一、用逻辑符号表达下列语句

1. 任何计算设备都可以求解某个问题。

解析：P(x)：x 是计算机设备，Q(x)：x 问题，R(x，y):x 求解 y，（存在用合取，任意用析取。）本题可以理解为：对于任意的计算机存在问题且能被计算机解决。

$$\forall x(P(x) \rightarrow \exists y(Q(y) \wedge R(x,y)))$$

二、填空题

1. 设集合 A={1，2，3，4}，则集合 A 上有 15 种等价关系。

解析：使用 第二类 Stirling 求其不同的划分个数 :$S(4,1)+S(4,2)+S(4,3)+S(4,4)$

根据公式 : $S(n,1)=1$ **, 计算 Stirling 数的值** :$S(4,1)=1S(4,1)=1$

根据公式 : $S(n,2)=2^{n-1}-1$ **,计算 Stirling 数的值** :
$S(4,2)=2^{4-1}-1=2^3-1=7$

根据公式: $S(n,n-1)=C(n,2)$(**Stirling 数计算公式**) **,计算 Stirling 数的值** :
$S(4,3)=C(4,2)=6$

据公式 :$S(n,n)=1$ **, 计算 Stirling 数的值** :$S(4,4)=1$

$S(4,1)+S(4,2)+S(4,3)+S(4,4)=1+7+6+1=15$

2. 设P是所有人的集合，R和S是集合P上的关系，R={<x,y> | x是y的父亲}，S={<x,y> |x是y的母亲}，($\forall x, \forall y \in P$)，当关系Q为 ____$S \circ R^{-1}$___时，xQy表示x是y的妻子。注：用R1OR2表示关系R1与R2的复合。

解析：本题考的是逆关系和复合关系，假设z是x的子女记作 R^{-1} = {<z,y>| z **是y的子女}**，S={<x,z> |x**是z的母亲}，根据复合关系：** $x \rightarrow z \rightarrow y$ **得** $Q=S \circ R^{-1}$ **,得到答案。**

3. 有 5 个男同学和 3 个女同学站成一排，如果没有 2 个女同学相邻，共有<u>14400</u>种不同的排法。

解析：男生的排法有$P(5) = 5! = 5 * 4 * 3 * 2 * 1 = 120$,要求2个女生不能相邻，则用插排，将3位女同学插排到5个同学的空当中间，5个男生（包括首尾）有6个空当，即女生的排法有$P(6,3) = 6 * 5 * 4 = 120$，因此一共有$P(5) * P(6,3) = 120 * 120 = 14400$

4. 设 G 是有 10 个顶点的无奇圈的简单连通图，则 G 的着色数是<u>2</u>（简单图的着色数是指相邻的顶点着不同的颜色所需的最少颜色的个数）。

解析：【定理一】一个图为二部图当且仅当图G中无奇圈。因此G为二部图。而二部图的着色数为2；

【定理二】图G是2-可着色的当且仅当G是二部图；因此可知该二部图的着色数位为2。

【定理二】奇圈和奇数阶轮图都是3-色图，而偶数阶轮图都是4-色图。

5. 如果$\dfrac{1}{(1-2x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ 则 $a_k =$ _$(k+1)2^k$_

解析：根据牛顿公式：$(1+ax)^n = \sum_{k=0}^{\infty} C_n^k a^k x^k$**，以及牛顿公式推广公式**

$(1+ax)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k C_{n+k-1}^k a^k x^k$**题目中，a=-2，n=2，代入推广公式可得：**

$a_k = (-1)^k C_{k+1}^k (-2)^k = C_{k+1}^k 2^k = (k+1)2^k$

三、计算题

1. 设个体域为{a, b, c}，试写出公式(∃x)P(x) →(∀y)Q(y)的命题逻辑表达。

解析： 个体域{a,b,c} 对于逻辑命题量词，$\exists x$即是个体域做析取计算，而$\forall y$ 则是对个体域做合取运算。因此得 $P(a) \vee P(b) \vee P(c) \rightarrow Q(a) \wedge Q(b) \wedge Q(c)$

2. 写出(¬PVQ)→((Q∧¬R)VP)的主析取范式和主合取范式（需写出计算过程，且结果简洁表示）。

index	P	Q	R	¬PVQ	(Q∧¬R)VP	(¬PVQ)→((Q∧¬R)VP)
0	0	0	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
2	0	1	0	1	1	1
3	0	1	1	1	0	0
4	1	0	0	0	1	1
5	1	0	1	0	1	1
6	1	1	0	1	1	1
7	1	1	1	1	1	1

真值表

则主析取范式为 $(\neg PVQ) \rightarrow ((Q \wedge \neg R)VP) = m_2 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7$

则主合取范式为 $(\neg PVQ) \rightarrow ((Q \wedge \neg R)VP) = M_0 \wedge M_1 \wedge M_3$

四、解答题

1. 设有四对夫妻围一圆桌就坐,则至少有 1 对夫妻不相邻的就坐方式有多少种。

解析：四对夫妻至少有一对夫妻不相连，即至多3对夫妻相邻，可以理解成全排列减去4对夫妻相连，得到的就是至多有3对夫妻相邻了。

四对夫妻8人全排列(圆周排列公式见 我的公式集)$Q(8,8) = (8-1)! = 7! = 5040$，**4对夫妻相邻的全排列分为两个阶段先女士围成一圈**$Q(4,4) = 3! = 6$，**再让男士坐到自己的妻子身边，每位男士有两种坐法，坐到妻子左边或者右边，即**$2^4 = 16$，**因此四对夫妻相邻的排列有** $Q(4,4) * 2^4 = 6 * 16 = 96$，**则题中至少一对夫妻不相邻的排列数为**

$Q(8,8) - Q(4,4) * 2^4 = 5040 - 96 = 4944$

即至少有1对夫妻不相邻的坐法有4944种。

2. 设某单位安排 A、B、C、D、E 和 F 六人从周一到周六值班。每天有且仅有一人值班，条件是 A 不能周一值班，B 不能周二值班，C 不能周三值班，求共有多少种安排值班的方法。

解析：知识点是完全错排，用容斥原理来推断。

用X,Y,Z表示A,B,C分别在周一，二，三上值班的集合，都不在原位的集合表示为：

$$|X^2 \cap Y^2 \cap X^2| = |S| - |X \cup Y \cup Z|$$

$$= |S| - (|X| + |Y| + |Z| - |X \cap Y| - |Y \cap Z| - |X \cap Z| + |X \cap Y \cap Z|)$$

$$= 6! - (3 * 5! - 3 * 4! + 3!)$$

$$= 720 - (3 * 120 - 3 * 24 + 6) = 426$$

公式无法显示

$$= 720 - (3 * 120 - 3 * 24 + 6) = 426$$

3. 把 6 个不同的口罩放到 5 个相同的盒子里，使得不出现空盒，有多少种不同的方法。

解析：（之前解法有问题，更新一下解释），五个相同的盒子不用排序，因此只要将6个口罩分成5份即选两个捆绑在一起：则有 $C(6,2) = 15$ **种组合。**

$C(6,2) = 15$ **，即15种解法**

五、证明题

给定集合 A={1, 2, 3, 4, 5, 6}

1）写出一个 A 上的既是等价关系又是偏序关系的例子

2）证明 1）中例子的正确性

解析：此题考的是等价关系与偏序关系的条件。

等价关系：自反，对称，传递；偏序关系：自反，反对称，传递。

（1）A的关系R需满足等价和偏序关系，也就是R必须满足既是对称又是反对称关系。则 R = {<x,y>| x=y}**即关系矩阵对角线上的数都为1,因此该关系为集合A上的每个元素自成环，无其他关系路径。**

（2）只需证明R符合等价关系和偏序关系。

证明：R = {<x,y>| x=y} 等价关系：

1.对于任意的a = a 恒成立，因此R满足自反；

2.对于任意的$< a,b >\in R$，则有$< b,a >\in R$满足对称；

3.对于任意的$< a,b >\in R$且$< b,c >\in R$,则有$< a,c >\in R$ 满足传递性；

由以上3点可知R满足等价关系，再证偏序关系，只需证明反对称关系；

对于任意的$< a,b >\in R$，$< b,a >\in R$且$a = b$，满足反对称，结合上述结论得证 R 满足偏序关系。

综上所述，关系R是正确的。