几类重要的函数

基本函数类

阶的高低

至少指数级：　$2^n, 3^n, n!, \ldots$

多项式级：　$n,\ n^2,\ n\log n,\ n^{1/2}, \ldots$

对数多项式级：　$\log n,\ \log^2 n,\ \log\log n, \ldots$

对数函数

符号：

$$\log n = \log_2 n$$
$$\log^k n = (\log n)^k$$
$$\log\log n = \log(\log n)$$

性质：

(1) $\log_2 n = \Theta(\log_l n)$

(2) $\log_b n = o(n^\alpha) \qquad \alpha > 0$

(3) $a^{\log_b n} = n^{\log_b a}$

有关性质(1)的证明

$$\boxed{\log_k n = \frac{\log_l n}{\log_l k} \quad \log_l k \text{为常数}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_k n}{\log_l n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log_l n}{\log_l k \cdot \log_l n} = \frac{1}{\log_l k}$$

根据定理， $\log_k n = \Theta(\log_l n)$

有关性质(2)(3)的说明

$\log_b n = \Theta(\ln n)$

$\ln n = o(n^{\alpha})$ $\Rightarrow$ $\boxed{\log_b n = o(n^{\alpha}) \quad \alpha > 0}$

$$\boxed{a^{\log_b n} = n^{\log_b a}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\log_b n \log_b a = \log_b a \log_b n$$

指数函数与阶乘

Stirling公式 $n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(1+\Theta\left(\frac{1}{n}\right)\right)$

$n! = o(n^n)$

$n! = \omega(2^n)$

$\log(n!) = \Theta(n\log n)$

应用：估计搜索空间大小

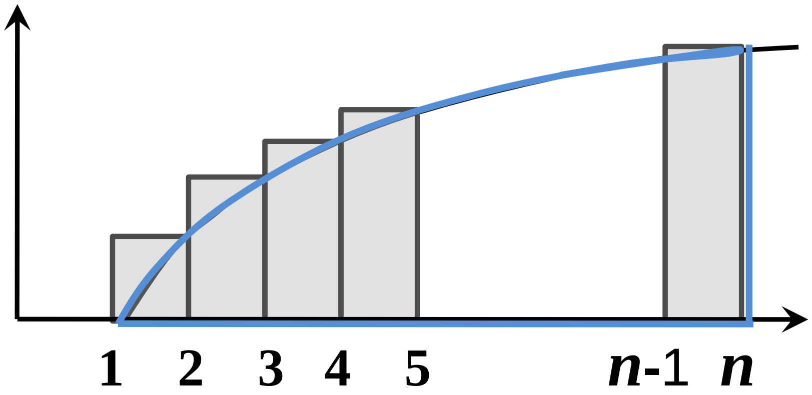
$$C_{m+n-1}^{m} = \frac{(m+n\text{-}1)!}{m!(n\text{-}1)!}$$

m元钱、投资
n个项目的分配方
案数（视频001）

$$= \frac{\sqrt{2\pi(m+n-1)}(m+n-1)^{m+n-1}(1+\Theta(\frac{1}{m+n-1}))}{\sqrt{2\pi m}m^{m}(1+\Theta(\frac{1}{m}))\sqrt{2\pi(n-1)}(n-1)^{n-1}(1+\Theta(\frac{1}{n-1}))}$$

$$\boxed{= \Theta((1+\varepsilon)^{m+n-1})}$$

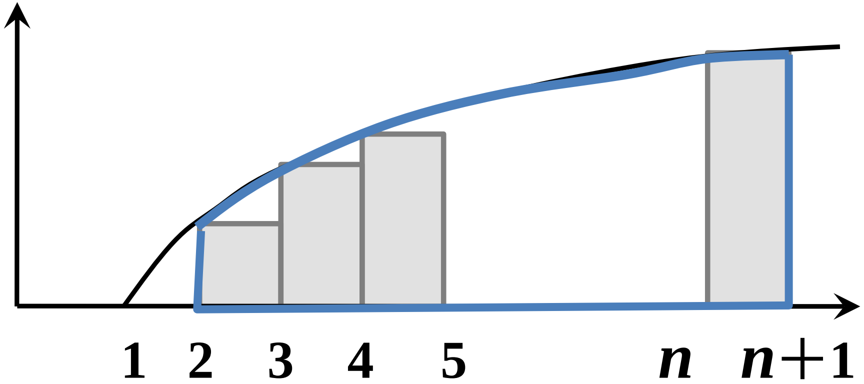
$\log(n!) = \Omega(n\log n)$的证明



$$\log(n!) = \sum_{k=1}^{n} \log k \geq \int_{1}^{n} \log x dx$$

$$= \log e(n\ln n - n + 1) = \Omega(n\log n)$$

$\log(n!) = O(n\log n)$的证明



$$\log(n!) = \sum_{k=1}^{n} \log k \le \int_{2}^{n+1} \log x dx = O(n\log n)$$

取整函数

取整函数的定义

$\lfloor x \rfloor$：表示小于等于 x 的最大的整数

$\lceil x \rceil$：表示大于等于 x 的最小的整数

实例

$\lfloor 2.6 \rfloor = 2$

$\lceil 2.6 \rceil = 3$

$\lfloor 2 \rfloor = \lceil 2 \rceil = 2$

应用：二分检索

输入数组长度：n

中位数的位置：$\lfloor n/2 \rfloor$

与中位数比较后子问题大小：$\lfloor n/2 \rfloor$

取整函数的性质

(1) $x-1<\lfloor x\rfloor \le x \le \lceil x\rceil < x+1$

(2) $\lfloor x+n\rfloor = \lfloor x\rfloor + n$, $\lceil x+n\rceil = \lceil x\rceil + n$, n为整数

(3) $$\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = n$$

(4) $$\left\lceil \frac{\left\lceil \frac{n}{a} \right\rceil}{b} \right\rceil = \left\lceil \frac{n}{ab} \right\rceil, \quad \left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor}{b} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{ab} \right\rfloor$$

证明(1)

(1) 如果x是整数n，根据定义$\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil = n$，

$$x-1 < \lfloor x \rfloor = x = \lceil x \rceil < x+1$$

如果 $n < x < n+1$，n为整数，那么

$$\lfloor x \rfloor = n,\ \lceil x \rceil = n+1,$$

从而有

$$x-1 < n = \lfloor x \rfloor,\ n < x < n+1 = \lceil x \rceil$$

$$\Rightarrow x-1 < n = \lfloor x \rfloor < x < \lceil x \rceil = n+1 < x+1$$

例：按照阶排序

$\log(n!),\quad \log^2 n,\quad 1,\quad n!,\quad n2^n,\quad n^{1/\log n},$

$(3/2)^n,\quad \sqrt{\log n},\quad (\log n)^{\log n},\quad 2^{2^n},$

$n^{\log\log n},\quad n^3,\quad \log\log n,\quad n\log n,\quad n,$

$2^{\log n},\quad \log n$

例： 按照阶排序

$$2^{2^n},\quad n!,\quad n2^n,\quad (3/2)^n,\quad (\log n)^{\log n} = n^{\log\log n},$$

$$n^3,\quad \log(n!) = \Theta(n\log n),\quad n = 2^{\log n},$$

$$\log^2 n,\quad \log n,\quad \sqrt{\log n},\quad \log\log n,$$

$$n^{1/\log n} = 1$$

小结

- 几类常用函数的阶的性质
  对数函数
  指数函数
  阶乘函数
  取整函数
- 如何利用上述性质估计函数的阶？