图的着色

着色问题

输入：

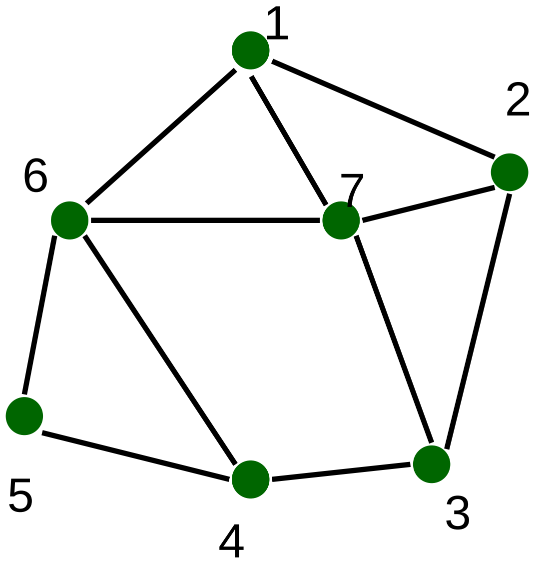
无向连通图 *G*和 *m* 种颜色的集合

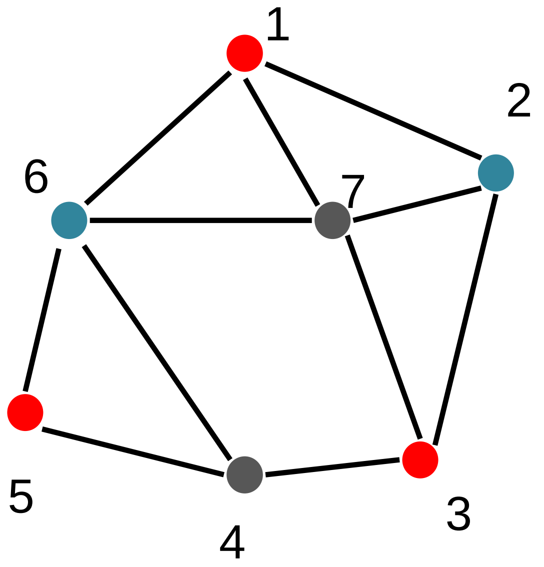
用这些颜色给图的顶点着色，每个顶点一种颜色. 要求是：*G* 的每条边的两个顶点着不同颜色.

输出：所有可能的着色方案.

如果不存在着色方案，回答 “No”.

实例





n=7, m=3

解向量

设 $G=(V,E)$，$V=\{1,2, \ldots , n\}$

颜色编号：1, 2, … , m

解向量：$<x_1, x_2, \ldots, x_n>$,

$x_1, x_2, \ldots, x_n \in \{1,2, \ldots, m\}$

结点的部分向量 $<x_1, x_2, \ldots, x_k>$

$x_1, x_2, \ldots, x_k$, $1 \le k \le n$,

表示只给顶点1,2,...,k着色的部分方案

算法设计

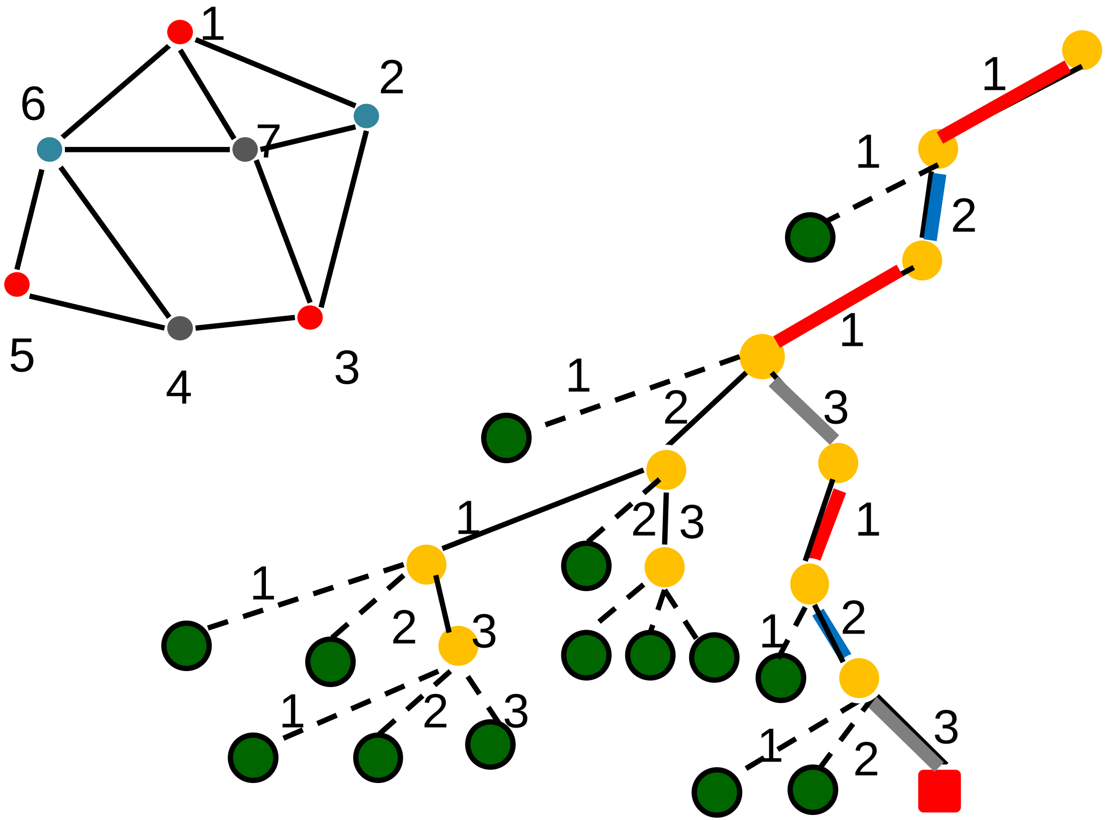
搜索树：m叉树

约束条件：在结点<$x_1, x_2, \ldots, x_k$>处，顶点 k+1 的邻接表中结点已用过的颜色不能再用
如果邻接表中结点已用过m种颜色，则结点 k+1没法着色，从该结点回溯到其父结点. 满足多米诺性质

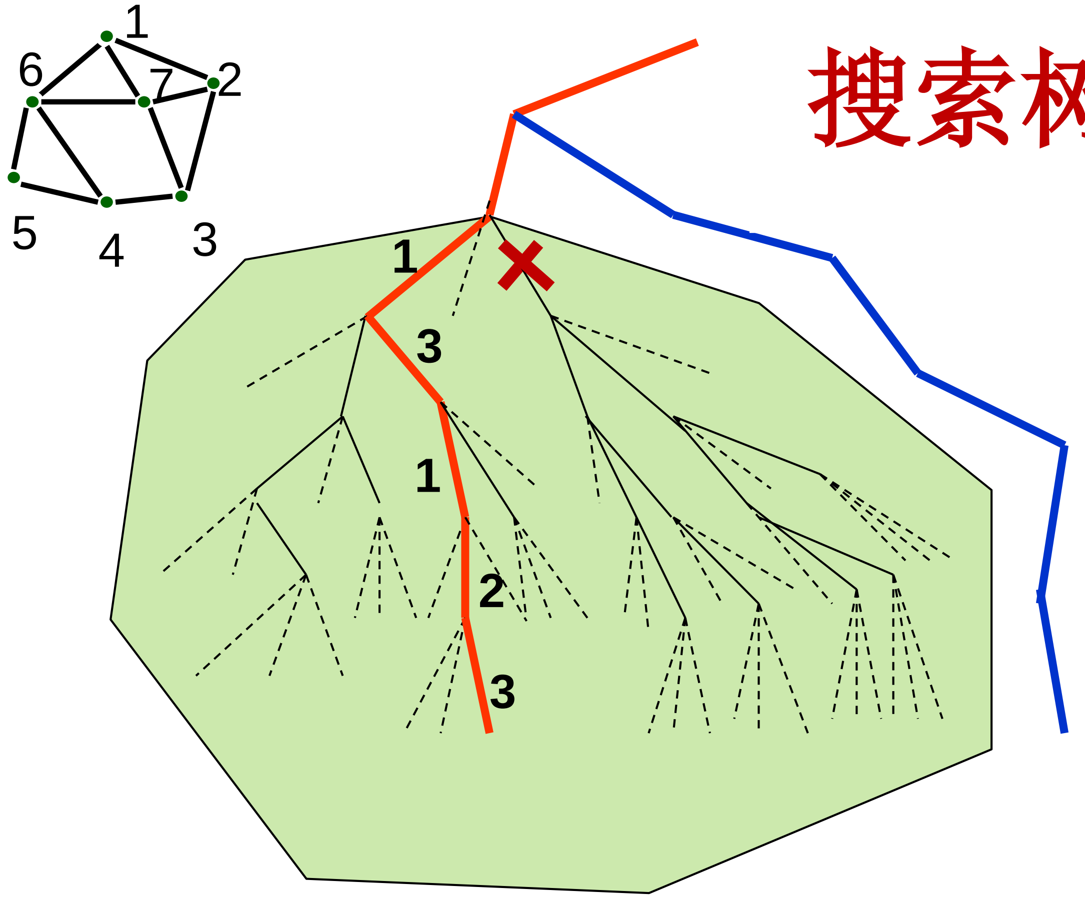
搜索策略：深度优先

时间复杂度：$O(n\,m^n)$

运行实例



搜索树



第一个解向量：< 1, 2, 1, 3, 1, 2, 3 >

时间复杂度与改进途径

时间复杂度：$O(nm^n)$

根据对称性，只需搜索 1/3 的解空间. 当1和2确定, 即<1,2> 以后，只有 1 个解，在 <1,3> 为根的子树中也只有 1 个解. 由于3个子树的对称性，总共6个解.

在取定<1,2>后，不可扩张成<1,2,3>, 因为7和1,2,3都相邻. 7没法着色. 可以从打叉的结点回溯，而不必搜索其子树.

着色问题的应用

会场分配问题：

有 n项活动需要安排, 对于活动 i, j, 如果 i, j 时间冲突，就说 i 与 j 不相容. 如何分配这些活动,使得每个会场的活动相容且占用会场数最少?

建模：

活动作为图的顶点，如果i, j不相容, 则在 i 与 j之间加一条边，会场标号作为颜色标号. 求图的一种着色方案, 使得使用的颜色数最少.

小结

- 着色问题的描述
- 着色问题的算法设计
- 时间复杂度及改进途径
- 着色问题的应用