得不到最优解的处理方法

得不到最优解的处理

- 输入参数分析：
  考虑输入参数在什么取值范围内使用贪心法可以得到最优解

- 误差分析：
  估计贪心法——近似算法所得到的解与最优解的误差（对所有的输入实例在最坏情况下误差的上界）

找零钱问题

问题 设有 n 种零钱， 重量分别为w_1, w_2, ... , w_n, 价值分别为$v_1 = 1$, v_2, ... , v_n. 需要付的总钱数是 y .不妨设币值和钱数都为正整数. 问：如何付钱使得所付钱的总重最轻?

实例

v_1=1, v_2=5, v_3=14, v_4=18, w_i=1, i=1,2,3,4.

y=28

最优解：x_3=2， x_1=x_2=x_4=0， 总重2

建模

令选用第 i 种硬币的数目是 x_i,

$i = 1, 2, \ldots, n$

$$\min\{\sum_{i=1}^{n} w_i x_i\}$$

$$\sum_{i=1}^{n} v_i x_i = y, \quad x_i \in \mathrm{N}, \quad i = 1,2,\ldots,n$$

动态规划算法

设$F_k(y)$表示用前 k种零钱，总钱数为 y 的最小重量

$$F_k(y) = \min_{0 \le x_k \le \left\lfloor \frac{y}{v_k} \right\rfloor} \{F_{k-1}(y - v_k x_k) + w_k x_k\}$$

$$F_1(y) = w_1 \left\lfloor \frac{y}{v_1} \right\rfloor = w_1 y$$

贪心法

单位价值重量轻的货币优先，设

$$\frac{w_1}{v_1} \geq \frac{w_2}{v_2} \geq \ldots \geq \frac{w_n}{v_n}$$

使用前 k 种零钱，总钱数为 y

贪心法的总重为 $G_k(y)$，

$$G_k(y) = w_k \left\lfloor \frac{y}{v_k} \right\rfloor + G_{k\text{-}1}(y \bmod v_k) \quad k > 1$$

$$G_1(y) = w_1 \left\lfloor \frac{y}{v_1} \right\rfloor = w_1 y$$

n=1,2贪心法是最优解

$n=1$ 只有一种零钱，$F_1(y)=G_1(y)$

$n=2$，x_2越大，得到的解越好

$$\boxed{F_2(y)=\min_{0\le x_2\le\lfloor y/v_2\rfloor}\{F_1(y-v_2x_2)+w_2x_2\}}$$

$$\begin{aligned}
&F_1(y-v_2(\underline{x_2+\delta}))+w_2(\underline{x_2+\delta})]\\
&-[F_1(y-v_2\underline{x_2})+w_2\underline{x_2}]\\
=&[w_1(\underline{y-v_2x_2}-v_2\delta)+\underline{w_2x_2}+w_2\delta)]\\
&-[w_1(\underline{y-v_2x_2})+\underline{w_2x_2}]\\
=&-w_1v_2\delta+w_2\delta\\
=&\delta(-w_1v_2+w_2)\le 0
\end{aligned}$$

$w_1\ge w_2/v_2$

判别条件

定理 对每个正整数 k，假设对所有非负整数 y 有 $G_k(y) = F_k(y)$，且存在 p 和 δ 满足

$$\boxed{v_{k+1} = pv_k - \delta,}$$

其中 $0 \le \delta < v_k$，$v_k \le v_{k+1}$, p为正整数，

则下面的命题等价：

(1) $G_{k+1}(y) = F_{k+1}(y)$ 对一切正整数 y；

(2) $G_{k+1}(pv_k) = F_{k+1}(pv_k)$；

(3) $w_{k+1} + G_k(\delta) \le pw_k$.

几点说明

- 根据条件(1)与(3)的等价性，可以对 $k = 3, 4, \ldots, n$，依次利用条件(3)对贪心法是否得到最优解做出判别.
- 条件(3)验证 1 次需 $O(k)$ 时间，$k = O(n)$，整个验证时间$O(n^2)$
- 条件(2)是条件(1) 在 $y = pv_k$ 时的特殊情况. 若条件(1)成立，显然有条件(2)成立. 反之，若条件(2)不成立，则条件(1)不成立，钱数 $y = pv_k$ 恰好提供了一个贪心法不正确的反例.

验证实例

$$v_{k+1} = pv_k - \delta, \quad 0 \le \delta < v_k, \quad p \in Z^+$$
$$w_{k+1} + G_k(\delta) \le pw_k$$

例 $v_1=1, v_2=5, v_3=14, v_4=18$, $w_i=1$, $i=1,2,3,4$. 对一切 y 有

$$G_1(y)=F_1(y), \quad G_2(y)=F_2(y).$$

验证 $G_3(y) = F_3(y)$

$$v_3 = pv_2 - \delta \Rightarrow \boxed{p = 3, \delta = 1.}$$

$$w_3+G_2(\delta)=1+1=2$$

$$pw_2=3\times1=3$$

$$\boxed{w_3+G_2(\delta)\le pw_2}$$

贪心法对于 $n=3$ 的实例得到最优解

验证实例

$$v_{k+1} = pv_k - \delta, \quad 0 \le \delta < v_k, \quad p \in Z^+$$
$$w_{k+1} + G_k(\delta) \le pw_k$$

例 $v_1=1, v_2=5, v_3=14, v_4=18$, $w_i=1$, $i=1,2,3,4$. 对一切 y 有

$$G_1(y)=F_1(y), G_2(y)=F_2(y), G_3(y)=F_3(y)$$

验证 $G_4(y) = F_4(y)$

$$v_4 = pv_3 - \delta \Rightarrow \boxed{p=2,\ \delta=10}$$

$$w_4 + G_3(\delta)=1+2=3$$

$$pw_3 = 2\times1=2$$

$$\boxed{w_4 + G_3(\delta) > pw_3}$$

$n=4$, $y=pv_3=28$,

最优解: $x_3=2$, 贪心法: $x_4=1$, $x_2=2$

小结

- 贪心策略不一定得到最优解，在这种情况下可以有两种处理方法：

  (1) 参数化分析：分析参数取什么值可得到最优解

  (2) 估计贪心法得到的解在最坏情况下与最优解的误差

- 一个参数化分析的例子:找零钱问题