第六章　参数估计

知识点

一、掌握样本均值和样本方差的计算及基本性质

样本均值： $$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$$

样本方差： $$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=\frac{1}{n-1}[\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2]$$

设$X_1,\cdots X_n$ 为来自总体 X 的一个样本，

$$EX=\mu,DX=\sigma^2,$$

则 $$E\overline{X}=\mu,D\overline{X}=\frac{\sigma^2}{n},ES^2=\sigma^2.$$

样本标准差： $S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}$

样本 k 阶 (原点)矩： $A_k = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k \quad k = 1,2,\cdots$

样本 k 阶中心矩： $\mu_k = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^k \quad k = 1,2,\cdots$

抽样分布： 统计量的分布

二、掌握三个分布：χ^2分布、t分布、F分布的定义及性质，会查表计算

(1) χ^2 – 分布

设$(X_1,\cdots X_n)$为来自于正态总体 $N(0,1)$的样本，

则称统计量：

$$\chi^2 = X_1^2 + \cdots + X_n^2$$

所服从的分布为自由度 是n的χ^2分布。

记为 $\chi^2 \sim \chi^2(n)$

χ^2分布的性质：

$1^0 . \chi_1^2 \sim \chi^2(n_1), \chi_2^2 \sim \chi^2(n_2)$, 且 χ_1^2， χ_2^2独立，则有

$$\chi_1^2 + \chi_2^2 \sim \chi^2(n_1 + n_2)$$

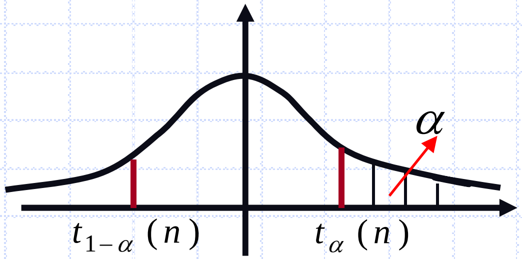
$2^0 . E\chi^2 = n, \quad D\chi^2 = 2n$

(2) $t-$分布

$X \sim N(0,1), Y \sim \chi^2(n)$, X, Y独立，则 称随机变量

$t=\dfrac{X}{\sqrt{Y/n}}$所服从的分布为自由度 是n的 $t-$分布

或称学生氏（ *Student*)分布，记作 $t \sim t(n)$.



(3) F – 分布

若 $X \sim \chi^2(n_1), Y \sim \chi^2(n_2)$, X, Y 独立，则 称随机变量

$$F = \frac{X/n_1}{Y/n_2}$$ 所服从的分布为自由度

是 n_1, n_2 的 F – 分布，记作 $F \sim F(n_1, n_2)$.

若 $F \sim F(n_1, n_2)$, 则 $1/F \sim F(n_2, n_1)$.

三 、掌握正态总体的样本均值与样本方差的分布：

定理1. 设$(X_1,\cdots,X_n)$是总体 $N(\mu,\sigma^2)$的样本， $\overline{X}$ 是样本均值，则有： $\overline{X} \sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$.

定理2. 设$(X_1,\cdots,X_n)$是总体 $N(\mu,\sigma^2)$的样本， $\overline{X},S^2$ 分别是样本均值与样本 方差，则有：

(1). $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$, 即 $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2 \sim \chi^2(n-1)$

(2). $\overline{X}$与 S^2独立。

定理3. $$\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

定理 4. 设 $(X_1, X_2, \cdots, X_{n_1})$与 $(Y_1, Y_2, \cdots Y_{n_2})$分别是具有两个正态总体 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $N(\mu_2, \sigma_2^2)$的样本，且它们独立。

设 $\overline{X} = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} X_i$ ， $\overline{Y} = \frac{1}{n_2}\sum_{j=1}^{n_2} Y_j$

分别是两个样本的均值 。

$$S_1^2 = \frac{1}{n_1 - 1}\sum_{i=1}^{n_1}(X_i - \overline{X})^2 , \quad S_2^2 = \frac{1}{n_2 - 1}\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j - \overline{Y})^2$$

分别是两个样本的方差 ；

则有： 1) $\dfrac{S_1^2 / S_2^2}{\sigma_1^2 / \sigma_2^2} \sim F(n_1-1, n_2-1)$

2) $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ 时，

$$\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}} \sim t(n_1+n_2-2)$$

四、矩法求估计量的步骤：

1) 求 $\mu_k = EX^k$；

2) 令 $A_k = \mu_k$；　　其中 $A_k = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$

3) 解上面方程（组），得

$$\hat{\theta}_k = \hat{\theta}_k(X_1, \cdots, X_n) \qquad k = 1, 2, \cdots, l$$

五 、极大似然估计法的具体做法如下：

1^0 写出似然函数：

$$L(\theta)=L(x_1,\cdots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n} p(x_i;\theta)=\prod_{i=1}^{n} P\{X_i=x_i\},$$

$$L(\theta)=L(x_1,\cdots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta),$$

2^0 求似然函数 $L(\theta)$ 的最大值点：

令 $\dfrac{dL(\theta)}{d\theta}=0.$ 或 $\dfrac{d}{d\theta}\ln L(\theta)=0.$

解之得 θ的极大似然估计值 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(x_1,\cdots,x_n).$

若母体的分布中包含多个参数$\theta_1,\cdots,\theta_k$,

则样本的似然函数为：

$$L(\theta_1,\cdots,\theta_k)=L(x_1,\cdots,x_n;\theta_1,\cdots,\theta_k)$$
$$=\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\theta_1,\cdots,\theta_k),$$
$$L(\theta_1,\cdots,\theta_k)=L(x_1,\cdots,x_n;\theta_1,\cdots,\theta_k)$$
$$=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta_1,\cdots,\theta_k),$$

即可令 $\dfrac{\partial L}{\partial\theta_i}=0,i=1,\cdots,k$.或 $\dfrac{\partial \ln L}{\partial\theta_i}=0,i=1,\cdots,k$.

解k个方程组求得 $\theta_1,\cdots,\theta_k$的极大似然估计值。

极大似然估计性质

设 θ 的函数 $u = u(\theta), \theta \in \Theta$ 具有单值反函数，$\hat{\theta}$ 是 θ 的极大似然估计；则 $\hat{u} = u(\hat{\theta})$ 是 $u(\theta)$ 的极大似然估计。

六 、估计量的评选标准

1. 无偏性：若 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,\cdots,X_n)$的数学期望存在，

且$E\hat{\theta}=\theta$.

则称 $\hat{\theta}$是 θ的无偏估计量。

2. 有效性：若 $\hat{\theta}_1=\hat{\theta}_1(X_1,\cdots,X_n)$，$\hat{\theta}_2=\hat{\theta}_2(X_1,\cdots,X_n)$

都是 θ的无偏估计量；若 $D(\hat{\theta}_1)<D(\hat{\theta}_2)$.

则称 $\hat{\theta}_1$较 $\hat{\theta}_2$有效。

3. 一致性：若 $\hat{\theta}=\hat{\theta}_1(X_1,\cdots,X_n)$为参数 θ的估计量

若对于任意 $\theta\in\Theta$，当 $n\longrightarrow\infty$时 $\hat{\theta}\xrightarrow{p}\theta$.

则称 $\hat{\theta}$是 θ的一致估计（相合估计量）。

七、区间估计

设总体 X 的分布函数为 $F(x,\theta)$，θ为未知参数，$\theta \in \Theta$，$X_1,\cdots,X_n$为 X 的样本，若对事先给定的 $\alpha(0<\alpha<1)$，存在两个统计量 $\hat{\theta}_L(X_1,\cdots,X_n)$和 $\hat{\theta}_U(X_1,\cdots,X_n)$，若对任意的 $\theta \in \Theta$，有

$$P_\theta(\hat{\theta}_L \le \theta \le \hat{\theta}_U) \ge 1-\alpha$$

则称随机区间 $[\hat{\theta}_L,\hat{\theta}_U]$为 θ的置信水平为 $1-\alpha$的置信区间，或简称 $[\hat{\theta}_L,\hat{\theta}_U]$是 θ的$1-\alpha$置信区间，$\hat{\theta}_L$和 $\hat{\theta}_U$分别称为 θ的置信下限和置信上限。

置信水平 $1-\alpha$ 的频率解释:

在大量重复使用 θ的置信区间 $[\hat{\theta}_L,\hat{\theta}_U]$时，每次得到的样本观测值是不同的，从而每次得到的区间估计值也是不一样的。对一次具体的观测值而言，θ可能在 $[\hat{\theta}_L,\hat{\theta}_U]$内，也可能不在，平均而言，在大量的区间估计观测值中，至少有 $100(1-\alpha)\%$ 包含 θ.

置信度$1-\alpha$一般要根据具体问题的要求来选定，

并要注意到：α越小，$1-\alpha$就越大，随机区间$(\hat{\theta}_L, \hat{\theta}_U)$

包含θ的真值的概率也就越大，但区间也越大，

估计的精确度也越差；反之，提高估计的精确度

则会增大误判风险α.