主定理及其证明

主定理的应用背景

求解递推方程

$$\boxed{T(n) = a\,T(n/b) + f(n)}$$

a：　归约后的子问题个数

n/b：归约后子问题的规模

$f(n)$：归约过程及组合子问题的解的工作量

二分检索：　$T(n) = T(n/2)+1$

二分归并排序：　$T(n) = 2T(n/2)+n-1$

主定理

定理：设$a \geq 1$, $b>1$为常数, $f(n)$为函数, $T(n)$为非负整数，且$T(n)=aT(n/b)+f(n)$， 则

1. 若 $f(n)=O(n^{\log_b a-\varepsilon})$, $\varepsilon>0$, 那么

$$T(n)=\Theta(n^{\log_b a})$$

存在ε

2. 若 $f(n)=\Theta(n^{\log_b a})$, 那么

$$T(n)=\Theta(n^{\log_b a}\log n)$$

存在ε

3. 若 $f(n)=\Omega(n^{\log_b a+\varepsilon})$, $\varepsilon>0$,且对于某个常数 $c<1$和充分大的 n 有$af(n/b) \leq cf(n)$, 那么

$$T(n)=\Theta(f(n))$$

存在c和n_0

迭代

$\boxed{T(n)=aT(n/b)+f(n)}$

设 $n=b^k$

$$T(n)=aT(\frac{n}{b})+f(n)$$

$$=a[aT(\frac{n}{b^2})+f(\frac{n}{b})]+f(n)$$

$$=a^2T(\frac{n}{b^2})+af(\frac{n}{b})+f(n)$$

$$=\dots$$

迭代结果

$$\boxed{a^{\log_b n} = n^{\log_b a}}$$

$$= a^k T(\frac{n}{b^k}) + a^{k-1} f(\frac{n}{b^{k-1}}) + \ldots + af(\frac{n}{b}) + f(n)$$

$$= \underline{a^k T(1)} + \sum_{j=0}^{k-1} a^j f(\frac{n}{b^j})$$

$$= \underline{c_1 n^{\log_b a}} + \sum_{j=0}^{k-1} a^j f(\frac{n}{b^j}) \qquad T(1) = c_1$$

- 第一项为所有最小子问题的计算工作量
- 第二项为迭代过程归约到子问题及综合解的工作量

Case1

$$\boxed{f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})}$$

$$T(n) = c_1 n^{\log_b a} + \sum_{j=0}^{k-1} a^j f(\frac{n}{b^j})$$

$$= c_1 n^{\log_b a} + O(\sum_{j=0}^{\log_b n - 1} a^j (\frac{n}{b^j})^{\log_b a - \varepsilon})$$

$$= c_1 n^{\log_b a} + O(n^{\log_b a - \varepsilon} \sum_{j=0}^{\log_b n - 1} \frac{a^j}{(b^{\log_b a - \varepsilon})^j})$$

Case1(续)

$$\boxed{\frac{1}{(b^{\log_b a-\varepsilon})^j}=\frac{b^{\varepsilon j}}{(b^{\log_b a})^j}=\frac{b^{\varepsilon j}}{a^j}}$$

$$=c_1 n^{\log_b a}+O(n^{\log_b a-\varepsilon}\sum_{j=0}^{\log_b n-1}\frac{a^j}{(b^{\log_b a-\varepsilon})^j})$$

$$=c_1 n^{\log_b a}+O(n^{\log_b a-\varepsilon}\sum_{j=0}^{\log_b n-1}(b^{\varepsilon})^j)$$

$$=c_1 n^{\log_b a}+O(n^{\log_b a-\varepsilon}\underline{\frac{b^{\varepsilon\log_b n}-1}{b^{\varepsilon}-1}})$$

$$=c_1 n^{\log_b a}+O(n^{\log_b a-\varepsilon}\underline{n^{\varepsilon}})=\Theta(n^{\log_b a})$$

Case2

$$f(n)=\Theta(n^{\log_b a})$$

$$T(n)=c_1 n^{\log_b a}+\sum_{j=0}^{k-1} a^j f(\frac{n}{b^j})$$

$$=c_1 n^{\log_b a}+\Theta(\underline{\sum_{j=0}^{\log_b n-1} a^j (\frac{n}{b^j})^{\log_b a}})$$

$$=c_1 n^{\log_b a}+\Theta(\underline{n^{\log_b a}\sum_{j=0}^{\log_b n-1} \frac{a^j}{a^j}})$$

$$= c_1 n^{\log_b a}+\Theta(n^{\log_b a}\log n)=\Theta(n^{\log_b a}\log n)$$

Case3

$$\boxed{\begin{aligned} &f(n) = \Omega(n^{\log_b a+\varepsilon}) \quad &(1) \\ &af(n/b) \le cf(n) \quad &(2) \end{aligned}}$$

$$T(n) = c_1 n^{\log_b a} + \sum_{j=0}^{k-1} a^j f\left(\frac{n}{b^j}\right)$$

$$\le c_1 n^{\log_b a} + \sum_{j=0}^{\log_b n-1} c^j f(n)$$

$$a^j f\left(\frac{n}{b^j}\right) \le a^{j-1} c f\left(\frac{n}{b^{j-1}}\right)$$

$$\le c a^{j-1} f\left(\frac{n}{b^{j-1}}\right) \le \ldots \le c^j f(n)$$

Case3 (续)

$$T(n) \le c_1 n^{\log_b a} + \sum_{j=0}^{\log_b n-1} c^j f(n)$$

$$= c_1 n^{\log_b a} + f(n)\frac{c^{\log_b n} - 1}{c-1}$$

$$= c_1 n^{\log_b a} + \Theta(f(n))$$

$$= \Theta(f(n))$$

小结

- 主定理的应用背景
- 主定理的内容
- 主定理的证明