algebra-de-conjuntos

February 13, 2015

1 Álgebra de Conjuntos

```
In [12]: %matplotlib inline
```

> Álgebra é constituída de operações definidas sobre uma soleção de objetos. Neste contexto, *álgebra de conjuntos* corresponderia às operações definidas sobre todos os conjuntos.

As operações da álgebra de conjuntos podem ser *não reversíveis* e *reversíveis*: - Não reversíveis - União - Intersecção - Diferença - Reversíveis - Complemento - Conjunto das partes - Produto cartesiano - União disjunta

É possível estabelecer uma relação entre a lógica e as operações da álgebra de conjuntos:

Conectivo ou relação lógicos	Operação ou relação sobre conjuntos
Negação	Complemento
Disjunção	União
Conjunção	Intersecção
Implicação	Continência
Equivalência	Igualdade

As propriedades dos conectivos e operadores lógicos são válidas na teoria dos conjuntos, como mostrado a seguir:

Conectivo lógico	Operação sobre conjuntos
Idempotência: $\wedge$ e $\vee$	idmpotência: intersecção e união
Comutativa: $\wedge$ e $\vee$	comutativa: intersecção e união
Associativa: $\wedge$ e $\vee$	associativa: intersecção e união
Distributiva:$\wedge$ sobre $\vee\vee$ sobre $\wedge$	distributiva:intersecção sobre uniãounião sobre intersecção
Dupla negação	duplo complemento
DeMorgan	DeMorgan
absorção	absorção

1.1 Operações não reversíveis

1.1.1 União

Sejam A e B dois conjuntos. A união entre eles, $A \cup B$, é definida como:

$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$

Considerando a lógica, o conjunto A pode ser definido como $x \in A$. O conjunto B pode ser definido como $x \in B$. Ou seja, a propriedade de pertiência é utilizada para indicar uma proposição lógica.

A união corresponde à operação lógica *disjunção* (símbolo $\vee$).

Exemplo: Considere os conjuntos: - Digitos = $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ - Vogais = $\{a, e, i, o, u\}$ - Pares =

$\{0, 2, 4, 6, ...\}$
Então:

- Digitos $\cup$ Vogais $= \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, a, e, i, o, u\}$
- Digitos $\cup$ Pares $= \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 16, ...\}$

Exemplo: Suponha os conjuntos: - $A = \{x \in N | x > 2\}$ - $B = \{x \in N | x^2 = x\}$
Então: - $A \cup B = \{0, 1, 3, 4, 5, 6, ...\}$
É importante observar que o resultado da união é um conjunto sem repetições de elementos.
Vejamos as propriedades da união: - **Elemento neutro**: $A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$ - **Idempotência**: $A \cup A = A$ - **Comutativa**: $A \cup B = B \cup A$ - **Associativa**: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

Prova da propriedade *elemento neutro* Elemento neutro: $A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$.

Assim, há duas igualdades, que podem ser analisadas considerando a validade da transitividade [da igualdade]. Assim, temos que observar alguns casos.

(A) Para provar $A \cup \emptyset = \emptyset \cup A$:

O primeiro caso (1): Seja $x \in A \cup \emptyset$. Então devemos provar que $A \cup \emptyset \subseteq \emptyset \cup A$: - $x \in A \cup \emptyset \implies$ (definição de união) - $x \in A \vee x \in \emptyset \implies$ (comutatividade da disjunção) - $x \in \emptyset \vee x \in A \implies$ (definição de união) - $x \in \emptyset \cup A$

Portanto, $A \cup \emptyset \subseteq \emptyset \cup A$.

O segundo caso (2): Seja $x \in \emptyset \cup A$. Então devemos provar que $\emptyset \cup A \subseteq A \cup \emptyset$: - $x \in \emptyset \cup A \implies$ (definição de união) - $x \in \emptyset \vee x \in A \implies$ (comutatividade da disjunção) - $x \in A \vee x \in \emptyset \implies$ (definição de união) - $x \in A \cup \emptyset$

Portanto, $\emptyset \cup A = A \cup \emptyset$.

Terceiro caso (3): De (1) e (2) concluímos que $A \cup \emptyset = \emptyset \cup A$.

(B) Para provar $A \cup \emptyset = A$:

Quarto caso (4): Seja $x \in A \cup \emptyset$. Então devemos provar que $A \cup \emptyset \subseteq A$: - $x \in A \cup \emptyset \implies$ (definição de união) - $x \in A \vee x \in \emptyset \implies$ ($x \in \emptyset$ é sempre *false*) - $x \in A$

Portanto, $A \cup \emptyset \subseteq A$.

Quinto caso (5): Seja $x \in A$. Então devemos provar que $A \subseteq A \cup \emptyset$: - $x \in A \implies$ ($x \in A$ é sempre *true*, portanto podemos considerar $p \implies p \vee q$) - $x \in A \vee x \in \emptyset$ (definição de união) - $x \in A \cup \emptyset$

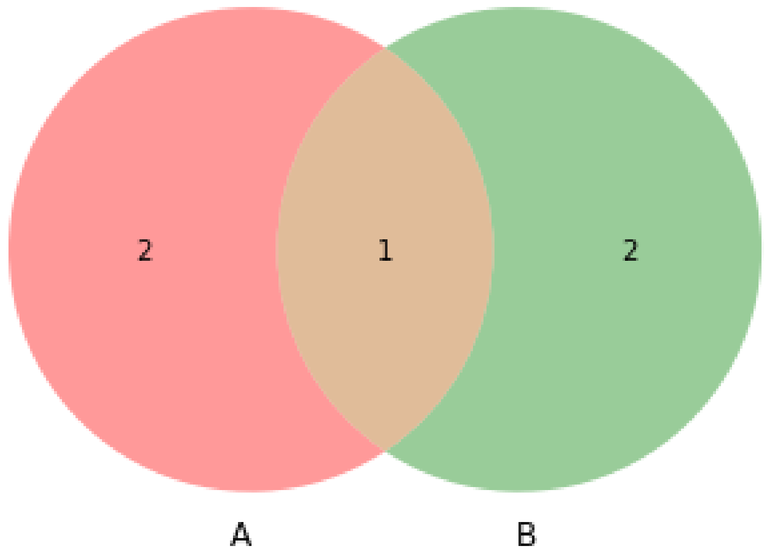
Portanto, $A \subseteq A \cup \emptyset$.

Sexto caso (6): De (4) e (5) concluímos que $A \cup \emptyset = A$.

Sétimo caso (7): Por fim, de (3) e (6) e pela transitividade da igualdade, concluímos que $A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$ e provamos a propriedade do *elemento neutro* da união.

Exercício 2.1: Prove as propriedades idempotência, comutativa e associativa da união.

In [17]:
```
import pylab as plt
from matplotlib_venn import venn2, venn2_circles
set1 = set([1,2,3])
set2 = set([3,4,5])
venn2([set1, set2], ('A', 'B'))
plt.show()
```



1.1.2 Intersecção

Sejam dois conjuntos A e B. A intersercção entre eles, $A \cap B$ é definida como:

$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$

A união corresponde à operação lógica *conjunção* (símbolo $\wedge$).

Sejam A e B dois conjuntos não vazios. Se $A \cap B = \emptyset$, então A e B são chamados *conjuntos disjuntos*, *conjuntos independentes*, ou *conjuntos mutuamente exclusivos*.

Exemplo: Considere os conjuntos: - Digitos $= \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ - Vogais $= \{a, e, i, o, u\}$ - Pares $= \{0, 2, 4, 6, ...\}$

Então: - Digitos $\cap$ Vogais $= \emptyset$ - Digitos $\cap$ Pares $= \{0, 2, 4, 6, 8\}$

Vejamos as propriedades da intersecção: - **Elemento neutro**: $A \cap U = U \cap A = A$ - **Idempotência**: $A \cap A = A$ - **Comutativa**: $A \cap B = B \cap A$ - **Associativa**: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

1.1.3 Propriedades envolvendo união e intersecção

As propriedades a seguir envolvem as operações de união e intersecção: - **Distributividade da intersecção sobre a união**: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ - **Distributividade da união sobre a intersecção**: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ - **Absorção**: $A \cap (A \cup B) = A$ e $A \cup (A \cap B) = A$.

Exercício 2.2: Algumas linguagens de programação possuem estruturas de dados para conjuntos, as quais disponibilizam, também, operações sobre estes. Faça uma pesquisa sobre linguagens de programação e, selecionando uma linguagem de programação que suporte definição de conjuntos e operações sobre eles, apresente exemplos, contemplando as operações e propriedades vistas até o momento (e.g. pertiência, contingência, união e intersecção).

Exercício 2.3: Considerando uma linguagem de programação que forneça suporte a conjuntos e operações sobre eles, crie um programa que leia conjuntos em arquivos texto (um elemento do conjunto em cada linha) e gere a saída também em um arquivo texto (também um elemento em cada linha). O programa deve considerar e demonstrar a utilização das operações e propriedades vistas até o momento (e.g. pertiência, contingência, união e intersecção).

Exercício 2.4: Suponha o conjunto universo $S = \{p, q, r, s, t, u, v, w\}$ bem como os seguintes conjuntos: - $A = \{p, q, r, s\}$ - $B = \{r, t, v\}$ - $C = \{p, s, t, u\}$

Determine:

a) $B \cap C$

b) $A \cup C$

c) $\sim C$

d) $A \cap B \cap C$

e) $\sim (A \cup B)$

f) $(A \cup B) \cap \sim C$