《微积分(一)》课程期末练习答案

一、(每小题 6 分)

(1) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{5}{2}\sec^2 5x+4e^{4x}x^{\cos x}+e^{4x}x^{\cos x}(\dfrac{\cos x}{x}-\sin x\ln x)$.

(2) 由 $x=t^2+2t$，$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=2(t+1)$，$y=t-\ln(1+t)$，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\dfrac{t}{t+1}$，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{t}{2(t+1)^2}$，

$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{1-t}{2(1+t)^4}$，令 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=0$，得 $t=1$

当 $-1<t<1$ 时，$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}>0$ 曲线凹；

当 $t>1$ 时，$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}<0$ 曲线凸，当 $t=1$ 时，对应拐点.

换成 x,y，当 $-1<x<3$ 时，曲线 $y=y(x)$ 凹；

当 $x>3$ 时，曲线当 $y=y(x)$ 凸，点 $(3,1-\ln 2)$ 为拐点.

(3) 解 因为 $\lim\limits_{x\to0}(\dfrac{\sin x}{x})^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{x^2}\ln(\frac{\sin x}{x})}$，而

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}\ln(1+\frac{\sin x}{x}-1),$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}(\frac{\sin x}{x}-1)\qquad \text{注}\ln(1+\frac{\sin x}{x}-1)\sim\frac{\sin x}{x}-1,(x\to0)$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{3x^2}=-\frac{1}{6},$$

所以 $\lim\limits_{x\to0}(\dfrac{\sin x}{x})^{\frac{1}{x^2}}=e^{\frac{-1}{6}}$.

(4) $$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+2x+\sin x}-(x+2))=\lim_{x\to+\infty}x[\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{\sin x}{x^2}}-(1+\frac{2}{x})]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(1+\frac{2}{x}+\frac{\sin x}{x^2}-(1+\frac{2}{x})^2)}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{\sin x}{x^2}}+(1+\frac{2}{x})}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(\frac{\sin x}{x^2}-\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2})}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{\sin x}{x^2}}+(1+\frac{2}{x})}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\sin x}{x}-2-\frac{4}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{\sin x}{x^2}}+(1+\frac{2}{x})}=-1\ .$$

二、

（5） $\int\frac{1}{x^2(x+1)}\mathrm{d}x=\int(-\frac{x-1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)})\mathrm{d}x$

$$=-\ln|x|-\frac{1}{x}+\ln|x+1|+C\ .$$

（6） 方法 1：令 $\arcsin e^x=t$，则 $e^x=\sin t, x=\ln\sin t, \mathrm{d}x=\frac{\cos t}{\sin t}\mathrm{d}t$

$$\int\frac{\arcsin e^x}{e^x}\mathrm{d}x=\int\frac{t\cos t}{\sin^2 t}\mathrm{d}t=-\int t\mathrm{d}(\frac{1}{\sin t})$$

$$=-\frac{t}{\sin t}+\int\frac{1}{\sin t}\mathrm{d}t$$

$$=-\frac{t}{\sin t}+\ln|\csc t-\cot t|+C$$

$$=-e^{-x}\arcsin e^x+\ln\left|e^{-x}-e^{-x}\sqrt{1-e^{2x}}\right|+C\ ,$$

或写成 $=-e^{-x}\arcsin e^x-x+\ln\left|1-\sqrt{1-e^{2x}}\right|+C$.

方法 2：令 $e^x=t$，则 $x=\ln t, \mathrm{d}x=\frac{1}{t}\mathrm{d}t,\quad (t>0)$

$$\int\frac{\arcsin e^x}{e^x}\mathrm{d}x=\int\frac{\arcsin t}{t^2}\mathrm{d}t=-\int\arcsin t\mathrm{d}\frac{1}{t}$$

$$=-\frac{\arcsin t}{t}+\int\frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{1-t^2}}$$

$$=-\frac{\arcsin t}{t}+\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}}$$

$$=-\frac{\arcsin t}{t}-\ln\left|\frac{1}{t}+\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}\right|+C$$

$$= e^{-x}\arcsin e^{x} + x - \ln\left|1-\sqrt{1-e^{2x}}\right| + C .$$

（7）$\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2}\mathrm{d}x^2 = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} te^{-t}\mathrm{d}t$

$$= \frac{1}{2}[-te^{-t}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t]$$

$$= \frac{1}{2}[-e^{-t}\Big|_0^{+\infty}] = \frac{1}{2} .$$

三、

（8）解　由 $y^3 + xy + x^2 - 2x + 1 = 0$，$\lim\limits_{x\to 1} y(x) = 0$

两边关于 x 求导数，有

$3y^2 y' + xy' + y + 2x - 2 = 0$，得 $y'(x) = \dfrac{2-2x-y}{3y^2+x}$，$\lim\limits_{x\to 1} y'(x) = 0$，

$y''(x) = \dfrac{(3y^2+x)(-2-y') - (2-2x-y)(6yy'+1)}{(3y^2+x)^2}$，$\lim\limits_{x\to 1} y''(x) = -2$.

由洛必达法则，

$$\lim_{x\to 1}\frac{\int_1^x y(t)\mathrm{d}t}{(x-1)^3} = \lim_{x\to 1}\frac{y(x)}{3(x-1)^2} = \lim_{x\to 1}\frac{y'(x)}{6(x-1)} = \lim_{x\to 1}\frac{y''(x)}{6} = -\frac{1}{3} .$$

（9）解：$f(x) = \dfrac{x}{(2x-1)(x-1)}$

$$= \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2x-1} = \frac{-1}{1-x} + \frac{1}{1-2x}$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (2^n - 1)x^n, |x| < \frac{1}{2}$$

$$f^{(n)}(0) = (2^n - 1)n!,\ n \ge 1$$

（10）解：令 $f(x) = ax - 2\ln x$，有 $f'(x) = a - \dfrac{2}{x}$，

令 $f'(x) = 0$，得 $x = \dfrac{2}{a}$，

$f''(x) = \dfrac{2}{x^2}$，

由于 $f''(x) > 0$，

所以 $f(\frac{2}{a})=2-2\ln\frac{2}{a}$ 为 $f(x)$ 的唯一极小值，为最小值.

以下讨论最小值的符号.

①若 $2-2\ln\frac{2}{a}>0$，即 $a>\frac{2}{e}$ 时，$f(x)>0$，$f(x)$ 无零点，两曲线无公共点；

②若 $a=\frac{2}{e}$，则当且仅当 $a=e$ 时，$f(x)=0$，$f(x)$ 有唯一零点，两曲线在第一象限中相切；

③若 $0<a<\frac{2}{e}$，有 $f(\frac{2}{a})<0$ 时，

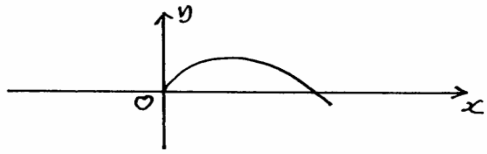
有因 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$，

所以在区间 $(0,\frac{2}{a})$ 与 $(\frac{2}{a},+\infty)$ 内，$f(x)$ 各有至少一个零点，

又因为在这两个区间中 $f(x)$ 分别是严格单调的，

所以 $f(x)$ 正好有两个零点，即两曲线在第一象限中有且仅有两个交点.

（11）解：因 $a<0$，且当 $0\le x\le 1$ 时，$y\ge 0$，所以如下图



$$\int_0^1(ax^2+bx)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}a+\frac{b}{2}=\frac{1}{3}，所以 a=1-\frac{3}{2}b，$$

$$V=\int_0^1\pi(ax^2+bx)^2\mathrm{d}x=\pi(\frac{a^2}{5}+\frac{ab}{2}+\frac{b^2}{3})=\pi(\frac{1}{5}-\frac{b}{10}+\frac{b^2}{30})，$$

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}b}=\pi(-\frac{1}{10}+\frac{b}{15})，\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}b^2}=\frac{\pi b}{15}，令 \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}b}=0，b=\frac{3}{2}，\left.\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}b^2}\right|_{b=\frac{3}{2}}>0，为唯一极小值，$$

故 $V\big|_{b=\frac{3}{2}}$ 为最小值，此时 $a=-\frac{5}{4},b=\frac{3}{2}$.

（12）① 由拉格朗日中值定理

$$\left|f(\frac{1}{2^n})-f(\frac{1}{2^{n+1}})\right|=f'(\xi)(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^{n+1}})=f'(\xi)\frac{1}{2^{n+1}}\le M(\frac{1}{2^{n+1}})，$$

而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}$收敛，所以，$\sum_{n=1}^{\infty}[f(\frac{1}{2^n})-f(\frac{1}{2^{n+1}})]$绝对收敛；

② $S_n=f(\frac{1}{2})-f(\frac{1}{2^{n+1}})$，因为$\lim_{n\to\infty}S_n$存在，所以$\lim_{n\to\infty}f(\frac{1}{2^n})$存在.

四、 （13）解 （A）若$\lim_{x\to 0}f(x)$不存在，则$\lim_{x\to 0}g(x)$必存在.

不正确，例如 $u(x)=\frac{1}{x},v(x)=\frac{1}{x^2}$， $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$， $g(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}$，

此时$\lim_{x\to 0}f(x)$不存在，$\lim_{x\to 0}g(x)$也不存在.

（B）若$\lim_{x\to 0}f(x)$不存在，则$\lim_{x\to 0}g(x)$必不存在.

不正确，例如 $u(x)=\frac{1}{x},v(x)=\frac{1}{x}$， $f(x)=\frac{2}{x},g(x)=0$，

此时$\lim_{x\to 0}f(x)$不存在，$\lim_{x\to 0}g(x)=0$存在.

（C）若$\lim_{x\to 0}f(x)$存在，则$\lim_{x\to 0}g(x)$必不存在.

假设$\lim_{x\to 0}g(x)$存在，由 $f(x)+g(x)=2u(x)$，

得$\lim_{x\to 0}u(x)$存在，与已知矛盾，所以结论正确.

（D）若$\lim_{x\to 0}f(x)$存在，则$\lim_{x\to 0}g(x)$必存在.

由上述（C），说明$\lim_{x\to 0}g(x)$必存在不正确.

所以结论正确的是C，本题选C.

（14）解，因为$\lim_{x\to 1}[\frac{1}{x(x-1)}+\ln(1+e^x)]=\infty$，

$\lim_{x\to 0}[\frac{1}{x(x-1)}+\ln(1+e^x)]=\infty$，有铅垂渐近线（$x=0,x=1$）2条，

因为$\lim_{x\to -\infty}[\frac{1}{x(x-1)}+\ln(1+e^x)]=0$，有水平渐近线（$y=0$）1条，

又因为 $\lim_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to -\infty}[\frac{1}{x^2(x-1)}+\frac{\ln(1+e^x)}{x}]=1$， $a=1$，

$\lim_{x\to +\infty}[f(x)-ax]=\lim_{x\to +\infty}[\frac{1}{x(x-1)}+\ln(1+e^x)-x]$

$$=\lim_{x\to+\infty}[\ln e^x(e^{-x}+1)-x]=\lim_{x\to+\infty}[\ln e^x+\ln(e^{-x}+1)-x]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\ln(e^{-x}+1)=0,$$

有斜渐近线（$y=x$）1 条，所以本题共有 4 条渐近线，选 A.

(15) 解 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n-1}+x^2+x}{x^{2n}+1}=\begin{cases}x^2+x, |x|<1,\\ \dfrac{3}{2}, x=1,\\ -\dfrac{1}{2}, x=-1\\ \dfrac{1}{x}, |x|>1,\end{cases}$，

则 $f(x)$ 的不连续点($x=-1, x=1$)的个数为 2 个所以选 C.

(16) 解 取 $f(x)=4-x^2, x\in[-1,1], a=-1, b=1, f(a)=3, f(b)=3$，

当 $x\in(-1,1)$ 时 $f(x)>3$，

$f'(x)=-2x, f'(a)=2, f'(b)=-2$，满足题目条件:

(A) 至少存在一点 $x_0\in(a,b)$ 使 $f(x_0)>f(a)$，成立,

(B) 至少存在一点 $x_0\in(a,b)$ 使 $f(x_0)>f(b)$；成立,

(C) 至少存在一点 $x_0\in(a,b)$ 使 $f'(x_0)=0$；成立,

(D) 至少存在一点 $x_0\in(a,b)$ 使 $f(x_0)=\dfrac{1}{2}(f(a)+f(b))$. 不成立. 所以本题选 D

(17) 解 (A) 不成立,

例如 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$，满足当 $n>1$ 时 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{n}{n+1}<1$，但 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散,

(B) 成立,若存在 $N>0$，当 $n>N$ 时均有 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}>1,\ a_{n+1}>a_n$，

则必有 $\lim_{n\to\infty}a_n\neq 0$ 则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 必发散.

(C) 不成立，例如 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n+2}{n^2}$ 收敛，但不存在 $N>0$，当 $n>N$ 时必有 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}<1$，

(D) 不成立,例如 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散,但则存在 $N>0$，当 $n>N$ 时有 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{n}{n+1}<1$. .