连续邮资问题

连续邮资问题

问题：给定 n 种不同面值的邮票,每个信封至多贴 m 张，试给出邮票的最佳设计，使得从 1 开始，增量为 1 的连续邮资区间达到最大?

实例：$n = 5$，$m = 4.$

设计1：面值 $X_1 = <1,3,11,15,32>$，
邮资连续区间 $\{1,2, \ldots ,70\}$

设计2：面值 $X_2 = <1,6,10,20,30>$，
邮资连续区间 $\{1,2,3,4\}$

算法设计

可行解：$< x_1,\ x_2, \ldots, x_n >$，$x_1 = 1$,

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_n$$

搜索策略：深度优先

约束条件：在结点 $< x_1, x_2, \ldots, x_i >$ 处，邮资最大连续区间为$\{1, \ldots, r_i\}$，x_{i+1} 的取值范围是

$$\{ x_i +1, \ldots, r_i +1 \}$$

若$x_{i+1} > r_i+1$，r_i+1的邮资将没法支付.

r_i 的计算

$y_i(j)$：用至多 m 张面值 x_i 的邮票加上 $x_1, x_2, \ldots, x_{i\text{-}1}$ 面值的邮票贴 j 邮资时的最少邮票数，则

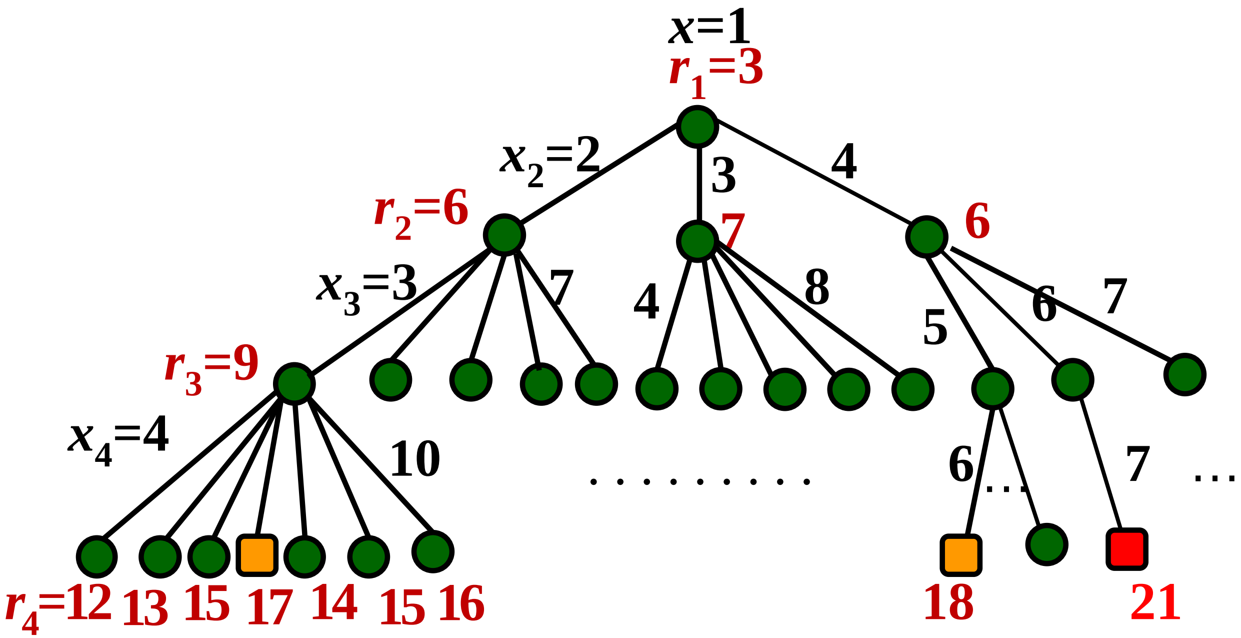
$$y_i(j) = \min_{1 \le t \le m}\{t + y_{i-1}(j - t\,x_i)\}$$

$$y_1(j) = j$$

$$r_i = \min\{\, j \mid y_i(j) \le m, y_i(j+1) > m\}$$

界：max，m张邮票连续付的最大邮资

部分搜索树 $n=4,m=3$



解：$X=\langle 1,4,6,7\rangle$，最大连续区间 $\{1,\ldots,21\}$

回溯算法小结

(1) 适于求解组合搜索问题及优化问题

(2) 求解条件：满足多米诺性质

(3) 解的表示：解向量，求解是不断扩充解向量的过程

(4) 回溯条件：

搜索问题——约束条件

优化问题——约束条件 + 代价函数

(5) 分支策略：深度优先、宽度优先、宽深结合、函数优先

小结（续）

(6) 结点状态：白结点,黑结点,灰结点

(7) 算法时间复杂度：

$$W(n) = (\ p(n)\ f(n)\ )$$

其中 $p(n)$ 为每个结点的工作量

$f(n)$为结点个数

最坏情况下时间通常为指数级

平均情况下比蛮力算法好

空间代价小

小结（续）

(8) 降低时间复杂性的主要途径：

- 根据树的分支设计优先策略
  结点少分支优先，解多分支优先
- 利用搜索树的对称性裁减子树
- 分解为子问题，若求解时间 $f(n)=c2^n$，组合时间 $O(2^{n/k})$，分解为 k 个 n/k 规模子问题，则该算法时间为

$$T(n)=kc2^{n/k}+O(2^{n/k})=O(2^{n/k})=o(2^n)$$