

贪心法正确性 证明：活动选择

一个数学归纳法的例子

例：证明对于任何自然数 n ,

$$1+2+\dots+n = n(n+1)/2$$

证 $n=1$, 左边=1, 右边= $1 \times (1+1)/2=1$

假设对任意自然数 n 等式成立, 则

$$1+2+\dots+(n+1)$$

$$= (1+2+\dots+n) + (n+1)$$

$$= n(n+1)/2 + (n+1)$$

$$= (n+1)(n/2+1)$$

$$= (n+1)(n+2)/2$$

归纳假设代入

第一数学归纳法

适合证明涉及自然数的命题 $P(n)$

归纳基础： 证明 $P(1)$ 为真 (或 $P(0)$ 为真).

归纳步骤： 若对所有 n 有 $P(n)$ 为真，证明
 $P(n+1)$ 为真

$$\forall n, P(n) \rightarrow P(n+1)$$

$$P(1)$$

$$n=1, P(1) \Rightarrow P(2)$$

$$n=2, P(2) \Rightarrow P(3)$$

...

第二数学归纳法

适合证明涉及自然数的命题 $P(n)$

归纳基础： 证明 $P(1)$ 为真 (或 $P(0)$ 为真).

归纳步骤： 若对所有小于 n 的 k 有 $P(k)$ 真,
证明 $P(n)$ 为真

$$\forall k (k < n \wedge P(k)) \rightarrow P(n)$$

$$P(1)$$

$$n=2, \quad P(1) \Rightarrow P(2)$$

$$n=3, \quad P(1) \wedge P(2) \Rightarrow P(3)$$

...

两种归纳法的区别

归纳基础一样 $P(1)$ 为真

归纳步骤不同

证明逻辑

归纳法1: $P(1) \Rightarrow P(2) \Rightarrow P(3) \dots$

归纳法2:

$$\begin{array}{c} P(1) \\ P(1) \Rightarrow P(2) \end{array} \Bigg\} \Rightarrow \begin{array}{c} P(1) \\ P(2) \\ P(3) \end{array} \Bigg\} \Rightarrow P(4) \dots$$

算法正确性归纳证明

证明步骤:

1. 叙述一个有关自然数 n 的命题, 该命题断定该贪心策略的执行最终将导致最优解. 其中自然数 n 可以代表算法步数或者问题规模.
2. 证明命题对所有的自然数为真.
归纳基础(从最小实例规模开始)
归纳步骤(第一或第二数学归纳法)

活动选择算法的命题

命题

算法 Select 执行到第 k 步, 选择 k 项活动

$$i_1 = 1, i_2, \dots, i_k$$

则存在最优解 A 包含活动 $i_1=1, i_2, \dots, i_k$.

根据上述命题: 对于任何 k , 算法前 k 步的选择都将导致最优解, 至多到第 n 步将得到问题实例的最优解

归纳证明： 归纳基础

令 $S=\{1,2,\dots,n\}$ 是活动集, 且 $f_1 \leq \dots \leq f_n$

归纳基础: $k=1$, 证明存在最优解包含活动 1

证 任取最优解 A , A 中活动按截止时间递增排列. 如果 A 的第一个活动为 j , $j \neq 1$, 用 1 替换 A 的活动 j 得到解 A' , 即

$$A' = (A - \{j\}) \cup \{1\},$$

由于 $f_1 \leq f_j$, A' 也是最优解, 且含有 1.

$$f_1 \leq f_j$$



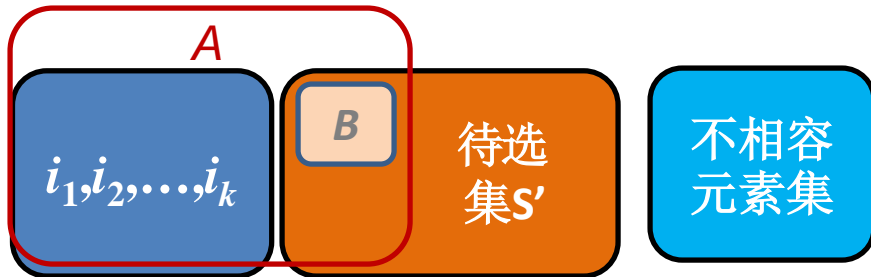
归纳步骤

假设命题对 k 为真, 证明对 $k+1$ 也为真.

证 算法执行到第 k 步, 选择了活动 $i_1=1, i_2, \dots, i_k$, 根据归纳假设存在最优解 A 包含 $i_1=1, i_2, \dots, i_k$, A 中剩下活动选自集合 S'

$$S' = \{ i \mid i \in S, s_i \geq f_k \}$$

$$A = \{ i_1, i_2, \dots, i_k \} \cup B$$

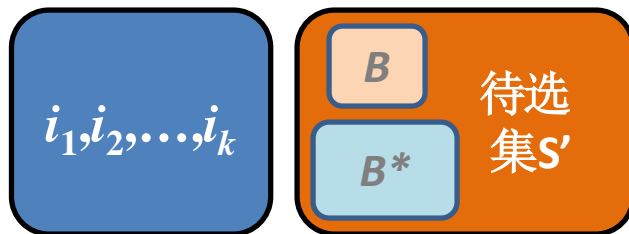


归纳步骤（续）

B 是 S' 的最优解.（若不然, S' 的最优解为 B^* , B^* 的活动比 B 多, 那么

$$B^* \cup \{1, i_2, \dots, i_k\}$$

是 S 的最优解, 且比 A 的活动多, 与 A 的最优性矛盾.)

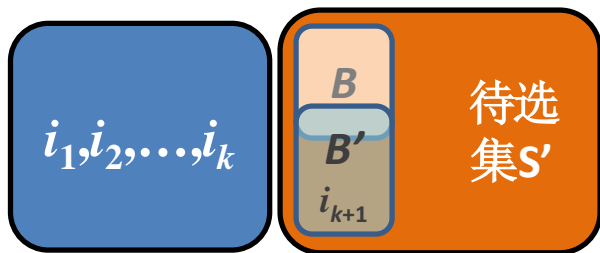


归纳步骤 (续)

将 S' 看成子问题，根据归纳基础，
存在 S' 的最优解 B' 有 S' 中的第一个
活动 i_{k+1} ，且 $|B'| = |B|$ ，于是

$$\begin{aligned} & \{i_1, i_2, \dots, i_k\} \cup B' \\ &= \{i_1, i_2, \dots, i_k, i_{k+1}\} \cup (B' - \{i_{k+1}\}) \end{aligned}$$

也是原问题的最优解.



小结

- 贪心法正确性证明方法：数学归纳法
第一数学归纳法、第二数学归纳法
- 活动选择问题的贪心法证明：
叙述一个涉及步数的算法正确性命题
证明归纳基础
证明归纳步骤