《微积分(一)》课程期末练习

一、(每小题 6 分)

(1) 设 $y=\dfrac{1}{2}\tan 5x+e^{4x}x^{\cos x}+\ln\pi$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

(2) 设由参数式 $\begin{cases}x=t^2+2t\\ y=t-\ln(1+t)\end{cases}$，确定了 y 为 x 的函数 $y=y(x)$，求曲线 $y=y(x)$ 的凹、凸区间及拐点坐标（区间用 x 表示，点用 (x,y) 表示）.

(3) 求 $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{\sin x}{x})^{\frac{1}{x^2}}$

(4) 求 $\lim\limits_{x\to +\infty}[\sqrt{x^2+2x+\sin x}-(x+2)]$

二、(每小题 6 分)

(5) 求 $\displaystyle\int\frac{1}{x^2(x+1)}\mathrm{d}x$.

(6) 求 $\displaystyle\int\frac{\arcsin e^x}{e^x}\mathrm{d}x$.

(7) 求 $\displaystyle\int_0^{+\infty}x^3e^{-x^2}\mathrm{d}x$.

三、(第(8)-(11)小题每小题 8 分，第(12)小题 6 分)

(8)(8 分) 设 $y=y(x)$ 是由 $y^3+xy+x^2-2x+1=0$ 及 $y(1)=0$ 所确定,求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\int_1^x y(t)\mathrm{d}t}{(x-1)^3}$.

(9)(8 分) 设 $f(x)=\dfrac{x}{2x^2-3x+1}$，试将 $f(x)$ 展开成 x 的幂级数，并求 $f^{(n)}(0)\quad(n\geq 1)$.

(10)(8 分) 设常数 $a>0$，讨论曲线 $y=ax$ 与 $y=2\ln x$ 在第一象限中公共点的个数.

(11)(8 分) 设 $a<0$，曲线 $y=ax^2+bx$ 当 $0\leq x\leq 1$ 时 $y\geq 0$.又已知该抛物线与 x 轴及直线 $x=1$ 所围成的图形的面积 $D=\dfrac{1}{3}$，试确定常数 a 与 b 使该图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体体积 V 最小.

(12)(6 分) 设 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内可导，且 $|f'(x)|\leq M$ （M 为常数）

证明：① 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(f(\frac{1}{2^n})-f(\frac{1}{2^{n+1}}))$绝对收敛；

② $\lim\limits_{n\to\infty}f(\frac{1}{2^n})$存在.

四、选择题（四选一，每小题 4 分）

(13) 设 $f(x)=u(x)+v(x),\ g(x)=u(x)-v(x)$，并设$\lim\limits_{x\to 0}u(x)$与$\lim\limits_{x\to 0}v(x)$均不存在，则下列结论正确的是 [ ]

(A) 若$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$不存在，则$\lim\limits_{x\to 0}g(x)$必存在.

(B) 若$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$不存在，则$\lim\limits_{x\to 0}g(x)$必不存在.

(C) 若$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$存在，则$\lim\limits_{x\to 0}g(x)$必不存在.

(D) 若$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$存在，则$\lim\limits_{x\to 0}g(x)$必存在.

(14) 曲线$y=\dfrac{1}{x(x-1)}+\ln(1+e^x)$的渐近线的条数 [ ]

(A) 4 条 (B) 3 条. (C) 2 条. (D) 1 条.

(15) 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n-1}+x^2+x}{x^{2n}+1}$，则 $f(x)$的不连续点的个数为 [ ]

(A) 0 个 (B) 1 个. (C) 2 个. (D) 多于 2 个.

(16) 设 $f(x)$ $[a,b]$上可导，且 $f'(a)>0,\ f'(b)<0,$下述结论不正确的是[ ]

(A) 至少存在一点$x_0\in(a,b)$使$f(x_0)>f(a)$；

(B) 至少存在一点$x_0\in(a,b)$使$f(x_0)>f(b)$；

(C) 至少存在一点$x_0\in(a,b)$使$f'(x_0)=0$；

(D) 至少存在一点$x_0\in(a,b)$使$f(x_0)=\dfrac{1}{2}(f(a)+f(b))$.

(17) 设$a_n>0\ (n=1,2,\cdots)$，下列结论正确的是[ ]

(A) 若存在$N>0$，当$n>N$时均有$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}<1$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$必收敛.

(B) 若存在$N>0$，当$n>N$时均有$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}>1$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$必发散.

(C) 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛.则必存在$N>0$，当$n>N$时必有$\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$，

(D) 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$发散.则必存在$N>0$，当$n>N$时必有$\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$.