六年级综合练习题（八）

本卷包含四个主题：数论、数字谜、计数综合、构造论证

1. n 个自然数，它们的和乘以它们的平均数后得到 2008，请问：n 最小是多少？

【分析】设平均数为 x，则 $nx\cdot x=2008\Rightarrow n\cdot x^2=502\times 2^2$，n 最小是 502.

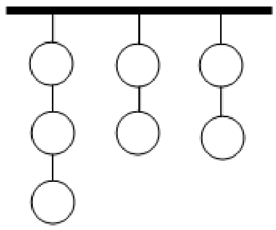
2. 数字和为 9，而且不含数字 0 的三位数共有多少个？四位数共有多少个？

【分析】挡板法．相当于把 9 个苹果分给 3 个人或 4 个人；$C_8^2=28$ 个，$C_8^3=56$ 个.

3. 海淀大街上一共有 18 盏路灯，区政府为了节约用电，打算熄灭其中的 7 盏，但为了行路安全，任意相邻的两盏灯不能同时被熄灭，请问：一共有多少种熄灯方案？

【分析】插空法．在 11 盏亮灯间隔上放 7 盏灭灯：$C_{12}^7=C_{12}^6=792$ 种

4. 一次射击比赛中，7 个泥制的靶子挂成 3 列，如图（3），一位射手按下列规则去击碎靶子：先挑选一列，然后击碎这列中尚未被击碎的靶子中最下面的一个.若每次都遵循这一原则，则击碎全部 7 个靶子共有多少种不同的顺序？

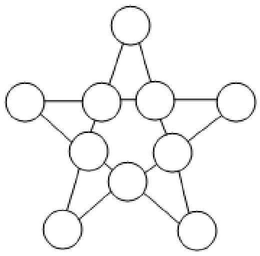

（3）

【分析】只需保证同一列的靶子顺序为从下到上即可.

共 7 个时刻，第一列 3 个靶子共 C_7^3 种位置，第二列和第三列依次有 C_4^2 和 C_2^2 种

所以，共 $C_7^3\cdot C_4^2\cdot C_2^2=210$ 种

5. 把图（4）中的圆圈任意涂上红色或蓝色.问：能否使得每一条直线上的红圈个数都是奇数？


（4）

【分析】反证法．共 5 条线，假设每条线上的红圈都是奇数，则红圈出现的总次数也是奇数．但每个红圈必隶属于两条线，因此不论有多少个红圈，红圈的出现的总次数都是偶数.这与假设矛盾.

6. （1）能否在4×4的方格表的各个小方格内分别填入 1, 2, …15, 16，使得从每行中都可以选择若干个数，这些数的和等于该行中其余各数之和？
（2）能否在5×5方格表的各个小方格内分别填入数 1, 2，…，24, 25，使得从每行中都可以选择若干个数，这些数的和等于该行中其余各数之和？

【分析】（1）能；例如下图.
(2) 不能；反证法：假如能做到，则每行的和都是偶数，这要求总和也是偶数，而 1+2+...+25=325 是奇数，这与假设矛盾.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

7. 一个正整数若能表示为两个正整数的平方差，则称这个数为“智慧数”，比如$16=5^2-3^2$,16 就是一个“智慧数”.请问：从 1 开始的自然数列中，第 2008 个“智慧数”是多少？

【分析】所谓“智慧数”不过是“平方差数”. $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$，由于 a+b 与 a−b 奇偶性相同，

可见平方差数要么是奇数要么是四倍数；实际上反过来也成立，所有的奇数和四倍数都可以表示为平方差的形式.

其中$1=1^2-0^2$和$4=2^2-0^2$不符合题述的要求；若将这两个数也算在内，则应需求第 2010 个平方差数. 由于每 4 个数中有 3 个平方差数：$2010\div3=670$组，$670\times4=2680$为所求.

8. 将$100!-5$分别除以 2，3，4，…，100，可以得到 99 个余数（余数有可能为 0）.这 99 个余数的和是多少？

【分析】用$100!-5$除以 2, 3, 4；分别余−1, −2, −1，可理解为分别缺 1，缺 2，缺 1；实际则为余 1，余 1，余 3；

用$100!-5$除以 5, 6, 7，...，100；都缺 5，实际则为余 0, 1, 2, ..., 95.

则 99 个余数之和为：$1+1+3+0+1+2+3+...+95=4565$

9. 6□0. 3=○，6□$\dfrac{1}{0.3}$=○，6□$0.\dot{3}$=○，6□$\dfrac{1}{0.\dot{3}}$=○.

在上面 4 个算式的方框内，分别填上如加、减、乘、除 4 个运算符号，使 4 个算式的得数之和尽可能大，请问：这个最大的和等于多少？

【分析】$\dfrac{1}{0.3}=\dfrac{10}{3}=3\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{1}{0.\dot{3}}=3$，显然加和乘应如此分配：$6\times\dfrac{1}{0.3}=20$，$6+\dfrac{1}{0.\dot{3}}=9$

同时$0.3<0.\dot{3}$，减和除应如此分配：$6\div0.3=20$，$6-0.\dot{3}=5\dfrac{2}{3}$

最大的和为：$20+9+20+5\dfrac{2}{3}=54\dfrac{2}{3}$.

10. 在如图（2）所示表格第二行的每个空格内，填入一个整数，使它恰好表示它上面的那个数字在第二行中出现的次数.第二行中的 5 个数字各是多少？

0	1	2	3	4

（2）

【分析】显然 4 的下面为“0 个”，否则其他格子将出现“4 个”，而“4 个”对应的数字是无法再出现 4 个的. 同理 3 的下面也只能为“0 个”

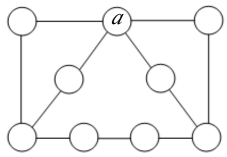
此时已经出现 2 个 0，这就要求 0 下面的数字不小于 2，实际只能是 2，因为 3,4 已经被禁止.

进而 2 下面只能为 1 个或 2 个，不难得如下结果：

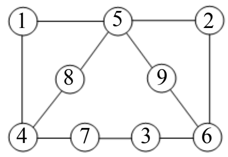
0	1	2	3	4
2 个	1 个	2 个	0 个	0 个

结果为 21200.

11. 请将数字 1 至 9 分别填入图（1）中的各个圆圈中，使得图中每条线段两个端点中所填的数的差（大减小）均为 3 或 4.请给出一种填法，并求出共有多少种填法.



(1)



(1)

【分析】a 处圆圈同时连接了 4 条线段，只能为 5；与此同时相邻的 4 个数分别为：1,2,8,9，且 1 只能与 8 在同一侧，2 和 9 在同一侧，显然共有 $A_2^2\times A_2^2\times A_2^2=8$ 填法，当 1,2,8,9 定下来后，其他数字填法唯一. 因此共 8 种填法.

12. 老师对六位同学的三门功课语文、数学、体育进行了一次测验，六位同学的体育得分是 1 分或者 2 分，数学得分是 1 分、2 分或者 3 分，语文得分是 1 分、2 分、3 分或者 4 分.如果一位同学的三门功课成绩都不低于另一个同学的三门功课成绩，就说这个同学比另一个同学优秀.测验完成后老师发现这六位同学谁也不比别人优秀，请问：这六位同学三科得分分别为多少？

【分析】假定 6 个人总分相同而各科分数却不尽相同的情况：任意两人进行比较必然互有高低.

经过枚举实验，发现总分为 6 时可枚举出 6 人：

6=1+1+4=1+2+3=1+3+2=2+1+3=2+2+2=2+3+1

13. 一个自然数，它与 99 的乘积的各位数字都是偶数，求满足要求的最小值.

【分析】根据 99 的整除性质（两位一断后求和）可知，断开后的数之和应为 99×2=198；经试，两位数、三位数、四位数、五位数均无解，六位数时，228888 为最小的符合条件的数.

14. 用 2，3，4，5，6，7 六个数字组成两个三位数，要使这两个三位数与 540 的最大公约数尽可能的大，这两个三位数应该分别是多少？

【分析】$540=2^2\times3^3\times5$，这两个三位数不可能都是 5 倍，所以最大公约数最大为 $2^2\times3^3=108$，108 的倍数依次为：$216,324,432,540,648,756,864,972$，符合条件的有两组：

324 和 756、432 和 756.

15. 在一个两位数的十位与个位数字之间插入一个数字 0，得到一个三位数（例如 21 变成 201），结果这个三位数恰好能被原来的两位数整除. 请问：所有满足条件的两位数之和是多少？

【分析】设这个两位数为 $\overline{ab}$，则 $\frac{\overline{a0b}}{\overline{ab}}=\frac{100a+b}{10a+b}=k$，其中 k 为整数.

当 b=0 时，k 取最大值 10；当 a=1，b=9 时，$\frac{109}{19}>5$，可见 k 的最小值为 6

令 k=10，$\frac{100a+b}{10a+b}=10\Rightarrow$ 10, 20, 30, . . . , 90

令 k=9，$\frac{100a+b}{10a+b}=9\Rightarrow$ 45

令 k=8，无解

令 k=7，$\frac{100a+b}{10a+b}=7\Rightarrow$ 15

令 k=6，$\frac{100a+b}{10a+b}=6\Rightarrow$ 18

所有数之和为：$(10+20+...+90)+45+15+18=528$