作者：　周纯
微信号：jackzczhou

（选做）2.4 算法正确判断了奇异矩阵：¶

在算法的步骤 3 中，如果发现某一列对角线和对角线以下所有元素都为 0，那么则断定这个矩阵为奇异矩阵。我们用正式的语言描述这个命题，并证明为真。

证明下面的命题：

如果方阵 A 可以被分为 4 个部分：

$A=\begin{bmatrix} I & X \\ Z & Y \end{bmatrix}$，其中 I 为单位矩阵，Z 为全 0 矩阵，Y 的第一列全 0 ，

那么 A 为奇异矩阵。

提示：从多种角度都可以完成证明

考虑矩阵 Y 和 矩阵 A 的秩

考虑矩阵 Y 和 矩阵 A 的行列式

考虑矩阵 A 的某一列是其他列的线性组合

TODO 证明：

A 矩阵的型即如下面的具体矩阵形状所示，设左上角的单位矩阵为 n x n 的单位矩阵。

$$A=\left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & * & * & * & \dots & * \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & * & * & * & \dots & * \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & * & * & * & \dots & * \\ . & . & . & . & . & . & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & * & * & * & * & * \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \# & \# & \dots & \# \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \# & \# & \dots & \# \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \# & \# & \dots & \# \\ . & . & . & \dots & . & . & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \# & \# & \# & \# \end{array}\right]$$

则 A 的行列式按第一列展开计算为：

$detA = a_{11}(-1)^{1+1}detA_{11} + 0 + 0 \ ... \ + 0$　　　　(1)

其中 $a_{11} = 1$。

则 $detA = detA_{11}$

这时 A_{11} 是 A 消掉第一行和第一列后的子矩阵。

这时 $A_{11}=\begin{bmatrix} I_{(n-1)(n-1)} & X1 \\ Z1 & Y \end{bmatrix}$

其中，Z1 依然是 0 矩阵，Y 未变。

令 $A_{11}=\begin{bmatrix} I_{(n-1)(n-1)} & X1 \\ Z1 & Y \end{bmatrix}=B$

则 $detA_{11} = detB = b_{11}(-1)^{1+1}detB_{11} + 0 + ... + 0$,

道理同(1)式，$detB = detB_{11}$，

则 $detA = detB = detB_{11}$.

如此类推，计算到第 n 次后，

把 A 的左边和上边的 n 行和 n 列都消掉了，最后得到：

$detA = detB = detB_{11} = ... = 1*(-1)^{1+1}detY = detY$　　　　（2）

故得 $detA = detY$,

因为 Y 的第一列全部为 0，故的行列式按第一列展开计算得，

$\det Y = 0 + 0 + ... + 0 = 0$

因此，由第(2)式得，

$\det A = \det Y = 0$

根据逆矩阵的定理，$\det A = 0$ 说明 A 不可逆，

因此 A 为奇异矩阵。