综　合　题

1·设 $f(x)=|\sin^3 x|$，求 $f'(x)$.

解　$f(x)=\begin{cases}\sin^3 x, & x\in[2k\pi,(2k+1)\pi),\\ -\sin^3 x, & x\in[(2k+1)\pi,(2k+2)\pi]\end{cases}$.

由于 $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-\sin^3 x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}(-\sin^2 x)=0$，

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin^3 x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}(\sin^2 x)=0$，

知 $f'(0)=0$. 同理可得 $f'(k\pi)=0$，所以

$$f'(x)=\begin{cases}3\sin^2 x\cos x, & x\in(2k\pi,(2k+1)\pi,\\ 0, & x=k\pi,\\ -3\sin^2 x\cos, & x\in((2k+1)\pi,(2k+2)\pi).\end{cases}$$

2. 若 $y^2 f(x)+xf(y)=x^2$，且 $f(x)$ 可导，求 $\frac{dy}{dx}$.

解 $2y\cdot y'\cdot f(x)+y^2 f'(x)+f(y)+x\cdot f'(y)\cdot y'=2x$,

$y'\cdot[2y\cdot f(x)+x\cdot f(y)]=2x-y^2 f'(x)-f(y)$，解得

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{2x-y^2 f(x)-f(y)}{2y\cdot f(x)+x\cdot f'(y)}.$$

3. 设 $f(x),g(x)$ 是定义在 R 上的函数，且有

(1) $f(x+y)=f(x);g(y)+f(y)g(x)$

(2) $f(x),g(x)$ 在 $x=0$ 处可导；

(3) $f(0)=0,g(0)=1,f'(0)=1,g'(0)=0$，证明 $f(x)$ 对所有的 x 可导且

$$f'(x)=g(x).$$

解 $f(x),g(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f'(0)=1,g'(0)=0$.

$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$，$f(0)=0,f'(0)=1$，即 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$.

$g'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)-1}{x}=0$,

对任意 x，由 $f(x+y)=f(x)g(y)+f(y)g(x)$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)g(x)+f(\Delta x)g(x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{f(x)[g(\Delta x)-1]}{\Delta x}+\frac{f(\Delta x)g(x)}{\Delta x}\right]=f(x)\cdot 0+1\cdot g(x)=g(x),$$

于是 $f'(x)=g(x)$.

4. 设 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上有定义，又 $x_0\in(a,b)$，$f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导. 设数列 $\{x_n\},\{y_n\}$ 满足 $a<x_n<x_0<y_n<b$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=x_0$，证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n}=f'(x_0)$$

证明 设 $\lambda_n=\frac{y_n-x_0}{y_n-x_n}$，则 $0<\lambda_n<1$，于是 $\frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n}-f'(x_0)$

$$=\lambda_n\left[\frac{f(y_n)-f(x_0)}{y_n-x_0}-f'(x_0)\right]+(1-\lambda_n)\left[\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}-f'(x_0)\right]$$

由 $n\to\infty$ 时，$x_n\to x_0,y_n\to x_0$，且 $f'(x_0)$ 存在，由导数定义知

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(y_n)-f(x_0)}{y_n-x_0}=f'(x_0)$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}=f'(x_0)$，于是

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n}-f'(x_0)\right]=0.$$

5. 设勒让德多项式 $p_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$，证明：

(1) $p_n(1)=1, p_n(-1)=(-1)^n$；

(2) $(1-x^2)p'_n(x)-2xp'_n(x)+n(n+1)p_n(x)=0$.

（提示：先验证 $u=(x^2-1)^n$ 满足 $(x^2-1)u=2nxu$，然后再将上式两边对 x 求 $n+1$ 阶导数，再注意到 $u^{(n)}=2^n n!\,p_n(x)$，即可得证）

证明 (1) $[(x^2-1)^n]^{(n)}=[(x+1)^n(x-1)^n]^{(n)}$

$=C_n^0[(x+1)^n]^{(n)}\cdot(x-1)^n+C_n^1[(x+1)^n]^{(n-1)}\cdot[(x-1)^n],$

$+\cdots+C_n^n(x+1)^n\cdot[(x-1)^n]^{(n)}$

当 $x=1$，$\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\Big|_{x=1}=C_n^n(x+1)^n\cdot[(x-1)^n]^{(n)}\Big|_{x=1}=2^n\cdot n!$，

有 $p_n(1)=\frac{1}{2^n\cdot n!}\cdot 2^n\cdot n!=1$.

当 $x=-1$，$\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\Big|_{x=-1}=C_n^n[(x+1)^n]^{(n)}\cdot(x-1)^n=(-1)^n\cdot n!2n$，

有 $p_n(1)=\frac{1}{2^n\cdot n!}(-1)^n\cdot n!2n=(-1)^n$.

(2) 设 $u=(x^2-1)^n$，$u'=n\cdot(x^2-1)^{n-1}\cdot 2x$，两边同时乘 x^2-1 得

$(x^2-1)u'=2nx(x^2-1)^n=2nxu$. 两边对 x 求 $n+1$ 阶导数

$C_{n+1}^0u^{(n+2)}\cdot(x^2-1)+C_{n+1}^1u^{(n+1)}\cdot 2x+C_{n+1}^2u^{(n)}\cdot 2$

$=C_{n+1}^0u^{(n+1)}\cdot 2nx+C_{n+1}^1u^{(n)}\cdot 2n,$

$u^{(n+2)}\cdot(x^2-1)+(n+1)u^{(n+1)}\cdot 2x+(n+1)\cdot n\cdot u^{(n)}=2nxu^{(n+1)}+(n+1)u^{(n)}\cdot 2n,$

$u^{(n+2)}\cdot(x^2-1)+2u^{(n+1)}\cdot x=n(n+1)\cdot u^{(n)},$

$(1-x^2)\cdot u^{(n+2)}-2u^{(n+1)}x+n(n+1)\cdot u^{(n)}=0$，两边同乘以 $\frac{1}{2^n n!}$ 得即

$(1-x^2)p'_n(x)-2xp'_n(x)+n(n+1)p_n(x)=0$.

6. 设 $f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 证明 $f^{(n)}(0)=0,(n=1,2,\cdots)$

（提示：利用数学归纳法，并注意到 $x\neq 0$ 时，$f^{(k)}(x)=p(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}}$，其中 $p(\frac{1}{x})$ 是 $\frac{1}{x}$

的多项式，用定义 $f^{(k+1)}(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f^{(k)}(x)-f^{(k)}(0)}{x}$ 即可)

证明 (1) 当 $n=1$ 时，$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}$(令 $\dfrac{1}{x}=t$)

$=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{t}{e^{t^2}}(\dfrac{\infty}{\infty})=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{1}{e^{t^2}\cdot 2t}=0$ 符合;

(2) 设当 $n=k$ 时，成立 $f^{(k)}(0)=0$;

(3) 当 $n=k+1$ 时，设 $f^{(k)}(x)=p_m(\dfrac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}}, x\neq 0.$

$=\left[a_0(\dfrac{1}{x})^m+a_1(\dfrac{1}{x})^{m-1}+\cdots+a_{m-1}\dfrac{1}{x}+a_m\right]\cdot e^{-\frac{1}{x^2}}$，所以

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f^{(k)}(x)-f^{(k)}(0)}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left[a_0(\dfrac{1}{x})^{m+1}\cdot e^{-\frac{1}{x^2}}+a_1(\dfrac{1}{x})^{m-1}\cdot e^{-\frac{1}{x^2}}+\cdots+a_{m-1}(\dfrac{1}{x})^2\cdot e^{-\frac{1}{x^2}}+a_m\dfrac{1}{x}e^{-\frac{1}{x^2}}\right]$

$\underline{\underline{\dfrac{1}{x^2}=t}}\lim\limits_{t\to 0}\left[a_0\cdot\dfrac{t^{\frac{m+1}{2}}}{e^t}+a_1\cdot\dfrac{t^{\frac{m}{2}}}{e^t}+\cdots+a_{m-1}\cdot\dfrac{t}{e^t}+a_m\cdot\dfrac{t^{\frac{1}{2}}}{e^t}\right]$

由 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^k}{e^x}=0$($k>0$ 为常数，) 即 $f^{(k+1)}(0)=0.$

由(1)(2)(3)得对任 $n\in N$，都有 $f^{(n)}(0)=0$ 成立.

注：$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^k}{e^x}=0$($k>0$ 为常数)

事实上，当 $k\in N$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^k}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{k!}{e^x}=0,$

$0<k\leqslant 1$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^k}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{k\cdot x^{k-1}}{e^x}=k\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x\cdot x^{1-k}}=0.$

$1<k$ 时，总存在自然数 p，使 $P\leqslant k<p+1$，$\dfrac{x^p}{e^x}\leqslant\dfrac{x^k}{e^x}<\dfrac{x^{p+1}}{e^x}(x>1)$，

已知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^p}{e^x}=0$ 由夹逼定理知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^k}{e^x}=0.$

7. 设 $\varphi(x)$ 在点 a 连续，$f(x)=|x-a|\varphi(x)$，求 $f'_+(a)$，$f'_-(a)$，当满足什么条件时，$f'(a)$ 存在.

解 $f'_+(a)=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{(x-a)\varphi(x)-0}{x-a}=\lim\limits_{x\to a^+}\varphi(x),$

$f'_-(a)=\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{(a-x)\varphi(x)-0}{x-a}=-\lim\limits_{x\to a^-}\varphi(x),$

$\varphi(x)$ 在点 a 连续,则 $f'_+(a) = \lim\limits_{x\to a^+} \varphi(x) = \varphi(a), f'_-(a) = -\lim\limits_{x\to a} \varphi(x)$ $= -\varphi(a)$.若 $f'(a)$ 存在,必须 $f'_+(a) = f'_-(a)$.即 $\varphi(a) = -\varphi(a)$,因此 $\varphi(a) = 0$.

8.设 $x = g(y)$ 为 $y = f(x)$ 的反函数,试由 $f'(x), f''(x), f'''(x)$ 计算出 $g''(y)$, $g'''(y)$.

解 $g'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$ 这时 $g'(y)$ 看成是通过中间变量 x 是 y 的复合函数,于是

$$g''(y) = \frac{-f''(x)}{[f'(x)]^2} \cdot \frac{dx}{dy} = \frac{-f''(x)}{[f'(x)]^2} \cdot \frac{1}{f'(x)} = \frac{-f''(x)}{[f'(x)]^3},$$

$$g'''(y) = -\frac{f'''(x)f'^3(x) - 3f'^2(x)f''(x)f''(x)}{[f'(x)]^6} \cdot \frac{1}{f'(x)}$$

$$= \frac{3[f''(x)]^2 - f'(x)f'''(x)}{[f'(x)]^5}$$

9.证明根据正切对数表.所求得的角度比用具有同样多位数的正弦对数表求得的角度更为精确.

(提示:求出(1)$d(\ln\tan\varphi)$, (2)$d(\ln\sin\varphi)$, (3) 比较(1)(2) 两式中 $d\varphi$ 的大小)

解 $d(\ln\tan\varphi) = \dfrac{1}{\tan\varphi} \cdot \sec^2\varphi \cdot d\varphi = \dfrac{1}{\sin\varphi \cdot \cos\varphi} \cdot d\varphi$,

$d(\ln\sin\varphi) = \dfrac{1}{\sin\varphi} \cdot \cos\varphi \cdot d\varphi = \dfrac{\cos\varphi}{\sin\varphi} \cdot d\varphi$,

当具有同样多位数时 $\dfrac{1}{\sin\varphi \cdot \cos\varphi} = \dfrac{\cos\varphi}{\sin\varphi} \cdot \dfrac{1}{\cos^2\varphi} > \dfrac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$,

由 $d(\ln\tan\varphi) = d(\ln\sin\varphi)$,知(1)式的 $d\varphi$ 小于(2)式中的 $d\varphi$,所以正切所得角更精确.

10.长方形的一边 $x = 20m$,另一边为 $y = 15m$,若第一边以 $1m/s$ 的速度减少,而第二边以 $2m/s$ 的速度增加,问这长方形的面积和对角线变化的速度如何?

解法一 $\lim\limits_{\Delta t\to 0} \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t\to 0} \dfrac{(20 - \Delta t)(15 + 2\Delta t) - 20 \times 15}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t\to 0} \dfrac{25\Delta t - 2\Delta t^2}{\Delta t} = 25$.

设对角线 l, $l = \sqrt{(20 - t)^2 + (15 + 2t)^2} = \sqrt{5t^2 + 20t + 625}$

$\dfrac{dl}{dt} = \dfrac{10(t + 2)}{2\sqrt{5}\sqrt{t^2 + 4t + 125}} = \dfrac{10}{2\sqrt{5}\sqrt{\dfrac{t^2 + 4t + 125}{t^2 + 4t + 4}}}$ 于是 $\left.\dfrac{dl}{dt}\right|_{t=0} = \dfrac{10}{25} = \dfrac{2}{5}$.

解法二 由题意知 $\dfrac{dx}{dt} = -1m/s, \dfrac{dy}{dt} = 2m/s$,而 $s = xy$,且 $l = \sqrt{x^2 + y^2}$,