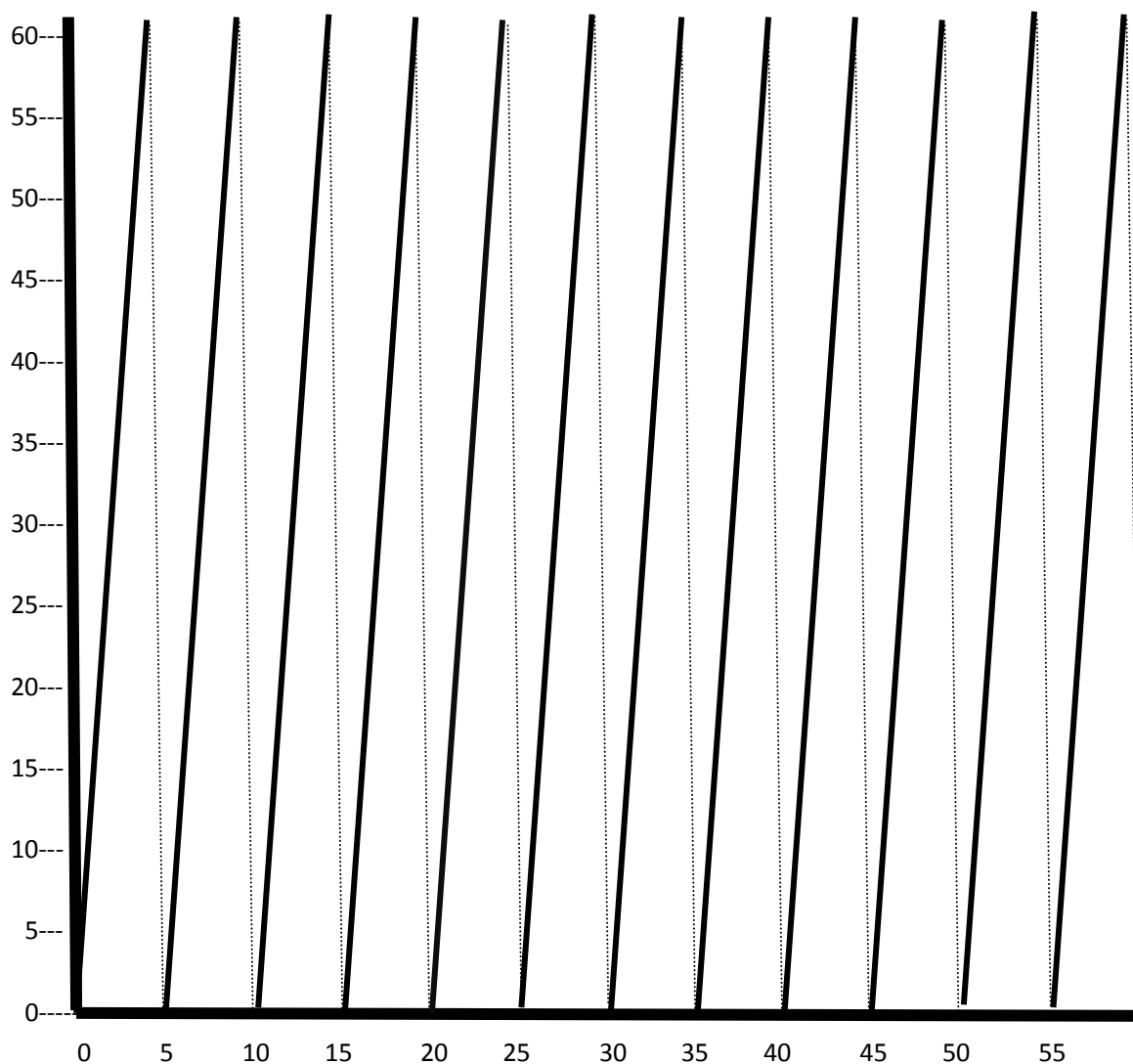


钟面问题的图形化解法

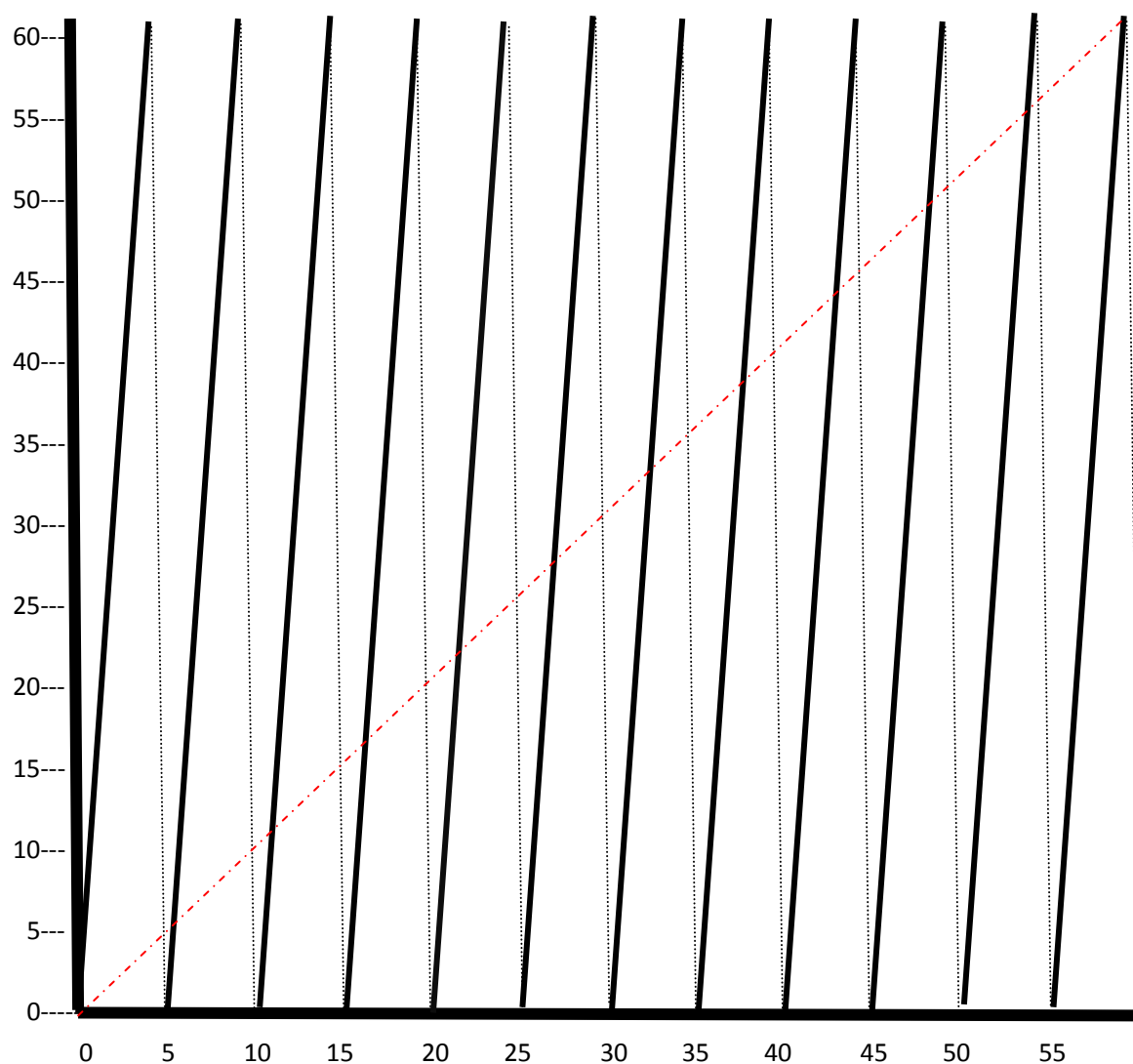
吕 斌



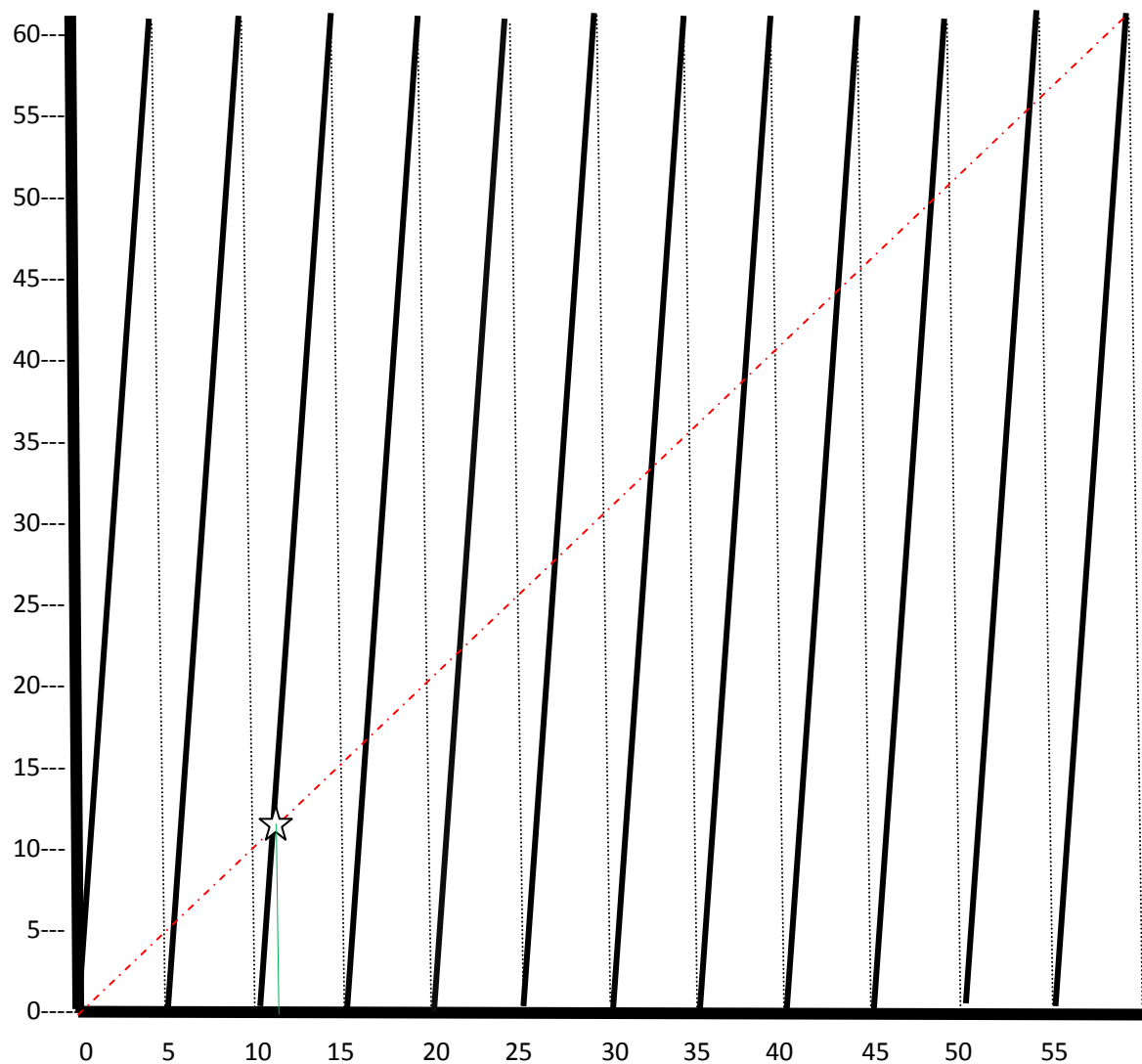
将钟表看成 60 个小格，时针每小时走 5 格，分针每小时走 60 格，时间是由时针所指位置与分针所指位置所决定，利用图形化方法来解决常见的钟面问题，该方法的目的在于开阔视野，拓展思路。

图中横轴为时针位置，纵轴为分针位置，于是从 0 点到 12 点画出 12 条直线，直线上的点表示相应的时间，如图所示，下面将用此图来解决钟面问题（所选题目中例 1、例 2 来自 www.aoshu.com）。

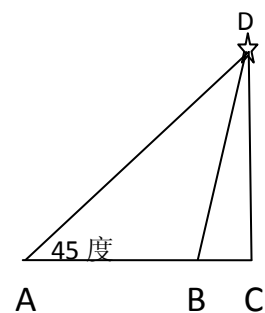
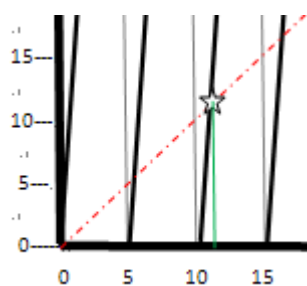
例 1：王师傅 2 点多钟开始工作，时针与分针正好重合在一起，5 点多钟完工时，时针与分针正好又重合在一起，王师傅工作了多长时间？



图中红色的点画线 $y=x$ ，即此线上的点满足 x 值与 y 值相同，因此题目时针与分针重合的时间，恰好为红色点画线与黑色实线的交点。



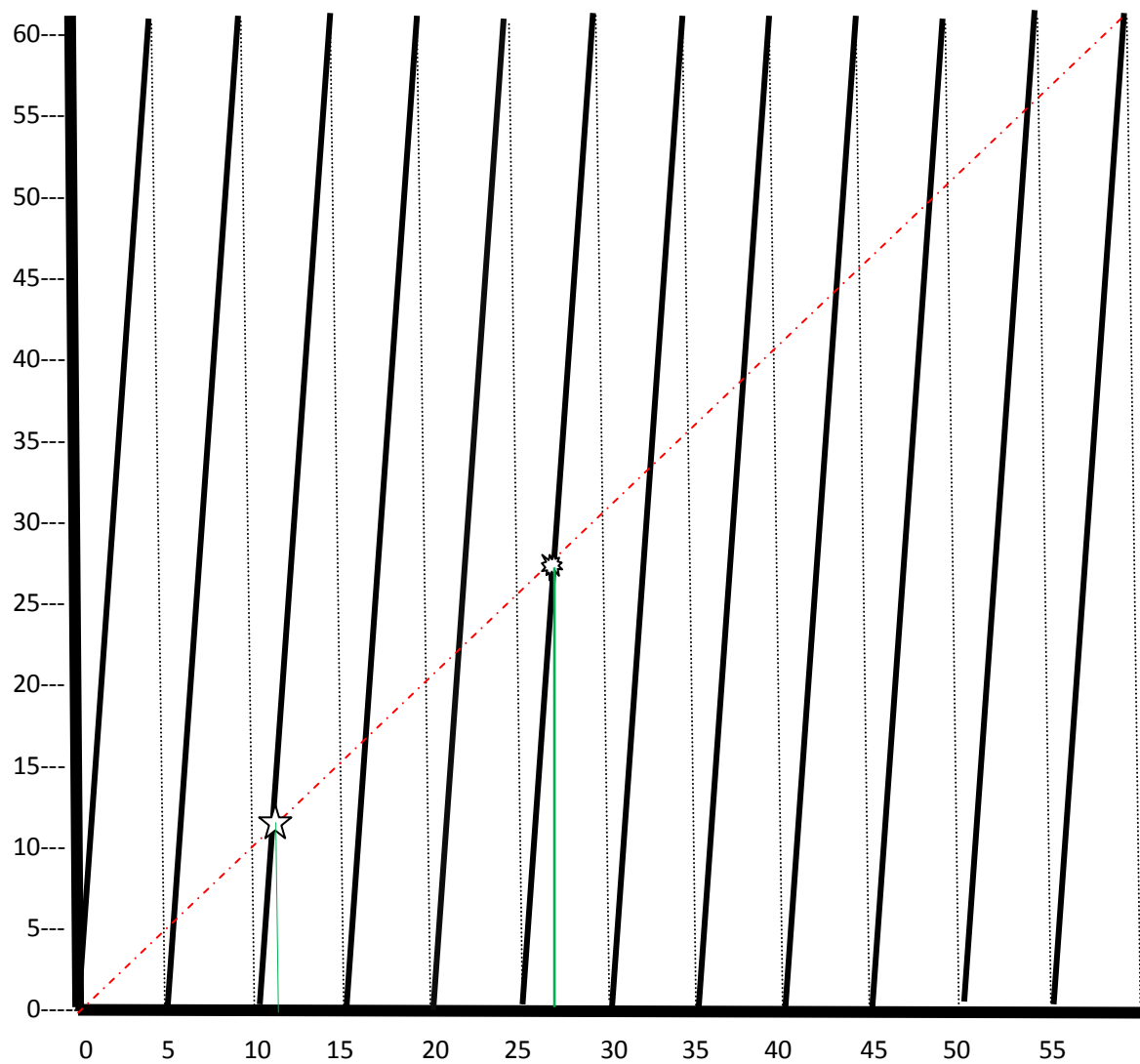
开始时间：2 点多钟时针与分针正好重合在一起时，开始工作，
此时为图中五角星位置，下一步确定五角星位置对应的时间，



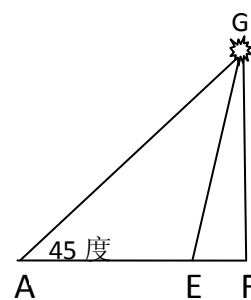
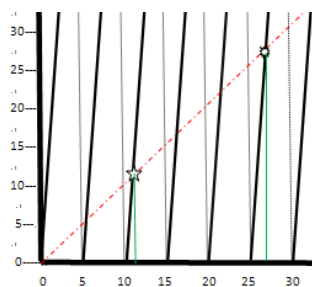
已知 $AB=10$ ， $\angle A=45$ 度， $AC=CD$ ，而 $BC:CD = 5:60 = 1:12$ ，

于是 $AB:BC = 11:1$ ，

因此， $BC=10/11$ ， $CD=AC=10\frac{10}{11}$ ，开始时间为 2 点 $10\frac{10}{11}$ 分，



结束时间：5点多钟时针与分针正好重合在一起时，此时为图中圆圈位置，下一步确定圆圈位置对应的时间，

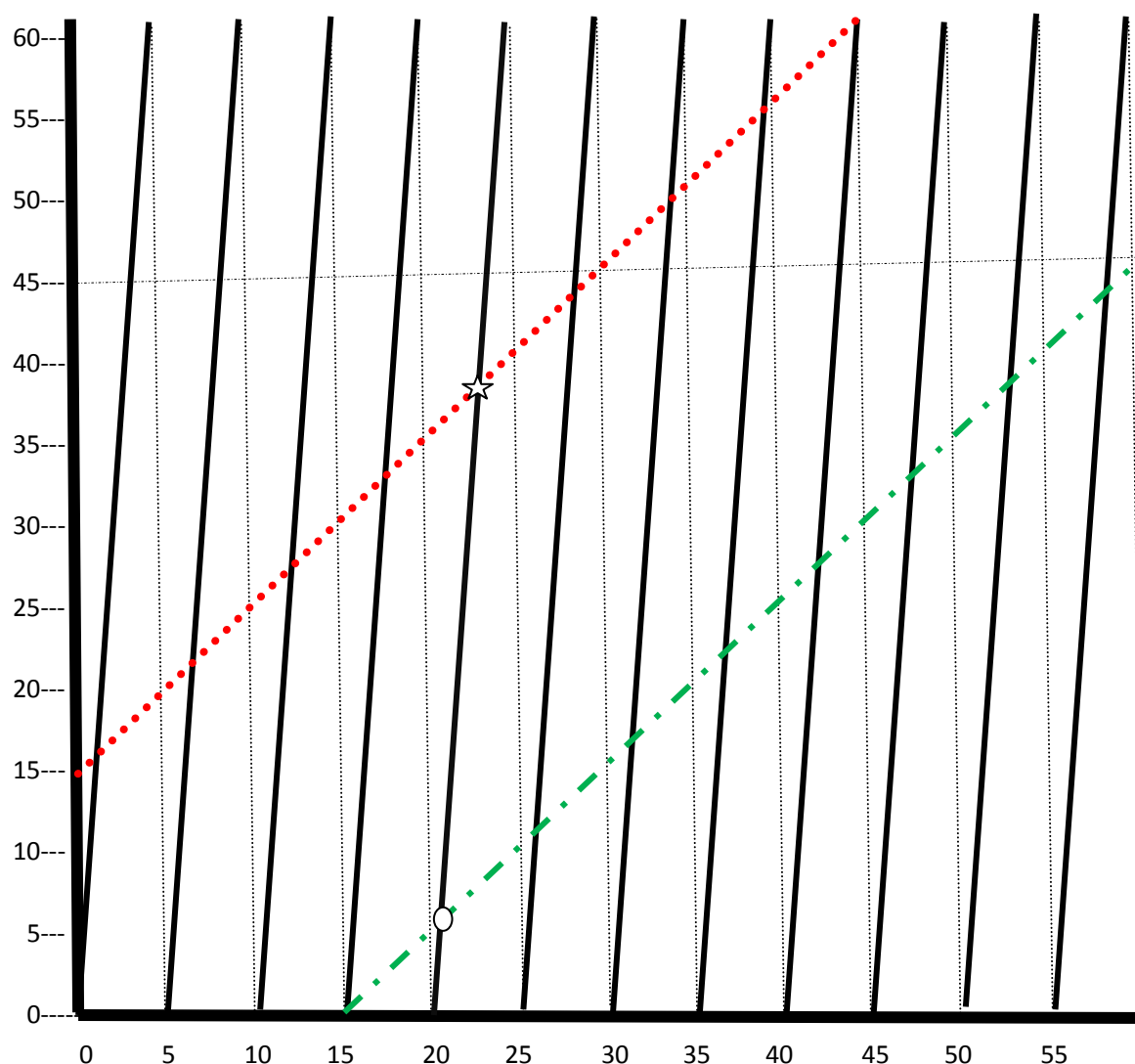


已知 $AE=25$ ， $\angle A=45^\circ$ ， $AF=FG$ ，而 $EF:FG = 5:60 = 1:12$ ，

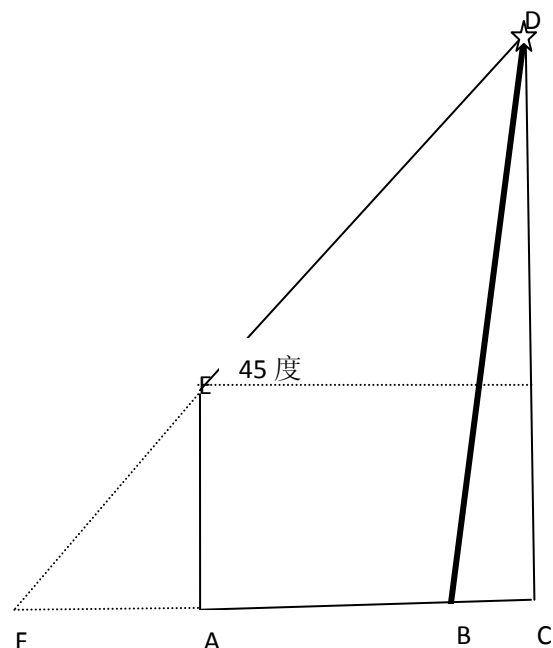
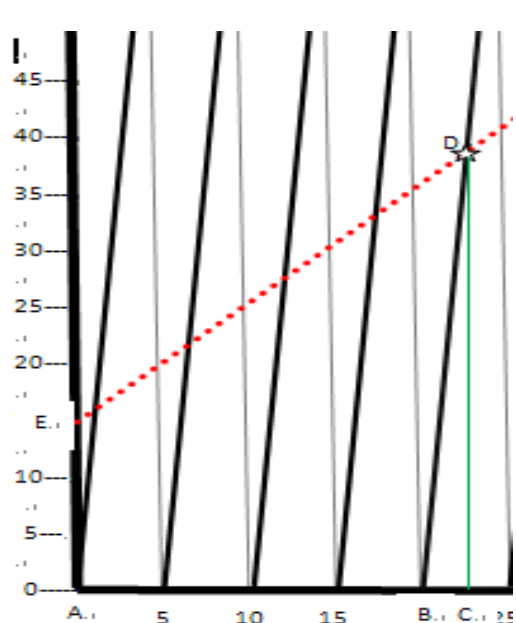
于是 $AE:EF = 11:1$ ，

因此， $EF=25/11$ ， $GF=AF=27\frac{3}{11}$ ，开始时间为 5 点 $27\frac{3}{11}$ 分。

例 2：我们知道 3 点时，时针与分针恰好成直角，那么在 4 点与 5 点之间的什么时刻，分针与时针恰好成直角？



如图，时钟被分成 60 个小格，横轴为时针，纵轴为分针，那么当什么样的情况下，时针与分针的夹角刚好是 90 度呢？第一种情况：按顺时针方向，分针的位置比时针领先 15 个格，在图中表示为红色虚线，即红色虚线与黑色实线的交点对应的时刻，即为分针与时针夹角为 90 度；另一种情况，按顺时针方向，时针的位置比分针领先 15 个格，在图中表示为绿色点画线，题目要求的时刻为图中五角星和圆圈对应的时刻。



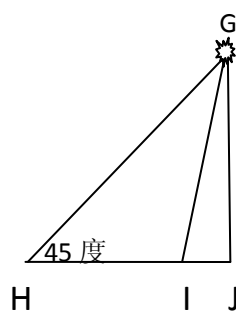
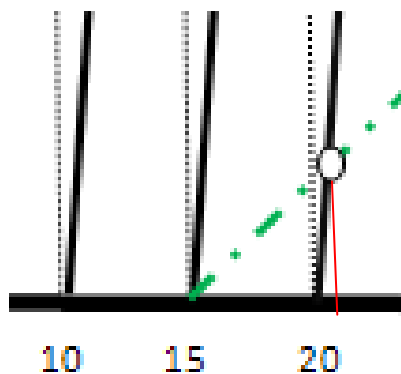
第一种情况： 延长 DE, CA, 交于点 F, 于是有 $AB=20$, $AE=15$,

$BC : CD = 5 : 60 = 1 : 12$, $FC = CD$, $AF = AE$,

因此, $FB : BC = 11 : 1$, $FB = FA + AB = 35$

$$BC = \frac{35}{11}, \quad CD = FC = FB + BC = 38\frac{2}{11}$$

此时间为 4 点 $38\frac{2}{11}$ 分



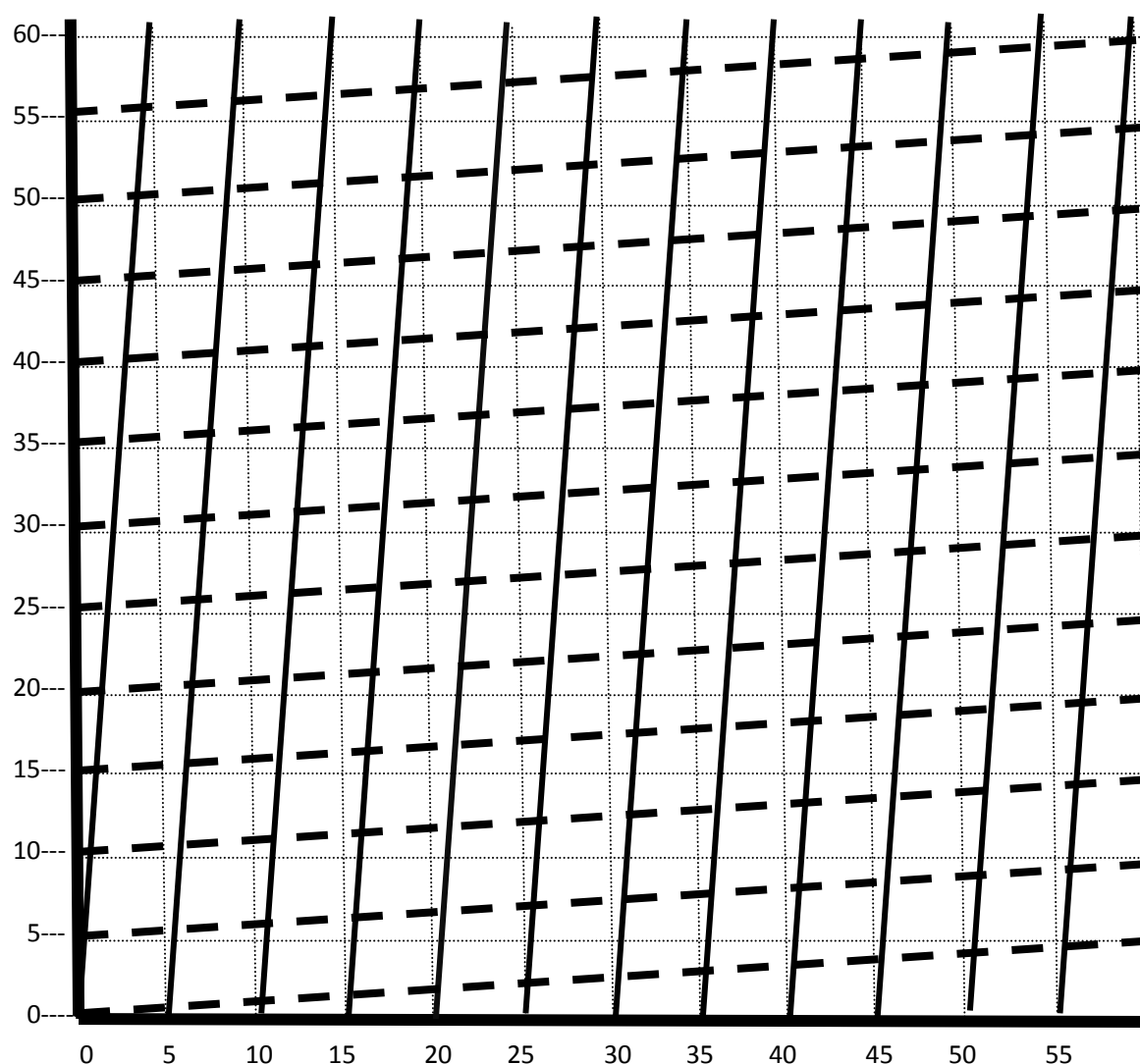
第二种情况： 有 $HI = 5$, $IJ : GJ = 5 : 60 = 1 : 12$, $HJ = GJ$,

因此, $HI : IJ = 11 : 1$,

$$IJ = \frac{5}{11}, \quad GJ = HJ = HI + IJ = 5\frac{5}{11}$$

此时间为 4 点 $5\frac{5}{11}$ 分。

例 3： 时针与分针的位置决定了相应的时间，在表盘上，有的时候分针与时针的位置即使互换位置后仍然可以对应一个相应地时间，比如 12 点整，但大部分时候，分针和时针互换后是不可以表示时间的，比如 3 点整，如果将此时时针与分针互换后，没有一个时间是这样的时针分针位置，问：时针、分针位置交换后仍然表示时间的情况，其出现的时间间隔是多少？



在原图基础上，再以横轴为分针位置，纵轴为时针位置画图，则图中实线、虚线交点即为可以互换表示时间的位置，指针从 0 点开始回到 12 点，其间按相同间隔排列共 143 交点，因此所求时间间隔为 $\frac{12}{143}$ 时。