最小延迟调度问题

最小延迟调度

问题：

客户集合A，$\forall i \in A$，t_i为服务时间，d_i为要求完成时间，t_i，d_i为正整数．一个调度$f: A \to \mathrm{N}$，$f(i)$为客户 i 的开始时间．求最大延迟达到最小的调度，即求 f 使得

$$\min_{f}\{\max_{i \in A}\{f(i)+t_i-d_i\}\}$$

$$\forall i, j \in A, i \neq j, f(i)+t_i \leq f(j)$$

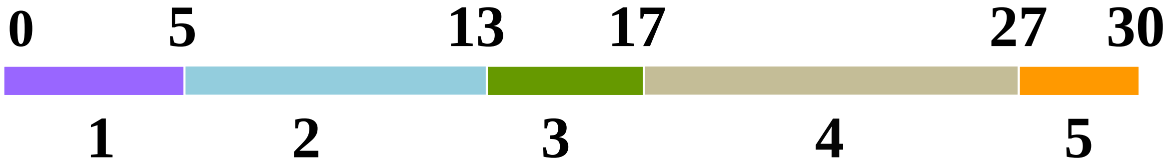
$$\text{or } f(j)+t_j \leq f(i)$$

实例：调度1

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $T = <5, 8, 4, 10, 3>$,
$D = <10, 12, 15, 11, 20>$

调度1：顺序安排

$f_1(1)=0$, $f_1(2)=5$, $f_1(3)=13$, $f_1(4)=17$, $f_1(5)=27$



各任务延迟：0, 1, 2, 16, 10;
最大延迟：16

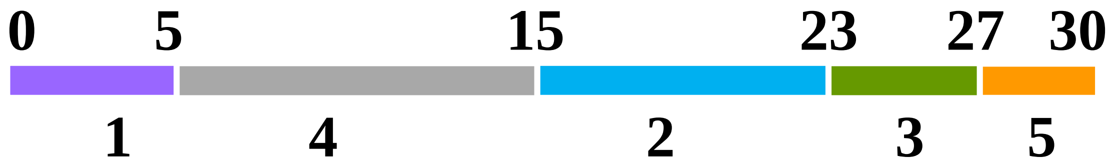
更优的调度2

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $T = <5, 8, 4, 10, 3>$,

$D = <10, 12, 15, 11, 20>$

调度2：按截止时间从前到后安排

$f_2(1)=0$, $f_2(2)=15$, $f_2(3)=23$, $f_2(4)=5$, $f_2(5)=27$



各任务延迟：**0, 11, 12, 4, 10;**

最大延迟：**12**

贪心策略

贪心策略1：按照 t_i 从小到大安排

贪心策略2：按照 $d_i - t_i$ 从小到大安排

贪心策略3：按照 d_i 从小到大安排

策略1 对某些实例得不到最优解.

反例：$t_1=1, d_1=100, t_2=10, d_2=10$

策略2 对某些实例得不到最优解.

反例：$t_1=1, d_1=2, t_2=10, d_2=10$

策略3伪码

算法 **Schedule**

输入：A, T, D

输出：f

1. 排序 A 使得 $d_1 \le d_2 \le \ldots \le d_n$
2. $f(1) \leftarrow 0$ 从0时刻起
3. $i \leftarrow 2$
4. **while** $i \le n$ **do**
5. $\quad f(i) \leftarrow f(i-1) + t_{i-1}$ 没有空闲
6. $\quad i \leftarrow i + 1$

设计思想：按完成时间从早到晚安排任务，没有空闲.

交换论证：正确性证明

证明思路：

- 分析一般最优解与算法解的区别（成分,排列顺序不同）
- 设计一种转换操作（替换成分或交换次序），可以在有限步将任意一个普通最优解逐步转换成算法的解
- 上述每步转换都不降低解的最优性质

贪心算法的解的性质：

没有空闲时间，没有逆序.

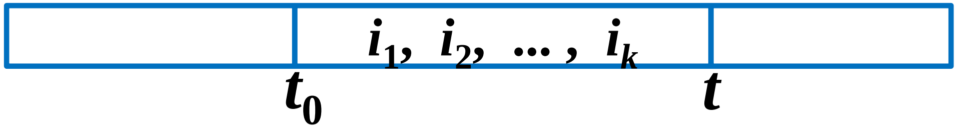
逆序 (i, j): $f(i) < f(j)$ 且 $d_i > d_j$

引理

引理1 所有没有逆序、没有空闲时间的调度具有相同的最大延迟.

证： 设 f 没有逆序，在 f 中具有相同完成时间 d 的客户 $i_1, i_2, \ldots, i_k$ 连续安排, 其开始时刻为 t_0, 完成这些任务的时刻是 t， 最大延迟为最后任务延迟 $t-d$, 与 $i_1, i_2, \ldots, i_k$ 的排列次序无关.

$$t = t_0 + (t_{i_1} + t_{i_2} + \ldots + t_{i_k})$$



证明要点

从一个没有空闲的最优解出发，逐步转变成没有逆序的解. 根据引理 1，这个解和算法解具有相同的最大延迟.

(1) 如果一个最优调度存在逆序，那么存在 $i<n$ 使得$(i, i+1)$ 构成一个逆序，称为相邻的逆序.

(2) 交换相邻逆序i 和j, 得到的解仍旧最优.

(3) 每次交换后逆序数减 1，至多经过 $n(n-1)/2$ 次交换得到一个没有逆序的最优调度——等价于算法的解.

交换相邻逆序仍旧最优

设 f_1是一个任意最优解，存在相邻逆序 (i, j)． 交换 i 和 j 的顺序, 得到解 f_2. 那么 f_2的最大延迟不超过 f_1的最大延迟.

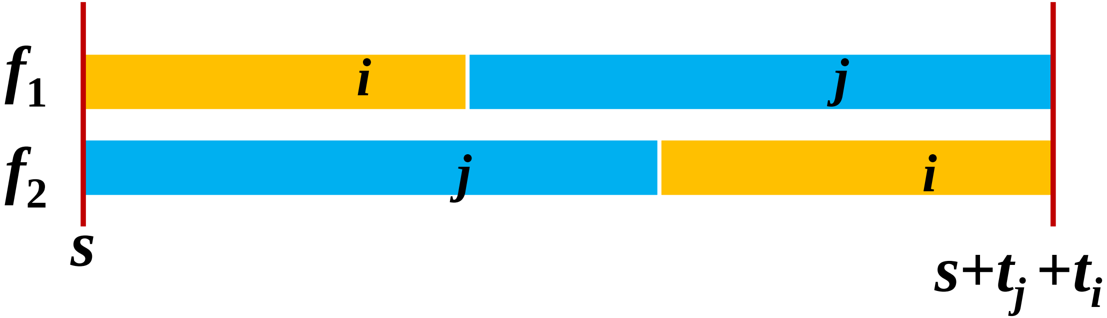
理由：

(1) 交换 i, j 与其他客户延迟时间无关

(2) 交换后不增加 j 的延迟，但可能增加 i 的延迟

(3) i 在 f_2的延迟小于 j 在 f_1 的延迟，因此小于f_1的最大延迟 r

i 在 f_2的延迟不超过 j 在f_1 的延迟



$$\text{delay}(f_2,i)=\underline{s+t_j+t_i}-d_i$$

$$\text{delay}(f_1,j)=\underline{s+t_i+t_j}-d_j$$

$$d_j<d_i$$

$$\text{delay}(f_2,i) < \text{delya}(f_1,j) \le r$$

小结

贪心法正确性证明方法：交换论证

- 分析算法解与一般最优解的区别，找到把一般解改造成算法解的一系列操作(替换成份、交换次序)
- 证明操作步数有限
- 证明每步操作后的得到解仍旧保持最优