$$\frac{ds}{dt}=\frac{dx}{dt}\cdot y+x\cdot\frac{dy}{dt}$$，于是$$\left.\frac{ds}{dt}\right|_{\substack{x=20\\y=15}}=-1\times15+20\times2=25m^2/s.$$

$$\frac{dl}{dt}=\frac{x\cdot\frac{dx}{dt}+y\cdot\frac{dy}{dt}}{\sqrt{x^2+y^2}},\left.\frac{dv}{dt}\right|_{\substack{x=20\\y=15}}=\frac{20\times(-1)+15\times2}{\sqrt{20^2+15^2}}=\frac{2}{5}m/s.$$

11. 若圆半径以 $2cm/s$ 的等速增加，则当圆半径 $R=10cm$ 时，圆面积增加的速度如何？

解　由于 $S=\pi R^2(t)$，$\frac{dR}{dt}=2cm/s$，$\frac{ds}{dt}=2\pi R\cdot\frac{dR}{dt}$，于是

$$\left.\frac{ds}{dt}\right|_{R=10}=2\pi\times10\times2=40\pi cm/s.$$

12. 二轮船 A 和 B 从同一码头同时出发，A 船往北，B 船往东，若 A 船的速度为 $30km/h$，B 船的速度为 $40km/h$，问二船间的距离增加的速度如何？

解　两船距离为 d

$$l=\sqrt{(V_A\cdot t)^2+(V_B\cdot t)^2}=\sqrt{(30t)^2+(40t)^2}=50t,\frac{dl}{dt}=50km/h.$$

13. 质点 $M(x,y)$ 在铅直平面 Oxy 内以速度 v_0 沿与水平面成 a 角的方向抛出，建立（空气阻力略去不计）运动方程并计算速度 v 和加速 a 的大小及运动的轨道，最大的高度和射程等于多少？

解　根据条件，建立参数方程

$$\begin{cases}V_x=V_0\cdot\cos\alpha,\\V_y=V_0\cdot\sin\alpha-g,\end{cases}\qquad\begin{cases}x=V_x\cdot t=tV_0\cdot\cos\alpha, & (1)\\y=V_yt-\frac{1}{2}gt^2=V_0\sin\alpha\cdot t-\frac{1}{2}gt^2, & (2)\end{cases}$$

化参数方程为普通方程

$$y=V_0\cdot\sin\alpha\cdot\frac{x}{V_0\cdot\cos\alpha}-\frac{1}{2}g\cdot\left(\frac{x}{V_0\cos\alpha}\right)^2=x\cdot\tan\alpha-\frac{gx^2}{2V_0\cos^2\alpha}.$$

速度　$V=\sqrt{V_x^2+V_y^2}=\sqrt{V_0^2-2gt\cdot V_0\sin\alpha+g^2t^2}$；

加速度 $a=\sqrt{a_x^2+a_y^2}=\sqrt{\left(\frac{dV_x}{dt}\right)^2+\left(\frac{dV_y}{dt}\right)^2}=g$；

最大高度 $H=\frac{(V_0\cdot\sin\alpha)^2}{2g}=\frac{V_0^2\cdot\sin^2\alpha}{2g}$，

射程由　$S=V_x\cdot2t$，$t=\frac{V_0\cdot\sin\alpha}{2g}$，所以 $S=V_0\cdot\cos\alpha\cdot\frac{2V_0\sin\alpha}{g}=\frac{V_0^2\sin2\alpha}{2g}$.

14. 质点运动的方程为：$x=4\sin\omega t-3\cos\omega t$，$y=3\sin\omega t+4\cos\omega t$（$\omega$ 为常数）求运动

的轨道，速度与加速度的大小.

解 $x^2+y^2=(4\sin\omega t-3\cos\omega t)^2+(3\sin\omega t+4\cos\omega t)2$（$\omega$ 为常数）

$\frac{dx}{dt}=4\omega\cdot\cos\omega t+3\omega\sin\omega t,\quad \frac{d^2x}{dt^2}=-4\omega^2\cdot\sin\omega t+3\omega^2\cos\omega t,$

$\frac{dy}{dt}=3\omega\cdot\cos\omega t-4\omega\sin\omega t,\quad \frac{d^2y}{dt^2}=-3\omega^2\cdot\sin\omega t+4\omega^2\cos\omega t,$

$V=\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2}=\sqrt{16\omega^2+9\omega^2}=5\mid\omega\mid,$

$a=\sqrt{(\frac{d^2x}{dt^2})^2+(\frac{d^2y}{dt^2})^2}=\sqrt{16\omega^4+9\omega^4}=5\omega^2.$

15.设长 $L=\sqrt{5}/2m$ 的杆子 M_1M_2，在曲线 $y=\frac{1}{x}$ 上无磨擦地滑动（如图 2－1），当 M_1 滑至点 $(2,\frac{1}{2})$ 时，其水平速度 $\frac{dx}{dt}=2m/s$，求此时 M_2 的水平速度与铅垂速度.

解 设 $M_1(x_1,y_1),M_2(x_2,y_2)$ 其中 x_1,y_1,x_2,y_2 都是时间 t 的函数且满足

$$\begin{cases} y_1=\frac{1}{x_1}, & (1)\\ y_2=\frac{1}{x_2}, & (2)\\ (x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2=l^2, & (3)\end{cases}$$

将(1),(2),(3) 式两边求导

$\frac{dy_1}{dt}=-\frac{1}{x_1^2}\cdot\frac{dx_1}{dt},\qquad (4)$

$\frac{dy_2}{dt}=-\frac{1}{x_2^2}\cdot\frac{dx_2}{dt},\qquad (5)$

$2(x_2-x_1)(\frac{dx_2}{dt}-\frac{dx_1}{dt})+2(y_2-y_1)(\frac{dy_2}{dt}-\frac{dy_1}{dt})=0,\qquad (6)$

将 $x_1=2$ 及 $y_1=\frac{1}{x_2}$ 代入(3) 式 $(x_2-2)^2+(\frac{1}{x_2}-\frac{1}{2})^2=\frac{5}{4}\Rightarrow x_2=1$，代入(2)

$y_2=1$，再将 $x_1=2,x_2=1,\frac{dx_1}{dt}\Big|_{x_1=2}=2$ 代入(4),(5)

$\frac{dy_1}{dt}=-\frac{1}{2},\frac{dy_2}{dt}=-\frac{dx_2}{dt}$ 代入(6) 式 $(1-2)(\frac{dx_2}{dt}-2)+(1-\frac{1}{2})(-\frac{dx_2}{dt}+\frac{1}{2})=0$

所以 $\frac{dx_2}{dt}=\frac{3}{2}(m/s),\frac{dy_2}{dt}=-\frac{3}{2}(m/s).$

16.设函数 $f(x)$ 具有一阶连续导数，试证明 $F(x)=(1+|\sin x|)f(x)$ 在点 $x=0$

处可导的充分必要条件是 $f(0)=0$.

证明 $F'_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)(1+\sin x)-f(0)}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0^+}\left[\dfrac{f(x)-f(0)}{x}+\dfrac{f(x)f(\sin x)}{x}\right]=f'(0)+f(0)$,

$F'_-(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)(1-\sin x)-f(0)}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{f(x)-f(0)}{x}-\dfrac{f(x)f(\sin x)}{x}\right]=f'(0)-f(0)$

$F(x)$ 在点 $x=0$ 处可导 $\Leftrightarrow F'_+(0)=F'_-(0)\Leftrightarrow f'(0)+f(0)=f'(0)-f(0)$ $\Leftrightarrow f(0)=0$.

17.设函数 $f(x)$ 在 $x\neq0$ 时可导,且对任何非零数 x,y 均有 $f(xy)=f(x+f(y)$,又 $f(1)$ 存在,证明当 $x\neq0$ 时,$f(x)$ 可导.

证明 令 $x=1$,由 $f(xy)=f(x)+f(y)$,

有 $f(y)=f(1)+f(y)$ 故 $f(1)=0$,对任何 $x\neq0$ 由题设及导数定义知

$$\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f\left[x(1+\frac{\Delta x}{x})\right]-f(x)}{\frac{\Delta x}{x}}$$

$$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\left[f(x)+f(1+\frac{\Delta x}{x})\right]-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{1}{x}\frac{f(1+\frac{\Delta x}{x})-f(1)}{\frac{\Delta x}{x}}=\frac{1}{x}f'(1),$$

则函数 $f(x)$ 在 $x\neq0$ 时处处可导.

18.设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在点 $x=a$ 处都可导,且 $f(a)=g(a),f'(a)>g'(a)$,证明存在 $\delta>0$ 使得当 $x\in(a-\delta,a)$ 时,有 $f(x)<g(x)$.

解 令 $F(x)=g(x)-f(x)$,由 $f(a)=g(a)$,知 $F'(a)=0,f'(a)>g'(a)$,得 $F'(a)<0$,于是 $F'(a)=F'_-(a)=\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{F(x)-F(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{F(x)}{x-a}<0$.

由保号性知,存在 $\delta>0$,当 $x\in(a-\delta,a)$ 时,$\dfrac{F(x)}{x-a}<0$,又 $x-a<0$,

所以 $F(x)>0$ 或 $g(x)-f(x)>0$,即 $g(x)>f(x)$.

19.设函数 $f(x)=3x^3+x^2|x|$,使 $f^{(n)}(0)$ 存在的最高阶数 n.

解 $f(x)=\begin{cases}4x^3, & x\geqslant0,\\ 2x^3, & x<0.\end{cases}$ 由 $\lim\limits_{x\to0}f''(x)=0=f''_-(0)$, $\lim\limits_{x\to0^+}f''(x)=0=f''_+(0)$,

得 $f''(0)=0$ 而 $f'''(x)=\begin{cases}24, & x>0,\\ 12, & x<0.\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0} f'''(x)=12=f'''_{-}(0)$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f'''(x)=24=f'''_{+}(0)$.

知 $f'''(0)$ 不存在，故 $n=2$.

20. 试确定常数 α,β 的值，使函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2e^{n(x-1)}+\alpha x+\beta}{1+e^{n(x-1)}}$ 连续且可导，并求出此时的 $f'(x)$.

解 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2}{1+e^{-n(x-1)}}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\alpha x+\beta}{1+e^{n(x-1)}}=x^2(x>1)$

显然，当 $x<1$ 时，$f(x)=\alpha x+\beta$. 当 $x=1$ 时，$f(1)=\dfrac{1}{2}(1+\alpha+\beta)$，

故为分段函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & x>1,\\ \dfrac{1}{2}(1+\alpha+\beta), & x=1,\\ (\alpha x+\beta), & x<1.\end{cases}$$ 由 $f(x)$ 必连续，必须

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1)$，得 $\alpha+\beta=1$ 且 $f(1)=1$，

即当 $\alpha+\beta=1$ 时，函数在 $x=1$ 处连续，此时

$$f'_{-}(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\alpha(1+\Delta x)+\beta-1}{\Delta x}=\alpha,$$

$$f'_{+}(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x-1}=2,$$

要使 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，应有 $\alpha=f'_{-}(1)=f'_{+}(1)=2$，因而 $\beta=-1$

所以当 $\alpha=2,\beta=-1$ 时，$f(x)$ 连续可导，并且 $f'(1)=2$，且

$$f'(x)=\begin{cases}2x, & x\geqslant 1,\\ 2, & x<1.\end{cases}$$