

拓展篇

12 题:

$$\frac{4}{1 \times 2 \times 3} + \frac{5}{2 \times 3 \times 4} + \frac{6}{3 \times 4 \times 5} + \cdots + \frac{11}{8 \times 9 \times 10}$$

解: 本题考查的是通项归纳

写出具体的通项公式来: $\frac{n+3}{n(n+1)(n+2)}$

于是有: $\frac{n+3}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n(n+1)(n+2)} + \frac{3}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} + 3 \times \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

分成了两组裂项 $\frac{1}{(n+1)(n+2)}$ 和 $\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

关于 $\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ 请看第 11 题:

(11 题) $\frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \frac{1}{3 \times 4 \times 5} + \cdots + \frac{1}{8 \times 9 \times 10}$

这个题目用的是“两肩挑”

(看第二项与第一项有没有相同的部分, 和第三项有没有相同的部分)

$\frac{1}{2 \times 3 \times 4}$ 和 $\frac{1}{1 \times 2 \times 3}$ 有相同的 $\frac{1}{2 \times 3}$

$\frac{1}{2 \times 3 \times 4}$ 和 $\frac{1}{3 \times 4 \times 5}$ 有相同的 $\frac{1}{3 \times 4}$

于是有 $\frac{1}{2 \times 3} - \frac{1}{3 \times 4} = \frac{4-2}{2 \times 3 \times 4} = \frac{2}{2 \times 3 \times 4}$

所以有 $\frac{1}{2 \times 3 \times 4} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2 \times 3} - \frac{1}{3 \times 4} \right)$

于是其他各项就可以做裂项了;

14 题: $\left(1 + \frac{1}{1 \times 3}\right) \times \left(1 + \frac{1}{2 \times 4}\right) \times \left(1 + \frac{1}{3 \times 5}\right) \times \cdots \times \left(1 + \frac{1}{2007 \times 2009}\right)$

解: 此题每一括号里的分母都是平方差公式, 于是有

$$1 + \frac{1}{(n-1) \times (n+1)} = \frac{n^2}{(n-1) \times (n+1)} = \frac{n}{n-1} \times \frac{n}{n+1}, \text{ 比如第一个括号里分解: } \frac{2^2}{1 \times 3} = \frac{2}{1} \times \frac{2}{3}$$

$$\text{原式} = \frac{2}{1} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{5}{4} \times \frac{5}{6} \times \cdots \times \frac{2008}{2007} \times \frac{2008}{2009} = \frac{4016}{2009}$$

超越篇：

4 题： $\frac{3}{1 \times 2 \times 3} + \frac{5}{2 \times 3 \times 4} + \frac{7}{3 \times 4 \times 5} + \cdots + \frac{37}{18 \times 19 \times 20}$ (2009 年五年级迎春杯出过类似的题目)

解：发觉 3、5、7..19 是所在分数分母前两项的和，于是有

$$\frac{n+(n+1)}{n \times (n+1) \times (n+2)} = \frac{n}{n \times (n+1) \times (n+2)} + \frac{n+1}{n \times (n+1) \times (n+2)} = \frac{1}{(n+1) \times (n+2)} + \frac{1}{n \times (n+2)}$$

$$\text{原式} = \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 4} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{4 \times 5} + \cdots + \frac{1}{18 \times 20} + \frac{1}{19 \times 20}$$

于是分成了两个系列（分母差为 1 和分母差为 2）

$$\text{分母差为 1: } \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{19 \times 20}$$

$$\text{分母差为 2 (奇数首尾相连): } \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \cdots + \frac{1}{17 \times 19}$$

$$(\text{偶数首尾相连}): \frac{1}{2 \times 4} + \frac{1}{4 \times 6} + \cdots + \frac{1}{18 \times 20}$$

上面三个算式最后求和即可；

$$5 \text{ 题: } \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots + \frac{99}{100!}$$

解析：这道题和下面的题目是同一个题目

$$\frac{1}{2 \times 1} + \frac{2}{3 \times 2 \times 1} + \frac{3}{4 \times 3 \times 2 \times 1} + \cdots + \frac{99}{100 \times 99 \times 98 \times \cdots \times 2 \times 1}$$

所以可以采用“两肩挑”的方法解决问题：

$$\frac{1}{2 \times 1} - \frac{1}{3 \times 2 \times 1} = \frac{3-1}{3 \times 2 \times 1} = \frac{2}{3 \times 2 \times 1}$$

所以

$$\begin{aligned} \text{原式} &= 1 - \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{1 \times 2} - \frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{1 \times 2 \times 3} - \frac{1}{1 \times 2 \times 3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 99} - \frac{1}{1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 100} \\ &= 1 - \frac{1}{1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 100} = 1 - \frac{1}{100!} \end{aligned}$$

$$7 \text{ 题: } \frac{3 \times 1}{3} + \frac{4 \times 2}{3^2} + \frac{5 \times 3}{3^3} + \cdots + \frac{102 \times 100}{3^{100}}$$

解：分母是依次是 3 的幂。分子阶乘在不断增加，先写出一个通项来（阶乘只能顺着增加的思路走，“移补高”）

$$\frac{(n+2) \times n}{3^n}, \text{ 观察这个通项, 发觉通项后面的 } n \text{ 是可以变成 } (n+3)-3$$

于是有：

$$\frac{(n+2) \times n}{3^n} = \frac{(n+2) \times (n+3) - 3(n+2)}{3^n} = \frac{(n+3)!}{3^n} - \frac{(n+2)!}{3^{n-1}}$$

所以：

$$\text{原式} = \frac{4!}{3} - 3! + \frac{5!}{3^2} - \frac{4!}{3} + \frac{6!}{3^3} - \frac{5!}{3^2} + \cdots + \frac{103!}{3^{100}} - \frac{102!}{3^{99}} = \frac{103!}{3^{100}} - 3!$$

8 题： $\frac{100}{97} + \frac{100 \times 99}{97 \times 96} + \frac{100 \times 99 \times 98}{97 \times 96 \times 95} + \cdots + \frac{100 \times 99 \times 98 \times \cdots \times 5 \times 4}{97 \times 96 \times 95 \times \cdots \times 2 \times 1}$

解：观察前三项分数，可以看出**分母的每一项都比分子的每一项大 3**，第 4 项尝试着写出来：

$$\frac{100 \times 99 \times 98}{97 \times 96 \times 95}, \text{ 分子和分母重复一个 } 97, \text{ 所以化简 } \frac{100 \times 99 \times 98 \times 97}{97 \times 96 \times 95 \times 94} = \frac{100 \times 99 \times 98}{96 \times 95 \times 94},$$

这样后面的**每一项都可以化简**，比如最后一项：

$$\frac{100 \times 99 \times 98 \times \cdots \times 5 \times 4}{97 \times 96 \times 95 \times \cdots \times 2 \times 1} = \frac{100 \times 99 \times 98}{3 \times 2 \times 1}, \text{ 发觉每一项的分子都是 } 100 \times 99 \times 98, \text{ 故}$$

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \frac{100 \times 99 \times 98}{99 \times 98 \times 97} + \frac{100 \times 99 \times 98}{98 \times 97 \times 96} + \frac{100 \times 99 \times 98}{97 \times 96 \times 95} + \frac{100 \times 99 \times 98}{96 \times 95 \times 94} + \cdots + \frac{100 \times 99 \times 98}{3 \times 2 \times 1} \\ &= 100 \times 99 \times 98 \times \left(\frac{1}{99 \times 98 \times 97} + \frac{1}{98 \times 97 \times 96} + \frac{1}{97 \times 96 \times 95} + \frac{1}{96 \times 95 \times 94} + \cdots + \frac{1}{3 \times 2 \times 1} \right) \\ &= 100 \times 99 \times 98 \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{1 \times 2} - \frac{1}{98 \times 99} \right) \\ &= 50 \times 99 \times 98 \times \left(\frac{1}{1 \times 2} - \frac{1}{98 \times 99} \right) \quad (\text{打开括号}) \\ &= 25 \times 99 \times 98 - 50 \\ &= 25 \times (99 \times 98 - 2) \\ &= 242500 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{99 \times 98 \times 97} + \frac{1}{98 \times 97 \times 96} + \frac{1}{97 \times 96 \times 95} + \frac{1}{96 \times 95 \times 94} + \cdots + \frac{1}{3 \times 2 \times 1}$$

上面这个在前面已经讲过，是“两肩挑”的典型题目