投资问题

投资问题的建模

问题：m 元钱，n项投资， $f_i(x)$：将 x 元投入第 i 个项目的效益．求使得总效益最大的投资方案.

建模：

问题的解是向量 $< x_1, x_2, \ldots, x_n >$，

x_i 是投给项目i 的钱数，$i = 1, 2, \ldots, n$.

目标函数 $\max\{f_1(x_1)+f_2(x_2)+\ldots+f_n(x_n)\}$

约束条件 $x_1+x_2+\ldots+x_n=m$，$x_i \in \mathrm{N}$

实例

- 实例：5万元钱，4个项目

  效益函数如下表所示

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
0	0	0	0	0
1	11	0	2	20
2	12	5	10	21
3	13	10	30	22
4	14	15	32	23
5	15	20	40	24

子问题界定和计算顺序

子问题界定：由参数 k 和 x 界定

k：考虑对项目1, 2, ..., k 的投资

x：投资总钱数不超过 x

这两个参数与矩阵链相乘问题的参数有什么区别?

原始输入：$k = n$, $x = m$

子问题计算顺序：

$k = 1, 2, \ldots, n$

对于给定的 k，$x = 1, 2, \ldots, m$

优化函数的递推方程

$F_k(x)$：x元钱投给前k个项目最大效益

多步判断：若知道 p元钱 ($p \le x$) 投给前 k–1个项目的最大效益$F_{k\text{-}1}(p)$, 确定 x元钱投给前k个项目的方案

递推方程和边界条件

$$F_k(x) = \max_{0 \le x_k \le x} \{ f_k(x_k) + F_{k-1}(x - x_k) \} \quad k > 1$$

$$F_1(x) = f_1(x)$$

k=1时实例的计算

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
0	0	0	0	0
1	11	0	2	20
2	12	5	10	21
3	13	10	30	22
4	14	15	32	23
5	15	20	40	24

k =1为初值

$F_1(1)=11$, $F_1(2)=12$, $F_1(3)=13$,

$F_1(4)=14$, $F_1(5)=15$,

k=2时实例计算

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$
0	0	0
1	11	0
2	12	5
3	13	10
4	14	15
5	15	20

方案(项目2,其他)：(1,0)，(0,1)

$F_2(1) = \max\{ f_1(1), f_2(1) \}=11$

方案：(2,0)，(1,1), (0,2)

$F_2(2) = \max\{ f_2(2),F_1(1)+f_2(1),F_1(2)\}=12$

方案：(3,0), (2,1), (1,2), (0,3)

$F_2(3) = \max\{ f_2(3), F_1(1)+f_2(2), F_1(2)+f_2(1), F_1(3)\}=16$

类似地计算

$F_2(4) = 21$，$F_2(5)= 26$

备忘录和解

x	$F_1(x)$ $x_1(x)$	$F_2(x)$ $x_2(x)$	$F_3(x)$ $x_3(x)$	$F_4(x)$ $x_4(x)$
1	11　1	11　0	11　0	20　1
2	12　2	12　0	13　1	31　1
3	13　3	16　2	30　3	33　1
4	14　4	21　3	41　3	50　1
5	15　5	26　4	43　4	61　1

$x_4(5)=1 \Rightarrow x_4=1$，$x_3(5-1) = x_3(4)$

$x_3(4)=3 \Rightarrow x_3=3$，$x_2(4-3) = x_2(1)$

$x_2(1)=0 \Rightarrow x_2=0$，$x_1(1-0) = x_1(1)$

$x_1(1)=1 \Rightarrow x_1=1$

解：$x_1=1$, $x_2= 0$, $x_3= 3$, $x_4=1$，$F_4(5) = 61$

时间复杂度分析

备忘录表中有 m 行 n 列, 共计 mn 项

$$F_k(x) = \max_{0 \le x_k \le x} \{ f_k(x_k) + F_{k-1}(x - x_k) \} \quad k > 1$$

$$F_1(x) = f_1(x)$$

x_k有 x +1 种可能的取值，计算$F_k(x)$项 ($2 \le k \le n$, $1 \le x \le m$)需要：

x+1次加法

x 次比较

时间复杂度分析

对备忘录中所有的项求和：

加法次数 $$\sum_{k=2}^{n}\sum_{x=1}^{m}(x+1)=\frac{1}{2}(n-1)m(m+3)$$

比较次数 $$\sum_{k=2}^{n}\sum_{x=1}^{m}x=\frac{1}{2}(n-1)m(m+1)$$

$$W(n)=O(nm^2)$$

小结

投资问题的动态规划算法

- 用两个不同类型的参数界定子问题
- 优化函数的递推方程及初值
- 根据备忘录中项的计算估计时间复杂度
- 时间复杂度为：$O(nm^2)$