Introducao

February 13, 2015

1 Introdução

```
In [2]: %matplotlib inline
```

1.1 Matemática Discreta

As Diretrizes Curriculares do MEC para os cursos de computação e informática definem que:

> A matemática, para a área de computação, deve ser vista como uma ferramenta a ser usada na definição formal de conceitos computacionais (linguagens, autômatos, métodos etc.). Os modelos formais permitem definir suas propriedades e dimensionar suas instâncias, dadas suas condições de contorno.

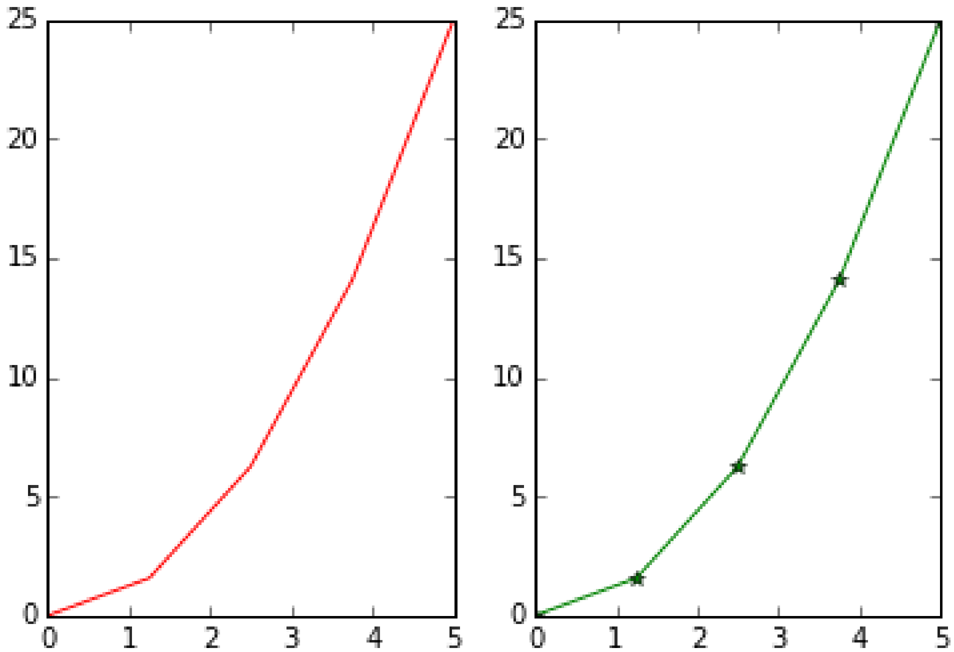
Além disso, afirma:

> Considerando que a maioria dos conceitos computacionais pertencem ao domínio discreto, a **matemática discreta** (ou também chamada álgebra abstrata) é fortemente empregada.

Desta forma, a **Matemática Discreta** preocupa-se com o emprego de técnicas e abordagens da matemática para o entendimento de problemas a serem resolvidos com computação. Mas o que significa ser **discreto**? A matemática, por si, trata também do domínio **contínuo**. Assim, estes domínios são opostos: contínuo e discreto. Para entender isso melhor, observe o gráfico a seguir:

```
In [3]: from pylab import *
```

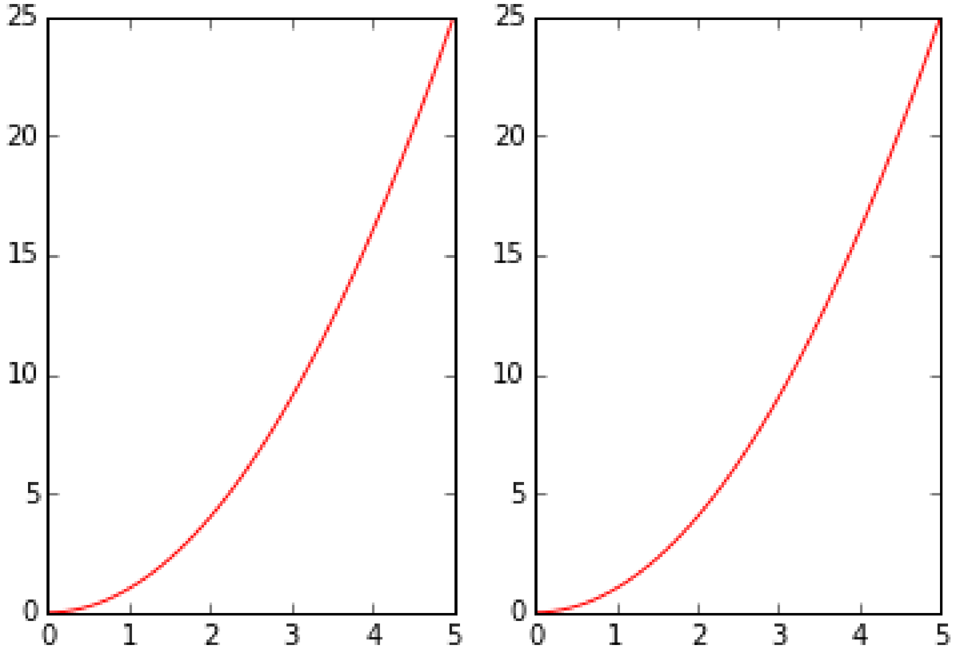
```
In [10]: x = linspace(0, 5, 5)
         y = x ** 2
         subplot(1,2,1)
         plot(x, y, 'r-')
         subplot(1,2,2)
         plot(x, y, 'g*-');
```



O gráfico representa a função $y = x^2$, com $0 \leq x \leq 5$. O gráfico da direita destaca os pontos selecionados. Neste gráfico, há 6 amostras, de 0 a 6.

Aumentando-se o número de amostras em dois instantes, para 100 e para 1000 tem-se:

```
In [11]: x1 = linspace(0, 5, 100)
         y1 = x1 ** 2
         x2 = linspace(0, 5, 1000)
         y2 = x2 ** 2
         subplot(1,2,1)
         plot(x1, y1, 'r-')
         subplot(1,2,2)
         plot(x2, y2, 'r-');
```



O que se pode perceber é que quanto mais se aumenta o número de amostras, mais se aproxima de uma curva perfeita. Entretanto, há um certo limite de percepção da perfeição dessa curva, por assim dizer. Por exemplo, embora a quantidade de amostras do gráfico da esquerda seja menor, a diferença para o gráfico da direita, visualmente falando, é pouco perceptível.

Considere outro exemplo: um computador possui uma capacidade de armazenamento virtualmente infinita. "Virtualmente" porque embora se aceite um limite, ele não é conhecido, já que a quantidade de unidades de armazemamento pode ser bastante grande. Assim, no contexto da computação, embora algo possa ser considerado finito ou infinito, ele é *contável* ou *discreto* no sentido de que pode ser enumerado ou sequenciado, de forma que não existe um elemento entre quaisquer dois elementos consecutivos da enumeração. Em outras palavras, se um computador possui dois discos rígidos (D1 e D2), não surgirá, do nada, um terceiro disco ou meio disco entre D1 e D2.

No exemplo do computador, embora a quantidade de unidades de armazenamento não seja conhecida, ela é contável e enumerável. Na matemática, o conjunto dos números naturais é contável, equanto o conjunto dos números reais não é contável.

Assim, a matemática discreta possui como ênfase os estudos matemáticos baseados em conjuntos contáveis, sejam eles finitos ou infinitos. De forma oposta, a *matemática do continuum* possui ênfase nos conjuntos não contáveis. Um exemplo disso são o cálculo diferencial e integral.

1.2 Teoria dos conjuntos

Os **conjuntos** são a base da forma de representação de enumerações de elementos em matemática discreta. Por definição um conjunto é:

> uma estrutura que agrupa objetos e constitui uma base para construir estruturas mais complexas.

Em outras palavras, um conjunto é uma coleção, ou uma lista, de elementos.

Segue uma definição mais formal:

> Um *conjunto* é uma coleção de zero ou mais objetos distintos, chamados *elementos* do conjunto, os quais não possuem qualquer ordem associada.

O fato de não haver uma *ordem associada* não significa que os elementos não possam estar ordenados, num dado contexto, conforme algum critério. Apenas indica que, no geral, isso não é obrigatório.

Há três formas de representar conjuntos: notação por extensão e notação por compreensão.

Notação por extensão é quando todos os elementos do conjunto estão enumerados, representados entre chaves e separados por vírgula. Exemplo:

Vogais = $\{a, e, i, o, u\}$.

Entende-se que se um conjunto pode ser representado por extensão, então ele é *finito*. Caso contrário, é *infinito*.

Notação por compreensão: quando é usada uma representação por propriedades. Os exemplos usam uma pequena diferença de notação, mas representam a mesma coisa:

- Pares = $\{n|n$ é um número par$\}$
- Pares = $\{n : n$ é um número par$\}$

Este conjunto é interpretado como: o conjunto de todos os elementos n tal que n é um número par. A forma geral de representar um conjunto por propriedades é:

$X = \{x : p(x)\}$

Isso quer dizer que x é um elemento de X se a propriedade $p(x)$ for verdadeira.

A notação por propriedades é uma boa forma de representar conjuntos *infinitos*.

Há ainda uma outra forma aceitável de representar conjuntos usando uma representação semelhante à de por extensão. Exemplos: - Digitos = $\{0, 1, 2, ..., 9\}$ - Pares = $\{0, 2, 4, 6, ...\}$

Embora haja elementos ausentes, substituídos por reticências (...) é completamente aceitável e entendível o que se quer informar com a descrição do conjunto.

A seguir, revemos conceitos de algumas relações entre e com conjuntos ou elementos.

1.2.1 Pertinência

Se um elemento a pertence ao conjunto A isso é representado como: $a \in A$. Caso contrário, se a não pertence a A, então representa-se como: $a \notin A$.

Exemplos: Pertence, não pertence: - Quanto ao conjunto Vogais = $\{a, e, i, o, u\}$: - $a \in$ Vogais - $h \notin$ Vogais - Quanto ao conjunto $B = \{x : x$ é brasileiro$\}$: - Pele $\in B$ - Bill Gates $\notin B$

1.2.2 Conjuntos importantes

O **conjunto vazio** é um conjunto sem elementos, representado como $\{\}$ ou $\emptyset$. Exemplos: - o conjunto de todos os brasileiros com mais de 300 anos; - o conjunto dos números que são, simultaneamente, ímpares e pares.

O **conjunto unitário** é um conjunto constituído por um único elemento. Exemplos: - o conjunto constituído pelo jogador de futebol Pelé; - o conjunto de todos os números que são, simultaneamente, pares e primos, ou seja: $P = \{2\}$; - um conjunto unitário cujo elemento é irrelevante: $1 = \{*\}$.

O **conjunto universo**, normalmente denotado por U, contém todos os conjuntos considerados em um dado contexto. Por isso, não é fixo (pois depende do contexto).

Outros conjuntos importantes: - N: o conjunto dos números naturais (inteiros positivos e o zero) - Z: o conjunto dos números inteiros (inteiros negativos, positivos e o zero) - Q: o conjunto dos números racionais (os que podem ser representados na forma de fração) - I: o conjunto dos números irracionais - R: o conjunto dos números reais

1.2.3 Alfabetos, palavras e linguagens

Em computação, e mais especificamente em linguagens de programação, um conceito importante é o que define o conjunto de elementos ou termos-chave da linguagem.

Um **alfabeto** é:

> um conjunto finito cujos elementos são denominados *símbolos* ou *caracteres*.

Uma **palavra** (cadeia de caracteres ou sentença) sobre um alfabeto é:

uma sequência finita de símbolos justapostos.

Uma **linguagem [formal]** é

um conjunto de palavras sobre um alfabeto.

Exemplos: alfabeto, palavra - Os conjuntos $\emptyset$ e $\{a, b, c\}$ são alfabetos - O conjunto N não é um alfabeto - ϵ é uma palavra vazia - Σ é geralmente usada para representar um alfabeto - Σ^* é o conjunto de todas as palavras possíveis sobre o alfabeto Σ - ϵ é uma palavra do alfabeto $\emptyset$ - $\{a, b\}^* = \{\epsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, ...\}$

1.2.4 Subconjunto e igualdade de conjuntos

A *continência* permite introduzir os conceitos de *subconjunto* e *igualdade de conjunto*.

Se todos os elementos de um conjunto A também são elementos de um conjunto B, então A está *contido* em B, o que é representado por: $A \subseteq B$. Isso também é lido como A é *subconjunto* de B.

Se $A \subseteq B$, mas há $b \in B$ tal que $b \notin A$, então pode-se dizer que A está *contido propriamente* em B, ou que A é *subconjunto próprio* de B. Isso é denotado por: $A \subset B$.

A negação de *subconjunto* e *subconjunto próprio* é, respectivamente: - $A \nsubseteq B$ e - $A \not\subset B$

Exemplos: continência, subconjunto - $\{a, b\} \subseteq \{b, a\}$ - $\{a, b\} \subset \{a, b, c\}$, e $\{a, b\} \subseteq \{a, b, c\}$

Se os elementos de A também são elementos de B e vice-versa, então $A = B$. Formalmente, uma condição para $A = B$ é que $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$.

Exemplo: - $\{1, 2, 3\} = \{3, 3, 3, 2, 2, 1\}$

É importante notar que pertinência ($\in$) é usado entre elementos e conjuntos, enquanto continência ($\subset$ e $\subseteq$) é usada entre conjuntos.

Por definição, um conjunto qualquer é subconjunto de si mesmo, e $\emptyset$ é subconjunto de qualquer conjunto.

Exemplo: - Seja $A = \{1, 2\}$ então os subconjuntos de A são: $\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$ e $\{1, 2\}$.