六年级综合练习题三

本卷包含五个主题：应用题、计数、几何、最值

1. 在水平地面上匀速行驶的拖拉机速度是每秒 5 米，已知拖拉机前轮直径 0.8 米，后轮直径 1.25 米。设某一时刻两轮上与地面的接触点为 A 和 B，那么经过多少秒后，A 与 B 再次同时接触地面？（圆周率取近似值 3）。

【解】$C_{前轮}=3\times0.8=2.4=\frac{12}{5}$米，$C_{后轮}=3\times1.25=3.75=\frac{15}{4}$米，$[\frac{12}{5},\frac{15}{4}]=\frac{[12,15]}{(5,4)}=60$，$t=60\div5=12$(秒)

2. 一个容器装了$\frac{3}{4}$的水，现有大、中、小三种小球。第一次把一个中球沉入水中；第二次将球取出，再把 3 个小球沉入水中；第三次取出所有的小球，再把一个大球沉入水中，最后将大球从水中取出，此时容器内剩下的水是最开始的$\frac{2}{9}$。已知每次从容器中溢出的水量情况是：第一次是第三次的一半；第三次是第二次的一半。求大、中、小三球的体积比。

【解】三次一共溢出的总水量的$\frac{3}{4}\times(1-\frac{2}{9})=\frac{7}{12}$；

假设容器的容积为 12 份，则开始装了 9 份，共溢出 7 份；

由于三次溢出水量的体积比为 1:4:2，则分别溢出了 1 份，4 份和 2 份。

第一次：9+中-1=12$\Rightarrow$中=4，其中水剩 8，

第二次：8+3 小-4=12$\Rightarrow$小=$\frac{8}{3}$，其中水剩 4，

第三次：4+大-2=12$\Rightarrow$大=10

则大中小三球的体积比=10:4:$\frac{8}{3}$=15:6:4

3. 从甲地到乙地有两种方法：①立即步行前往；②等待公共汽车坐车前往。表中列出了从甲地到乙地所用的最短时间随两地距离的变化情况，已知步行速度、汽车速度及等待公共汽车的时间都是固定的。请问：当两地距离 24 千米的时候，从甲地到达乙地的最短时间是多少分钟？

甲、乙距离	最短时间
3 千米	20 分钟
6 千米	30 分钟
9 千米	36 分钟

【解】表中的三种情况的距离成倍而时间不成倍，则三种情况不可能都是步行；

又因为相邻两个距离之差都是 3 千米，而时间之差却不相等，因此也不可能都是坐车；

则只能是步行与坐车交替：走车车或者走走车；

又因为前两个时间不成倍数，则只能是走车车：

$V_{步行}=3\div\frac{20}{60}=9$（千米/时），

$V_{车}=$（9−6）$\div\frac{6}{60}=30$(千米/时），

坐车等待的时间=30-6÷30×60=18（分）。

所以距离 24 千米时，步行时间=24÷9×60=160（分），坐车时间=18+24÷30×60=66（分）

4. 用1×2的小方格覆盖2×7的长方形，共有多少种不同的覆盖方法？

【解】2×7的尾部只有两种情况：一竖或两横。

一竖前有2×6任意覆盖，

两横前有2×5任意覆盖，

可见2×7的覆盖方法数等于2×6与2×5的覆盖方式之和，这明显是斐波那契数列的操作方式：

2×1	2×2	2×3	2×4	2×5	2×6	2×7
1 种	2 种	3 种	5 种	8 种	13 种	21 种

5. 如果在一个平面上画 4 条直线，最多可以把平面分成几个部分？如果画 20 条直线，最多能分成几个部分？

【解】1 条直线分成 2 部分，第 2 条线新增 2 部分，第 3 条线新增 3 部分......

4条直线：2+2+3+4=11

20 条直线：2+2+3+...+20=221

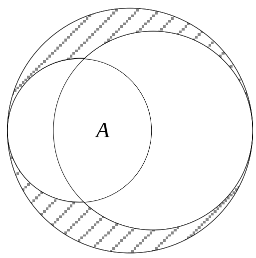
6. 甲、乙、丙三名同学传球，每人都可以把球传给两外两个人中的任意一个，先有甲发球，经过 6 次传球后球仍然回到了甲的手中。请问：整个传球过程共有多少种不同的可能？

【解】标数法：

甲		$甲^{2}$	$甲^{2}$	$甲^{6}$		$甲^{22}$
	$乙^{1}$	$乙^{1}$	$乙^{3}$	$乙^{5}$	$乙^{11}$	
	$丙^{1}$	$丙^{1}$	$丙^{3}$	$丙^{5}$	$丙^{11}$	

答：共有 22 种可能。

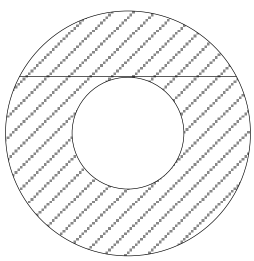
7. 在下图中有半径分别为 5 厘米、4 厘米、3 厘米的三个圆，A 部分（及两小圆重叠部分）的面积与阴影部分的面积相比，哪个大？大多少？

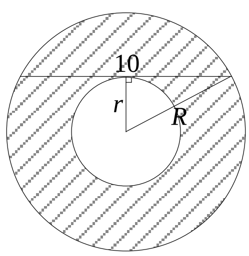


【解】因为$\pi\cdot3^2+\pi\cdot4^2=\pi\cdot5^2$，即小圆面积+中圆面积=大圆面积；

因此图中小圆和中圆未覆盖的阴影面积应等于重叠的 A 部分。

8. 如图中，在两个同心圆上有一条两端点都在大圆上的线段与小圆相切，其长度为 10 厘米。求阴影部分的面积。（π 取 3.14）

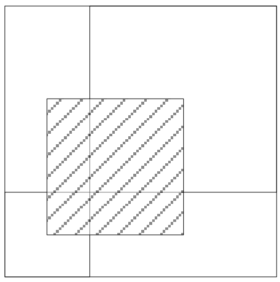


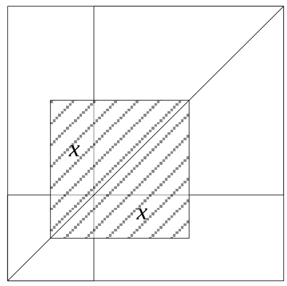


【解】如图设大圆半径为 R，小圆半径为 r，则根据勾股定理 $R^2-r^2=5^2=25$；

则圆环的面积 $S=\pi R^2-\pi r^2=25\pi=78.5$

9. 如图中，大正方形中有三个小正方形，右上角正方形的面积为 27，左下角正方形的面积为 12，中间阴影正方形的 2 个顶点分别位于右下角和左上角正方形的中心。请问：中间阴影正方形的面积是多少？





【解】阴影右上角面积为 $\frac{27}{4}$，左下角为 $\frac{12}{4}=3$，则左上角和右下角部分 $x\cdot x=\frac{27}{4}\times 3\Rightarrow x=\frac{9}{2}$；

则阴影面积为：$\frac{27}{4}+3+\frac{9}{2}\times 2=18.75$

10. 有 11 个同学计划组织一场围棋比赛，他们准备分为两组，每组进行单循环比赛，那么他们最少需要比赛多少场？

【解】分成人数最接近的 5 人和 6 人是比赛场次最少的。这时因为，如将 5 人组中的 1 人调整到 6 人组，则原 5 人组少赛 4 场，而 6 人组增赛 6 场，从而总场次增加，依次类推......

因此，最少赛 $C_5^2+C_6^2=25$ 场。

11. 我们知道，很多自然数可以表示成两个不同质数的和，例如 $8=3+5$。有的数有几种不同的表示方法，例如 $100=3+97=11+89=17+83$。请问：恰好有两种表示方法的最小数是多少？

【解】枚举可得最小为 16=3+13=5+11

12. 一个三位数除以它的各位数字之和，商最大是多少？商最小是多少？

【解】设这个三位数为 $\overline{abc}$，则商为 $\frac{\overline{abc}}{a+b+c}=\frac{100a+10b+c}{a+b+c}$，由于 $\frac{100a}{a}=100$，$\frac{10b}{b}=10$，$\frac{c}{c}=1$，要使商最大，根据糖水原理，应令 $b=0,c=0$，此时商为最大的 100；反之同理，要使商最小，则应令 b,c 都最大，此时，商为 $\frac{199}{1+9+9}=\frac{199}{19}=10\frac{9}{19}$。

13. 小明要写 152 页字，小强要写 150 页字。从暑假第一天起，小明一天写 3 页，天天写；小强一天写 4 页，但是隔一天写一次。请问：第多少天写完字后，小强没写的页数是小明没写的页数的 2 倍？

【解】需分类讨论：

设 $2x$ 天后为 2 倍，则 $150-4x=2(152-3\times 2x)\Rightarrow x=19.5$（舍去）；

设 $2x-1$ 天后为 2 倍，则 $150-4x=2[152-3\times(2x-1)]\Rightarrow x=20\Rightarrow 2x-1=39$ 天。

14. 现有甲、乙、丙三种食盐水各 200 克，浓度依次为 42%、36%、30%，现在要配制浓度是 34%的食盐水 420 克，至少要取甲种食盐水多少克？

【解】尝试在不取甲只用乙丙的方式获得 34%浓度的食盐水：

36		30
	34	
4		2
2	:	1

可见，这需要 2 份 36%和 1 份 30%，最多可配得 200+100=300 克。

还需 120 克，设需要甲 x 克，丙 y 克，则有：

$$\begin{cases} x+y=120 \\ \dfrac{x}{y}=\dfrac{34-30}{42-34} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=40 \\ y=80 \end{cases}$$，可见，最少需要 40 克甲。

15. 要生产某种产品 100 吨，需用 A 种原料 200 吨，或 B 种原料 200.5 吨，或 C 种原料 195.5 吨，或 D 种原料 192 吨，或 E 种原料 180 吨。现知用 A 种原料及另外一种（指 B、C、D、E 中的一种）原料共 19 吨生产此种产品 10 吨。试分析所用另外一种原料是哪一种，这两种原料各用了多少吨？

【解】19 吨生产 10 吨，则 190 吨生产 100 吨，由于生产 100 吨需要 A 种原料 200 吨>190 吨，则另一种原料应小于 190 吨，只有 E 每 100 吨需要 180 吨符合条件，设需要甲 x 吨，乙 y 吨，则有：

$$\begin{cases} x+y=19 \\ \dfrac{100}{200}x+\dfrac{100}{180}y=10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=10 \\ y=9 \end{cases}$$