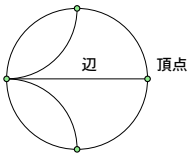
1　はじめに

本レポートはグラフの平面性について議論する。平面性を有するグラフが持つ特徴や平面性判定について考察する。

2　基本的な定義

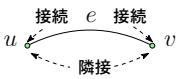
グラフの頂点集合と辺集合　グラフ $G = (V, E)$ は有限集合 V と V の直積の部分集合 $E \subseteq V \times V$ の二個組からなる組合せ構造である。集合 S と T の直積は S と T から要素をそれぞれ一つ取り出して形成するペアを全て集めて作った集合で $S \times T$ と書く。平面の座標空間を $\mathbb{R}^2$ と書くように、集合 V の直積は $V \times V$ を省略して V^2 と書くこともある。V の要素を頂点、E の要素を辺と呼ぶ。これらの名称は多角形・多面体に倣う。各辺に順序が付与され系列として扱う場合 G を有向グラフという。そうでない場合は無向グラフという。辺 (u, v) の頂点 u, v を端点という。有向グラフにおいては u を始点 v を終点と呼ぶ。



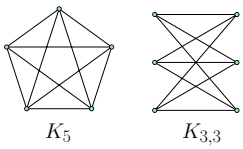
ケーニヒスベルクの七つの橋

単純グラフ　ある辺 $e = (u, v)$ が $u = v$ の場合 e を自己ループという。グラフ $G = (V, E)$ が単純であるという言及は、E に自己ループや重複する辺を含まないことを意味する。重複する辺を許す場合、それらの辺を多重辺と呼ぶ。平面性を判定する際は、自己ループや多重辺を削除もしくは細分した単純なグラフを対象とする。

頂点と辺の近接性　無向グラフ $G = (V, E)$ において $e = (u, v) \in E$ なら u と v は互いに隣接するという。また、e は u と v を接続するという。頂点 u の隣接頂点の集合 $N(u)$ は $N(u) = \{v \mid (u, v) \in E\}$ のように記述できる。頂点 v の次数を $\deg(v)$ と書き v に接続する辺の個数とする。$\deg(v) = |N(v)|$ とも書ける。$\deg(v) = 0$ の頂点 v を孤立点という。



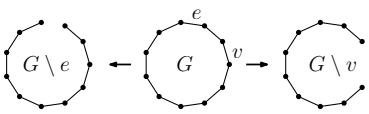
完全グラフ　すべての二頂点が隣接するグラフを完全グラフという。つまり $G = (V, E)$ に対して $E = V^2$。n 頂点の完全グラフを K_n と書く。グラフ $G = (V_1 \cup V_2, E)$ が、頂点集合を二つの互いに素な集合 V_1, V_2 に分割でき、どの辺も V_1 の頂点と V_2 の頂点を接続するグラフを二部グラフという。完全二部グラフはその辺集合が $E = V_1 \times V_2$ となるグラフである。K_{n_1,n_2} で $n_1, n_2 = |V_1|, |V_2|$ の完全二部グラフを表す。

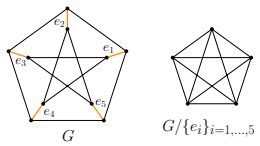


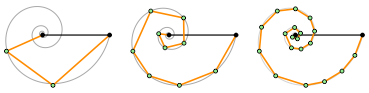
グラフの局所編集（削除、縮約、細分）　$G = (V, E)$ からある辺 $e \in E$ を削除して得られるグラフを $G \setminus e$ で表す。$G \setminus e$ は e 以外の G の接続関係を継承する。同様に $G \setminus v$ で、頂点 $v \in V$ と v に接続するすべての辺を削除することで得られるグラフを表わす。二項演算子 $\setminus$ は集合の差演算に倣う。また、$S \subseteq V$ や $T \subseteq E$ に対して $G \setminus S$ や $G \setminus T$ の記述を許す。

辺 e が自己ループや多重辺でないとき、e の縮約は e の端点を併合して一つの頂点 v_e としつつ e を削除する操作である。このとき両端点に接続する e を除くすべての辺の接続関係を v_e に引き継ぐ。自己ループや多重辺に縮約は適用できない。G/e によって副次的に多重辺が生成されるが一般的にこれは削除され単純化される。ただ、数学的帰納法など証明手順によっては敢えて多重辺を削除しないこともある。G/e で e を縮約して得られるグラフを表す。これも $T \subseteq E$ に対して G/T のような記述を許す。

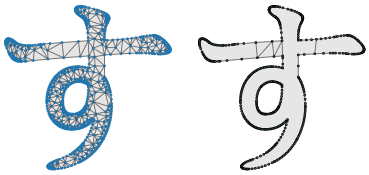
グラフの辺細分は、ある一辺の内部を部分分割して二辺で置き換える操作である。$K_{3,3}$ もしくは K_5 に対して有限回の辺細分を適用して得られるグラフをクラトフスキーグラフという。クラトフスキーグラフは、グラフの平面性を特徴付ける重要な役割を果たす。





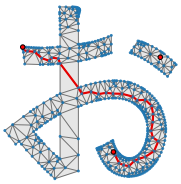


グラフの集合演算と部分グラフ　グラフ $G_1 = (V_1, E_1)$ と $G_2 = (V_2, E_2)$ に対してグラフの和を $G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$ とする。同様にグラフの積を $G_1 \cap G_2 = (V_1 \cap V_2, E_1 \cap E_2)$ とする。あるグラフ G および H に対して $G \cup H = G$ のとき H を G の部分グラフという。任意の頂点集合 $S \subseteq V$ に対して、頂点集合が S であり、辺集合が E の部分集合で両端点が S に含まれるものを $G[S]$ と書き G の誘導部分グラフという (右図右)。また、任意の辺集合 $T \subseteq E$ が誘導するグラフ $G[T]$ を $G[T] = (V_T, T)$ と定義する。ただし $V_T = \bigcup_{(x,y)\in T} \{x, y\}$。

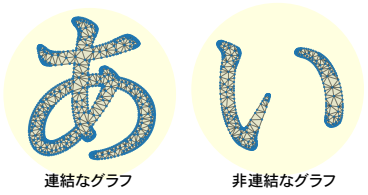


ひらがな「す」のアウトラインの頂点集合を S とした際の誘導部分グラフ $G[S]$。

経路と閉路　次の条件を満たす頂点と辺の交互列を経路もしくはパスという。始点と終点が異なる頂点で、連続する頂点と辺は接続し、いずれの頂点と辺も重複しない。始点と終点が同じ経路を閉路という。経路や閉路の長さは辺の個数で測られる。一般的に任意の経路の長さは 1 以上だが数学的帰納法を用いる証明手段や言語実装など、頂点一つからなる長さ 0 の経路を許すと簡潔に記述できることがある。無向グラフにおいて頂点 u, v 間に経路 p が存在するなら、u と v は互いに到達可能であるといい p は u と v を接続するという。グラフ内の最小閉路の長さを内周という。閉路を持たないグラフの内周は ∞ とする。

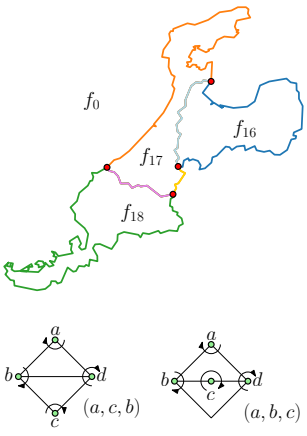


グラフの連結性　無向グラフが連結であるという言及は任意の二頂点が互いに到達可能であることを意味する。逆に互いに到達可能でない頂点対が一つでもあれば、そのグラフは非連結であるという。非連結なグラフ内の連結な部分グラフを連結成分という。ある頂点 v をグラフから削除すると非連結になるとき v を切断点という。同様に、ある辺 e の削除で非連結になるなら e を橋という。閉路を持たない連結なグラフを木という。木における頂点および辺は、いずれも切断点であり、橋である。平面性判定は連結成分ごとに実行すれば良いので、以下では対象グラフは連結とする。



境界条件には瑣末だが注意が必要である。一つの頂点のみからなるグラフを自明なグラフという。一般的に自明なグラフには連結・非連結の概念は導入されない。ただ、自明な部分グラフとしての孤立点は 0-連結成分として他の成分とは区別されることがある。いずれにしても、平面性判定において頂点数が 4 以下のグラフはすべて平面的なので、自明なグラフは本質的に対象外にできる。

平面描画と平面埋込み　あるグラフ G の描画 Γ は、各頂点 v を平面 $\mathbb{R}^2$ 上の点 $\Gamma(v)$ へ、各辺 (u, v) を $\Gamma(u), \Gamma(v)$ を端点とするジョルダン開曲線へ写像する関数である。ジョルダン曲線は自己交差しない平面曲線で、開という形容は端点が異なることを意味する。平面描画は二つの異なる辺の写像が交差しないことをいう。ただし共通して持つ端点で接することは許される。平面描画を持つグラフを平面的グラフという。任意の平面描画は平面を連続な領域に部分分割する。この部分領域を面という。また、非有界な領域を外面という (右図 f_0)。



あるグラフの描画は無限に存在するが、等価な描画を類別することで表現方法は有限個に限定される。ある描画が与えられたとき、各頂点に関して接続する辺を例えば時計回りのような一定の基準に則って順序付けた構造を組合せ埋込みという。二つの描画が等価であるというのは、等価な組合せ埋込みを持つことで、すべての頂点の接続辺の回転順序が辞書式で一致することを意味する。平面描画を与える組合せ埋込みを平面埋込みという。

極小性と極大性　ある制約を満たす集合 S が極小性を有するとは S の要素を一つでも削除すると制約を満たさなくなることをいう。同様に、極大性は S に要素を追加すると不成立になる飽和状態をいう。例えば、辺集合が誘導する部分グラフの平面性に対する極小性と極大性を考える。平面的なグラフから辺を削除しても平面性は損なわないが追加すると非平面的になり得るので極大な平面的グラフを考えることができる。極大な平面的グラフはその平面描画のすべての面が三辺で構成されるグラフとなる。一方で極小な非平面的グラフはクラトフスキーグラフとなる (クラトフスキーの定理 4)。

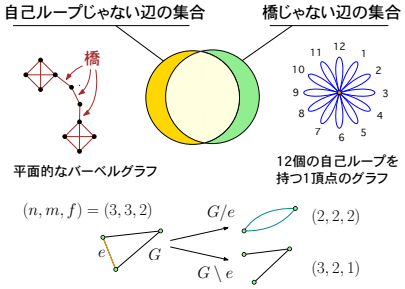
3　平面的なグラフの性質

グラフの平面性を特徴付ける性質は 1930 年にロシアの数学者クラトフスキーが初めて正確に記述した。その後約半世紀を経て平面性を判定する線形時間アルゴリズムが提案され、言語実装に至ったのは 90 年代。現在は様々な定理・補題を礎に 100 行程度で記述できるまで簡潔になっている。ここでは代表的な三つの定理を通して平面的グラフの基本的な性質を確認する。

3.1　オイラーの多面体公式

オイラーの多面体公式は、グラフが非平面的であることの緩い必要条件を記述する側面を持つ。辺の個数が $3n-6$ より多ければ非平面的と判定できる。ただし $3n-6$ 以下のグラフであっても非平面的なグラフは存在するため、緩い必要条件でグラフを平面的と決めつける判定方法は偽陽性を持つ。

定理 1 (オイラーの多面体公式)**.** 連結な平面的グラフ G が n 個の頂点、m 個の辺、そして f 個の面で構成されているとき、$n-m+f=2$ が成り立つ。



Proof. G が辺を持たない自明なグラフなら $1+0+1=2$。辺の個数が $m-1$ の任意の連結な平面的グラフで主張が成り立つと仮定する。G の任意の辺 e に関して次の二つの重複する場合分けを考える。

　e が自己ループでも多重辺でもないなら e の縮約 G/e は $n-1$ 個の頂点と $m-1$ 個の辺、f 個の面を持つ。ただし、この辺縮約は副次的に生成される多重辺を削除しないものとする。また、e が橋でないなら e を削除して得られるグラフ $G\setminus e$ は n 個の頂点、$m-1$ 個の辺、そして $f-1$ 個の面を持つ。いずれも帰納法の仮定から $n-m+f=2$ を得る。　□

系 1.1. 単純で連結な平面的グラフ $G=(V,E)$ が $|V|\geq 3$ で、内周が定数 γ で抑えられるなら $|E|\leq \frac{\gamma}{\gamma-2}(|V|-2)$ が成り立つ。

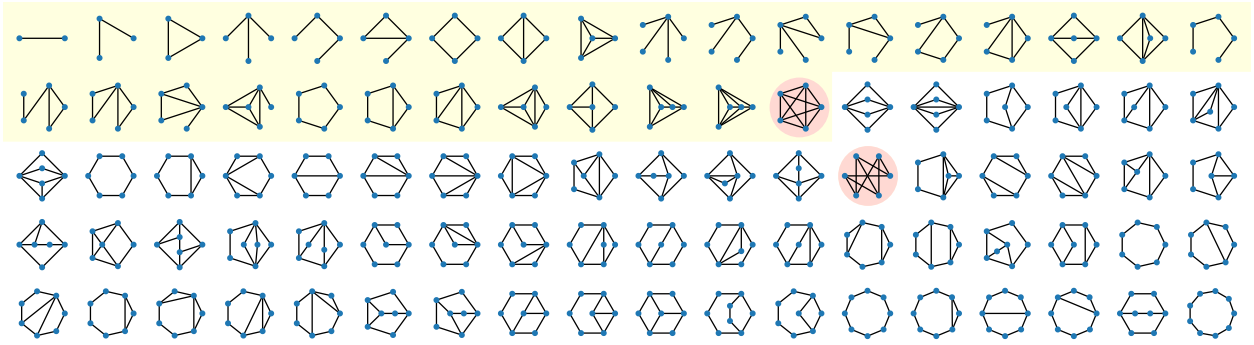
Proof. 握手補題からの類推より $\gamma|F|\leq 2|E|$ を得る。オイラーの多面体公式より $|V|-|E|+\frac{2}{\gamma}|E|\geq 2$。この式を整理すると主張を得る。　□

補題 1 (握手補題)**.** グラフ $G=(V,E)$ の次数の合計は辺の個数の 2 倍、すなわち $\sum_{v\in V}\deg(v)=2|E|$。

Proof. 各頂点の接続辺数を数え上げると、どの辺も二回カウントされる。　□

系 1.2. 最小頂点数の非平面的グラフは K_5。最小辺数の非平面的グラフは $K_{3,3}$。

Proof. $K_5, K_{3,3}$ いずれも系 1.1 より非平面的。下に連結な単純グラフで 5 頂点以下、もしくは 6 頂点以上でも 9 辺以下で 2-連結のグラフを示す。K_5 および $K_{3,3}$ 以外はいずれも平面描画を持つ。　□



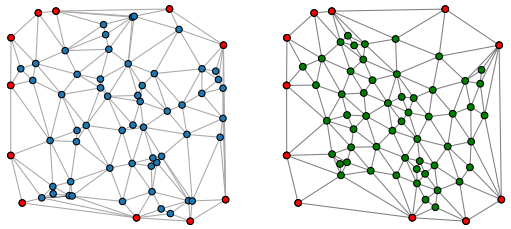
k-連結性および、極小非平面的グラフは 2-連結 (補題 9) は、それぞれ第 3.2 節および第 3.3 節で扱う。

3.2　タットの平面描画

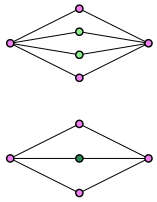
ここではタットの平面描画について考察する。タットの平面描画は 1963 年にイギリスの数学者タットによって提案されたグラフの描画方法で、平面描画の基礎としての重要な役割を持つ。

定義 1 (タットの平面描画)**.** 単純で 3-連結な平面的グラフに対して、次の三つの制約を満たす描画をタットの平面描画と呼ぶ。外面境界は凸多角形。内部の頂点は隣接頂点の重心。各辺は直線分。

右にタットの平面描画の例を示す。左は単位正方形内に一様ランダムに生成した 50 点の集合 S に対するドロネー三角形分割であり、右はそれを幾何学的グラフと見做したタットの平面描画である。定理の第一制約に従い外面境界に S の凸包 (赤点) をとっている。このとき第二 (隣接重心)・第三 (辺直線分) 制約を満たすことが確認できる。



k-連結性　定義 1 の前提条件に 3-連結性が付与されているが、これは平面描画の縮退を排除するためにある。連結グラフ $G=(V,E)$ の k-連結性を任意の整数 $k\geq 1$ に対して次のように定義する。どんな $(k-1)$-頂点部分集合 $S\subseteq V$ を持ってきても $G\setminus S$ が非連結にならないなら G は k-連結であるという。また一般的に k-連結であれば $(k-1)$-連結である。右の完全二部グラフ $K_{2,4}$ の紫頂点を外面としたタットの平面描画が下段になる。両端の 2 頂点を削除すると残りは孤立点になるので $K_{2,4}$ は 2-連結グラフである。このとき外面に属さない頂点は隣接頂点の中点をとるので 2 頂点が一つの座標に収束する。

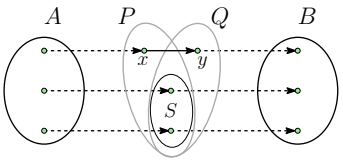


メンガーの定理　ここで k-連結性を特徴付けるメンガーの定理を導入する。連結性と点素な経路の関係性を記述する非常に使い勝手の良い定理である。二つの xy-経路 p_1,p_2 が互いに点素であるとは、p_1 と p_2 の共通頂点が両端点 $x,\ y$ 以外に無いことをいう。

グラフ $G=(V,E)$ の頂点集合 $A,B\subseteq V$ に対して、頂点集合 $S\subseteq V$ が $G\setminus S$ で A から B への経路をすべて排除するとき S を AB-切断集合という。AB-接続成分を A と B を接続し経由頂点が $A\cup B$ に属さない経路の集まりから誘導される G の部分グラフとする。AB-接続成分 X の大きさは X に属す A と B を接続する経路の個数で測られる。

定理 2 (メンガーの定理)**.** G を連結グラフとし A,B を G の頂点の部分集合とする。G 内のどんな AB-切断集合 S をもってきても $|S|\geq k$ なら、大きさが k の AB-接続成分 C が存在する。

Proof. 辺の個数に関する構成的な帰納法で示す。G に辺が無いなら $A\cap B$ を C の頂点集合とすることで主張を満たす。G は A から B への経路に属す辺 $e=(x,y)$ を持ち、$G'=G\setminus e$ が大きさ k 未満の AB-切断集合 S を持つと仮定する。$P=S\cup\{x\}$ および $Q=S\cup\{y\}$ はそれぞれ G の AB-切断集合である。$|P|=|Q|=|S|+1$。G' の AP-切断集合および QB-切断集合は、それぞれ G の AB-切断集合でもある。このとき G' は AP-接続成分 X および QB-接続成分 Y を持つ。$X\cap Y=S$ なので $C=(X\cup Y)+e$ を得る。 □



AB-接続成分 X に属す k 個の経路が点素であることは切断集合に対する k の最小性から導ける。証明の構成からも分かる通り X 内の経路 p_1,p_2 が共通の経由頂点 v を持つなら v は S に属していなければならず、いずれか一方は冗長であり排除される。もう少し厳密には以下の系に従う。$x,y\in V$ に対して S が次の条件を満たすとき S は x と y を切断するという。$\{x,y\}\cap S=\varnothing$ かつ x から y へのどんな経路を持ってきても S の頂点を通過する。

系 2.1. $G=(V,E)$ を対象グラフとし $s,t\in V$ とする。ただし $s\neq t$ で $(s,t)\notin E$。s と t を切断するどんな集合 S も $|S|\geq k$ なら非冗長で点素な st-経路が k 個存在する。

Proof. $G'=G\setminus\{s,t\}$ および $A=N(s),B=N(t)$ とする。G' 内のどんな AB-切断集合 S も G において s と t を切断し $|S|\geq k$ を満たす。メンガーの定理 2 より大きさ k の AB-接続成分 X が存在する。始点として s か

ら A の各頂点に接続し、終点として B の各頂点から t に接続することで k 個の点素な st-経路を得る。 □

タットの平面描画の求め方　n-頂点グラフ $G=(V,E)$ のタットの平面描画 Γ は、xy-座標それぞれ n 個の一次式からなる 2 つの連立方程式を解くことで得られる。Γ は任意の $v\in V$ に対して v を $\Gamma(v)=(x_v^*,y_v^*)\in\mathbb{R}^2$ へ写像する。外面境界上の頂点集合を $F\subseteq V$ とする。F の頂点 v は凸の位置に固定されるので一次式 $x_v=x_v^*,\ y_v=y_v^*$ を得る。$V\setminus F$ 内の頂点に関しては一次式 $\deg(v)\cdot x_v-\sum_{w\in N(v)}x_w=0$ および $\deg(v)\cdot y_v-\sum_{w\in N(v)}y_w=0$ として隣接頂点の重心に座標値をとる制約として定式化する。

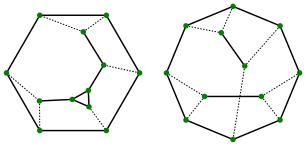
具体的な python コードは下記のアルゴリズム 1 のように書ける。この例では numpy パッケージを用いる。

```
1  def tutte_embedding(G, F, pos):
2      A, Bx, By = [], [], []
3      for u in g:
4          a, bx, by = [0] * G.number_of_nodes(), 0, 0
5          if u in F:
6              a[u] = 1
7              bx, by = pos[u]
8          else:
9              a[u] = len(G.neighbors(u))
10             for v in G.neighbors(u):
11                 a[v] = -1
12         A.append(a)
13         Bx.append(bx)
14         By.append(by)
15     xcoords = np.linalg.solve(A, Bx)
16     ycoords = np.linalg.solve(A, By)
17     return {i: (x, y) for i, (x, y) in enumerate(zip(xcoords, ycoords))}
```

アルゴリズム 1: タットの平面描画

入力は、対象グラフ `G` と外面境界上の頂点部分集合の `list F`、`F` 内の各頂点の座標情報の `dict pos`。`G` の頂点は整数識別子で管理されているものとする。このとき、連立一次方程式を定義するために係数行列 `A` と係数ベクトル `Bx, By` を導入し (第 2 行)、制約条件に基づき適宜係数を構成していく (第 3-14 行)。そして第 15・16 行で連立一次方程式ソルバ `numpy.linalg.solve` を用いて具体的な座標を得る。最後に頂点から座標値への単射としての連想配列を形成し出力する (第 17 行)。

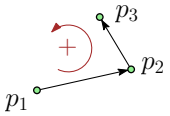
包囲閉路　与えられた 3-連結な平面的グラフ G に対して正しくタットの平面描画を得るには、外面境界上の頂点系列を適切に取得する必要がある。平面埋込みが与えられていれば任意の面を外面として選択すれば適切に平面描画が得られる。別の言い方をすると、外面境界は包囲閉路であれば平面描画となる。



包囲閉路 C は、$G\setminus C$ が連結で、C 内で隣接しない頂点間を接続する辺を E 内に持たない閉路である。包囲閉路の第二制約は K_4 の 4 頂点を外面と選んだ時に対角線どうしが交差すること排除するための制約である。右上はフルフトグラフの異なる外面選択時のタットの平面描画を示している。左は包囲閉路だが右は違う。そのため交差する辺対を持つ。

平面上の右と左　平面上の 3 点 $p_i=(x_i,y_i)\in\mathbb{R}^2,\ i=1,2,3$ に対して、向き $\mathrm{orient}(p_1,p_2,p_3)$ を次のように行列式を用いて定義する。

$$\mathrm{orient}(p_1,p_2,p_3)=\begin{vmatrix}x_1&y_1&1\\x_2&y_2&1\\x_3&y_3&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x_1-x_3&y_1-y_3\\x_2-x_3&y_2-y_3\end{vmatrix}$$
$$=(x_1-x_3)(y_2-y_3)-(x_2-x_3)(y_1-y_3).$$



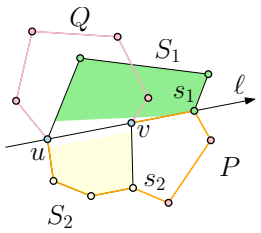
向き orient は三角形の符号付き面積の外積計算そのものである。従って orient の値が大きいほど p_3 から p_1,p_2 を通る直線への垂直距離は大きくなる。$\mathrm{orient}(p_1,p_2,p_3)=0$ のとき三点は同一直線上にある。また、$\mathrm{orient}(p_1,p_2,p_3)<0$ (>0) のとき右 (左) 回りもしくは (反) 時計回りであり、p_3 は p_1,p_2 を通る直線の右 (左) にあるという。上図は $\mathrm{orient}(p_1,p_2,p_3)>0$ の例を示している。

タットの平面描画の平面性保証　タットの平面描画の三制約 (外面凸多角形・隣接重心・辺直線分) を満たす描画は、正しく平面描画になることを示す。具体的には任意の辺対の写像が交差しないことを議論する。

定理 3 (タットのばね定理)**.** 3-連結な平面的グラフに対する任意のタットの平面描画は、どの辺対の写像も交差しない。

Proof. $p \in \mathbb{R}^2$ が G のどの辺の写像にも属さないときファセット上の点と呼ぶ。ファセット上の点 p はどれも唯一の面に属すことを示し、辺対の写像が交差するならその交点の近傍で矛盾が生じることを導く。外面境界の外部に p が属すなら、タットの平面描画の三つの 3 制約は外面以外の面に属さないことを保証する。内部の p に対しては頂点や辺の写像と交差しない半径 $\varepsilon > 0$ の円が描ける。補題 2 より、任意の辺 e を共有する二つの面は e の写像直線分の左右に分かれるので p は唯一の面に属す。 □

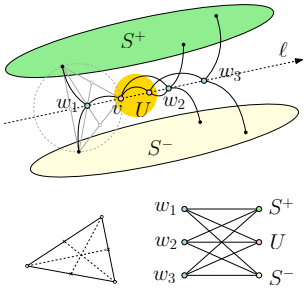
補題 2. $G = (V, E)$ を 3-連結な平面的グラフ、Γ を G のタットの平面描画とする。ℓ を境界上に無い辺 $(u, v) \in E$ の端点の写像 $p_1 = \Gamma(u), p_2 = \Gamma(v)$ を通る直線とする。$S_1,\ S_2$ をそれぞれ (u, v) を共有する二つの面の境界上の u, v を除く頂点の集合とする。このとき、S_1 と S_2 内の頂点の写像はそれぞれ ℓ の左右に分かれて存在する。



Proof. S_1 と S_2 が ℓ 上か ℓ の右に存在する頂点 $s_1 \in S_1,\ s_2 \in S_2$ をそれぞれ持つと仮定する。つまり $\mathrm{orient}(p_1, p_2, \Gamma(s_1)) \le 0$ および $\mathrm{orient}(p_1, p_2, \Gamma(s_2)) \le 0$。

補題 3 および補題 4 より、$s_1,\ s_2$ は共に ℓ の右に写像される隣接頂点を持つ。補題 5 より、経由する頂点がすべて ℓ の右に写像される $s_1 s_2$-経路 P が存在する。同様に u と v はいずれも ℓ の左に隣接頂点を持ち、経由する頂点がすべて ℓ の左に写像される uv-経路 Q が存在する。補題 4 より Q は (u, v) でない。また P と Q は互いに点素。これは補題 6 に矛盾する。 □

補題 3. 隣接頂点すべての写像が同一直線上に配置される頂点は存在しない。



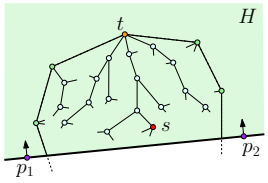
Proof. すべての隣接頂点が直線 ℓ 上に位置する頂点 v が存在すると仮定する。$S^+,\ S^-$ をそれぞれ ℓ の左と右に写像を持つ頂点の集合とする。U を v から到達可能な頂点 u で $N(u)$ がすべて ℓ 上に写像される頂点集合とする。少なくとも $v \in U$。W を v から到達可能で ℓ 上に写像されるが $S^+,\ S^-$ に隣接頂点を持つ頂点の集合とする。補題 4 より $W \neq \varnothing$。また、対象グラフは 3-連結であり、W は U と $S^+ \cup S^-$ に対する切断集合なので $|W| \ge 3$。補題 5 より S^+ と S^- はそれぞれ連結である。$w_1, w_2, w_3 \in W$ および S^+, U, S^- は $K_{3,3}$ の細分を形成する。 □

補題 4. ℓ をある頂点 $v \in V$ の写像 $p_1 = \Gamma(v)$ と任意の点 $p_2 \in \mathbb{R}^2$ を通る直線とする。ℓ の左に位置する v の隣接頂点が非空 $\{u \in N(v) \mid \mathrm{orient}(p_1, p_2, \Gamma(u)) > 0\} \neq \varnothing$ なら右の隣接頂点も非空 $\{u \in N(v) \mid \mathrm{orient}(p_1, p_2, \Gamma(u)) < 0\} \neq \varnothing$。

Proof. 任意の内部頂点は、第 2 制約により各 xy-座標の平均値をとるので、隣接頂点の写像が形成する凸包の外部に位置することはない。 □

補題 5. $G = (V, E)$ を対象のグラフ、Γ を任意のタットの平面描画、H を任意の 2 点 $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^2,\ p_1 \neq p_2$ を通る直線で区切られる半平面 $\{p \in \mathbb{R}^2 \mid \mathrm{orient}(p_1, p_2, p) > 0\}$ とする。$S = \{v \in V \mid \Gamma(v) \in H\}$ が誘導する部分グラフ $G[S]$ は連結。

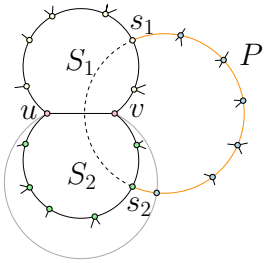
Proof. 平面上の点 $p \in \mathbb{R}^2$ に対して $\tau(p) = \mathrm{orient}(p_1, p_2, p)$ とおく。F を外面境界上の頂点集合とする。H の境界線から最も離れた頂点 $t = \arg\max_{v \in V} \tau(\Gamma(v))$ は $t \in F$。任意の頂点 $s \in S$ から t への経路 $s = v_0, v_1, \ldots, v_k = t$ で連続する二頂点 v_i, v_{i+1} が $\tau(\Gamma(v_i)) \le \tau(\Gamma(v_{i+1}))$ を満たす経路が存在することを示す。



$p = \Gamma(s),\ q = \Gamma(t)$ とおく。$\tau(p) = \tau(q)$ のとき s と t はいずれも F 内の頂点で互いに隣接する。$\tau(p) < \tau(q)$ のとき二つの場合を考える。$s \in F$ なら外面境界を辿り t へ到達する経路が存在する。$s \notin F$ なら補題 4 より、$\tau(p) < \tau(\Gamma(v))$ を満たす

$v \in N(s)$ が存在する。これは帰納的に成り立ち、S の任意の頂点は t へ到達可能。 □

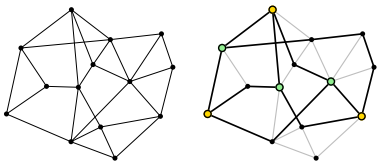
補題 6. G を 3-連結な平面的グラフ、(u, v) を G の任意の辺とする。S_1, S_2 をそれぞれ (u, v) を共有する面の u, v を除く頂点集合とする。P をその端点が $s_1 \in S_1,\ s_2 \in S_2$ で u, v を経由しない G 上の経路とする。このとき、G 上の任意の uv-経路は P と共通頂点を持つか (u, v) 自身である。



Proof. G の任意の平面描画を考える。このとき P と s_1, s_2 を仮想的につなげたジョルダン閉曲線 C が描ける。C の仮想的な部分曲線は (u, v) の写像とだけ交差し、u と v を内と外に分かつ。従って、u と v を端点とするどんな経路も P と少なくとも一つの頂点を共有するか辺 (u, v) そのものである。 □

3.3 クラトフスキーの定理

ここではクラトフスキーの定理を考察する。特にグラフが非平面的なら必ずクラトフスキー部分グラフを持つことを示す。



定理 4 (クラトフスキー定理)**.** グラフ G が平面的であることの必要十分条件は G が部分グラフとして K_5 もしくは $K_{3,3}$ の細分を持たないこと。

十分性の証明　必要性はオイラーの多面体公式の系 1.1 および辺細分による頂点数と辺数の増分差分の不変性を確認すれば帰納的に示せる。以下では極小な非平面的グラフを対象に議論する。これは、どんな非平面的グラフも辺を削除していけば最終的に平面的になり、その直前には近傍に極小性を有する部分グラフが存在することから一般性を失わない。

補題 7 (クラフトスキーの定理の十分性)**.** グラフ G が非平面的ならクラトフスキー部分グラフを持つ。

Proof. 補題 11 は、クラトフスキー部分グラフを持たない辺数最小の非平面的グラフが存在するならそれは 3-連結であることを保証する。また、補題 12 および補題 13 は、3-連結性を保持しつつクラトフスキー部分グラフを生成しないよう極小非平面的グラフの辺数を可能な限り減らすことができることを保証する。一方で補題 14 は、クラトフスキー部分グラフを持たない 3-連結なグラフには平面描画が存在することを保証する。これは極小な非平面的グラフがクラトフスキー部分グラフを持つことの証左である。 □

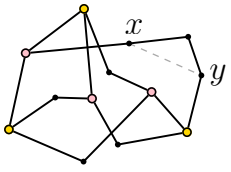
補題 8. 極小な非平面的グラフは 1-連結。

Proof. 1-連結でないと仮定する。いずれの成分も非平面的なら任意の辺削除で平面的とならず極小性に反する。同様に平面的な連結成分が存在するならその成分内の辺を削除しても平面的とはならない。 □

補題 9. 極小な非平面的グラフは 2-連結。

Proof. 2-連結でない、つまり切断点 v を持つ極小な非平面的グラフ $G = (V, E)$ が存在すると仮定する。$C \subseteq V$ を $G \setminus v$ の任意の連結成分の頂点集合とする。このとき誘導部分グラフ $G[C \cup \{v\}]$ および $G \setminus C$ は互いに辺素なので補題 8 の証明と同様の議論により極小性に反する。 □

補題 10. $G = (V, E)$ を非平面的グラフとする。$x, y \in V$ を $G' = G \setminus \{x, y\}$ が非連結となる頂点対とする。このとき、次を満たす G' の連結成分 $C \subseteq V$ が存在する。$C \cup \{x, y\}$ および辺 (x, y) が誘導する部分グラフが非平面的。



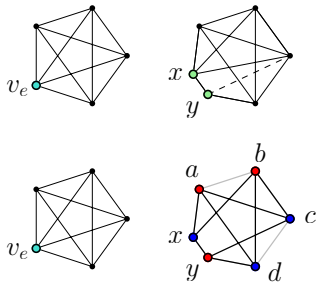
Proof. $C_1, \ldots, C_k$ を G' の連結成分とする。G'_i を $C_i \cup \{x, y\}$ に辺 (x, y) を加えて誘導される部分グラフとする。各 $G'_1, \ldots, G'_k$ はいずれも平面的と仮定する。このとき H_1 を G'_1 の平面描画とすると、$2 \leq i \leq k$ に関して H_{i-1} の (x, y) を含むいずれかの面の内部に G'_i を描画して得られる平面描画 H_i が存在する。帰納的に $H_k - (x, y) = G$ は平面的であるがこれは主張の前提に反する。 □

補題 11. $G=(V,E)$ をクラトフスキー部分グラフを持たないすべての非平面的グラフの中で辺数最小のグラフとするなら、G は 3-連結。

Proof. G は極小なので補題 9 より 2-連結。G を非連結にする二頂点 $x,y\in V$ が存在すると仮定すると、$G\setminus\{x,y\}$ は連結成分 $C_1,\dots,C_k$ を持つ。補題 10 より $C_i\cup\{x,y\}$ に辺 (x,y) を加えて誘導される部分グラフ H が非平面的となる C_i が存在する。G の辺数最小性より H はクラトフスキー部分グラフ K を持つが、$(x,y)\notin E$ なので K は G の部分グラフではない。G は 2-連結なので、メンガーの定理 2 より、別の連結成分 C' の頂点のみで構成される x と y をつなぐパス P が存在する。K と P をつなぎ合わせると G 内にクラフトスキー部分グラフを得る。 □

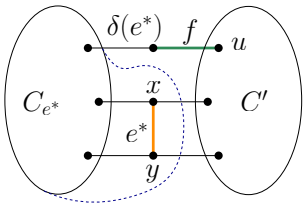
補題 12. $G=(V,E)$ をクラトフスキー部分グラフを持たないグラフとする。任意の辺 $e\in E$ を縮約してもクラフトスキー部分グラフにはならない。

Proof. G/e と v_e をそれぞれ $e=(x,y)\in E$ を縮約して得られるグラフと頂点とする。G/e がクラトフスキー部分グラフ H を持つと仮定する。v_e が H の頂点でないなら H は G の部分グラフとなり矛盾。H の最小次数は 2、最大次数は 4 なので $2\le\deg(v_e)\le 4$。$\deg(v_e)=2$ なら x と y の縮約前の次数の組合せは、$\deg(x)=\deg(y)=2$ もしくは一方が 1 か 3 の場合である。いずれも G は H の細分か同型な部分グラフを持つこととなり矛盾。$\deg(v_e)\ge 3$ で x,y のいずれかの次数が $\deg(v_e)$ 以上の場合、H の細分は G の部分グラフとなるので矛盾 (右図上段)。H が K_5 の細分であり、$\deg(x)=\deg(y)=3$ の場合、G は $K_{3,3}$ の細分を持つので矛盾 (右図下段)。 □



補題 13. $G=(V,E)$ を $|V|\ge 5$ の 3-連結なグラフとする。G は縮約しても 3-連結性を損なわない辺を持つ。

Proof. どの辺 $e\in E$ を縮約対象に選んでも 3-連結性を損なう G が存在すると仮定する。このとき、どの辺 $e=(x,y)$ にも $G\setminus\{x,y,\delta(e)\}$ で非連結になる頂点 $\delta(e)\in V$ が存在する。C_e を $G\setminus\{x,y,\delta(e)\}$ 内で頂点数最大の連結成分の頂点集合とする。$e^*=\arg\max_{e\in E}(|C_e|)$ とする。C' を $G\setminus\{x,y,\delta(e^*)\}$ の C_{e^*} 以外の連結成分とする。G は 3-連結なので $\delta(e^*)$ と $u\in C'$ を接続する辺 f が存在する。f についても同様に G を非連結にする頂点 $\delta(f)$ が存在する。$G[C_{e^*}\cup\{x,y\}]$ は 2-連結で $\delta(f)$ を削除しても連結性を失わないので $G\setminus\{\delta(e^*),u,\delta(f)\}$ は少なくとも頂点数 $|C_{e^*}\cup\{x,y\}|-1$ の連結成分を持つが、これは C_{e^*} の最大性に矛盾する。 □

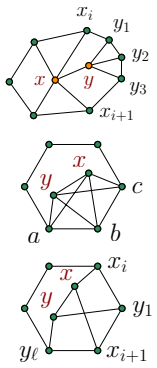


補題 14. $G=(V,E)$ が 3-連結でクラトフスキー部分グラフを持たないなら、G は平面埋込みを持つ。

Proof. 頂点の個数に関する帰納法を用いる。最小の 3-連結グラフは K_4 であり、これは三頂点を適当に配置した後に残りの頂点を重心に配置することで平面埋め込みを得る。

$G=(V,E)$ に平面埋込みが存在することを示すために、ある辺 $e\in E$ の縮約 G/e が平面埋込みを持つと仮定する。v_e を $e=(x,y)$ を縮約することで得られる G/e の頂点とする。G/e は補題 13 より 3-連結なので、v_e を除去すると多角形としての面 f が出現する。

系列 $(x_1,\dots,x_k)$ を x に隣接する頂点で f に沿った整列とする。y のすべての隣接頂点 $y_1,\dots,y_\ell$ が x_i と x_{i+1} の間に配置されるなら、x を v_e の位置に y を $x,y_1,\dots,y_\ell$ の重心に配置することで G の平面埋込みを得る。それ以外の二通りの場合はいずれも主張の前提に反する。一つは、x,y が少なくとも 3 つの共通する隣接頂点を持つ場合で、これは G が K_5 の細分を持つ。他方は、$x_i\ne y_1$ および $x_{i+1}\ne y_\ell$ の下で f の境界上に $x_i,y_1,\dots,x_{i+1},\cdots,y_\ell$ の順で並んでいる場合で、これは G が $K_{3,3}$ の細分を持つ。 □

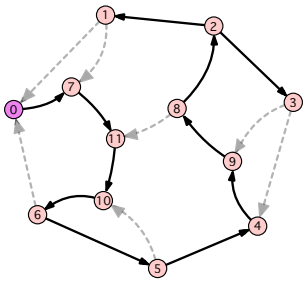


4　深さ優先探索

この節では平面性判定を解決する線形時間アルゴリズムを設計するために、基本的な枠組みである深さ優先探索について考察する。また、深さ優先探索の応用としてグラフの 2-辺連結性を線形時間で判定するアルゴリズムを与える。

4.1　深さ優先探索の基本原理

深さ優先探索は、任意の頂点から探索を開始し、まだ訪問していない頂点 v を発見したら直ちに v に遷移し、新たに v の隣接頂点の中から未訪問の頂点を見つけようとする探索方法である。ただし、すべての隣接頂点が訪問済みならまだ調べ終わっていない頂点まで戻って探索を再開する。探索を開始する頂点を根と呼ぶ。



フルフトグラフの
深さ優先探索木の例

深さ優先探索木　対象のグラフの各辺は頂点遷移に従い向き付けされ、根と今調べている頂点の間には常に有向パスが存在することが保証できる。このとき頂点発見に貢献した辺の集まりが誘導する部分グラフは有向木となる。この有向木を深さ優先探索木と呼ぶ。深さ優先探索木を構成する辺を木辺、それ以外の念のため調べてみたが既に発見済みの頂点だった辺を補木辺という。

深さ優先探索の基本コード　下記の python コードは深さ優先探索の基本的な例である。入力としてグラフ `G` と根 `root` が与えられたとき、`G` において `root` から到達可能な連結成分内の木辺と補木辺を表示する。

```
1  def dfs(G, root):
2      stack, dfs_height = [(root, x) for x in G.neighbors(root)], {x: -1 for x in G}
3      dfs_height[root] = 0
4      while stack:
5          parent, child = stack.pop()
6          if dfs_height[child] < 0:
7              stack += [(child, x) for x in G.neighbors(child) if x is not parent]
8              dfs_height[child] = dfs_height[parent] + 1
9              print((parent, child), ' is a tree edge')
10         else:
11             if dfs_height[parent] > dfs_height[child]:
12                 print((parent, child), ' is a back edge')
```

アルゴリズム 2: 深さ優先探索の基本形

コードの簡単な解説　このコードでは、訪問すべき頂点対を管理するデータ構造としてスタック `stack` を用いている (第 2 行)。頂点対を対象とする理由は、木辺と補木辺の組合せ構造がグラフの構造的性質を分析する一助となるからである。

また、訪問していない頂点を識別するために根からの距離を保持する連想配列 `dfs_height` を用いている (第 2 行)。初期値を -1 として、第 6 行目のように `dfs_height[child]` < 0 で具体的に訪問していない頂点かどうかを判定する。この判定が真となるなら `(parent, child)` の頂点対は木辺であり、偽なら終点 `child` の方が始点 `parent` より根に近いという条件付きで補木辺と判定する (第 11 行)。

第 6-9 行は木辺に対する処理である。つまり新たに未訪問の頂点 v を発見したことを意味する。このとき v と隣接する頂点のペアを作ってスタックに載せていく。第 5 行目のスタックから頂点対 `(parent, child)` を取り出す処理は、グラフ上では頂点 `parent` に遷移したことを意味する。

計算時間　アルゴリズム 2 の計算量は連結グラフを対象とするなら $O(m)$ となる。m は辺の個数。これは、どの辺もスタックに追加される回数は 1 回、取り除かれる回数も 1 回であることから測られる。それ以外の隣接頂点リストの取得 `G.neighbors`、スタックへの追加 `append` や削除 `pop`、および連想配列の参照と更新 `dfs_height[child]` は単位時間で処理できるものとする。

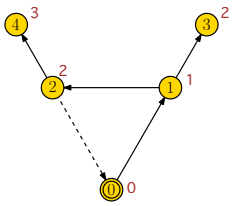
バックトラッキング　深さ優先探索におけるバックトラックは、子孫の部分木内のすべての頂点を訪問し終えた段階で行う処理工程をいう。アルゴリズム 2 はバックトラックを省略しているが、下記の python コードのようにジェネレータ (iter) を用いることでバックトラックを明示的に備えることができる。アルゴリズム 2 との変更箇所を黄緑でハイライトしている。

```
1  def dfs_with_back_tracking(G, root):
2      stack, dfs_height = [(root, iter(G.neighbors(root)))], {x: -1 for x in G}
3      dfs_height[root] = 0
4      while stack:
5          parent, children = stack[-1]
6          try:
7              child = next(children)
8              if dfs_height[child] < 0:
9                  nbr = [x for x in G.neighbors(child) if x is not parent]
10                 stack.append((child, iter(nbr)))
11                 dfs_height[child] = dfs_height[parent] + 1
12                 print((parent, child), ' is a tree edge')
13             else:
14                 if dfs_height[parent] > dfs_height[child]:
15                     print((parent, child), ' is a back edge')
16         except StopIteration:
17             if stack:
18                 print('back tracking at', stack[-1][0])
19             stack.pop()
```

アルゴリズム 3: バックトラック付き深さ優先探索

コードの簡単な解説　スタックが扱うデータ形式が異なるだけで基本的な仕組みは変わらない。隣接頂点を直接スタックに持たせるのではなく、隣接頂点の集合をジネレータ children で扱う。

　スタックの先頭が (parent, children) のとき、訪れるべき頂点は next(children) とすることで順次呼び出すことができる。頂点 parent のすべての隣接頂点を訪れたら next は例外 StopIteration を生成する。この例外を第 16 行目で受け取り、第 17 行以降でバックトラック処理を記述することができる。



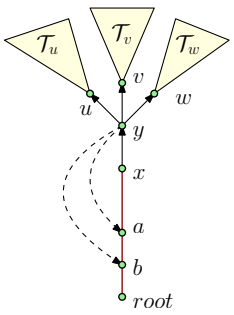

```
(0, 1) is a tree edge
(1, 2) is a tree edge
(2, 0) is a back edge
(2, 4) is a tree edge
back tracking at 4
back tracking at 2
(1, 3) is a tree edge
back tracking at 3
back tracking at 1
back tracking at 0
```

　右図は雄牛グラフに対して頂点 0 を根として深さ優先探索を実行した例である。実線矢印は木辺で破線矢印は補木辺。添字は深さ優先探索木における根までのパスの長さを表す。またアルゴリズム 3 の実行結果も緑の枠内に示している。

4.2　深さ優先探索木の性質

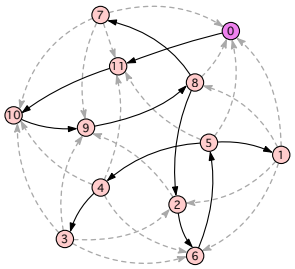
深さ優先探索木上の高さと半順序　各頂点 v に関して深さ優先探索木 $\mathcal{T}$ における高さ $h(v)$ を根から v までの $\mathcal{T}$ 上の経路の長さとする。$\mathcal{T}$ は木なのでどの二頂点間にも唯一の経路が存在する。上図の雄牛グラフの深さ優先探索木の例では頂点 0 の高さは根なので $h(0) = 0$。頂点 2 は根と隣接しているが $\mathcal{T}$ 上の経路を考えるので $h(2) = 2$。

　任意の二頂点 $x, y \in V$ に関して $\mathcal{T}$ 上の半順序 $\preceq$ を定義する。$x \preceq y$ で x が根から y までのパスに含まれることを表す。反射律、反対称律、推移律を満たすことは容易に確認できる。半順序なので右図の頂点 u と頂点 v のように比較不能な頂点対が存在することを許す。



先祖と子孫　この半順序関係に従って先祖と子孫の関係が定義できる。$x \prec y$ なら x は y の先祖。$x \succ y$ なら x は y の子孫。$\mathcal{T}_v$ で頂点 v を根とし v と v の子孫から誘導される $\mathcal{T}$ の部分木を表す。また、ある頂点 v に対して、v から出て行く木辺の集合を $\omega^+(v)$ で表す。同様に $\omega^-(v)$ で v から出て行く補木辺の集合とする。例えば右図でいうと木辺 (x, y) に対して $\omega^+(y) = \{(y, u), (y, v), (y, w)\}$ であり、$\omega^-(y) = \{(y, a), (y, b)\}$ である。

深さ優先探索順序　深さ優先探索に基づく頂点の遷移順序を定式化する。$G = (V, E)$ を n 頂点の連結グラフとする。$\sigma = (v_1, \ldots, v_n)$ を V 上の任意の置換とし、σ_i で i 番目までの部分列を表す。頂点 $v \in V \setminus \sigma_i$ に関して $\nu_{\sigma_i}(v)$ で σ_i 内に存在する v の隣接頂点の最後方の位置を表す。σ_i 内に隣接頂点が存在しない場合は $\nu_{\sigma_i}(v) = 0$。このとき次の条件を満たす σ を深さ優先探索順序という。すべての $1 < i \leq n$ に関して、$\nu_{\sigma_{i-1}}(v_i) = \max_{j=i,\ldots,n} \nu_{\sigma_{i-1}}(v_j)$。



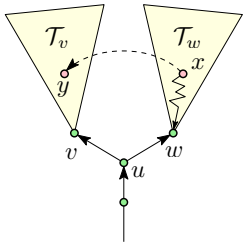
十二面体グラフの
深さ優先探索木

右図に対応する深さ優先順序として、例えば $(0, 11, 10, 9, 8, 7, 2, 6, 5, 4, 3, 1)$ が得られる。$i = 5$ のとき $\sigma_i = (0, 11, 10, 9, 8)$ であり、$\nu_{\sigma_i}(7) = 5$ となる。頂点 7 は σ_i 内のすべての頂点と隣接するが、最後方の頂点 8 の位置 5 をとる。頂点 6 は σ_i のどの頂点とも隣接しないので $\nu_{\sigma_i}(6) = 0$。また、σ_i に無い頂点 $1, 2, 7$ が 8 と隣接するので、$\nu_{\sigma_i}(1) = \nu_{\sigma_i}(2) = \nu_{\sigma_i}(7) = \max_{j=i,\ldots,n} \nu_{\sigma_i}(v_j)$。このとき頂点 $1, 2, 7$ のいずれの選択も許されるが、結果として得られる深さ優先探索木の構造は異なる可能性がある。

補題 15. 連結グラフ $G = (V, E)$ とその深さ優先探索木 $\mathcal{T} = (V, T)$ において、任意の補木辺 $(x, y) \in E \setminus T$ は $x \succeq y$ を満たす。

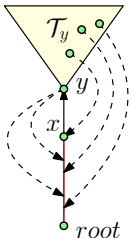
Proof. $x \preceq y$ なる補木辺 (x, y) が存在すると仮定すると深さ優先探索順序の条件式に矛盾する。

比較不能な頂点 x, y 間を接続する補木辺 (x, y) が存在すると仮定する。このとき $x \in \mathcal{T}_w$ および $y \in \mathcal{T}_v$ となる頂点 u および木辺対 $(u, v), (u, w) \in \omega^+(u)$ が存在する。一般性を失うことなく、$\mathcal{T}$ の深さ優先探索順序 σ において v の方が w より前に現れるとする。k を $\mathcal{T}_v$ の頂点の個数 -1 とし σ における v の位置を i とすると $\sigma_{i+k} = w$ となる。また、$\mathcal{T}_w$ の w を除く任意の頂点 x' は $\nu_{\sigma_{i+k}}(x') = 0$。しかし x と y は互いに隣接するので $\nu_{\sigma_{i+k}}(w) < \nu_{\sigma_{i+k}}(x)$ であり、x は w より先に発見されなければならない。帰納的にこれは (u, w) が木辺であることに矛盾する。 □



補木辺の初等閉路　任意の補木辺 $e = (u, v)$ は一意に定まる閉路を持つ。つまり、v から u への木辺の系列に e を結合して得られる有向閉路である。これを e の初等閉路と呼ぶ。初等閉路の一意性は、補題 15 および深さ優先探索木 $\mathcal{T}$ 上の経路の一意性から導ける。

木辺のフリンジ　補題 15 により極小な部分問題を定義づける補木辺の集まりであるフリンジを導入することができる。深さ優先探索のバックトラックで $T \setminus E$ 内の探索範囲を限定し、禁止構造の発見に貢献する補木辺とそれ以外とを区別する。



定義 2. 連結なグラフ $G = (V, E)$ とその深さ優先探索木 $\mathcal{T} = (V, T)$ が与えられたとき、ある木辺 $e = (x, y) \in T$ のフリンジを次のように定義する。

$$\mathrm{fringe}(e) = \{(u, v) \in E \setminus T \mid u \succeq y \text{ and } v \preceq x\}.$$

フリンジは対応する木辺 $e = (x, y)$ の $\mathcal{T}_y$ に始点を持ち y の先祖に接続する補木辺の集まりである。木辺 (x, y) を基準に禁止構造の有無を調べる解法設計においては $\mathrm{fringe}(e)$ に限定できるかをきちんと考察する必要がある。始点と終点がともに $\mathcal{T}_y$ にある補木辺の集合 $T_{\succeq y} = \{(u, v) \in E \setminus T \mid y \preceq v\}$ が比較対象外にできれば効率は大きく変わる。

4.3　グラフの 2 辺連結性

ここでは深さ優先探索に基づきグラフの構造分析の応用として 2-辺連結性を判定する問題を考察する。特に、補題 15 およびフリンジが定義する極小な部分問題の重要性を確認したい。グラフの 2-辺連結性は任意の辺を削除しても連結性を損なわない性質をいう。別の言い方をすると禁止構造としての橋を持たないグラフである。

補題 16. 橋は木辺。

Proof. 補木辺となる橋が存在すると初等閉路の 2-辺連結性に矛盾。 □

補題 17. 木辺 $e = (x, y)$ が橋である必要十分条件は、$\mathrm{fringe}(e) = \varnothing$ であること。

Proof. 必要性は背理法で。主張の前提を満たす補木辺 $f \in \mathrm{fringe}(e)$ が存在すると仮定すると f の初等閉路は e を含む。十分性は演繹的に。$\mathcal{T}_y$ の頂点を始点として持たない補木辺は初等閉路内に e を含まない。終点を $\mathcal{T}_y$ 内に持たない場合、補題 15 は y が根から x までのパス上に存在することを保証する。 □

任意の補木辺 $e = (x, y)$ に関して、根から x への木辺の系列のうち頂点 y 以降の各木辺は橋ではない。従って $\mathrm{fringe}(e)$ 内の補木辺の終点の高さの最小値 $\min_{(u,v)\in\mathrm{fringe}(e)} h(v)$ を適切に管理すれば良い。

2-辺連結性判定の python コード 補題 17 を踏まえると次のような python コードが得られる。このコードは橋を見つけた時点で 2-辺連結性を有さないと判定する。また、アルゴリズム 3 との変更箇所を黄緑でハイライトしている。

```python
def has_bridge(G, root):
    stack, dfs_height = [(root, iter(G.neighbors(root)))], {x: -1 for x in G}
    dfs_height[root] = 0
    lowest = []
    while stack:
        parent, children = stack[-1]
        try:
            child = next(children)
            if dfs_height[child] < 0:
                nbr = [x for x in G.neighbors(child) if x is not parent]
                stack.append((child, iter(nbr)))
                dfs_height[child] = dfs_height[parent] + 1
                lowest.append([])
            else:
                if dfs_height[parent] > dfs_height[child]:
                    set_lower(lowest[-1], dfs_height[child])
        except StopIteration:
            child, _ = stack.pop()
            if len(lowest) > 0:
                if len(lowest[-1]) == 0:
                    return (stack[-1][0], child)
                prune(lowest, dfs_height[stack[-1][0]])
```

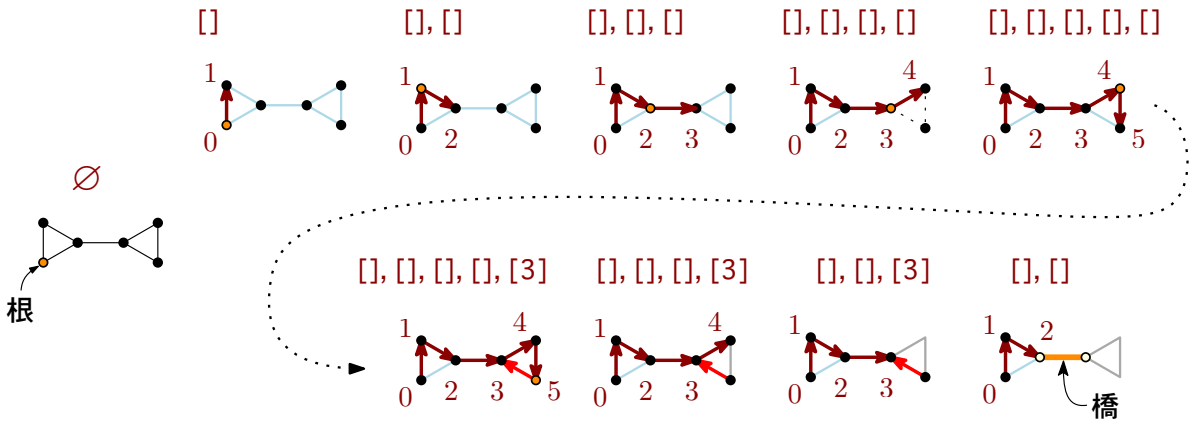
アルゴリズム 4: 2-辺連結性判定 has_bridge

コードの簡単な解説 新たに配列の配列 lowest を導入し、各木辺 (x, y) の終点の子孫 $\mathcal{T}_y$ を始点とする補木辺の終点の高さを管理する。厳密には最も根に近い終点の高さ、つまり高さの最小値を管理する。橋の検出の場合 lowest は単純に整数の配列でも用途は足りるが、後述の平面性判定では $\mathcal{T}_y$ 内の頂点を始点とする複数の補木辺を管理することとなるため配列の配列として定義している。

探索の初期段階では補木辺は検出されないため空の配列が積み上がっていく (第 13 行)。補木辺を見つけたらその終点の高さを lowest の末尾の配列に追加する (第 16 行)。関数 set_lower は対象の配列が空でない場合小さい方を採用する。

橋の具体的な検出はバックトラックで行う。lowest の末尾が空の場合、補題 17 により橋が存在すると判定する (第 20-21 行)。橋でなかった場合、関数 prune を用いて先祖の木辺のために補木辺の情報を継承させる。この際、木辺の終点の高さと lowest の末尾の補木辺の終点の高さが等しい場合は継承せずに破棄する。

アルゴリズム 4 は二つの手続き set_lower と prue を用いる。set_lower はより根に近い補木辺の高さを設定する。引数に pos があるのは対象が現行の木辺の更新なのか、先祖の木辺への更新なのかを切り替えられるよう策定している。prune は不要な補木辺の情報を取り除き、先祖の木辺へ情報を伝播する。




```python
def set_lower(pos, h):
    if len(pos) != 0:
        pos[0] = min(pos[0], h)
    else:
        pos.append(h)
```

アルゴリズム 5: set_lower

```python
def prune(lowest, over_height):
    h = lowest[-1].pop()
    lowest.pop()
    if h < over_height:
        set_lower(lowest[-1], h)
```

アルゴリズム 6: prune

正当性と計算時間　アルゴリズムの正当性は補題 17 から導ける。計算量は深さ優先探索と同程度の $O(|E|)$ 時間で抑えられる。stack の末尾の木辺 (x, y) に対する最小値更新に係る計算量は、set_lower を呼び出す回数であり、頂点 y から出て行く補木辺の個数に比例するので $O(|\omega^-(y)|)$。バックトラック時のコストは set_lower および prune いずれも高々一回呼出しなので $O(1)$ となる。まとめると対象の連結グラフ $G = (V, E)$ とその深さ優先探索木 $\mathcal{T} = (V, T)$ に対して $\sum_{(x,y)\in T} O(|\omega^-(y)|) + \sum_{(x,y)\in T} O(1) = O(|E \setminus T|) + O(|T|) = O(|E|)$ を得る。

まとめ　橋でないことを保証するために、各木辺 (x, y) に対して $h(x)$ と y の子孫の補木辺の終点の高さの最小値 lowest を対応づけ、一つ一つ健全性を確認しながら進めていく。バックトラックで子孫の lowest を適切に継承し所望の不変性を維持しつつ (set_lowest)、不要な補木辺を破棄する (prune)。大事なことは監視対象である終点の高さの引き継ぎと適時開放。これをバックトラック時に適切かつ効率良く処理する手順の設計がとても重要な観点である。

5　平面性判定アルゴリズム

まず深さ優先探索に基づく平面性判定の概要を確認する。次に子孫のフリンジを継承する際に禁止構造を検出する手順を議論する。禁止構造を検出しなかった場合のアルゴリズムの正当性についても議論する。

5.1　平面性判定の概要

平面性判定の概要の python コード　平面性判定アルゴリズムのフレームワークはアルゴリズム 7 に示すように橋検出のアルゴリズム 4 と本質的には変わらない。入力として連結なグラフ G と任意の頂点 root が与えら

れたとき、G の root から到達可能な連結成分の平面性を判定する。ハイライトは橋検出との変更箇所を表している。

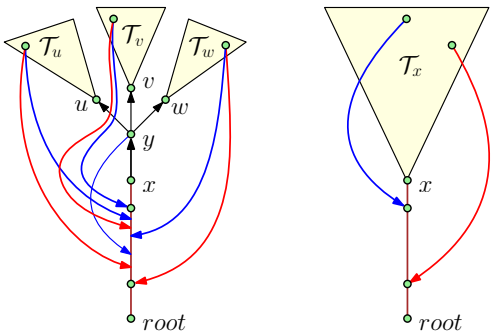
```
1  def is_planar(G, root):
2      stack, dfs_height = [(root, iter(G.neighbors(root)))], {x: -1 for x in G}
3      dfs_height[root] = 0
4      fringes = []
5      while stack:
6          parent, children = dfs_stack[-1]
7          try:
8              child = next(children)
9              if dfs_heights[child] < 0:
10                 dfs_height[child] = dfs_height[parent] + 1
11                 stack.append((y, iter([u for u in G.neighbors(child) if u != parent])))
12                 fringes.append([])
13             else:
14                 if dfs_height[parent] > dfs_height[child]:
15                     fringes[-1].append(fringe(dfs_height[child]))
16         except StopIteration:
17             stack.pop()
18             if len(fringes) > 0:
19                 try:
20                     merge_fringes(fringes, dfs_height[stack[-1][0]])
21                 except Exception:
22                     return False
23     return True
```

アルゴリズム 7: is_planar

第 20 行目の関数 merge_fringes が各木辺のフリンジを形成する手続きで、禁止グラフを検出したら直ちに例外 Exception を生成し処理を完了する。直感的には、スタックの末尾にいる木辺 (x, y) のフリンジを形成するために、$\omega^+(y)$ 内の各木辺のフリンジを継承し併合することを試みる。

フレームワークの計算量　フレームワークの計算量が、条件付きで橋検出と同様に深さ優先探索に準ずる計算量 $O(|E|)$ となることを確認する。対象グラフ $G = (V, E)$ およびその深さ優先探索木 $\mathcal{T} = (V, T)$ とする。異なる点は第 15・20 行目の fringe 周りの処理である。第 15 行はただ一つの補木辺で初期化されるフリンジを生成してスタックに積むだけなので $O(1)$。全体で $O(|E \setminus T|)$。第 20 行はスタックの先頭にある木辺 $e = (x, y)$ の $O(|\omega^+(y)|)$ 個の子孫のフリンジと $O(|\omega^-(y)|)$ 個のただ一つの補木辺で構成されるフリンジを併合して fringe(e) を形成する。

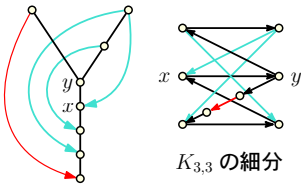
このとき関数 merge_fringes が $O(|\omega^+(y)| + |\omega^-(y)|)$ 時間で処理できれば全体で見ても $O(|E|)$ で抑えられる。つまり、$\sum_{(x,y)\in T} O(|\omega^+(y)| + |\omega^-(y)|) = O(|T|) + O(|E \setminus T|) = O(|E|)$。



後述するが、各木辺のフリンジは最も根に近い終点の高さと、最も根から離れた終点の高さの二つの参照点を備えるだけで十分である。一つしか補木辺を持たない場合は、それぞれ同じ補木辺を参照する。二つの子孫間のフリンジの併合は四つの補木辺の終点の高さの比較が主となる。

フリンジの併合と禁止構造　平面性判定アルゴリズムは、バックトラックごとにフリンジ内の補木辺が禁止グラフであるクラトフスキーグラフを形成するかを調べる。すべての木辺のフリンジを調べ終わり禁止グラフを検出できなかったら平面的と判定する。

右図は禁止グラフ $K_{3,3}$ の細分を含むフリンジの例である。左は木辺 (x, y) のフリンジを赤とシアンの矢印の集まりで表している。各黒辺は木辺とする。右は分かりやすく描画し直した同型のグラフである。



継承に基づくフリンジ形成　関数 merge_fringes の python コードをアルゴリズム 8 に示す。関数 get_merged_fringes を用いて併合したフリンジを取得し (第 2 行)、橋検出の場合と同様に不要な補木辺を fringe のクラス関数 prune を用いて破棄する (第 4 行)。第 3 行の条件式内の mf is not None は $\mathrm{fringe}(e) = \varnothing$ で橋の場合の手間を省くための記述である。第 5 行の条件式内のクラス変数 fops は次節で詳説するフリンジ内干渉で極大な非クラフトスキーグラフを見つけるための補木辺の組合せ構造である。不要な補木辺の破棄で組合せ構造が消滅しない限り先祖のフリンジに継承される (第 6 行)。

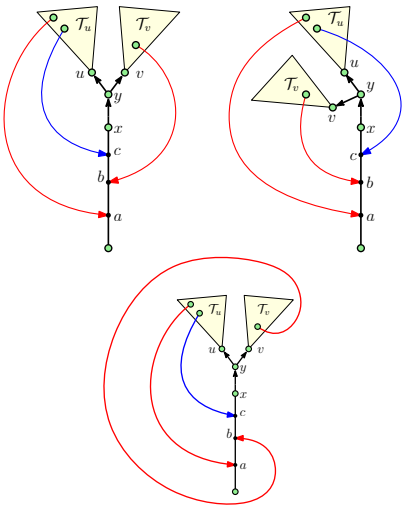
```
1 def merge_fringes(fringes, dfs_height):
2     mf = get_merged_fringe(fringes.pop())
3     if mf is not None:
4         mf.prune(dfs_height)
5         if mf.fops:
6             fringes[-1].append(mf)
```

アルゴリズム 8: merge_fringes

フリンジ併合の概要　アルゴリズム 8 内で呼ばれる get_merged_fringe は子孫のフリンジリスト upper_fringes を入力として、それらを併合したフリンジ new_fringe を出力する。アルゴリズム 9 はその python コードである。

まず 3 行目で子孫のフリンジを整列しているが、各フリンジの最も根に近い補木辺の終点の高さを基準にしている。右図の例では $\mathcal{T}_u < \mathcal{T}_v$ となる。これは根に近い補木辺を持つフリンジほど平面埋込みにおいて外面に近くあるべきと考えるからである。第 4 行以降は、根に近い補木辺を持つものから順に fringe のクラス関数 merge を用いて併合していく (第 5・6 行)。

右図は 3 通りの平面埋込みの例を示しているが、上段のいずれも最も根に近い補木辺を持つフリンジの方が外側に来ていることを示している。下段のように $\mathcal{T}_v$ の赤線の初等閉路の内側に $\mathcal{T}_u$ を埋め込むことはできるが根も同時に埋め込まなければならず根が外面に現れなくなる。この状況は後続の処理を複雑にするため好ましくない。対象グラフが平面的ならタットのばね定理 3 より任意の頂点を外面境界上に配置する平面埋込みの存在が保証されるので、深さ優先探索の根は外面に属す平面埋込みに制限する。従って下段の平面埋込みは拒否される。




```
1 def get_merged_fringe(upper_fringes):
2     if len(upper_fringes) > 0:
3         upper_fringes.sort()
4         new_fringe = upper_fringes[0]
5         for f in islice(upper_fringes, 1, len(upper_fringes)):
6             new_fringe.merge(f)
7         return new_fringe
```

アルゴリズム 9: get_merged_fringe

整列アルゴリズムについて　アルゴリズム 9 は整列アルゴリズムとして python バインドの TimSort を用いているが、厳密には整数整列アルゴリズムで実装しなければならない。補木辺の終点の高さは整数なのでビンソートなどを用いれば、$O(|\omega^+(v)| + |\omega^-(v)|)$ 時間で処理できる。各頂点 v の $\omega^+(v)$ および $\omega^-(v)$ のサイズの分布を見て必要に応じて適した整数ソートを実装すると良い。

5.2　フリンジの基本的な性質

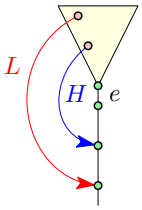
フリンジは対象の木辺に関連づく補木辺の集まりであるが、リストで管理するには簡潔すぎる。禁止グラフを形成しそうな補木辺の集まりを構造化し、これをリストする。禁止グラフを形成しそうな組合せ構造をフリン

ジ内干渉と呼ぶ。

5.2.1 フリンジの基本構造

下記にフリンジクラスの python コードの一部を示す。クラスメソッドなど詳細を含めたコードは節末のアルゴリズム 17 に示す。初期化は、空集合もしくは一つの補木辺からなる集合の二通りを受け付け、クラス `fop` の双方向キュー `self.fops` を作る。

```python
class fringe:
    def __init__(self, dfs_h=None):
        self.fops = deque() if dfs_h is None else deque([fop(dfs_h)])

    @property
    def H(self):
        return self.fops[0]

    @property
    def L(self):
        return self.fops[-1]
```



フリンジの基本構造は、二つの参照点 `L`, `H` しか持たない簡潔な構造をとる。`L`, `H` それぞれ最も根に近い、もしくは遠い終点を持つ補木辺への参照を与える。フリンジ内のフリンジ内干渉のリストを加工する際、内側から、すなわち `H` から更新や削除がされる。`L` はフリンジ内干渉を形成する補木辺の判定で用いられる。

5.2.2 フリンジ内干渉の定義

定義 3 (フリンジ内干渉)**.** $v \in V$ および $e_1, e_2 \in \omega^+(v)$ とする。e_1 が橋でないなら、e_2 の e_1 に対するフリンジ内干渉を次のように定義する。

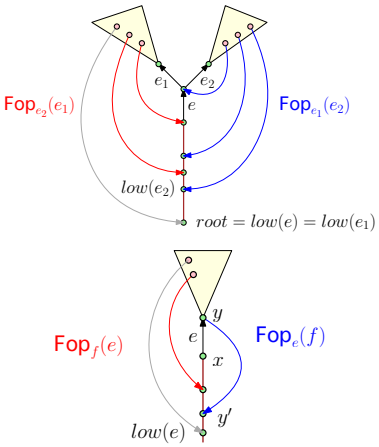
$$\mathsf{Fop}_{e_1}(e_2) = \{(x,y) \in \mathrm{fringe}(e_2) \ : \ y \succ \mathrm{low}(e_1)\}.$$

e_1 が橋なら $\mathsf{Fop}_{e_1}(e_2) = \varnothing$ とする。

また、木辺 $e = (x,y)$ と補木辺 $f = (y,y') \in \omega^-(y)$ に対するフリンジ内干渉も同様に定義する。e が橋でないなら、

$$\mathsf{Fop}_e(f) = \{f \ : \ y' \succ \mathrm{low}(e)\},$$
$$\mathsf{Fop}_f(e) = \{(x,y) \in \mathrm{fringe}(e) \ : \ y \succ y'\}.$$

e が橋なら $\mathsf{Fop}_e(f) = \varnothing$ とする。



定義 4. 深さ優先探索木 $\mathcal{T} = (V,T)$ において、辺集合 T から頂点集合 V への写像 low を次のように定義する。

$$\mathrm{low}(e) = \begin{cases} \underset{v \in \tau(e)}{\arg\min}\ h(v) & \text{if } e \text{ is not a bridge,} \\ \bot & \text{otherwise.} \end{cases}$$

ただし、$\tau(e) = \{y \text{ for } (x,y) \in \mathrm{fringe}(e)\}$ とする。

$\mathsf{Fop}_{e_1}(e_2)$ と $\mathsf{Fop}_{e_2}(e_1)$ に属す辺どうし、および $\mathsf{Fop}_e(f)$ と $\mathsf{Fop}_f(e)$ に属す辺どうしは互いに干渉するという。

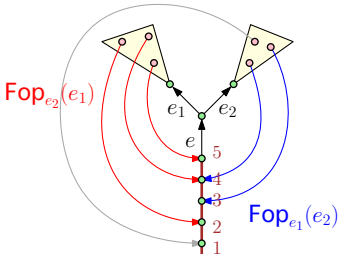
5.2.3 フリンジ内干渉のデータ構造

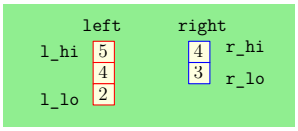
フリンジ内干渉のデータ構造をアルゴリズム 10 に示す。二つの双方向キューからなる単純な構造だが、使い方に注意が必要である。配列 `self.c` の二つの双方向キューは、対象の木辺 (x,y) に対して $\mathcal{T}_y$ 内の頂点を始点に持ち、y の先祖に終点を持つ互いに干渉する補木辺を管理する。

```python
class fop:
    def __init__(self, h):
        self.c = [deque([h]), deque()]

    @property
    def left(self):
        return self.c[0]

    @property
    def right(self):
        return self.c[1]

    @property
    def l_lo(self):
        return self.c[0][-1]

    @property
    def l_hi(self):
        return self.c[0][0]

    @property
    def r_lo(self):
        return self.c[1][-1]

    @property
    def r_hi(self):
        return self.c[1][0]
```

アルゴリズム 10: fringe_opposed_subset

6 つの参照点　ある平面埋込みの木辺 e のフリンジ内干渉を管理するデータ構造の簡略図を下に示している。データ構造は 6 つの参照点を持つ。左右の双方向キューへの参照 `left`, `right`、およびそれらの先頭 `l_hi`, `r_hi` と末尾 `l_lo`, `r_lo` への参照。





フリンジ内干渉の文字列表現　フリンジ内干渉を各補木辺の終点の高さを管理する二つの整数系列の対で表現する。上図の緑の矩形に囲まれたフリンジ内干渉のデータ構造は $\varphi = ([5, 4, 2], [4, 3])$ のように書ける。φ.left.low で $\mathrm{low}(e_1)$ の高さ 2 を得る。

5.2.4　フリンジ内干渉のデータ構造に対する管理規約

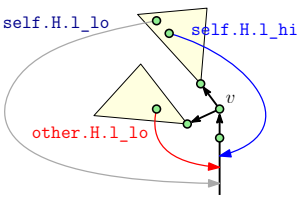
左優先の管理規約　各補木辺は可能な限り左側の双方向キューで管理する。右側の双方向キューは空集合であることが望ましい。アルゴリズムの処理過程で左が空集合で右が非空となる場合がある。その場合、右側の補木辺集合を左に置き換える。置き換えても問題無いことは補題 20 が保証する。

補木辺の位相不変性　平面性判定の処理過程において、フリンジ併合および補木辺除去によって各双方向キュー内の終点の高さに関する非増加順序を乱さないことを保証しなければならない。この不変性により、補木辺どうしの干渉性、あるフリンジを別のフリンジの入れ子にできるかどうか、不要になった補木辺の除去などの手続きが定数時間で処理できることを保証できる。このフリンジ内干渉の位相不変性は、アルゴリズムの線形時間計算量を保証する上で最重要事項である。

フリンジ内干渉の取り扱い　管理規約に従うと干渉し合う補木辺の入れ替えは、具体的にアルゴリズム 11 のように `fringe` のクラスメソッド `_merge_t_opposite_edges_into` として記述できる。双方向キュー `left` は `right` の末尾に連結されるので $O(1)$ 時間で完了する。従って計算量は、第 2 行のループ回数 $O(|\omega^+(v)| + |\omega^-(v)|)$ で抑えられる。

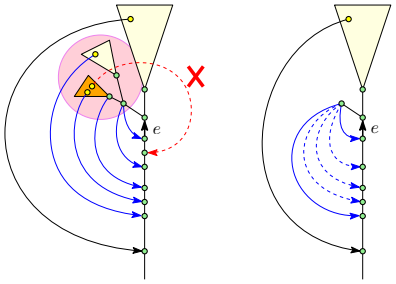
```python
    def _merge_t_opposite_edges_into(self, other):
        while (not self.H.right and self.H.l_hi > other.H.l_lo):
            other.H.right.extend(self.H.left)
            self.fops.popleft()
```

アルゴリズム 11: _merge_t_opposite_edges_into



5.2.5　フリンジ内干渉を利用したクラトフスキー部分グラフの検出

フリンジ内干渉の `right` が非空の場合、その初等閉路の集まりが誘導する部分グラフが極大な非クラストフキーグラフを形成することを確認する。つまり `right` が非空の状態で内から外へ接続する補木辺が存在するとき、直ちに非平面的と判定できることを示す。



子孫フリンジの縮約　最初の例は、フリンジ内干渉の `left` サイドに補木辺の集まりを仮想的に縮約する手続きである。具体的な python コードをアルゴリズム12 に示す。まずは状況確認から。木辺 $e = (x, y)$ のフリンジ $\mathrm{fringe}(e)$ を形成しようとしている。このとき子孫の木辺 $e_i \in \omega^+(y)$ の各フリンジは形成済みであり、それぞれクラトフスキーグラフを含まない、つまり平面的とする。また、$k = |\omega^+(y)|$ とし、$e_1, \ldots, e_k$ は $h(\mathrm{low}(e_i))$ に関して昇順に採番されている。縮約対象は各木辺 $e_2, \ldots, e_k$ の各フリンジ内干渉のリスト `fops` である。

右図左の丸で囲まれたフリンジを縮約対象とし考察する。右が所望の縮約結果である。すべての補木辺が `left` サイドに配置されているならクラフトスキーグラフは存在しない。$\mathrm{low}(e_1)$ を終点とする補木辺が存在するので、いずれの補木辺も部分的に `right` に配置することはできない。`right` に配置する場合は全ての補木辺を `fops` 内の順序を変えること無く移動させなければならない。以上のことから仮想的な頂点を始点とするよう縮約して扱う必要がある。

```
1    def _merge_t_alike_edges(self):
2        if self.H.right:
3            raise Exception
4        for f in islice(self.fops, 1, len(self.fops)):
5            if f.right:
6                raise Exception
7            self.H.left.extend(f.left)
8        self.fops = deque([self.fops[0]])
```

アルゴリズム 12: _merge_t_alike_edges

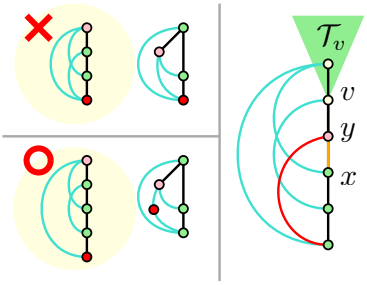
このときオレンジの部分木のように、`left, right` 両サイドに補木辺が配置されるフリンジ内干渉が存在する場合クラフトスキーグラフを形成する。第 2 行および第 5 行のように `if self.H.right` で非空を判定し、真のとき例外 `Exception` を生成し平面的でないと判定し処理を完了する。そうでない場合は第 7 行のように、先頭のフリンジ内干渉の双方向キュー `left` の末尾に連結する。最終的に第 8 行のように唯一のフリンジ内干渉に縮約されるので、参照点 `H` の利用はそれほど本質的ではない。

計算量と正当性　アルゴリズム 12 の第 4 行の `for` ループの内部は 1 つの条件式と連結リストの結合なので $O(1)$。ループ回数はフリンジ内干渉のリスト `fops` のサイズなので $O(|\omega^+(v)| + |\omega^-(v)|)$ で抑えられる。正当性は補題 18 に従う。

補題 18. アルゴリズム *12* が例外を生成するならクラトフスキー部分グラフが存在する。

Proof. `right` が非空になる二通りの場合を考察する。

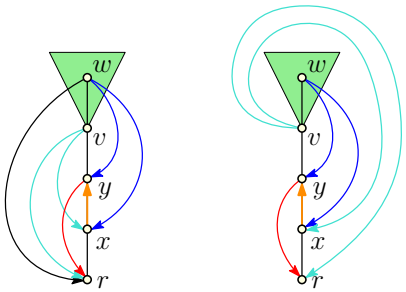
まず、フリンジ内干渉を形成するには、右図左下段のように五つの頂点の下で、三つの補木辺 (シアン) と四つの木辺 (黒) が少なくとも必要である。補木辺の始点の中で最も根に近い頂点を v、終点の中で最も根から離れている頂点を x とする。アルゴリズム12 が呼ばれる状況、つまり $\mathcal{T}_v$ の頂点を始点とする補木辺を継承してフリンジを形成することを考える。このとき、木辺 (x, v) を細分するような頂点 y が存在し、y を始点とし高さが $h(\mathrm{low}((y, v)))$ 以下の頂点を終点とする別の補木辺も存在するとする (右図赤辺)。頂点と辺の個数 $n,\ m$ を見積もるとそれぞれ $n = 6, m = 9$ を得る。この部分グラフの内周 γ は 4 なので系 1.1 より平面的グラフなら $m \leq \frac{\gamma}{\gamma-2}(n-2)$ を満たさなければならないが $9 \leq 8$ と



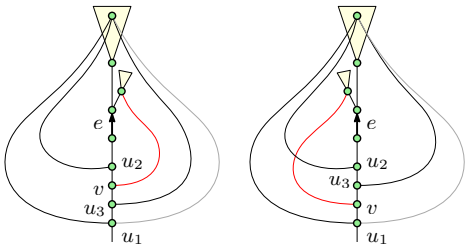
なる。これは $K_{3,3}$ の細分を形成することを意味する。

別の `right` が非空の場合を考察する。右図の $\omega^-(v)$ と $\omega^-(w)$ は互いに干渉するので、`right` が非空のフリンジ内干渉を形成する。いま木辺 (x, y) のフリンジを形成しようとしている。先ほど同様 y を始点とし高さが $h(\mathrm{low}((y, v)))$ 以下の頂点を終点とする別の補木辺も存在するとする (右図赤辺)。このとき右図右のように黒辺が存在しなければ平面埋込みは存在するが、黒辺が存在するので平面性は成り立たない。$\{r, x, y, v, w\}$ が導出する部分グラフは 5-頂点で 4-正則なので K_5 を形成する。

いずれの場合もクラトフスキー部分グラフを形成する。 □



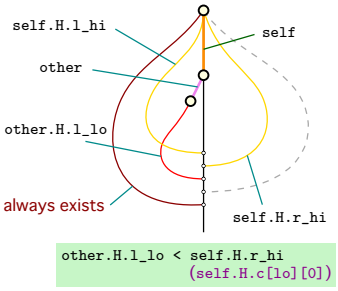
正しい玉ねぎ構造の埋込み 次の禁止グラフの検出は、対象木辺 $e = (x, y)$ に対する $e_1, e_2 \in \omega^+(y)$ のフリンジの併合に関する手続きである。$h(\mathrm{low}(e_1)) \leq h(\mathrm{low}(e_2))$ とする。また $\mathrm{fringe}(e_1)$ は `right` が非空のフリンジ内干渉 $\gamma_1 = ([h(u_2), h(u_1)], [h(u_3)])$ を持つ。ただし、$h(u_1) < h(u_2)$ かつ $h(u_1) \leq h(u_3) \leq h(u_2)$。同様に $\mathrm{fringe}(e_2)$ は `right` が空だが γ_1 と干渉する $\gamma_2 = ([h(v)], [\,])$ を持つ。γ_1 と γ_2 が干渉する場合 $h(u_3)$ と同様に $h(u_1) \leq h(v) \leq h(u_2)$ を満たす。このとき $h(v) < h(u_3)$ ならクラトフスキー部分グラフを形成する (右図右)。



具体的な python コードの例をアルゴリズム 13 に示す。`self` が $\mathrm{fringe}(e_1)$ で `other` が $\mathrm{fringe}(e_2)$。このとき `self` の最も根から離れている終点の高さ `self.H.l_hi` および `self.H.r_hi` を見ていずれかの内部に `other` のフリンジ内干渉を埋め込めるかを確認する (第 2・3 行)。埋め込めるようであれば `self` の双方向キューに `other` の要素を連結する (第 6-9 行)。それ以外の場合は非平面的なので処理を完了する (第 4 行)。

```
1    def _make_onion_structure(self, other):
2        lo, hi = (0, 1) if self.H.l_hi < self.H.r_hi else (1, 0)
3        if other.H.l_lo < self.H.c[lo][0]:
4            raise Exception
5        elif other.H.l_lo < self.H.c[hi][0]:
6            self.H.c[lo].extendleft(reversed(other.H.left))
7            self.H.c[hi].extendleft(reversed(other.H.right))
8            other.H.left.clear()
9            other.H.right.clear()
```

アルゴリズム 13: _make_onion_structure



玉ねぎ構造という名称は別にふざけて呼んでいるわけではない。幾何学的グラフに準ずる組合せ構造の列挙や数え上げに対して用いられる層構造を呼称する際に用いられている。また、平面的グラフを対象とする最適化問題の多くは、ベイカーのやり方に代表される層構造を利用したアプローチが広く用いられる。

計算量と正当性 アルゴリズム 13 は三つの条件式および連結リストの結合と破棄なので $O(1)$ で完了する。python の `collections.deque.extendleft` は最悪の場合 $O(|\omega^+(v)| + |\omega^-(v)|)$ 時間かかるので必要に応じて実装を見直す必要がある。ただ、ここで結合された要素は以降のフリンジ形成において削除されるまで入れ替えられることはないので全体の計算量へは漸近的に影響しない。また、正当性は補題 19 に従う。

補題 19. アルゴリズム *13* が例外を生成するならクラトフスキー部分グラフが存在する。

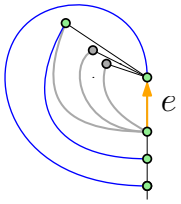
Proof. 補題 18 の証明と同様の議論が成り立つ。補題 18 では、`right` が空のフリンジ内干渉に対して `right` が非空のフリンジ内干渉を併合する手続きだが、ここではその逆の場合なので結局クラトフスキー部分グラフを持つ。 □

5.2.6 補木辺の削除

バックトラックでクラトフスキーグラフを検出しなかった場合、先祖のフリンジに継承されない補木辺を破棄する手続きを確認する。すなわち $T_{\succeq y} = \{(u, v) \in E \setminus T \mid y \preceq v\}$。具体的な python コードをアルゴリズム 14

に示す。バックトラックで fringe(e) を形成し終えた直後に、禁止グラフが存在しなかったら e の終点に接続する辺を破棄する。下図は `left` しか明示していないが `right` も同時に確認していく。玉ねぎ構造の内側 `self.H` から順次破棄する。

```
    def prune(self, dfs_height):
        left_, right_ = self.__lr_condition(dfs_height)
        while self.fops and (left_ or right_):
            if left_:
                self.H.left.popleft()
            if right_:
                self.H.right.popleft()
            if not self.H.left and not self.H.right:
                self.fops.popleft()
            else:
                self._swap_side()
            if self.fops:
                left_, right_ = self.__lr_condition(dfs_height)
```



アルゴリズム 14: prune

アルゴリズム 14 (`prune`) は二つの手続き `__lr_condition` と `_swap_side` を呼び出す。前者は両サイドの双方向キューの存在確認で、後者は管理規約に従い `left` が空で `right` が非空の場合に置換する手続きである。

```
    def __lr_condition(self, dfs_height):
        return (self.H.left and self.H.l_hi >= dfs_height,
                self.H.right and self.H.r_hi >= dfs_height)
```

アルゴリズム 15: __lr_condition

```
    def _swap_side(self):
        if not self.H.left or (self.H.right and self.H.l_lo > self.H.r_lo):
            self.H.c[0], self.H.c[1] = self.H.c[1], self.H.c[0]
```

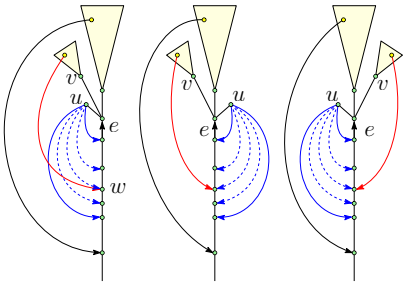
アルゴリズム 16: _swap_side

計算量と正当性　フリンジ内干渉のデータ構造の管理規約により正しく入れ子構造が保証できるので $O(|\omega^+(v)|)$ 時間で完了する。$\omega^-(v)$ が勘定に入っていないのは対象グラフとして単純グラフを想定しているからである。正当性は補題 20 が保証する。

補題 20. 左優先の管理規約において、アルゴリズムの処理過程で `left` が空集合で `right` が非空となる場合、`right` の補木辺集合を `left` に置き換えても写像が交差することはない。

Proof. `left` が空で `right` が非空になる唯一の経緯を演繹的に置換操作が問題無いことを示す。

木辺 $e = (x, y)$ のフリンジを形成する状況で、$e_1 = (y, u)$, $e_2 = (y, v) \in \omega^+(y)$ が互いに干渉する場合を考える。$h(\mathrm{low}(e_1)) < h(\mathrm{low}(e_2))$ で、$\omega^-(u)$ がアルゴリズム12 に基づき縮約されているとする。このときアルゴリズム11 に基づき fringe(e_1) を `right` に配置するフリンジ内干渉が形成される。禁止グラフを検出しないまま $w = \mathrm{low}(e_2)$ までバックトラックし w の先祖に進む直前で fringe(e_2) は禁止グラフを引き起こす可能性のある補木辺は一つもなくなる。一方で $\mathrm{low}(e_1)$ を終点として持つ補木辺は存在する。この状況でアルゴリズム16 に基づきフリンジ内干渉の `left` と `right` を置換しても矛盾を誘発しない。 □



5.3 F-彩色による平面性保証

前節ではアルゴリズム 7 is_planar が非平面的と答えたら与えられたグラフは非平面的であることを証拠付きで保証できることを確認した。残りはアルゴリズムが平面的と答えた場合の正当性を保証しなければならない。これは F-彩色性という概念を用いる。

定義 5 (F-彩色)**.** グラフ $G = (V, E)$ とその深さ優先探索木 $\mathcal{T} = (V, T)$ の下で彩色 $\lambda : E \setminus T \to \{\mathsf{left}, \mathsf{right}\}$ が次の条件を満たすとき F-彩色という。

- 各頂点 $v \in V$ およびその任意の木辺対 $e_1, e_2 \in \omega^+(v)$ に関して $\mathsf{Fop}_{e_1}(e_2)$ と $\mathsf{Fop}_{e_2}(e_1)$ がそれぞれ同色で、互いに異なる彩色となる。
- 同様に、任意の木辺 $e \in \omega^+(v)$ と補木辺 $f \in \omega^-(v)$ の対に関して $\mathsf{Fop}_e(f) \neq \varnothing$ なら $\mathsf{Fop}_f(e)$ に属す補木辺すべて同色でかつ、各 $f' \in \mathsf{Fop}_f(e)$ に関して $\lambda(f') \neq \lambda(f)$ となる。

また、あるグラフ G が F-彩色を許容するなら、G は F-彩色を持つ、もしくは F-彩色性を有するという。

F-彩色は補木辺の集合を二つの互いに素な部分集合に分割する。left に彩色された補木辺は、その初等閉路が左回りになり、right の補木辺は右回りになるような平面描画を与える。

定理 5 (F-彩色定理)**.** $G = (V, E)$ を平面的グラフ、$\mathcal{T}$ をその深さ優先探索木とする。このとき G は F-彩色を持つ。

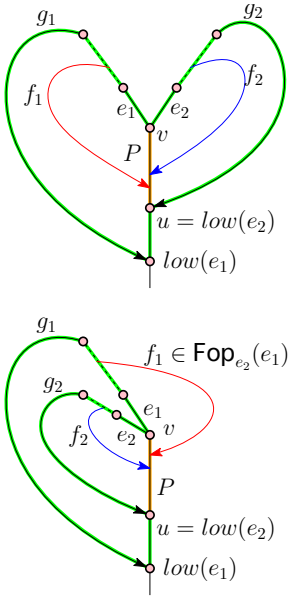
Proof. G は根が外面になるように平面に埋め込まれていると仮定する。関数 λ を与えられた補木辺に対し、その初等閉路が左回りなら $\lambda(e) = 1$、右回りなら $\lambda(e) = -1$ を返す関数とする。

$v \in V$ および $e_1, e_2 \in \omega^+(v)$ とする。$g_1 = \arg\min_{(x',y') \in \mathrm{fringe}(e_1)} h(y')$ とし g_2 も e_2 に関して同様に定義する。γ を次の四つの便宜上無向辺とみなす辺の系列をつなげた閉路とする。g_1 から g_1, g_2 の終点間の木辺の系列へ、それから g_2 に続いて g_1, g_2 の v を経由する木辺の系列 (右図緑閉路)。$u = \arg\max_{e \in \{e_1, e_2\}} h(\mathrm{low}(e))$ とする。C_1, C_2 をそれぞれ g_1, g_2 の初等閉路に対応する写像円とする。同様に C_γ を γ の写像円とする。γ_1, γ_2 をそれぞれ g_1, g_2 の写像円とする。P を u から v への木辺の系列とする。このとき互いに独立な二つの場合を考える。

P が C_γ の内部にある (右図上)。このとき例えば $\lambda(g_1) = 1$, $\lambda(g_2) = -1$ のように g_1 と g_2 は異なる彩色がなされ、P の左に C_1、右に C_2 ガ描画される。$\mathsf{Fop}_{e_2}(e_1)$ のどの補木辺の写像も γ_1 と交差しないし同様に $\mathsf{Fop}_{e_1}(e_2)$ のどれも γ_2 と交差しないので、$\lambda(f_1) = \lambda(g_1)$ および $\lambda(f_2) = \lambda(g_2)$ を得る。

P が C_γ の外部にある (右図下)。g_1 と g_2 は同色の彩色がなされ、C_1 が C_2 を包含する。このとき P の左は C_1 に属し、右は C_2 外部に属す。$\mathsf{Fop}_{e_2}(e_1)$ のどの補木辺も γ_2 と交差しないし同様に $\mathsf{Fop}_{e_1}(e_2)$ のどの辺の写像も γ_1 と交差しない。従って $\lambda(f_1) = -\lambda(g_1)$ および $\lambda(f_2) = \lambda(g_2)$ を得る。

いずれの場合も $\mathsf{Fop}_{e_2}(e_1)$ と $\mathsf{Fop}_{e_1}(e_2)$ はそれぞれ同一色で、互いに異なる彩色がなされる。従って λ は F-彩色である。 □



F-彩色定理に基づく正当性保証　最終的に禁止グラフであるクラトフスキー部分グラフを検出しなかったとき F-彩色が存在することが示せれば、 アルゴリズム 7(is_planar) は正しく平面性を判定することが示せる。

補題 21. アルゴリズム 7 (is_planar) で禁止グラフを検出しない場合、F-彩色が存在する。

Proof. アルゴリズム 14 (prune) において補木辺が削除されるタイミングで left と right いずれに属すかに応じて彩色することを考える。ただ left が空で right が非空になるとアルゴリズム 16 (_swap_side) による置換が発生することに注意する。

干渉する辺と反対の色が割り当てられるよう記憶しておく。同様にアルゴリズム 12 (_merge_t_alike_edges) の縮約により同色になるべき先祖に接続する補木辺が存在する場合も適宜記憶する。従属する補木辺がない場

合は、左優先の管理規約に基づき left で彩色すれば良い。この従属関係は対象グラフが平面性を有するなら閉路のない有向グラフとなるので、最終的に確定している彩色値に応じて先祖から子孫へ適宜伝搬していけば、$O(E \setminus T)$ 時間で F-彩色を得る。 □

最終的に次の定理を得る。

定理 6. アルゴリズム 7 `is_planar` は連結なグラフの平面性判定を線形時間で与える。

5.4 クラス `fringe` の python コード

クラス `fringe` の全体をアルゴリズム 17 に示す。また、これまで記述した平面性判定に関する python コードは https://github.com/satemochi/is_planar で管理している。

```
class fringe:
    def __init__(self, dfs_h=None):
        self.fops = deque() if dfs_h is None else deque([fop(dfs_h)])

    def __lt__(self, other):
        diff = self.L.l_lo - other.L.l_lo
        if diff != 0:
            return diff < 0
        return self.H.l_hi < other.H.l_hi

    @property
    def H(self):
        return self.fops[0]

    @property
    def L(self):
        return self.fops[-1]

    def merge(self, other):
        other._merge_t_alike_edges()
        self._merge_t_opposite_edges_into(other)
        if not self.H.right:
            other._align_duplicates(self.L.l_hi)
        else:
            self._make_onion_structure(other)
        if other.H.left:
            self.fops.appendleft(other.H)

    def _merge_t_alike_edges(self):
        if self.H.right:
            raise Exception
        for f in islice(self.fops, 1, len(self.fops)):
            if f.right:
                raise Exception
            self.H.left.extend(f.left)
        self.fops = deque([self.fops[0]])

    def _merge_t_opposite_edges_into(self, other):
        while (not self.H.right and self.H.l_hi > other.H.l_lo):
            other.H.right.extend(self.H.left)
            self.fops.popleft()

    def _align_duplicates(self, dfs_h):
        if self.H.l_lo == dfs_h:
            self.H.left.pop()
            self._swap_side()

    def _swap_side(self):
        if not self.H.left or (self.H.right and self.H.l_lo > self.H.r_lo):
```

```
            self.H.c[0], self.H.c[1] = self.H.c[1], self.H.c[0]

    def _make_onion_structure(self, other):
        lo, hi = (0, 1) if self.H.l_hi < self.H.r_hi else (1, 0)
        if other.H.l_lo < self.H.c[lo][0]:
            raise Exception
        elif other.H.l_lo < self.H.c[hi][0]:
            self.H.c[lo].extendleft(reversed(other.H.left))
            self.H.c[hi].extendleft(reversed(other.H.right))
            other.H.left.clear()
            other.H.right.clear()

    def prune(self, dfs_height):
        left_, right_ = self.__lr_condition(dfs_height)
        while self.fops and (left_ or right_):
            if left_:
                self.H.left.popleft()
            if right_:
                self.H.right.popleft()
            if not self.H.left and not self.H.right:
                self.fops.popleft()
            else:
                self._swap_side()
            if self.fops:
                left_, right_ = self.__lr_condition(dfs_height)

    def __lr_condition(self, dfs_height):
        return (self.H.left and self.H.l_hi >= dfs_height,
                self.H.right and self.H.r_hi >= dfs_height)
```

アルゴリズム 17: クラス fringe