

分数的最小公倍数与最大公约数求解与证明

1、 分数的最小公倍数

例：求 $[\frac{4}{15}, \frac{5}{24}]$

解：令 $[\frac{4}{15}, \frac{5}{24}] = \frac{m}{n}$ (m, n 互质)，由最小公倍数的定义要求： $\frac{m}{n}$ 是 $\frac{4}{15}$ 和 $\frac{5}{24}$ 倍数，且是最小的倍数；

首先，满足第一个要求 $\frac{m}{n} \div \frac{4}{15}$ 和 $\frac{m}{n} \div \frac{5}{24}$ 结果为整数，化简即 $\frac{m}{n} \times \frac{15}{4}$ 和 $\frac{m}{n} \times \frac{24}{5}$ 为整数，所以 m 是 4 的倍数，5 的倍数，即 4 与 5 的公倍数； n 是 15 的约数，24 的约数，即 15 与 24 的公约数（联想下分数是如何约分的）；

其次，要求是最小的公倍数，所以 m 取值尽量小， n 取值尽量大，所以 $m = [4, 5]$ ，

$$n = (15, 24) ;$$

综上， $[\frac{4}{15}, \frac{5}{24}] = \frac{[4, 5]}{(15, 24)} = \frac{20}{3}$ **结论：** $[\frac{A}{B}, \frac{C}{D}] = \frac{[A, C]}{(B, D)}$ ；

2、 分数的最大公约数

推导跟上面比较类似。

例： $(\frac{4}{15}, \frac{5}{24})$

解：令 $(\frac{4}{15}, \frac{5}{24}) = \frac{m}{n}$ ，由最大公约数的定义要求， $\frac{m}{n}$ 是 $\frac{4}{15}$ 和 $\frac{5}{24}$ 的公约数，且是最大的那个；

首先，满足第一个要求 $\frac{4}{15} \div \frac{m}{n}$ 和 $\frac{5}{24} \div \frac{m}{n}$ 结果为整数，即 $\frac{4}{15} \times \frac{n}{m}$ 和 $\frac{5}{24} \times \frac{n}{m}$ 为整数，所以 m 是 4 的约数，5 的约数，即 4 与 5 的公约数； n 是 15 的倍数，24 的倍数，即 15 与 24 的公倍数（联想下分数是如何约分的）；

其次，要求是最大的公约数， m 取值尽量大， n 取值尽量小，所以 $m = (4, 5)$ ，

$$n = [15, 24] ;$$

综上， $(\frac{4}{15}, \frac{5}{24}) = \frac{(4, 5)}{[15, 24]} = \frac{1}{120}$ **结论：** $(\frac{A}{B}, \frac{C}{D}) = \frac{(A, C)}{[B, D]}$ ；

说明：多个分数的最小公倍数与最大公约数求法与两个数的相同，推导相似。