F(a)}{x-a}=F'(a)<0$，由极限的保号性知，存在 $\delta_1>0$，当 $x\in(a,a+\delta_1)$ 时，$\frac{F(x)-F(a)}{x-a}<0$. 由 $x-a>0$，得 $F(x)-F(a)<0$，取 $x_1\in(a,a+\delta_1)$, $F(x_1)-F(x)<0$ 或 $F(x_1)<F(a)$ 又 $\lim\limits_{x\to b-}\frac{F(x)-F(b)}{x-b}=F'(b)>0$,

同理存在 $\delta_2>0$（使 $b-\delta_2>x_1$），当 $x_2\in(b-\delta_2,b)$, $F(x_2)-F(b)<0$ 或 $F(x_2)<F(b)$，且 $x_1<x_2$. 由 $F(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，根据最大值最小值定理存在一点 $\xi\in[a,b]$，使 $F(x)$ 在 ξ 取到最小值，且 $\xi\neq a$，$\xi\neq b$，知 $\xi\in(a,b)$，知，ξ 也是 $F(x)$ 在 (a,b) 内的极小值，又 $F'(\xi)$ 存在，由费马定理知 $F'(\xi)=0$，即 $f'(\xi)=c$.

17. 设 $f(x)$ 二阶可导，且在 $[0,a]$ 内某点取到最大值，对一切 $x\in[0,a]$，都有 $|f''(x)|\leqslant m$（m 为常数），证明 $|f'(0)|+|f'(a)|\leqslant am$,

证 由条件知存在 $x_0\in(0,a)$，使 $f(x_0)$ 为最大值，则 $f(x_0)$ 也是极大值，又 $f'(x_0)$ 存在，由费马定理知 $f'(x_0)=0$. 于是

$$|f'(0)|+|f'(a)|=|f'(x_0)-f'(0)|+|f'(a)-f'(x_0)|$$

$$=|f''(\xi_1)(x_0-0)|+|f''(\xi_2)(a-x_0)|\leqslant mx_0+m(a-x_0)=am.$$

18. 设 $f''(x)<0, f(0)=0$，证明任给 $x_1, x_2>0$，有 $f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2)$.

证法一 令 $F(x)=f(x+x_2)-f(x)$ 则

$F'(x)=f'(x+x_2)-f'(x)=x_2f''(x+\theta x_2)<0, 0<\theta<1,$

所以 $F(x)$ 单调减小，又 $x_1>0$，故 $F(x_1)<F(0)$，即

$f(x_1+x_2)-f(x_1)<f(x_2)-f(0).$

但 $f(0)=0$，故 $f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2)$.

证法二 不妨设 $x_1\leqslant x_2$（$x_2\leqslant x_1$ 时类似可证），则由拉格朗日中值定理可得

$f(x_1)-f(0)=x_1f'(\xi_1), \quad 0<\xi_1<x_1,$

$f(x_1+x_2)-f(x_2)=x_1f'(\xi_2), x_2<\xi_2<x_1+x_2.$

又已知 $f''(x)<0$，故 $f'(\xi_2)<f'(\xi_1)$. 比较以上两式即得

$f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2).$

19. 证明当 $x>0, y>0$ 及 $0<\alpha<\beta$ 时，有 $(x^\alpha+y^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}>(x^\beta+y^\beta)^{\frac{1}{\beta}}$.

证 要证原不等式成立，只要证 $(x^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\left[1+(\frac{y}{x})^\alpha\right]^{\frac{1}{\alpha}}>(x^\beta)^{\frac{1}{\beta}}\left[1+(\frac{y}{x})^\beta\right]^{\frac{1}{\beta}}$

或 $\left[1+(\frac{y}{x})^\alpha\right]^{\frac{1}{\alpha}}>\left[1+(\frac{y}{x})^\beta\right]^{\frac{1}{\beta}}$ 成立，不妨设 $y\geqslant x$，设 $\frac{y}{x}=c\geqslant 1$，只要证 $0<\alpha<\beta$ 时，$(1+c^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}>(1+c^\beta)^{\frac{1}{\beta}}$ 成立. 设 $f(t)=(1+c^t)^{\frac{1}{t}}$，只要证 $0<\alpha<\beta$ 时，$f(\alpha)>f(\beta)$ (1) 成立，由 $f(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上连续，$t\in(\alpha, \beta)$ 时，

$$f'(t)=\left[e^{\frac{\ln(1+c^t)}{t}}\right]'=(1+c^t)^{\frac{1}{t}}\cdot\frac{\frac{tc^t\ln c}{1+c^t}-\ln(1+c^t)}{t^2}$$

$$=(1+c^t)^{\frac{1}{t}}\cdot\frac{c^t\ln c^t-(1+c^t)\ln(1+c^t)}{t^2(1+c^t)}<0,$$ 知 $f(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上严格递减，故 $\alpha<\beta$ 时，$f(\alpha)>f(\beta)$ 即不等式(1)成立，由每一步可逆，所以原不等式成立.

20. 设 p, q 均是大于 1 的常数，且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，证明任给 $x>0$，都有 $\frac{1}{p}x^p+\frac{1}{q}\geqslant x$.

证 令 $f(x)=\frac{1}{p}x^p+\frac{1}{q}-x$，则 $f'(x)=x^{p-1}-1, f''(x)=(p-1)x^{p-2}$.

令 $f'(x)=0$，得 $x=1$. 由 $f''(1)=p-1>0$，知当 $x=1$ 时，$f(x)$ 取极小值，即最小值，从而当 $x>0$ 时，有 $f(x)\geqslant f(1)=0$，即 $\frac{1}{p}x^p+\frac{1}{q}\geqslant x$.

21. 设 $x\in(0,1)$，证明

(1) $(1+x)\ln^2(1+x) < x^2$;　(2) $\frac{1}{\ln 2} - 1 < \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} < \frac{1}{2}$.

证　(1) 令 $\varphi(x) = (1+x)\ln^2(1+x) - x^2$,则有 $\varphi(0) = 0$,

$\varphi'(x) = \ln^2(1+x) + 2\ln(1+x) - 2x$,　$\varphi'(0) = 0$.

因为当 $x \in (0,1)$ 时,$\varphi''(x) = \frac{2}{1+x}[\ln(1+x) - x] < 0$,所以 $\varphi'(x) < 0$,从而 $\varphi(x) < 0$,即$(1+x)\ln^2(1+x) < x^2$.

(2) 令 $f(x) = \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}, x \in (0,1]$,则有 $f'(x) = \frac{(1+x)\ln^2(1+x) - x^2}{x^2(1+x)\ln^2(1+x)}$.

由(1)知,$f'(x) < 0$(当 $x \in (0,1)$),于是推知在$(0,1)$内 $f(x)$ 单调减少.又 $f(x)$ 在区间$(0,1)$上连续,且 $f(1) = \frac{1}{\ln 2} - 1$,故当 $x \in (0,1)$ 时,

$$f(x) = \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} > \frac{1}{\ln 2} - 1.$$

不等式左边证毕,又

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x - \ln(1+x)}{x\ln(1+x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{2x(1+x)} = \frac{1}{2}$$ 故当 $x \in (0,1)$ 时,$f(x) = \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} < \frac{1}{2}$.不等式右边证明.

22.证明 $\frac{1}{2^{p-1}} \leqslant x^p + (1-x)^p \leqslant 1$　$(0 \leqslant x \leqslant 1, p > 1)$.

证　设 $f(x) = x^p + (1-x)^p$,由 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续,故一定能取到最大值 M 与最小值 m.由于 $f'(x) = px^{p-1} - p(1-x)^{p-1}$,令 $f'(x) = 0$,解得 $x = \frac{1}{2}$.且 $f(x)$ 在$(0,1)$内无导数的不存在的点.而 $f(0) = 1, f(1) = 1, f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p} = \frac{1}{2^{p-1}} < 1$,则 $m = \frac{1}{2^{p-1}}, M = 1$.因此,对一切 $x \in [0,1]$,都有$\frac{1}{2^{p-1}} \leqslant x^p + (1-x)^p \leqslant 1$.

23.试证:当 $x > 0$ 时,$(x^2-1)\ln x \geqslant (x-1)^2$

证法一　令 $\varphi(x) = (x^2-1)\ln x - (x-1)^2$,易知 $\varphi(1) = 0$.由于

$\varphi'(x) = 2x\ln x - x + 2 - \frac{1}{x}, \varphi'(1) = 0$,

$\varphi''(x) = 2\ln x + 1 + \frac{1}{x^2}, \varphi''(1) = 2 > 0, \varphi'''(x) = \frac{2(x^2-1)}{x^3}$,

故当 $0 < x < 1$ 时 $\varphi'''(x) < 0$;当 $1 < x < +\infty$ 时 $\varphi'''(x) > 0$,从而当 $x \in (0,+\infty)$ 时 $\varphi''(x) > 0$.

由 $\varphi'(1)=0$ 推知当 $0<x<1$ 时 $\varphi'(x)<0$;当 $1<x<+\infty$ 时 $\varphi'(x)>0$. 再由 $\varphi(1)=0$ 推知当 $x>0$ 时$(x^2-1)\ln x\geqslant(x-1)^2$.

证法二 令 $\varphi(x)=\ln x-\dfrac{x-1}{x+1}$,则 $\varphi'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{(x+1)^2}=\dfrac{x^2+1}{x(x+1)^2}>0$ (当 $x>0$). 因为 $\varphi(1)=0$,所以当 $0<x<1$ 时,$\varphi(x)<0$;当 $1<x<+\infty$ 时,$\varphi(x)>0$. 于是当 $x>0$ 时,$(x^2-1)\varphi(x)=(x^2-1)\ln x-(x-1)^2\geqslant 0$,即

$$(x^2-1)\ln x\geqslant(x-1)^2.$$

证法三 当 $x\neq 1$ 时,$(x^2-1)\ln x-(x-1)^2=(x-1)^2\left[\dfrac{\ln x}{x-1}(x+1)-1\right]$

$=(x-1)^2\left[\dfrac{\ln x-\ln 1}{x-1}(x+1)-1\right]=(x-1)^2\left[\dfrac{1}{\xi}(x+1)-1\right]$(由拉朗日定理知)

由 ξ 介于 $1,x$ 之间,当 $0<x<1$,知 $x<\xi<1$,得 $0<\xi<1+x$,当 $1<x$,知 $1<\xi<x$ 得 $0<\xi<1+x$,总有$\dfrac{1+x}{\xi}>1$,从而$(x^2+1)\ln x-(x-1)^2>0$

当 $x=1$ 时,$(x^2-1)\ln x=(x-1)^2=0$ 故 $x>0$ 时,$(x^2-1)\ln x\geqslant(x-1)^2$

进一步,我们还可以证明:当 $x>0$ 时$(x^2-1)\ln x\geqslant 2(x-1)^2$.

事实上,令 $\varphi(x)=(x+1)\ln x$,则 $\varphi(1)=0$,$\varphi'(x)=\ln x+(x+1)/x$,

$\varphi'(1)=2\varphi''(x)=\dfrac{x-1}{x^2}$. 在 $x=1$ 处,利用 Taylor 公式,得

$\varphi(x)=\varphi(1)+\varphi(1)(x-1)+\varphi''(\xi)\dfrac{(x-1)^2}{2}$($\xi$ 在 x 与 1 之间)

$(x+1)\ln x=2(x-1)+\dfrac{(x-1)^2}{2}\cdot\dfrac{\xi-1}{\xi^2}$

或$(x^2-1)\ln x=2(x-1)^2+\dfrac{(x-1)^3}{2}\cdot\dfrac{\xi-1}{\xi^2}$.

当 $x>0$ 时,$\dfrac{(x-1)^3(\xi-1)}{\xi^2}\geqslant 0$,从而有$(x^2-1)\ln x\geqslant 2(x-1)^2$.