第二章　　导数与微分

大纲要求

了解 导数的物理意义，微分的四则运算法则和一阶微分形式的不变性，高阶导数的概念

会 求平面曲线的切线方程和法线方程，用导数描述一些物理量，求函数的微分，求简单函数的高阶导数，求分段函数的导数，求隐函数和由参数方程所确定的函数以及反函数的导数

理解 导数和微分的概念，导数与微分的关系，导数的几何意义，函数的可导性与连续性之间的关系，

掌握 导数的四则运算法则和复合函数的求导法则，基本初等函数的导数公式

内容精要

（一） 基本概念

1.导数的概念

导数概念的实际背景是曲线上一点切线斜率与质点作变速直线运动在某时刻的瞬时速度.

定义 2.1 设函数 $y=f(x)$在点 x_0的某邻域 $U(x_0)$内有定义，若极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0}\frac{f\left(x\right)-f\left(x_0\right)}{x-x_0}$$

存在，则称 $f(x)$在点 x_0可导，并称此极限值为 $f(x)$在点 x_0处的导数（或微商），记作

$f'(x_0)$或 $y'|x=x_0$或$\left.\frac{dy}{dx}\right|x=x_0$或$\left.\frac{d}{dx}f\left(x\right)\right|x=x_0$，即$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)}{\Delta x}=f'\left(x_0\right)$

若极限不存在，则称函数 $y=f(x)$在点 x_0不可导

注 1 $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'\left(x_0\right)$用于涉及已知抽象函数可导，证明其它结论或已知其它条件，证明函数可导

注 2 $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)}{\Delta x}=f'\left(x_0\right)$ 用于利用定义求函数的导函数

注 3 $\lim_{x\to x_0}\frac{f\left(x\right)-f\left(x_0\right)}{x-x_0}=f'\left(x_0\right)$用于求函数在一点的导数

特别 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=A(\text{常数})=f'(0)$,若$f(0)=0$, 则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=A(\text{常数})=f'(0)$.

反之　若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=A$（常数）且 $f(x)$在 $x=0$ 处连续，则 $f'(0)=A$.

事实上，由$\lim\limits_{x\to 0}x=0$知$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0=f(0)$，利用上面结果知结论正确。

注 4　要弄清导数定义的本质。即

（1）若$t\to a$（a可以是常数，可以是$\infty,+\infty$或$-\infty$）时，有$j(t)\to 0$（$j(t)$从 0 两侧趋于 0），且

$$\lim_{t\to a}\frac{f[x_0+j(t)]-f(x_0)}{j(t)}=A(\text{常数})\text{，}$$

则 $f(x)$在 $x=x_0$处可导且 $f'(x_0)=A$。

证 $\lim\limits_{t\to a}\dfrac{f[x_0+j(t)]-f(x_0)}{j(t)}\overset{\text{设}j(t)=\Delta x}{=\!=\!=}\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=A(\text{常数})=f'(x_0)$。

（2）若$t\to a$（a可以是常数，可以是$\infty,+\infty$或$-\infty$）时，$j(t)\to x_0$（$j(t)$从 x_0 两侧趋于 x_0），且

$$\lim_{t\to a}\frac{f(j(t))-f(x_0)}{j(t)-x_0}=A(\text{常数})\text{，则 } f(x)\text{在 } x=x_0\text{处可导且 } f'(x_0)=A.$$

证$\lim\limits_{t\to a}\dfrac{f(j(t))-f(x_0)}{j(t)-x_0}\overset{\text{设}j(t)=x}{=\!=\!=}\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=A(\text{常数})=f'(x_0)$。

定义 2.2　若

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=A(\text{常数})\triangleq f'_-(x_0)$$

称为 $f(x)$在 $x=x_0$处的左导数，

定义 2.3

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=A(\text{常数})\triangleq f'_+(x_0)$$

称为 $f(x)$在 $x=x_0$处的右导数.

定理 2.1　$f'(x_0)=A\Leftrightarrow f'-(x_0)=A\text{且}f'+(x_0)=A$.

这个定理是判断在分界点 x_0 两侧表达式不同的分段函数在 x_0 处是否可导的一种方法。

例 $f(x)=\begin{cases} j(x), & x \le x_0, \\ y(x), & x > x_0. \end{cases}$

$$\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^-}\frac{j(x)-j(x_0)}{x-x_0} \qquad (1)$$

$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{y(x)-j(x_0)}{x-x_0} \qquad (2)$$

若（1）（2）两式的极限存在且相等，则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导，否则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处不可导

若 $f(x)=\begin{cases} j(x), & x \ne x_0, \\ a, & x = x_0, \end{cases}$

研究 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处是否可导就不必用左右导数的定义，只须用导数定义，即

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{j(x)-a}{x-x_0} \qquad (3)$$

如果（3）式极限存在，则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导，否则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处不可导。

（3）几何意义　若 $f'(x_0)$ 存在，则 $f'(x_0)$ 表示曲线 $y=f(x)$ 上点 $(x_0, f(x_0))$ 处切线的斜率 且

切线方程为　　　$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$；

法线方程为　　　$y-f(x_0)=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)\left(f'(x_0)\ne 0\right)$。

若 $f'(x_0)=0$，此时切线方程为 $y=f(x_0)$，法线方程为 $x=x_0$。

定理 2.2 若 $f(x)$ 在 x_0 处可导，则 $f(x)$ 在 x_0 处连续，反之不一定。

例如　$f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处连续，但在 $x=0$ 处不可导。

逆否定理 2.3　若 $f(x)$ 在 x_0 处不连续，则 $f(x)$ 在 x_0 处不可导。

这个定理为判断 $f(x)$ 在 x_0 处是否可导提供了一个简便方法：如果 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处极限不存在或不连续，则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处不可导，就不必用导数定义去验证了。

（4）若 $f(x)$在区间 X 上每一点都可导，即$\forall x\in X$ ，
$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x)$

按函数定义知 $f'(x)$是区间 X 上的函数，称为 $f(x)$在区间 X 上的导函数或简称为导数。

如果求出了区间 X 上的导函数，则$\forall x_0\in X$,有$f'(x_0)=f'(x)\big|_{x=x_0}$.

由此可知求 $f(x)$在 $x=x_0$处的导数有两种方法：

（1）用定义；　（2）若能求出 $f'(x)$或 $f'(x)$已知且 $f'(x)$在 $x=x_0$处有意义，则 $f'(x_0)=f'(x)|_{x=x0}$。

根据具体情况选用一种方法。

2.微分定义 2.4　设 y=f(x)在 x 的某邻域 U(x)内有定义，若
$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$可表示为

$\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)(\Delta x\to 0)$,其中 A 是与$\Delta x$无关的量，则称 y=f(x)在点 x 处可微，$A\Delta x$是$\Delta y$的线性主部，并称其为 y=f(x)在 x 处的微分，记为 dy.，即 $dy=A\Delta x$.

（二）重要定理与公式

1．导数的四则运算　　设 $u=u(x)$，$v=v(x)$在点 x 处可导，则 $u\pm v$ ，
$uv,\dfrac{u}{v}(v\neq 0)$在点 x 处可导，且

（1）$(u\pm v)'=u'\pm v'$ ；（2）$(uv)'=u'v+uv'$；特别地 $v=c$（常数），$(cu)'=cu'$；

（3）$\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}\ (v\neq 0)$,特别地$\left(\dfrac{1}{v}\right)'=-\dfrac{v'}{v^2}\quad(v\neq 0)$

2．定理 2.4（反函数求导法则） 设 $y=f(x)$为函数 $x=j(y)$的反函数，若 $j(y)$在点 y_0的某邻域内连续，严格单调且 $j'(y_0)\neq 0$ ，则 $f(x)$在点 $x_0(x_0=j(y_0))$可导，且
$f'(x_0)=\dfrac{1}{j'(y_0)}$或$\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0}=\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}\Big|y=y_0}$。

推论 2.4.1　设 $y=f(x)$为函数 $x=j(y)$的反函数，若 $j(y)$严格单调且
$j'(y)\neq 0$,则$f'(x)$存在且

$$f'(x)=\frac{1}{j'(y)}\text{或}\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}。$$

3．定理 2.5（复合函数求导法则）

设函数$u = j(x)$在 x=x_0处可导，y=f(u)在$u = u_0 = j(x_0)$处可导，则复合函数$y = f[j(x)]$在$x = x_0$处可导且

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} = \left.\frac{dy}{du}\right|_{u=u_0} \cdot \left.\frac{du}{dx}\right|_{x=x_0} \text{或} \left[f(j(x))\right]\Big|_{x=x_0} = f'(u_0)j'(x_0) = f'[j(x_0) \cdot j'(x_0)]$$

推论 2.5.1 若$u = j(x)$可导，y=f(u)可导，则$y = f(j(x))$可导且

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \text{或} [f(j(x))]' = f'(u)j'(x) = f'(j(x))j'(x).$$

导数是解决问题的工具，复合函数的求导特别重要，要真正理解并掌握，因为我们遇到的函数大多数是复合函数，只有掌握复合函数求导，才能准确求出导函数，大家要学会所谓的“层层剥皮”法，即把所给复合函数写成$y = f(j(x))$，要求 f(u)是基本初等函数，即 f'(u)可求出，从而$\frac{dy}{dx} = f'(j(x))j'(x)$

若$j'(x)$直接能求出，从而就求出了复合函数的导数，若$j(x)$又是复合函数，又可把$j(x) = g(h(x))$，要求 g(u)是基本初等函数，即 g'(u)可求出，从而$j'(x) = g'(h(x))h'(x)$

若 h'(x)直接能求出，从而求就出了$j'(x)$，也求出$\frac{dy}{dx}$，若 h(x)又是复合函数，再如此下去…直到最后一个内函数或者是基本初等函数或者是简单函数（由基本初等函数经过四则运算得到的函数），就是最后一个内函数导数可求出来，从而就求出原函数的导数。即反复利用两个函数复合的求导，这就是“层层剥皮法”

4　基本初等函数的求导公式(略)

注 1 由三解函数的导数有时是“+”号，有时是“-”号，用下面的方法记，带有“正”字的三角函数或反三角函数导数前面取“+”号，带有“余”字的三角函数与反三角函数导数前面取“-”号。

注 2 y=arc sinx,　　y=arc cosx　　在定义域中 x=±1 处不可导。

若$y = x^a$在 x=0 处有定义（此时 α>0 且 f(0)=0），由

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^a}{x} = x^{a-1} = \begin{cases} \infty, & 0 < a < 1, \\ 1, & a = 1, \\ 0, & a > 1. \end{cases}$$

知 f(x)=x^{α} 当 0<α<1 时，在 x=0 处不可导，其余的所有的基本初等函数在其定义域内的每一点都可导。

注 3 由于初等函数是由基本初等函数经过有限次四则运算及复合运算所得的函数，因此，有了上述求导公式及求导法则，就可按部就班地计算出初等函数的导数，但求导之前尽量的化简，最好能化成加减，因为函数越简单，求导越容易，函数加减求导数比函数乘除的导数要容易。

注 4 而分段函数是在 x 不同取范围内用不同的初等函数表达式，因此，不在分界点时，可直接利用求导公式，在分界点需用左、右导数的定义。

关于求分界点左、右导数还有下面的定理

定理 2.6 若$\exists d>0, f(x)$在$[x_0, x_0+d)$上连续，在(x_0, x_0+d)内可导且$\lim\limits_{x\to x_0^+} f'(x)=A$(常数), 则$f'+(x_0)$存在且$f'+(x_0)=A$。

证 由于$\lim\limits_{x\to x_0}+\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f'(x)=A(\text{常数})=f'+(x_0)$

同理有

定理 2.7 若$\exists d>0, f(x)$在$(x_0-d, x_0]$上连续，在(x_0-d, x_0)内可导且$\lim\limits_{x\to x_0}-f'(x)=A$（常数),则$f'-(x_0)$存在且$f'-(x_0)=A$。

推论 2..7.1 若$\exists d>0, f(x)$在$U(x_0,d)$上连续，在$\overset{0}{U}(x_0,d)$内可导且$\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)=A$(常数),则$f'(x_0)$存在且$f'(x_0)=A$.

定理 2.8（变上限求导定理） 若 $f(x)$在$[a,b]$上连续，则$\dfrac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$。

推论 2.8.1 若 f(t)连续，u=u(x)可导，则$\dfrac{d}{dx}\int_a^{u(x)} f(t)dt=f(u(x))u'(x)$.

证$\dfrac{d}{dx}\int_a^{u(x)} f(t)dt=\dfrac{d}{du}\int_a^u f(t)dt\cdot\dfrac{du}{dx}=f(u)\cdot u'(x)=f(u(x))u'(x)$.

推论 2.8.2 若 f(t)连续，u(x)、v(x)均可导，则
$\int_{v(x)}^{u(x)} f(t)dt=f(u(x))u'(x)-f(v(x))v'(x)$.

证 $\dfrac{d}{dx}\int_{v(x)}^{u(x)} f(t)dt=\dfrac{d}{dx}[\int_a^{u(x)} f(t)dt-\int_a^{v(x)} f(t)dt]=f(u(x))u'(x)-f(v(x))v'(x)$.

记住了推论 2.8.2，变上限函数求导定理，推论 2.8.1 就成为推论 2.8.2 的特例。在运用这个定理时，要注意被积函数只能是积分变量的表达式，如果不是这种形式，不能直接利用这个公式。

5.高阶导数的运算法则　若 u(x)，v(x)在 x 处 n 阶导数存在，则

$$(u\pm v)^{(n)}=u^{(n)}\pm v^{(n)};\qquad (cu)^{(n)}=cu^{(n)}(c\text{为常数})\text{；}$$

$$(u\cdot v)^{(n)}=c_n^0u^{(n)}v^{(0)}+c_n^1u^{(n-1)}v'+\mathbf{L}+c_n{}^ku^{(n-k)}v^{(k)}+\mathbf{L}+c_n^nu^{(0)}v^{(n)}.$$

其中 $u^{(0)}=u,\qquad v^{(0)}=v.$

由于乘积的高阶导数公式较复杂，而且没有商的高阶导数，从而使得求高阶导数更加麻烦，更需要在求导之前，对函数进行化简，尽量化成加减，对于乘积的高阶导数公式，若满足下列条件一定用：若 f(x)=u(x)v(x)，其中有一个因式高阶导数有公式看成 u(x)，另一个因式经过几次求导为零看成 v(x)，这时用乘积的高阶导数公式较方便，因为不论求多少阶导数，$f^{(n)}(x)$仅有有限几项。

6．部分基本初等函数的高阶导数公式

（1）$(\sin x)^{(n)}=\sin(x+n\cdot\frac{p}{2}),$　　（2）$(\cos x)^{(n)}=\cos(x+n\cdot\frac{p}{2}),$

（3）$(a^x)^{(n)}=a^x(\ln a)^{(n)}(a>0,a\neq 1\text{常数}),$　　（4）$(e^x)^{(n)}=e^x,$

（5）$(x^a)^{(n)}=a(a-1)\mathbf{L}(a-n+1)x^{a-n}(a\text{为常数}),$
$(x^n)^{(n)}=n!,\qquad (x^n)^{(m)}=0（m>n）,$

（6）
$$(\ln x)^{(n)}=[(\ln x)']^{(n-1)}=(x^{-1})^{(n-1)}\xlongequal{\text{用公式(5)}}-1(-1-1)\,\mathbf{L}\,[-1-(n-1)+1]x^{-1-(n-1)}$$

$$=(-1)^{n-1}(n-1)!\,x^{-n}.$$

类似我们还可得到 $(\sin kx)^{(n)}=k^n\sin(kx+n\frac{p}{2}),[\ln(1+x)]^{(n)}=(-1)^{(n-1)}(n-1)!\,(1+x)^{-n},$

定理 2.9　f(x)在 x 处可微 $\Leftrightarrow$ $f(x)$在 x 处可导且 A=f'(x)

由于根据微分的定义验证一个函数可微是比较麻烦的，有了这个定理，只要验证函数是否可导，如果函数可导，就可微，否则就不可微。由于若 f(x)可微时，A=f'(x)，知 $dy=f'(x)\Delta x$，特别地 $dx=(x)'\Delta x=\Delta x,$ 于是 $dy=f'(x)\cdot dx\Leftrightarrow\frac{dy}{dx}=f(x).$

因此，导数等于 dy 与 dx 的商，故导数又称为微商。

由于 dy=f '(x)dx，所以将导数公式表中的每个导数乘以自变量的微分 dx，便得到了微分公式。

定理 2.10　若 $u = j(x)$ 在点 x 处可微，y=f(u)在 $u(u = j(x))$ 处可微，则复合函数 $y = f(j(x))$ 在点 x 处可微，且 dy=f '(u)du.

这里 u 是中间变量，它与当 x 是自变量时，dy=f '(x)dx 的形式一样，我们称该性质为一阶微分形式不变性。

即若 y=f(u)可微，不论 u 是自变量，还是中间变量，都有 df(u)=f '(u)du.

微分的四则运算　若 u=u(x),v=v(x)在 x 处均可微，则

（1）$d(u \pm v) = du \pm dv$；　　　　（2）$d(uv) = udv + vdu$，特别 d(cu)=cdu（c 为常数）；

（3）$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}(v \neq 0)$，特别地 $d(\frac{1}{v}) = \frac{-dv}{v^2}(v \neq 0).$