I. Gelfand, Normierte Ringe, *Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S.*, 1941, Volume 51, Number 1, 3–24

https://www.mathnet.ru/eng/sm6046

Normierte Ringe [1]

I. Gelfand (Moskau)

§ 1. Die Axiomatik

Die Gesamtheit R der Elemente $x, y, \ldots$ wird ein normierter Ring genannt, wenn:

(α) R ein linearer, normierter, vollständiger Raum im Sinne von Banach ist.

(β) In R die Operation der Multiplikation der Elemente definiert ist, die die gewöhnlichen algebraischen Eigenschaften

$$x(\lambda y+\mu z)=\lambda xy+\mu xz,$$
$$x(yz)=(xy)z$$

besitzt.

(γ) In R eine Einheit vorhanden ist, d. h. ein solches Element e, dass $ex=x$ für ein beliebiges Element $x\in R$, dabei $\|e\|\neq 0$.

(δ) Die Operation der Multiplikation bezüglich des jeden der Faktoren stetig ist: wenn $x_n\to x$, so $x_ny\to xy$, und wenn $y_n\to y$, so $xy_n\to xy$.

Im Folgenden werden wir die Operation der Multiplikation als kommutativ betrachten; die Ergebnisse des §1 hängen aber von der Kommutativität nicht ab.

Das Axiom (δ) werden wir im Folgenden in der folgenden Form benutzen:

$$(\delta') \qquad \|x\cdot y\|\leqslant\|x\|\cdot\|y\| \quad \text{und} \quad \|e\|=1.$$

A priori würde es scheinen, dass (δ') eine wesentliche Verstärkung von (δ) ist; wir werden aber zeigen, dass in der Tat (δ') und (δ) äquivalent sind. Es gilt nämlich der folgende

Satz 1. *Für jeden normierten Ring R kann man einen isomorphen und homöomorphen Ring R' finden, in dem das Axiom (δ') Platz hat.*

Es sei Q der Ring aller linearen Operatoren über R (der als linearer Raum betrachtet wird). Jedem Element x können wir einen linearen Operator $A_x\in Q$ zuordnen, der folgendermassen definiert ist:

$$A_xy=x\cdot y.$$

Offenbar gehen verschiedene Elemente in verschiedene Operatoren über, die Summe und das Produkt von Elementen gehen in die Summe und das Produkt von Operatoren über, das Element e geht in den Einheitsoperator E über.

Somit existiert in Q ein Unterring R', der R isomorph ist. Finden wir, durch welche Eigenschaft werden die linearen Operatoren $A\in R'$ charakterisiert.

---

[1] Ein Abriss des Inhaltes dieser Arbeit (ausser den letzten zwei Paragraphen) ist in den C. R. de l' Ac. d. Sc. de l' U. R. S. S., **XXIII**, N. 5, (1939) veröffentlicht.

Wenn $A \in R'$, so ist $A = A_x$, und daher

$$A(yz) = x \cdot yz = (xy)z = Ay \cdot z$$

für beliebige y und z aus R. Zeigen wir, dass wenn ein linearer Operator $A \in Q$ die Eigenschaft $A(yz) = Ay \cdot z$ (für beliebige y und z aus R) besitzt, so $A \in R'$. In der Tat, sei $Ae = x$; dann ist

$$Ay = A(ey) = Ae \cdot y = xy$$

für beliebiges $y \in R$.

Aus diesem Kriterium folgt leicht, dass R' ein abgeschlossener Unterring von Q ist. Es mögen die $A_n \in R'$ zu $A \in Q$ konvergieren. Dann ist

$$A(x \cdot y) = \lim A_n(xy) = \lim (A_n x) y = Ax \cdot y,$$

woraus, nach dem Bewiesenen, $A \in R'$ folgt. Also ist R' ein vollständiger Raum. Es sei $\| e \| = a$. Dann ist für $A_x \in R'$

$$\| A_x \| = \sup_{\| y \| \leqslant 1} \| A_x y \| = \sup_{\| y \| \leqslant 1} \| x \cdot y \| \geqslant \frac{1}{a} \| x \cdot e \| = \frac{1}{a} \| x \| .$$

Dies bedeutet, dass die Abbildung von R' auf R stetig ist. Da die Räume R und R' vollständig sind, so folgt aus der Stetigkeit der Abbildung von R' auf R, dass, nach einem bekannten Satz von Banach, die inverse Abbildung stetig ist; so bekommen wir, dass R R' homöomorph ist. Aber für die Elemente $A \in R'$ als lineare Operatoren ist das Axiom (δ') offenbar erfüllt.

Folgerung 1. Das Produkt xy ist nach beiden Faktoren gleichzeitig stetig: wenn $x_n \to x$ und $y_n \to y$, so $x_n y_n \to xy$.

Folgerung 2. In absolut konvergenten Reihen kann man, ohne die Summe zu ändern, die Summanden beliebig umstellen; solche Reihen kann man multiplizieren (addieren), wobei die erhaltenen Reihen zu dem Produkt (der Summe) der Reihen konvergieren.

§ 2. Vorläufige Tatsachen über Ideale

Hilfssatz 1. *Wenn $x \in R$ und $\| e - x \| < 1$, so besitzt x ein inverses Element.*

Zum Beweis betrachten wir die Reihe

$$e + (e - x) + (e - x)^2 + \ldots$$

Da $\| (e - x)^n \| \leqslant \| e - x \|^n$ ist, konvergiert diese Reihe; es sei y ihre Summe. Bilden wir das Produkt von y und $x = e - (e - x)$ und benutzen die Folgerung 2 aus Satz 1, so bekommen wir:

$$yx = e + (e - x) + (e - x)^2 + \ldots - (e - x) - (e - x)^2 - \ldots = e.$$

Folglich ist $y = x^{-1}$.

Somit besitzt die Einheit eine Umgebung $U(e)$, die aus Elementen besteht, welche inverse Elemente besitzen. Es ist leicht einzusehen, dass eine solche Umgebung für jedes Element x existiert, das ein inverses Element besitzt. Es sei $xy = e$, und sei $U(x)$ eine solche Umgebung von x, dass $U(x) y \subset U(e)$; ist z ein beliebiges Element von $U(x)$, so besitzt $z \cdot y$ ein inverses Element w,

$zyw = e$, woraus folgt, dass das Element z auch ein inverses Element besitzt. Folglich ist die Menge V der Elemente, die inverse Elemente besitzen, in R offen.

Hilfssatz 2. *x^{-1} ist eine stetige Funktion von x auf V. Mit anderen Worten, wenn die $x_n \in V$ zu $x \in V$ konvergieren, so*

$$x_n^{-1} \to x^{-1}.$$

Sei $x = e$; dann ist die Folge x_n^{-1} beschränkt, da für $\|x_n - e\| < \frac{1}{2}$

$$\|x_n^{-1}\| = \|e + (e - x_n) + \ldots\| \leqslant 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots = 2$$

ist.

Sei $K = \sup \|x_n^{-1}\|$. Dann ist

$$\|e - x_n^{-1}\| = \|x_n^{-1}(x_n - e)\| \leqslant K \|x_n - e\| \to 0,$$

und folglich $x_n^{-1} \to e$.

Im allgemeinen Falle konvergiert die Folge $x_n x^{-1}$ zu $xx^{-1} = e$, und daher ist

$$(x_n x^{-1})^{-1} = x x_n^{-1} \to e, \quad x_n^{-1} \to x^{-1}.$$

Die Gesamtheit I der Elemente $x \in R$ nennen wir ein Ideal (oder ein nichttriviales Ideal), wenn

1°. Aus $x \in I$, $y \in I$ folgt $px + qy \in I$, wo p und q beliebige Elemente des Ringes sind.

2°. $I \neq R$.

Offenbar kann I kein Element x aus V enthalten, denn andernfalls würde es ein beliebiges Element $y \in R$ enthalten:

$$y = yx^{-1} \cdot x,$$

was der Bedingung 2° widersprechen würde. In jedem Ring bildet das Element 0 offenbar ein Ideal; wir werden es das Nullideal nennen und (0) bezeichnen.

Hilfssatz 3. *Wenn der Ring R keine Ideale besitzt, die von dem Nullideal verschieden sind, so existiert für jedes $x \neq 0$ das inverse Element x^{-1}; mit anderen Worten, R ist in diesem Falle ein Körper.*

Betrachten wir die Gesamtheit I der Elemente yx, wo $x \neq 0$ ist, und y den ganzen Ring R durchläuft. Da $I \neq 0$ (wegen $x \in I$) ist, so ist $I = R$. Dies bedeutet, insbesondere, dass ein $y \in R$ derart existiert, dass $xy = e$ ist. Somit besitzt x ein inverses Element.

Wir haben stets $I \subset R - V$; da $R - V$ abgeschlossen ist, so haben wir auch $\bar{I} \subset R - V$. Offenbar ist $\bar{I}$ auch ein Ideal. Wir bekommen somit den

Satz 2. *Die Abschliessung $\bar{I}$ eines nichttrivialen Ideals I ist wieder ein nichttriviales Ideal.*

Es sei ein Ideal I gegeben. Ein Element $x \in R$ heisst kongruent $y \in R$ nach dem Ideal I, $x \sim y$, wenn $x - y \in I$; da die Kongruenzbeziehung symmetrisch, reflektiv und transitiv ist, so zerfällt R in Klassen untereinander nach dem Ideal I kongruenter Elemente; führen wir in natürlicher Weise die Operationen der Addition, Subtraktion und Multiplikation dieser Klassen ein, so erhalten wir den Restklassenring R/I. Dieser Ring besitzt die Einheit, deren Rolle die $e \in R$

enthaltende Klasse spielt. Die Null dieses Ringes ist die Klasse, die von allen $x \in I$ gebildet wird.

Hilfssatz 4. *Ist I ein abgeschlossenes Ideal, so ist R/I ein normierter Ring.*

Bezeichnen wir die Elemente von R/I durch $X, Y, \ldots$ und setzen $\|X\| = \inf\limits_{x \in X} \|x\|$. Zeigen wir, dass alle Axiome der Norm erfüllt sind:

1°. $\|\lambda X\| = |\lambda| \|X\|$ — ist offenbar.

2°. $\|X + Y\| = \inf\limits_{z \in X+Y} \|z\| \leqslant \inf\limits_{x \in X, y \in Y} \|x + y\| \leqslant \inf\limits_{x \in X, y \in Y} \{\|x\| + \|y\|\} \leqslant \leqslant \inf\limits_{x \in X} \|x\| + \inf\limits_{y \in Y} \|y\| = \|X\| + \|Y\|$.

3°. In ähnlicher Weise $\|X \cdot Y\| = \|X\| \cdot \|Y\|$.

4°. Es sei $\|X\| = 0$, d. h. es existiere eine solche Folge $x_n \in X$, dass $x_n \to 0$. Wenn x ein beliebiges Element aus X ist, so ist $x - x_n = y_n \in I$; da $x = \lim y_n$ ist, so $x \in \overline{I} = I$. Hieraus folgt, dass die ganze Klasse X in I enthalten ist und folglich mit ihm zusammenfällt, d. h. die Null des Ringes R/I ist.

5°. Es sei E die Einheit von R/I. Da $e \in E$, so ist $\|E\| \leqslant 1$; wäre $\|E\| < 1$, so würde ein Element $x \in E$ existieren derart, dass $\|x\| < 1$ ist. Dann würde, nach Lemma 1, das Element $e - x$ ein inverses Element besitzen, was wegen $e - x \in I$ unmöglich ist.

6°. Die Vollständigkeit. Es möge $\|X_n - X_m\| \to 0$; wählen wir eine Unterfolge X'_n derart, dass die Reihe $\sum \|X'_n - X'_{n+1}\|$ konvergiert. Für ein beliebiges $x_1 \in X'_1$ wird sich ein $x_2 \in X'_2$ derart finden, dass

$$\|x_2 - x_1\| < 2\|X'_2 - X'_1\|,$$

ein $x_3 \in X'_3$ — derart, dass

$$\|x_3 - x_2\| < 2\|X'_3 - X'_2\|,$$

usw. Die Punkte x_n bilden eine Fundamentalfolge; also

$$x_n \to x, \quad X'_n \to X \ni x.$$

Folglich auch $X_n \to X$.

§ 3. Normierte Körper

Es sei R ein vollständiger normierter Raum, und es möge jeder komplexen Zahl λ aus einem Bereich $\mathfrak{G}$ der komplexen Ebene ein Element $x \in R$ entsprechen. Die so definierte abstrakte Funktion $x(\lambda)$ heisst analytisch, wenn für jedes $\lambda \in \mathfrak{G}$ der Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} \frac{x(\lambda + h) - x(\lambda)}{h}$$

im Sinne der Konvergenz nach der Norm existiert.

Es sei f ein beliebiges lineares Funktional aus R; dann ist $f(x(\lambda))$ eine gewöhnliche analytische Funktion von λ. Dieser Umstand erlaubt uns eine Reihe von Eigenschaften gewöhnlicher analytischer Funktionen auf abstrakte analytische Funktionen zu übertragen.

1. Der Liouvillesche Satz. Wenn $x(\lambda)$ für alle λ definiert und der Norm nach beschränkt ist, so ist $x(\lambda) \equiv x$, wo x ein konstantes Element von R

ist. In der Tat, haben wir für beliebiges f nach dem gewöhnlichen Liouvilleschen Satz $f[x(\lambda)] = \text{const}$, und folglich ist auch $x(\lambda)$ konstant, denn sollte $x(\lambda)$ auch nur zwei Werte $x(\lambda_1) = x_1$ und $x(\lambda_2) = x_2$ annehmen, so würde nach einem Satz von Hahn ein lineares Funktional f existieren derart, dass $f(x_1) \neq f(x_2)$ ist, was unmöglich ist.

2. Integrale. Es sei in dem Bereich $\mathfrak{G}$ eine rektifizierbare Kurve Γ gegeben. Dann existiert

$$y = \int_\Gamma x(\lambda)\, d\lambda.$$

Es seien $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ beliebige Punkte auf Γ. Betrachten wir die Summe

$$S = \sum_{k=0}^{n} x(\lambda_k)(\lambda_k - \lambda_{k-1}).$$

Es sei nun $\lambda_{00}, \ldots, \lambda_{10}, \ldots, \ldots, \lambda_{n-1, p_{n-1}}, \lambda_n$ eine andere Gesamtheit von Punkten auf Γ, die die erste enthält, derart, dass $\lambda_{00} = \lambda_0$, $\lambda_{10} = \lambda_1, \ldots$; schätzen wir die Differenz zwischen den entsprechenden Summen ab. Sie ist gleich

$$\left\| \sum (x(\lambda_k) - x(\lambda_{k,i}))(\lambda_{k,i+1} - \lambda_{k,i}) \right\| \leqslant \omega(x)\, \Gamma,$$

wo $\omega(x)$ die grösste der Differenzen $\|x(\lambda_k) - x(\lambda_{k,i})\|$ bedeutet, und Γ die Länge der Kurve ist. Es sei

$$\delta = \sup_{\lambda \in \Gamma} \min \rho(\lambda, \lambda_k).$$

Wir behaupten, dass die Summen S einen Grenzwert besitzen, wenn $\delta \to 0$. Sei, in der Tat, ein beliebiges $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Finden wir ein $\delta > 0$ derart, dass aus $|\lambda' - \lambda''| < \frac{\delta}{2}$ die Ungleichung $\|x(\lambda') - x(\lambda'')\| < \varepsilon$ folgt, und schätzen wir die Abweichung voneinander aller Summen mit einem gegebenen $\frac{\delta}{2}$ ab. Es mögen den Punktfolgen $\{\mu_k\}$ und $\{\lambda_k\}$ die Summen S_2 und S_1 entsprechen. Wenn die Folge $\{\mu_k\}$ die Folge $\{\lambda_k\}$ enthält, so ist $\|S_2 - S_1\| < \varepsilon\Gamma$. Im entgegengesetzten Falle bilden wir die Folge $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k, \ldots$ — die Vereinigung der Folgen $\{\lambda_k\}$ und $\{\mu_k\}$. Für die entsprechende Summe haben wir

$$\|S_3 - S_1\| < \varepsilon\Gamma, \quad \|S_3 - S_2\| < \varepsilon\Gamma,$$

woraus

$$\|S_2 - S_1\| < 2\varepsilon\Gamma$$

folgt. Also besitzen die Summen S für $\delta \to 0$ einen Grenzwert, den wir das Integral nennen.

3. Der Satz von Cauchy. Wenn die Funktion $x(\lambda)$ im Inneren und auf der Grenze einer geschlossenen Kurve Γ analytisch ist, so gilt

$$y = \int_\Gamma x(\lambda)\, d\lambda = 0.$$

In der Tat, für ein beliebiges lineare Funktional f gilt, nach dem gewöhnlichen Satz von Cauchy, $f(y) = 0$; hieraus folgt $y = 0$.

Die Integralformel von Cauchy

$$x(\lambda)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{x(\xi)\,d\xi}{\xi-\lambda}$$

wird analog bewiesen.

Als Folge der Integralformel von Cauchy erhalten wir die Existenz aller Ableitungen der Funktion $x(\lambda)$ und die Entwicklung in die Taylorsche Reihe:

$$x(\lambda)=x(\lambda_0)+x'(\lambda_0)(\lambda-\lambda_0)+\ldots,$$

die in jedem Kreise konvergiert, in welchem die Funktion $x(\lambda)$ analytisch ist.

Wir beweisen nun den folgenden

Satz 3. *Ein normierter Körper ist dem Körper T aller komplexen Zahlen isomorph* [2].

Mit anderen Worten, kann jedes Element x in der Form $x=\lambda e$ erhalten werden, wo λ eine komplexe Zahl ist.

Nehmen wir den Gegenteil an: es möge für ein Element x die Differenz $x-\lambda e$ für kein λ verschwinden. Dann existiert für jedes λ $(x-\lambda e)^{-1}$. Zeigen wir, dass dies eine analytische Funktion von λ ist.

Der Ausdruck

$$\frac{1}{h}\left[(x-(\lambda+h)\,e)^{-1}-(x-\lambda e)^{-1}\right]=-\left[(x-\lambda e-he)^{-1}\right](x-\lambda e)^{-1}$$

hat, infolge von Hilfssatz 2, einen Grenzwert, nämlich $-(x-\lambda e)^{-2}$. Für grosse λ ist

$$|(x-\lambda e)^{-1}|\cdot|\lambda^{-1}|\left|\left(\frac{x}{\lambda}-e\right)^{-1}\right|\longrightarrow 0,$$

wiederum nach Hilfssatz 2; da $(x-\lambda e)^{-1}$ in jedem Kreise infolge der Stetigkeit beschränkt ist, so ist $(x-\lambda e)^{-1}$ auch für alle λ beschränkt. Wenden wir den Liouvilleschen Satz an, so finden wir: $(x-\lambda e)^{-1}$ ist konstant und folglich gleich Null, da es Null zum Grenzwert für $\lambda\longrightarrow\infty$ hat; aber dann ist auch $e=(x-\lambda e)(x-\lambda e)^{-1}=0$, was unmöglich ist.

§ 4. Maximale Ideale

Ein Ideal $M\subset R$ heisst maximal, wenn es nicht ein Teil eines anderen Ideals ist.

Satz 4. *Jedes maximale Ideal M ist abgeschlossen.*

Im entgegengesetzten Falle wäre M, nach Satz 2, ein Teil des Ideals $\overline{M}$, und folglich könnte es nicht maximal sein.

Satz 5. *Jedes Ideal I ist in einem maximalen Ideal enthalten.*

Dieser Satz wird leicht mit Hilfe der transfiniten Induktion bewiesen. Es sei $x_1, x_2, \ldots, x_\omega, \ldots, x_\alpha, \ldots=\{x_\alpha\}$ eine totalgeordnete Folge aller Elemente von R. Jedem nichtmaximalen Ideal A kann ein Ideal $A^+\supset A$ folgendermassen zugeordnet werden: betrachten wir die Menge aller Elemente $x\in\{x_\alpha\}$ derart, dass die Gesamtheit der Elemente $a+px$ $(a\in A, p\in R)$ ein Ideal $\supset A$ bildet; nach der Annahme ist diese Menge nicht leer und besitzt daher ein

---

[2] Dieser Satz wurde zuerst von Mazur bewiesen. Sein Beweis ist von dem unseren verschieden.

erstes Element x_A. Setzen wir $A^+ = \{a + px_A\}$ und konstruieren eine transfinite Folge von Idealen I_α in folgender Weise: wir setzen $I_0 = I$; es seien die I_α für alle $\alpha < \beta$ bereits konstruiert; gehört β der ersten Klasse an, d. h. existiert $\alpha = \beta - 1$, so setzen wir $I_\beta = I_\alpha^+$; wenn β der zweiten Klasse angehört, so setzen wir

$$I_\beta = \sum_{\alpha < \beta} I_\alpha.$$

Diese Folge hat eine Mächtigkeit, die die Mächtigkeit von R nicht übertrifft; daher muss diese Folge ein letztes Glied besitzen, welches eben das gesuchte maximale Ideal darstellt.

Für verschiedene Anwendungen ist der folgende einfache Satz von Wichtigkeit:

Satz 6. *Dafür, dass ein Element $x \in R$ ein inverses Element besitze, ist es notwendig und hinreichend, dass x keinem maximalen Ideal angehöre.*

Wenn x ein inverses Element besitzt, so gehört x keinem Ideal an; umsomehr also gehört x keinem maximalen Ideal an.

Wenn x kein inverses Element besitzt, so bildet die Gesamtheit der Elemente $\{x \cdot y\}$, wo y alle Elemente von R durchläuft, ein Ideal; nach Satz 5 gehört es einem maximalen Ideal an.

§ 5. Funktionen auf maximalen Idealen

Es sei M ein maximales Ideal des Ringes R, und R/M — der Restklassenring.

Satz 7. *R/M ist dem Körper der komplexen Zahlen isomorph.*

Nach den Sätzen 3 und 4 und dem Hilfssatz 3 genügt es zu zeigen, dass R/M keine Ideale, die von dem Nullideal verschieden sind, enthält. Dies ist aber klar: wäre in R/M ein Ideal I, das von dem Nullideal verschieden ist, vorhanden, so würden wir, wenn wir alle Elemente aller I bildenden Klassen zusammenfassen, ein Ideal in R erhalten, das M enthält, was der Maximalität des letzteren widerspricht.

Es gilt auch die inverse Behauptung: wenn der Restklassenring nach dem Ideal R/M dem Körper der komplexen Zahlen isomorph ist, so ist M ein maximales Ideal. Denn anderenfalls würden wir ein Ideal $M' \supset M$ betrachten, und alle Klassen in R/M, die Elemente von M' enthalten, zusammenfassen; dabei würden wir ein Ideal im Körper der komplexen Zahlen erhalten, was unmöglich ist.

Der Satz 7 erlaubt uns jedem Element $x \in R$ eine komplexe Zahl $x(M)$ zuzuordnen, nämlich diejenige, der bei dem Isomorphismus $R/M \approx T$ die Restklasse entspricht, die das Element x enthält.

Bei fixiertem x und variierendem M erhalten wir eine Funktion $x(M)$, die auf der Menge $\mathfrak{M}$ aller maximalen Ideale des Ringes R definiert ist.

Diese Funktionen besitzen die folgenden Eigenschaften:

(α) Wenn $x = x_1 + x_2$ ist, so ist $x(M) = x_1(M) + x_2(M)$.

(β) Wenn $x = x_1 \cdot x_2$ ist, so ist $x(M) = x_1(M) \cdot x_2(M)$.

(γ) $e(M) = 1$.

(δ) $|x(M)| \leqslant \|x\|$.

(ε) Wenn $M_1 \neq M_2$ ist, so existiert ein $x \in R$ derart, dass $x(M_1) \neq x(M_2)$ ist.

Diese Eigenschaften sind nichts anderes als einfach Formulierungen der Tatsache, dass die Abbildung $R \rightarrow R/M$ ein Homomorphismus ist.

(ζ) Wenn $x(M)$ nicht verschwindet, so existiert ein $y \in R$ derart, dass

$$y(M) = \frac{1}{x(M)}$$

ist. Dies ist eine Folgerung aus dem Satz 6.

§ 6. Das Radikal eines normierten Ringes

Wir stellen uns die Aufgabe zu finden, für welche Elemente $x \in R$ die Funktion $x(M) = 0$ ist; mit anderen Worten, welche Elemente allen maximalen Idealen angehören.

Definition. Ein Element $x \in R$ heisst ein verallgemeinertes nilpotentes Element, wenn $\sqrt[n]{\|x^n\|} \rightarrow 0$. Es ist klar, dass gewöhnliche nilpotente Elemente (d. h. solche, für die für ein bestimmtes n $x^n = 0$ ist) auch verallgemeinerte nilpotente Elemente sind; die inverse Behauptung gilt im allgemeinen nicht. Die Gesamtheit der verallgemeinerten nilpotenten Elemente heisst das Radikal des Ringes.

Satz 8. *Der Durchschnitt aller maximalen Ideale fällt mit der Menge aller verallgemeinerten nilpotenten Elemente zusammen.*

Es möge x einem bestimmten maximalen Ideal M_0 nicht angehören; dann ist $x(M_0) \neq 0$. Da

$$\|x^n\| \geqslant |x^n(M_0)| = |x^n(M_0)|$$

ist, haben wir

$$\sqrt[n]{\|x^n\|} > |x(M_0)|;$$

somit ist x kein verallgemeinertes nilpotentes Element. Es möge nun x allen maximalen Idealen angehören. Dann gehört $e - \lambda x$ für beliebiges λ keinem maximalen Ideal an und besitzt daher ein inverses Element; die analytische Funktion

$$(e - \lambda x)^{-1}$$

ist also ganz und, nach § 3, kann in eine beständig konvergente Taylorsche Reihe entwickelt werden:

$$(e - \lambda x)^{-1} = e + \lambda x + \lambda^2 x^2 + \ldots$$

Da $\lambda^n x^n$ ein Glied einer konvergenten Reihe ist, so haben wir für $n \rightarrow \infty$

$$\|\lambda^n x^n\| \rightarrow 0.$$

Hieraus folgt

$$\|x^n\| = \frac{\|\lambda^n x^n\|}{|\lambda|^n} < \frac{1}{|\lambda|^n}$$

für genügend grosse n, und also

$$\overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} \sqrt[n]{\|x^n\|} \leqslant \frac{1}{|\lambda|};$$

da aber λ beliebig ist, so erhalten wir

$$\lim \sqrt[n]{\|x^n\|} = 0.$$

Es gilt auch ein allgemeinerer Satz, der das max $|x(M)|$ mit den Normen der Potenzen von x verbindet:

Satz 8'. *Für jedes $x \in R$ existiert*

$$\lim \sqrt[n]{\|x^n\|}$$

und ist dem max $|x(M)|$ *gleich.*

Setzen wir max $|x(M)| = a$. Dann besitzt das Element $x - \mu e$ ein inverses für alle μ mit $|\mu| > a$, denn es wird durch die Funktion $x(M) - \mu$ dargestellt, die nicht Null wird. Setzen wir $\lambda = \frac{1}{\mu}$; dann ist $(e\mu - x)^{-1} = \lambda(e - \lambda x)^{-1}$ eine analytische Funktion im Kreise $|\lambda| < \frac{1}{a}$. Entwickeln wir sie in die Taylorsche Reihe:

$$\lambda(e - \lambda x)^{-1} = \lambda(e + \lambda x + \ldots).$$

Da das allgemeine Glied einer konvergenten Reihe zu Null strebt, so erhalten wir:

$$\|\lambda^n x^n\| \to 0, \quad \|x^n\| = \frac{1}{|\lambda|^n}\|\lambda^n x^n\| \leqslant \frac{1}{|\lambda|^n}$$

für genügend grosse n; hieraus folgt

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{\|x^n\|} \leqslant \frac{1}{|\lambda|}.$$

Für $|\lambda| \to \frac{1}{a}$ erhalten wir

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{\|x^n\|} \leqslant a. \tag{1}$$

Da $\|x\| \geqslant a$, $\|x^n\| \geqslant a^n$, gilt $\sqrt[n]{\|x^n\|} \geqslant a$ für alle n, woraus

$$\underline{\lim} \sqrt[n]{\|x^n\|} \geqslant a \tag{2}$$

folgt. Vergleichen wir (1) und (2), so finden wir:

$$\lim \sqrt[n]{\|x^n\|} = a = \max |x(M)|.$$

§ 7. Die Topologisierung der Menge $\mathfrak{M}$

Da wir beabsichtigen die Funktionen $x(M)$ in stetige Funktionen umzuwandeln, führen wir in der Menge $\mathfrak{M}$ eine Topologie ein.

Eine Umgebung $U(M_0)$ des Punktes $M_0 \in \mathfrak{M}$ definieren wir als die Gesamtheit aller $M \in \mathfrak{M}$, für die die Ungleichungen

$$|x_i(M) - x_i(M_0)| < \varepsilon \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

erfüllt sind. Somit wird die Umgebung durch die Angabe von ε und von n beliebigen Elementen aus R definiert.

Zeigen wir, dass die Axiome des topologischen Raumes erfüllt sind.

1°. Jeder Punkt besitzt eine Umgebung und ist in ihr enthalten.

2°. Der Durchschnitt zweier Umgebungen enthält eine dritte Umgebung.

3°. Wenn $M_1 \subset U(M_0)$, so existiert ein $U(M_1) \subset U(M_0)$.

Es ist klar, dass die ersten zwei Axiome erfüllt sind. Um zu zeigen, dass auch das dritte Axiom erfüllt ist, finden wir ein solches ε', dass der Kreis vom

Radius ε' mit dem Mittelpunkt in dem Punkt $x_i(M_1)$ sich im Inneren des Kreises vom Radius ε mit dem Mittelpunkt in dem Punkt $x_i(M_0)$ befindet; es ist dann offenbar, dass

$$U(M_1) = \{|x_i(M) - x_i(M_1)| < \varepsilon'\}$$

der gestellten Bedingung genügt.

Satz 9. *Der topologische Raum $\mathfrak{M}$ ist bikompakt und genügt den Axiomen von Hausdorff.*

Der Beweis, den wir hier anführen, stützt sich auf den Satz von Tychonoff über die Bikompaktheit des topologischen Produktes bikompakter Räume [3]. Einen Beweis, der sich auf den Tychonoffschen Satz nicht stützt, kann man in [4] finden.

Ordnen wir jedem Element $x \in R$ einen Kreis Q_x der komplexen Ebene vom Radius $\|x\|$ zu und betrachten das topologische Produkt Ω aller dieser Kreise. Nach dem Satz von Tychonoff ist Ω bikompakt. Jedem $M_0 \in \mathfrak{M}$ ordnen wir den Punkt aus Ω zu, der durch die Zahlen $x(M_0)$ bestimmt ist. Aus (ε), § 5, folgt, dass $\mathfrak{M}$ eineindeutig auf einen Teil von Ω abgebildet wird; die Topologie in $\mathfrak{M}$ fällt mit der auf dem Bild von $\mathfrak{M}$ in Ω induzierten zusammen; somit ist $\mathfrak{M}$ ein homöomorpher Teil von Ω. Um die Bikompaktheit von $\mathfrak{M}$ zu zeigen, genügt es nun seine Abgeschlossenheit in dem bikompakten Raum Ω zu zeigen.

Es möge $\Lambda = \{\lambda_x\}$, wo $\lambda_x \in Q_x$, ein Grenzpunkt in Ω für die Menge $\mathfrak{M}$ sein; konstruieren wir ein maximales Ideal $M_0 \in \mathfrak{M}$ derart, dass $x(M_0) = \lambda_x$ für jedes x ist; dadurch wird gerade gezeigt, dass $\Lambda \in \mathfrak{M}$. Zeigen wir, dass $\lambda_{x+y} = \lambda_x + \lambda_y$ ist. Zu diesem Ende betrachten wir die Umgebung des Punktes Λ, die durch die Punkte $x \cdot y$ und $x + y$ und eine beliebig kleine Zahl ε bestimmt ist. Da Λ ein Grenzpunkt für $\mathfrak{M}$ ist, so wird sich in ihrer Umgebung ein Punkt $M \in \mathfrak{M}$ finden, d. h. für ein bestimmtes M wird

$$|\lambda_x - x(M)| < \varepsilon,$$
$$|\lambda_y - y(M)| < \varepsilon,$$
$$|\lambda_{x+y} - x(M) - y(M)| < \varepsilon$$

sein. Daher ist $|\lambda_{x+y} - \lambda_x - \lambda_y| < \varepsilon$, und da ε beliebig war, $\lambda_{x+y} = \lambda_x + \lambda_y$. Wir erhalten, dass die Korrespondenz $x \to \lambda_x$ ein Homomorphismus des Ringes R in den Körper der komplexen Zahlen ist. In derselben Weise zeigen wir, dass $\lambda_{ie} = i$ ist. Folglich existiert ein maximales Ideal $M_0 \in \mathfrak{M}$ derart, dass

$$x(M_0) = \lambda_x$$

für beliebiges $x \in R$ ist, und der Satz ist bewiesen.

Beachten wir ferner, dass alle Funktionen $x(M)$ automatisch stetig werden: um eine Umgebung $V(M_0)$ zu finden, in der die Funktion $x(M)$ um nicht mehr als ε variiert, genügt es die Menge

$$V(M_0) = \{|x(M) - x(M_0)| < \varepsilon\}$$

zu betrachten, die nach Definition eine Umgebung ist.

---

[3] A. Tychonoff, Math. Annalen, **102**, (1929).

[4] Siehe I. Gelfand und G. Šilov, Über verschiedene Methoden der Einführung der Topologie in die Menge der maximalen Ideale eines normierten Ringes (in diesem Heft des Recueil mathématique, S. 31).

Wir bekommen so den

Satz 10. *Jeder normierte Ring R kann homomorph in den Ring $C(\mathfrak{M})$ aller auf dem bikompakten Hausdorffschen Raum $\mathfrak{M}$ stetigen Funktionen abgebildet werden. Dafür, dass diese Abbildung von R in $C(\mathfrak{M})$ isomorph sei, ist es notwendig und hinreichend, dass die folgende Bedingung erfüllt sei: aus $\sqrt[n]{\|x^n\|} \to 0$ für $x \in R$ folgt $x = 0$.*

Der folgende Satz zeigt die Notwendigkeit der eingeführten Topologie.

Satz 10'. *Sei $\mathfrak{M}$ in irgendeiner Weise so topologisiert, dass*

(α) *$\mathfrak{M}$ bikompakt ist,*

(β) *die Funktionen $x(M)$ stetig sind.*

Bezeichnen wir den topologischen Raum in der neuen Topologie durch $\mathfrak{M}_1$, in der alten — durch $\mathfrak{M}_0$. Dann ist $\mathfrak{M}_0$ homöomorph $\mathfrak{M}_1$.

Die Abbildung von $\mathfrak{M}_0$ auf $\mathfrak{M}_1$, die jedem $M \in \mathfrak{M}_0$ dasselbe M in $\mathfrak{M}_1$ zuordnet, ist eineindeutig. Infolge von (β) ist das Bild in $\mathfrak{M}_1$ einer jeden in $\mathfrak{M}_0$ offenen Menge auch in $\mathfrak{M}_1$ eine offene Menge; folglich ist die Abbildung $\mathfrak{M}_1 \to \mathfrak{M}_0$ stetig. Nach einem bekannten topologischen Satz ist, infolge von (α), die Abbildung stetig in beiden Richtungen, d. h. $\mathfrak{M}_0$ ist homöomorph $\mathfrak{M}_1$.

Da wir die Anwendungen dieser Theorie im Auge haben, bemerken wir, dass es nicht notwendig ist bei der Angabe der Topologie alle Elemente des Ringes zu benutzen: man kann sich auf die erzeugenden Elemente beschränken. Die Gesamtheit $K \subset R$ heisst die Gesamtheit der Erzeugenden von R, wenn der kleinste abgeschlossene, K enthaltende Unterring mit R zusammenfällt.

Satz 11. *Die Gesamtheit der Umgebungen*

$$U(M_0) = \{|x_i(M) - x_i(M_0)| < \varepsilon\}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

wo ε und n beliebig sind, und $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — Elemente von K sind, ist ein definierendes System von Umgebungen in $\mathfrak{M}$.

Wir müssen zeigen, dass in jeder Umgebung

$$U_1(M_0) = \{|x_i(M) - x_i(M_0)| < \varepsilon\}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \in R,$$

eine Umgebung aus dem definierenden System enthalten ist.

Finden wir n Polynome

$$P_1(x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n_1}), \ldots, P_n(x_{n1}, x_{n2}, \ldots, x_{nn_n})$$

in den Elementen $x_{ik} \in K$, die der Norm nach um weniger als $\frac{\varepsilon}{3}$ von den Elementen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ verschieden sind. Für jedes Polynom finden wir ein solches δ, dass bei der Abweichung der Argumente $x_{k1}(M), \ldots, x_{kn_k}(M)$ von den Werten $x_{k1}(M_0), \ldots, x_{kn_k}(M_0)$ um weniger als δ der Wert des Polynoms sich um nicht mehr als $\frac{\varepsilon}{3}$ ändert.

Betrachten wir die Umgebung

$$U(M_0)=\{|x_{ki}(M)-x_{ki}(M_0)|<\delta\}, \qquad i=1,2,\ldots,n_k,\ k=1,2,\ldots,n.$$

Wir behaupten, dass $U(M_0)\subset U_1(M_0)$ ist. In der Tat, für diejenigen M, für welche unsere Ungleichungen erfüllt sind, haben wir

$$|P_k(M)-P_k(M_0)|<\frac{\varepsilon}{2};$$

da

$$|x_k(M)-P_k[x(M)]|<\frac{\varepsilon}{3}$$

und

$$|x_k(M_0)-P_k[x(M_0)]|<\frac{\varepsilon}{3}$$

ist, so finden wir $|x_k(M)-x_k(M_0)|<\varepsilon$, w. z. b. w.

Satz 12. *Wenn R separabel ist, so ist $\mathfrak{M}$ metrisierbar (und folglich, nach Satz 9, ist ein Kompakt).*

Es ist leicht einzusehen, dass das abzählbare System von Umgebungen

$$\{|x_{i_k}(M)-\lambda_{i_k}|<r_s\}, \quad k=1,2,\ldots,n,$$

wo die r_s und λ_{i_k} rationale Zahlen sind, und die $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}$ aus der abzählbaren dichten Menge genommen sind, die die Basis des Raumes $\mathfrak{M}$ bildet, ein definierendes System ist. Hieraus folgt nach einem Satz von Urysohn, dass $\mathfrak{M}$ metrisierbar ist. Überdies kann man unmittelbar die Entfernung mittels der Formel

$$\rho(M_1, M_2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{|x_n(M_1)-x_n(M_2)|}{1+|x_n(M_1)-x_n(M_2)|}$$

definieren.

Diese Bedingung ist nicht notwendig. Um eine notwendige und hinreichende Bedingung zu erhalten, betrachten wir den Ring aller auf dem Kompakt stetigen Funktionen: wenn man in ihm die Konvergenz nicht der Norm nach, sondern die gleichmässige Konvergenz betrachtet, so existiert immer eine abzählbare überall dichte Menge. Da in der Definition der Umgebungen nicht die Norm der Funktionen wesentlich ist, sondern ihre Werte, so folgt die Metrisierbarkeit von $\mathfrak{M}$ aus der Separabilität von R bezüglich der gleichmässigen Konvergenz auf $\mathfrak{M}$ der Funktionen $x(M)$.

Somit haben wir den

Satz 13. *Führen wir in dem Ring R eine neue Norm*

$$|x|=\lim\sqrt[n]{\|x^n\|}$$

ein. Die Separabilität von $\mathfrak{M}$ in der neuen Norm stellt eine notwendige und hinreichende Bedingung der Metrisierbarkeit von R dar.

(Beachten wir, dass mit der neuen Normierung R, im allgemeinen, nicht mehr ein vollständiger Raum sein wird.)

Satz 14. *Wenn R eine endliche Anzahl von Erzeugenden $x_1, x_2, \ldots, x_n$ hat, so ist $\mathfrak{M}$ eine abgeschlossene und beschränkte Untermenge des n-dimensionalen komplexen Raumes.*

Die Funktionen $x_1(M)$, $x_2(M)$, ..., $x_n(M)$, ... bilden $\mathfrak{M}$ eindeutig und stetig auf eine bestimmte abgeschlossene und beschränkte Untermenge $\mathfrak{M}'$ des

n-dimensionalen komplexen Raumes ab. Zeigen wir, dass diese Abbildung eineindeutig ist; dann wird sie auch in beiden Richtungen stetig sein, und folglich $\mathfrak{M}$ wird $\mathfrak{M}'$ homöomorph sein. Es mögen zwei Punkte M_1 und M_2 in einen Punkt von $\mathfrak{M}'$ abgebildet werden. Dies bedeutet, dass $x_k(M_1) = x_k(M_2)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ ist. Dann wird aber für alle Polynome in $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und folglich auch für alle ihre Grenzwerte, d. h. für alle $x \in R$, $x(M_1) = x(M_2)$ sein. Also folgt aus $x \in M_1$, d. h. $x(M_1) = 0$, $x \in M_2$, d. h. M_1 und M_2 fallen zusammen.

§ 8. Reelle Ringe

Wir haben bewiesen, dass jeder normierte Ring in den Ring aller stetigen komplexen auf der Menge $\mathfrak{M}$ definierten Funktionen $x(M)$ abgebildet werden kann. Wir stellen nun die Frage, wie der Ring R beschaffen sein soll, damit diese Funktionen reell werden.

Wenn die Funktion $x(M)$ reell ist, so ist $x^2(M)$ nicht negativ, $x^2(M)+1$ ist positiv und folglich besitzt eine inverse Funktion in dem Ring. Auf Grund dieser Tatsache können wir die folgende Definition einführen:

Ein Ring heisst r e e l l, wenn

(α) Die Multiplikation von Elementen mit Zahlen ist nur für den Fall definiert, wo mit reellen Zahlen multipliziert wird (und nicht, wie früher, mit komplexen).

(β) Für jedes $x \in R$ $x^2 + e$ besitzt ein inverses Element.

S a t z 15. *Wenn R ein reeller Ring ist, so sind alle Funktionen $x(M)$ reell.*

Es genügt zu zeigen, dass der Restklassenring R/M, wo M ein maximales Ideal ist, dem Körper der reellen Zahlen isomorph ist. Da R/M ein Körper ist, so hat die Bedingung (β) für ihn die folgende Form:

(β') Für beliebiges $x \in R/M$ ist $x^2 + e \neq 0$.

Hieraus folgt auch, dass $x^2 + y^2 \neq 0$ ist, was auch die x und y aus R/M seien, wenn nur $x \neq 0$ oder $y \neq 0$ ist: in der Tat, wenn, z. B., $x \neq 0$ ist, es ist $x^2 + y^2 = x^2\left(e + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right) \neq 0$, da im Körper R/M keine Nullteiler vorhanden sind.

Bilden wir aus den Elementen von R/M die Gesamtheit T der Elemente

$$x + iy$$

und definieren in T die üblichen Operationen der Addition und Multiplikation unter der Annahme, dass $i^2 = -e$ ist. Insbesondere ist die Division immer möglich, da

$$\frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$$

ist, wo der Nenner auf der rechten Seite nach dem Bewiesenen von Null verschieden ist, sowie die Multiplikation mit komplexen Zahlen $\lambda + i\mu$. Definieren wir die Norm in der folgenden Weise:

$$\|x + iy\| = \sup_\alpha \|x \cos \alpha + y \sin \alpha\| \quad [5].$$

---

[5] Auf die Möglichkeit einer solchen Wahl der Norm wurde ich von M. Krein aufmerksam gemacht.

Es ist leicht einzusehen, dass alle Axiome der Norm erfüllt sind. Somit ist T ein normierter Körper; nach Satz 3 ist T dem Körper der komplexen Zahlen isomorph. Betrachten wir, wie werden bei diesem Isomorphismus die Elemente von R/M transformiert. Sei $x \to \lambda + i\mu$; dann $(x - \lambda e)^2 + (\mu e)^2 \to 0$, d. h. $(x - \lambda e)^2 + (\mu e)^2$ ist die Null von R/M. Nach dem Bewiesenen ist $\lambda e = x$, $\mu = 0$. Somit ist R/M dem Körper der reellen Zahlen isomorph.

§ 9. Die Beziehung zwischen R und $C(\mathfrak{M})$

Wir werden zeigen, dass jeder normierte Ring R in den Ring $C(\mathfrak{M})$ aller auf dem bikompakten Raum $\mathfrak{M}$ stetigen Funktionen homomorph abgebildet werden kann. Stellen wir die Frage, in welcher Beziehung der Ring der Funktionen $x(M)$ zu dem Ring aller stetigen Funktionen steht; insbesondere, welchen Bedingungen muss man R unterwerfen, damit R mit $C(\mathfrak{M})$ zusammenfalle.

Satz 16. *Wenn für jedes Element $x \in R$ ein Element $y \in R$ gefunden werden kann derart, dass $x(M) = \overline{y(M)}$ für beliebiges $M \in \mathfrak{M}$ [$\overline{y(M)}$ ist die zu $y(M)$ komplex-konjugierte Funktion], so bilden die Funktionen des Ringes R eine überall dichte Untermenge (im Sinne der gleichmässigen Konvergenz) in dem Ring $C(\mathfrak{M})$. Mit anderen Worten, jede auf $\mathfrak{M}$ stetige Funktion ist die Grenzfunktion einer gleichmässig konvergenten Folge von Funktionen $x(M)$, $x \in R$.*

Für den Beweis siehe [4].

Folgerung 1. Die Behauptung des Satzes gilt immer für einen reellen Ring R (§ 9), wenn man unter $C(\mathfrak{M})$ den Ring aller reellen stetigen Funktionen auf $\mathfrak{M}$ versteht.

Folgerung 2. Dafür, dass $R \equiv C(\mathfrak{M})$ sei, ist es notwendig und hinreichend, dass aus der gleichmässigen Konvergenz der Funktionen $x(M)$ die Konvergenz der Elemente x nach der Norm in R folge.

Die Notwendigkeit dieser Bedingung folgt aus Satz 17, und das Hinreichen — aus Satz 16.

Die bequemste für die Anwendungen ist die folgende hinreichende Bedingung

Folgerung 3. Wenn für beliebiges $x \in R$

$$\|x^2\| = \|x\|^2$$

ist, so ist $R = C(\mathfrak{M})$.

In der Tat, nach Satz 8′ ist

$$\max |x(M)| = \lim \sqrt[2^n]{\|x^{2^n}\|} = \lim \sqrt[2^n]{\|x\|^{2^n}} = \lim \|x\| = \|x\|,$$

woraus folgt, dass die gleichmässige Konvergenz nach sich die Konvergenz der Norm nach zieht.

In Folgerungen 2 und 3 wird angenommen, dass die Bedingungen des Satzes 16 erfüllt sind.

§ 10. Die Beziehung zwischen dem algebraischen und dem stetigen Isomorphismus

Es sei R ein Ring, in dem der Durchschnitt der maximalen Ideale das Nullideal ist (d. h. aus $\sqrt[n]{\|x^n\|} \to 0$ $x = 0$ folgt). Nach Satz 8 ist ein solcher Ring einem bestimmten Ring von stetigen Funktionen auf dem bikompakten Hausdorffschen Raum $\mathfrak{M}$ isomorph.

S a t z 17. *Es sei R_1 ein normierter Ring, der dem Ring R algebraisch isomorph ist. Dann ist er auch topologisch isomorph, d. h. die Konvergenz der Elemente $x \in R$ ist äquivalent der Konvergenz der entsprechenden Elemente $y \in R_1$.*

Der Sinn und die Bedeutung dieser Behauptung liegen im folgengen. Um einen normierten Ring anzugeben, muss man, erstens, einen Vorrat an Elementen mit ihren algebraischen Eigenschaften und, zweitens, die Norm dieser Elemente vorgeben. Der Satz 17 zeigt, dass für den Funktionenring wird die Norm, abgesehen von einer Äquivalenz, schon durch den Vorrat an Elementen mit ihren algebraischen Eigenschaften in vollkommen eindeutiger Weise bestimmt.

B e w e i s. Offenbar ist der Ring R_1 auch ein Funktionenring auf derselben Menge $\mathfrak{M}$ (aber, möglicherweise, mit einer anderen Topologie), denn aus dem algebraischen Isomorphismus folgt die Korrespondenz zwischen den maximalen Idealen von R und R_1; wenn, insbesondere, $y \in R_1$ allen maximalen Idealen von R_1 angehört, so gehört das entsprechende $x \in R$ allen maximalen Idealen von R. Laut unserer Bedingung ist $x=0$, woraus auch $y=0$ folgt. Ferner werden die entsprechenden Elemente durch gleiche Funktionen dargestellt: wenn $x-\lambda e \in M$, so $y-\lambda e \in M_1$, woraus $x(M)=y(M)$ $(=\lambda)$ folgt.

Somit können wir annehmen, dass wir mit einem und demselben Ring R der Funktionen $x(M)$ zu tun haben, in dem zwei Normen, $\|x\|_1$ und $\|x\|_2$, eingeführt sind. Wir haben zu zeigen, dass diese Normen äquivalent sind.

Führen wir in R eine neue Norm $\|x\|_3=\|x\|_1+\|x\|_2$ ein. Zeigen wir dass R bezüglich dieser Norm vollständig ist. Es sei $\|x_n-x_m\|_3 \to 0$; dann $\|x_n-x_m\|_1 \to 0$ und $\|x_n-x_m\|_2 \to 0$. Da R auch bezüglich der ersten und der zweiten Norm vollständig ist, so existieren die Grenzwerte $x=\lim_1 x_n$ und $x'=\lim_2 x_n$. Aber die Konvergenz der Norm nach zieht die gleichmässige Konvergenz nach sich; deshalb werden x und x' durch eine und dieselbe Funktion dargestellt, und folglich fallen sie zusammen: $x'=x$. Dann haben wir

$$\|x-x_n\|_3=\|x-x_n\|_1+\|x-x_n\|_2 \to 0,$$

d. h. $x=\lim_3 x_n$. Nach dem bereits zitierten Satz von Banach (siehe § 1) ist die dritte Norm äquivalent der ersten und der zweiten, woraus auch die Äquivalenz dieser letzten folgt.

§ 11. Die Zerlegung des Ringes in eine direkte Summe von Idealen

S a t z 18. *Dafür, dass ein Ring in eine direkte Summe von Idealen, die Ringe mit Einheiten sind, zerlegbar sei, ist es notwendig und hinreichend, dass die Menge der maximalen Ideale nicht zusammenhängend sei. Dabei wird vorausgesetzt, dass mit x in den Ring R auch ein solches Element y eingeht, dass $x(M)=\overline{y(M)}$ ist.*

B e w e i s. Es sei $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}_1+\mathfrak{M}_2$, wo $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ zwei abgeschlossene sich nicht überschneidende Mengen von maximalen Idealen sind. Definieren wir die Funktion $\varphi(M)$ in folgender Weise: $\varphi(M)=1$, wenn $M \in \mathfrak{M}_1$, und $\varphi(M)=0$, wenn $M \in \mathfrak{M}_2$. Die Funktion $\varphi(M)$ ist stetig. Folglich existiert, nach Satz 16, ein Element $x \in R$ derart, dass $|x(M)-\varphi(M)|<\frac{1}{4}$ für jedes maximale Ideal M

ist. Die Werte der Funktion $x(M)$ liegen in zwei Kreisen vom Radius $\frac{1}{4}$ mit den Mittelpunkten in den Punkten 0 und 1. Folglich existiert für $|\lambda| = \frac{1}{2}$ $(x - \lambda e)^{-1}$ [nach der Eigenschaft (ζ), § 5]. Setzen wir

$$e_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_C (x - \lambda e)^{-1} d\lambda,$$

wo C der Kreis vom Radius $\frac{1}{2}$ um den Punkt 0 ist. Zeigen wir, dass $e_1^2 = e_1$ ist. Wenn wir den Radius des Kreises etwas vergrössern, so wird sich das Integral nicht ändern, da die Funktion $(x - \lambda e)^{-1}$ in einer Umgebung des Kreises $|\lambda| = \frac{1}{2}$ analytisch ist. Folglich können wir schreiben:

$$e_1^2 = \frac{1}{2\pi i} \int_C (x - \lambda e)^{-1} d\lambda \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} (x - \mu e)^{-1} d\mu,$$

wo C_1 ein etwas grösserer Kreis ist. Dann haben wir

$$e_1^2 = -\frac{1}{4\pi^2} \int_C (x - \lambda e)^{-1} d\lambda \cdot \int_{C_1} (x - \mu e)^{-1} d\mu = -\frac{1}{4\pi^2} \int_C \int_{C_1} (x - \lambda e)^{-1} (x - \mu e)^{-1} d\lambda\, d\mu =$$

$$= -\frac{1}{4\pi^2} \int_C \int_{C_1} \frac{(x - \lambda e)^{-1}}{\lambda - \mu} d\lambda\, d\mu - \frac{1}{4\pi^2} \int_C \int_{C_1} \frac{(x - \mu e)^{-1}}{\mu - \lambda} d\lambda\, d\mu =$$

$$= \frac{1}{2\mu i} \int_C \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{d\mu}{\lambda - \mu} \right] (x - \lambda e)^{-1} d\lambda - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{d\lambda}{\mu - \lambda} \right] (x - \mu e)^{-1} d\mu =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_C (x - \lambda e)^{-1} d\lambda,$$

da

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{d\mu}{\lambda - \mu} = -1, \quad \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{d\lambda}{\mu - \lambda} = 0$$

ist. Zerlegen wir nun den Ring R folgendermassen in eine direkte Summe: $R = Re_1 + R(e - e_1)$. Es ist leicht einzusehen, dass die Ideale Re_1 und $R(e - e_1)$ sich nicht überschneiden. Finden wir die Werte der Funktion $e_1(M)$:

$$e_1(M) = \frac{1}{2\pi i} \int_C (x(M) - \lambda)^{-1} d\lambda,$$

und folglich $e_1(M) = 1$ für $M \in \mathfrak{M}_1$ und $e_1(M) = 0$ für $M \in \mathfrak{M}_2$, d. h. $e_1 \in M$, wenn $M \in \mathfrak{M}_2$, und $e_1 \overline{\in} M$, wenn $M \in \mathfrak{M}_1$. Somit ist das Ideal Re_1 in allen maximalen Idealen des Systems $\mathfrak{M}_2$ und in keinem maximalen Ideal des Systems $\mathfrak{M}_1$ enthalten.

Re_1 und $R(e - e_1)$ sind normierte Ringe. Als Einheit des Ringes Re_1 dient e_1, und als Einheit des Ringes $R(e - e_1)$ dient $e - e_1$. Finden wir eine Beziehung zwischen den maximalen Idealen der Ringe Re_1 und R. Es sei ein maximales Ideal M' des Ringes Re_1 gegeben. Wie wir bereits gesehen haben, enthalten alle maximalen Ideale des Systems $\mathfrak{M}_2$ das Ideal M'. Wir behaupten, dass überdies genau ein maximales Ideal des Systems $\mathfrak{M}_1$ existiert, das M' enthält. Dieses Ideal M wird durch die Formel

$$M = M' + R(e - e_1)$$

bestimmt. Beweisen wir dies. Da $M \supset M'$ nach Voraussetzung dem System $\mathfrak{M}_1$ angehört, so enthält es $R(e-e_1)$ und folglich auch $M' + R(e-e_1)$. Es genügt somit zu zeigen, dass $M' + R(e-e_1)$ ein maximales Ideal ist. Nun fällt, erstens, dieses Ideal mit dem ganzen Ring nicht zusammen, denn nehmen wir den Gegenteil an, so haben wir $e \in M' + R(e-e_1)$, und folglich $e_1 \in M'$, was unmöglich ist. Zweitens, ist dieses Ideal ein maximales, denn jedes Element $x \in R$ kann in folgender Weise dargestellt werden:

$$x = \lambda e + y,$$

wo $y \in M' + R(e-e_1)$. In der Tat: $x = xe_1 + x(e-e_1)$. Aber $xe_1 \in Re_1$, und folglich haben wir $xe_1 = \lambda e_1 + y_1$, wo $y_1 \in M'$. Also ist $x = \lambda e_1 + y_1 + x(e-e_1)$, wo $y = y_1 + x(e-e_1) \in M' + R(e-e_1)$. Somit entspricht jedem maximalen Ideal $M' \subset Re_1$ ein einziges maximales Ideal $M \in \mathfrak{M}_1$. Umgekehrt, jedem maximalen Ideal $M \in \mathfrak{M}_1$ entspricht ein maximales Ideal $M' \subset Re_1$. M' wird durch die Formel $M' = M \cap Re_1$ bestimmt. Dieser Durchschnitt ist, wie man leicht einsieht, ein Ideal. Es ist ein maximales Ideal, denn jedes Element $xe_1 \in Re_1$ kann in folgender Weise dargestellt werden:

$$xe_1 = x(M)\, e_1 + (x - x(M)\, e) e_1,$$

wo das Element $(x - x(M)e)\, e_1 \in M \cap Re_1$. Somit ist eine eineindeutige Korrespondenz zwischen der Menge $\mathfrak{M}'$ der maximalen Ideale des Ringes Re_1 und der Menge $\mathfrak{M}_1$ festgestellt. Man kann auch beweisen, dass diese Korrespondenz ein Homöomorphismus ist.

Wenn der Ring R in eine direkte Summe zerlegbar ist, so ist $\mathfrak{M}$ nicht zusammenhängend. Es sei $R = R_1 + R_2$. Es seien ferner e_1 und e_2 die Einheiten der Ideale R_1 und R_2. Es ist bekannt, dass

$$e_1^2 = e_1\,, \quad e_2^2 = e_2\,, \quad e_1 + e_2 = e$$

ist. Folglich ist $e_1^2(M) = e_1(M)$, d. h. die Funktion $e_1(M)$ kann nur die Werte 0 und 1 annehmen. Da $\mathfrak{M}$ zusammenhängend ist, so ist entweder $e_1(M) = 1$, oder $e_1(M) = 0$. Es sei $e_1(M) = 0$ [andernfalls ist $e_2(M) = 0$]. Nach Satz 8′, § 6, ist

$$\max |e_1(M)| = \lim \sqrt[n]{\|e_1^n\|}.$$

Da $e_1(M) = 0$ ist, und $e_1^n = e_1$, so folgt hieraus, dass $e_1 = 0$ ist. Also ist eine nichttriviale Zerlegung des Ringes R in eine direkte Summe von Idealen unmöglich.

Man beachte, dass wir eigentlich folgendes bewiesen haben. Wenn $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2$ ist, wo $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ zwei abgeschlossene, sich nicht überschneidende Mengen sind, so kann der Ring R in eine direkte Summe von Ringen zerlegt werden, beim ersten von welchen als die Menge von maximalen Idealen $\mathfrak{M}_1$ dient, und beim zweiten $\mathfrak{M}_2$ (in dem Sinne, in welchem es beim Beweis des Satzes dieses Paragraphen erklärt wurde).

Folgerung. Wenn in dem Ringe R nur eine endliche Anzahl von maximalen Idealen existiert, so kann R in eine direkte Summe von Ringen $R_1, \ldots, R_n$ zerlegt werden, in jedem von welchen nur ein einziges maximales Ideal vorhanden ist (primäre Ringe).

§ 12. Analytische Funktionen von Elementen des Ringes

In einem normierten Ring sind mit jedem Element x alle Polynome in x enthalten und, allgemeiner, auch alle „ganzen Funktionen" von x, d. h. alle Elemente der Form $\sum_0^\infty c_n x^n$, wo die Reihe $\sum_0^\infty c_n \zeta^n$ eine ganze analytische Funktion der komplexen Veränderlichen ζ darstellt. In der Tat, in diesem Falle wird die Reihe $\sum_0^\infty c_n x^n$ durch die konvergente Reihe $\sum_0^\infty |c_n| \|x\|^n$ majorisiert. Somit entspricht jeder ganzen analytischen Funktion $f(\zeta)$ eine abstrakte analytische Funktion $f(x)$, die für alle Elemente des Ringes definiert ist. Ferner haben wir gesehen, dass mit jedem Element x, für das $x(M)$ auf keinem maximalen Ideal zu Null wird, in dem Ring auch das Element x^{-1} enthalten ist. Somit entspricht der analytischen Funktion $\frac{1}{\zeta}$, die im Punkte $\zeta = 0$ einen Pol besitzt, eine abstrakte analytische Funktion x^{-1}, die für alle Elemente x definiert ist, für die die Menge der Werte von $x(M)$ den Punkt 0 nicht enthält. In genau derselben Weise entspricht, allgemein, jeder rationalen Funktion $Q(\zeta)$ der komplexen Veränderlichen ζ eine abstrakte analytische Funktion $Q(x)$, die für alle Elemente x definiert ist, für die die Menge der Werte von $x(M)$ keinen Pol der Funktion $Q(\zeta)$ enthält.

Es entsteht nun naturgemäss die Frage über die Erweiterung dieser Korrespondenz, die für ganze und rationale Funktionen festgestellt wurde, auf alle analytischen Funktionen. Diese Frage wird im positiven Sinnè durch den folgenden Satz beantwortet:

Satz 19. *Es sei D ein beschränkter abgeschlossener Bereich in der Ebene der komplexen Veränderlichen ζ, A_D der algebraische Ring aller analytischen Funktionen, die in D regulär sind, mit den gewöhnlichen Operationen der Addition und Multiplikation; es sei $\mathfrak{D}$ die Gesamtheit aller Elemente x des Ringes derart, dass die Menge der Werte von $x(M)$ in A_D vollständig enthalten ist, und $\Gamma_{\mathfrak{D}}$ der algebraische Ring aller Funktionen mit Werten aus dem Ring, die auf $\mathfrak{D}$ definiert sind. Es existiert eine isomorphe Abbildung $f(\zeta) \to f(x)$ des Ringes A_D auf einen Teil $A_{\mathfrak{D}}$ des Ringes $\Gamma_{\mathfrak{D}}$, bei welcher $f(\zeta) = \zeta$ in $f(x) = x$ übergeht, und eine Folge von Funktionen $f_n(\zeta)$, die in irgendeinem D enthaltenden offenen Bereich gleichmässig konvergent ist, in eine Folge von Funktionen $f_n(x)$ übergeht, die für jedes $x \in \mathfrak{D}$ der Norm nach konvergent ist.*

Es gibt nur eine solche Abbildung, und diese wird durch die Formel von Cauchy[6]

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (\zeta e - x)^{-1} f(\zeta)\, d\zeta \tag{1}$$

[6] Die Anwendung des Integrals von Cauchy in ähnlichen Fragen (Untersuchung von Operatoren) findet sich schon bei F. Riesz in seinem Buch über die Theorie der unendlichen Systeme von Gleichungen mit einer unendlichen Anzahl von Unbekannten.

gegeben, wo als Integrationsweg eine beliebige rektifizierbare geschlossene Kurve genommen wird, die ganz in dem Regularitätsbereich der Funktion $f(\zeta)$ gelegen ist und von D eine positive Entfernung hat.

Beweis. Wir werden zuerst zeigen, dass wenn die in dem Satz behauptete Abbildung überhaupt existiert, so muss $f(\zeta)$ in die Funktion $f(x)$ übergehen, die durch die Formel (1) definiert ist, und werden sodann zeigen, dass die durch die Formel (1) gegebene Abbildung in der Tat allen gestellten Bedingungen genügt.

Es möge also die uns interessierende Abbildung existieren. Da ζ in x übergeht, so ist der Homomorphismus $f(\zeta) \to f(x)$ nicht trivial. Daher geht die Funktion $f(\zeta) = 1$ in $f(x) = e$ über. Daraus folgt, dass die Funktion $\frac{1}{f(\zeta)}$, wenn sie zusammen mit $f(\zeta)$ in A_D enthalten ist, in $f^{-1}(x) = (f(x))^{-1}$ übergeht. Es sei nun ζ_0 ein beliebiger, zu D nicht angehörender, Punkt. Dann ist die Funktion $(\zeta - \zeta_0)^{-1}$ in A_D enthalten und muss, nach dem vorherigen, in die Funktion $(x - \zeta_0 e)^{-1}$ übergehen. Da nach der Bedingung $x \in \mathfrak{D}$ und $\zeta_0 \overline{\in} D$, so existiert diese letztere Funktion *.

Betrachten wir nun eine beliebige Funktion $f(\zeta) \in A_D$. Da $f(\zeta)$ in dem beschränkten abgeschlossenen Bereich D regulär ist, so existiert eine rektifizierbare geschlossene Kurve Γ, die ganz in dem Regularitätsbereich der Funktion $f(\zeta)$ liegt und von D eine positive Entfernung hat. Nach der Formel von Cauchy haben wir für alle Punkte $\zeta \in \mathfrak{D}$

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(\lambda)\, d\lambda}{\lambda - \zeta}\,.$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite dieser Gleichung ist der Grenzwert der Folge von Summen der Form

$$f_n(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{n} \frac{f(\lambda_k)(\lambda_{k+1} - \lambda_k)}{\lambda_k - \zeta} \qquad (\lambda_k \in \Gamma),$$

die in dem ganzen Bereich Γ gleichmässig konvergent ist. Einer jeden solchen Summe entspricht die abstrakte Funktion

$$f_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{n} f(\lambda_k)(\lambda_k e - x)^{-1} (\lambda_{k+1} - \lambda_k).$$

Nach der Bedingung müssen diese Funktionen für jedes $x \in \mathfrak{D}$ der Norm nach zu einem Grenzwert konvergieren. Sie sind aber Integralsummen für das Integral $\int\limits_{\Gamma} x(\lambda)\, d\lambda$ der Funktion $x(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} f(\lambda)(\lambda e - x)^{-1}$ der komplexen Veränderlichen λ,

---

* Damit die Funktion $(x - \zeta_0 e)^{-1}$ für alle $\zeta_0 \overline{\in} D$ existiere, müssen wir die betrachteten Elemente x auf den Bereich $\mathfrak{D}$ beschränken.

Man beachte, dass $\mathfrak{D}$ nicht leer ist. In der Tat, sei λ_0 ein innerer Punkt des Bereiches $\mathfrak{D}$, so dass ein $\rho > 0$ derart existiert, dass ein Kreis vom Radius ρ um den Punkt λ_0 ganz in D enthalten ist. Dann gilt

$$x' = \frac{(\lambda - \lambda_0)x}{\|x\|} + \lambda_0 e \in \mathfrak{D}$$

für alle Elemente x des betrachteten Ringes und alle λ, die in dem angegebenen Kreis liegen.

welche infolge der Wahl von Γ existiert und der Norm nach stetig ist. Wie früher hervorgehoben wurde, existiert ein solches Integral im Sinne der Konvergenz nach der Norm. Dabei hängt es nicht von der Wahl von Γ ab, solange Γ den gestellten Bedingungen genügt, da $x(\lambda)$ eine abstrakte analytische Funktion der Veränderlichen λ ist, die ausserhalb D regulär ist, und für solche Funktionen gilt, wie wir gesehen haben, der Satz von Cauchy.

Somit sind wir zu dem Schluss gekommen, dass jeder Funktion $f(\zeta) \in A_D$ eine abstrakte Funktion

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(\lambda)\, d\lambda}{\lambda e - x}$$

entsprechen muss, wobei diese Funktion tatsächlich existiert und für alle $x \in \mathfrak{D}$ eindeutig definiert ist.

Zeigen wir nun, dass die Abbildung $f(\zeta) \to f(x)$, die durch die Formel (1) gegeben ist, tatsächlich die in dem Satz behaupteten Eigenschaften besitzt.

Beweisen wir, dass diese Abbildung ein Homomorphismus ist. Es braucht nur bewiesen zu werden, dass das Produkt in das Produkt übergeht. Mit anderen Worten, wir haben zu zeigen, dass

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(\lambda)\, g(\lambda)\, d\lambda}{\lambda e - x} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(\lambda)\, d\lambda}{\lambda e - x} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{g(\lambda)\, d\lambda}{\lambda e - x} \tag{2}$$

gilt, wo Γ eine rektifizierbare geschlossene Kurve bedeutet, die ganz in dem gemeinsamen Regularitätsbereich der Funktionen $f(\zeta)$ und $g(\zeta)$ enthalten ist und von D eine positive Entfernung hat. Ersetzen wir in dem zweiten Integral auf der rechten Seite von (2) Γ durch ein Γ enthaltendes und von ihm eine positive Entfernung besitzendes Γ_1, das noch ganz in dem Regularitätsbereich der Funktionen $f(\zeta)$ und $g(\zeta)$ liegt, so erhalten wir

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(\lambda)\, d\lambda}{\lambda e - x} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{g(\lambda)\, d\lambda}{\lambda e - x} = -\frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{\Gamma} \int\limits_{\Gamma_1} \frac{f(\lambda) g(\mu)}{(\lambda e - x)(\mu e - x)}\, d\lambda\, d\mu =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{\Gamma} \int\limits_{\Gamma_1} \frac{f(\lambda) g(\mu)}{\mu - \lambda} \left(\frac{1}{\lambda e - x} - \frac{1}{\mu e - x} \right) d\lambda\, d\mu = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(\lambda)}{\lambda e - x} \left(\int\limits_{\Gamma_1} \frac{1}{2\pi i} \frac{g(\mu)\, d\mu}{\mu - \lambda} \right) d\lambda +$$

$$+ \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{\Gamma_1} \frac{g(\mu)}{\mu e - x} \left(\int\limits_{\Gamma} \frac{f(\lambda)\, d\lambda}{\mu - \lambda} \right) d\mu.$$

Da die Funktion $\frac{f(\lambda)}{\mu - \lambda}$ in dem abgeschlossenen Bereich der Ebene der komplexen Veränderlichen λ, der von Γ begrenzt wird, regulär ist, so finden wir nach dem Satz von Cauchy, dass der zweite Summand auf der rechten Seite gleich Null ist. Ferner, da λ ein innerer Punkt des Bereiches ist, der von Γ_1 begrenzt wird, so ist das innere Integral in dem ersten Summanden nach der Formel von Cauchy gleich $g(\lambda)$. Somit kommen wir zu der Gleichung (2).

Zeigen wir nun, dass ζ in x übergeht, d. h. dass

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{\zeta\, d\zeta}{\zeta e - x} = x$$

gilt. Da die Funktion $f(\zeta)\equiv\zeta$ in der ganzen Ebene regulär ist, so können wir für Γ einen Kreis von beliebig grossem Radius um den Nullpunkt nehmen. Wählen wir diesen Kreis so, dass die Reihe

$$\zeta(\zeta e-x)^{-1}=e+\zeta^{-1}x+\zeta^{-2}x^2+\ldots$$

absolut konvergiert. Dann erhalten wir nach gliedweiser Integration

$$\frac{1}{2\pi i}\int\frac{\zeta\,d\zeta}{\zeta e-x}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}(e+\zeta^{-1}x+\ldots)\,d\zeta=x.$$

Es möge nun $f_n(\zeta)\rightarrow f(\zeta)$ gleichmässig in dem offenen Bereich D' gelten, der D enthält. Nehmen wir Γ im Inneren von D' so liegend, dass es von D eine positive Entfernung hat, so erhalten wir

$$\|f_n(x)-f(x)\|=\left\|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(\zeta)-f_n(\zeta)}{\zeta e-x}\,d\zeta\right\|\leqslant$$

$$\leqslant\max_{\zeta\in\Gamma}|f(\zeta)-f_n(\zeta)|\cdot\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma}\|(\zeta e-x)^{-1}\|\,d\zeta\rightarrow 0.$$

Es bleibt uns zu zeigen, dass der Homomorphismus $f(\zeta)\rightarrow f(x)$ ein Isomorphismus ist, d. h. dass $f(x)$ identisch Null nur in dem Fall ist, wenn $f(\zeta)\equiv 0$ ist.

Aber wenn $f(\zeta)\not\equiv 0$ ist, so existiert ein abgeschlossener Bereich $D_1\subset D$, in dessen allen Punkten $f(\zeta)\neq 0$ ist. Dann ist $\frac{1}{f(\zeta)}\in A_{D_1}$, und die Funktion $f^{-1}(x)$ ist für alle x definiert, für die die Menge der Werte von $x(M)$ in D_1 enthalten ist. Nach dem Bewiesenen haben wir $f(x)\cdot f^{-1}(x)=e$, und folglich $f(x)\neq 0$ für alle angegebenen Elemente x.

Somit ist der Beweis des Satzes 19 geleistet. Aus der Formel (1) erhalten wir noch den folgenden

Satz 20. *Wenn $f(\zeta)$ in dem Bereich der Werte der Funktion $x(M)$ regulär ist, so existiert im Ringe ein solches Element y, dass $y(M)=f(x(M))$ für alle maximalen Ideale M ist.*

Beweis. Da $x(M)$ eine stetige und beschränkte Funktion ist, die auf einem bikompakten Raum definiert ist, so ist die Gesamtheit ihrer Werte eine beschränkte abgeschlossene Menge F in der komplexen Ebene. Wie wir gesehen haben, existiert das Integral (1) und nimmt einen und denselben Wert an für jedes Γ, das ganz in dem Regularitätsbereich der Funktion $f(\zeta)$ enthalten ist und von F eine positive Entfernung hat. Dieses Integral ist gerade das Element des Ringes, das die im Satz angegebene Eigenschaft besitzt. In der Tat, bei fixiertem M und veränderlichem x ist $x(M)$ ein lineares Funktional von x, und also haben wir

$$f(x)(M)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}(\lambda e-x)^{-1}(M)f(\lambda)\,d\lambda=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(\lambda)\,d\lambda}{\lambda-x(M)}=f(x(M)).$$

Mathematisches Institut der Akademie
der Wissenschaften der U. d. S. S. R.

(Поступило в редакцию 27/VI 1940 г.)

Нормированные кольца

И. М. Гельфанд (Москва)

(Резюме)

Краткое изложение этой работы опубликовано в Докладах Академии наук, **XXIII**, N. 5, (1939). Не изложены в Д. А. Н. лишь результаты двух последних параграфов. В § 11 доказывается, что множество максимальных идеалов нормированного кольца не связно тогда и только тогда, когда кольцо разлагается в прямую сумму идеалов. В § 12 изучается вопрос о том, когда аналитическая функция от элемента кольца также принадлежит кольцу.