一、用逻辑符号表达下列语句

（论域为包含一切事物的合集）

1. （2 分）确诊者并不都有症状（注：需给出两种形式表达，一种用存在量词，一种用全称量词）

解析： P(x): x是确诊者，Q(x):x有症状

$\neg\forall x(P(x)\rightarrow Q(x))$

$\exists x(P(x)\wedge\neg Q(x))$

2. （3 分）有些老人不喜欢宠物

解析： P(x): x是老人，Q(x):x是宠物，R(x,y):x喜欢y

$\exists x\forall y(P(x)\wedge Q(y)\rightarrow\neg R(x, y))$

二、填空题

1. 50个元素，子集个数为 ____ 2^{50} ____ 个， 奇数个元素的子集是 ____ 2^{49} ____ 个

解析：

第一空，可以理解成50个元素，每个元素有两者情况，“有”与“没有”，则50个元素有 2^{50} 个子集个数，

第二空，整个集合中子集的个数只有奇数和偶数两种情况表示，因此子集元素个数位奇数的子集有

2. 让5位中国籍学生和5位英国籍学生排成一排，要求中国籍学生和英国籍学生交叉出现，即同国籍的学生不能相邻，则有一共有 ____ $5!*5!*2$ ____ 种排列

解析： 这个可以考虑成两个队人分别进行了一次全排列既有 $5!*5!$，另外再选择从一个队的前面排入或者从后面排入2种，因此总数是 $5!*5!*2=28800$。

3. **如果** $f(x)=(1-3x)^{-2}$ **，求** x^4 **的系数** ___405_______

解析： 这个就根据推广的牛顿二项式公式： $(1-x)^{-n}=\sum_{k=0}^{\infty}C_{n+k-1}^{k}x^{k},-1<x<1$

$f(x)=(1-3x)^{-2}=\sum_{k=0}^{\infty}C_{2+k-1}^{k}3^{k}x^{k}$ 此时k=4，可得 x^4 的系数为

$C_5^4*3^4=5*81=405$

三、简答题

1. $P\uparrow Q$ 表示 $\rceil(P\wedge Q)$ 与非题，求 $\rceil P,\rceil P\vee Q,P\rightarrow Q$ 。

解析：

(1) ¬P = ¬(P∧P) = P↑P **(幂等律)**

(2) P∧Q = ¬(¬(P∧Q)) = ¬(¬(P∧Q) ∧ ¬(P∧Q)) = (P↑Q)↑(P↑Q) **(可以用第一个的结论)**

(3)P→Q = ¬P∨Q =¬(P∧¬Q) = ¬(P∧¬(Q∧Q)) = P↑(Q↑Q)

2. 任意的正整数 n \geq 2 **求** $\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+...+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}$ **的最简易表达式? 其中** $\binom{n}{i}$ **表示在n个数中取i个数的种数。**

解析： 该题考查的还是牛顿二项式公式： $(1+x)^{n}=\sum_{k=0}^{\infty}C_{n}^{k}x^{k}$ ，把其中的x换成1，此时就出现了题干中的场景 $(\sum_{k=0}^{n}C_{n}^{k})-C_{n}^{0}$ ，因此该题解如下:

$\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+...+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}=(\sum_{k=0}^{n}C_{n}^{k})-C_{n}^{0}$ 公式1， 由牛顿二项式公式可知：

公式1 = $((1+x)^{n}|x=1)-C_{n}^{0}=2^{n}-1$ 得解。

四、计算题

1、 下雨了有 5 个人上班把伞随机放在门口，下班后把伞拿回。

1）全部拿错有多少个排列？

2）至少有一个人拿对的概率是多少？

解析:

1）完全错排问题：求所有人都拿错伞的方法数 D_n 等价于求 n个数1,2,3,...,5 的错排数目问题，设 $A_i(i=1,2,3,4,5)$ 是第 i 个人拿回自己伞的结果集合，则取回伞的总方法为 $5!$，

$$|A_i|=(n-1)!,|A_i\cap A_j|=(n-2)!,,|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap A_{i_3}\cap\ldots\cap A_{i_k}|=(n-k)!$$

,利用容斥原理，

$$D_n=|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\cap\ldots\cap\overline{A_n}|=n!-C_{(n,1)}(n-1)!+C_{(n,2)}(n-2)!-C_{(n,3)}(n-3)!+\ldots+(-1)^nC_{(n,n)}=n!(1-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{n!})$$

，其中 n = 5, 则

$$D_5=5!(1-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots+(-1)^5\frac{1}{5!})=5!(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!})=3*4*5-4*5+5-1=60-20+5-1=44$$

2）至少有一人拿对伞的组合数，即为完全错排的补集，也就是

$5!-D_5=120-44=76$，则至少有一人拿对的概率为

$$p=\frac{5!-D_5}{5!}=\frac{76}{120}=\frac{19}{30}=63.33\%$$

2、 2、4、6、8 几个数排列，每个数有无数个，2 要求出现偶数次，4 要求出现奇数次，6 要求至少出现 1 次，8 没有限制。

1）对应写出母函数 G(x)？

2）对应的a_n是多少？

解析: 1）对于这种题目，排列用指数型母函数，组合则用母函数。

$$G(x)=(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots)(\frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots)(\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots)(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots)$$

$$=(\frac{e^x+e^{-x}}{2})(\frac{e^x-e^{-x}}{2})(e^x-1)(e^x)=\frac{1}{4}(e^{2x}-e^{-2x})(e^{2x}-e^x)=\frac{1}{4}(e^{4x}-1-e^{3x}+e^{-x})=\frac{1}{4}(e^{4x}-e^{3x}+e^{-x})-\frac{1}{4}$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(4^n-3^n+(-1)^n)\frac{x^n}{n!}-\frac{1}{4}$$

2）因此 $a_n=\frac{1}{4}(4^n-3^n+(-1)^n)$

五、证明题

1、 设A是包含n个元素的有限集，R是A上的关系，则必存在s 和 t，使得 $R^s = R^t$ ，并且 $0 \leq s < t \leq 2^{n^2}$。

解析：【定理】设A为含有n个元素的有穷集 $R \subseteq A \times A$，则存在自然数s,t, 且满足 $0 \leq s < t \leq 2^{n^2}$,使得 $R^s = R^t$。

显然 $P(A \times A)$ 中元素对幂运算是封闭的，即对任意的自然数k,有 $R^k \in P(A \times A), k = 0, 1, 2, \ldots$

而且 $|P(A \times A)| = 2^{n^2}$,考虑R的各项幂 $R^0, R^1, \ldots, R^{2^{n^2}}$,共产生了 $2^{n^2} + 1$ 个 $P(A \times A)$

的二元关系，由**鸽巢原理**可知，存在s,t,满足 $0 \leq s < t \leq 2^{n^2}$ ，使得 $R^s = R^t$。

2. 设 k 是简单图 G 的顶点度数的最小值，证明 G 包含一条长度至少为 k 的路。

解析：用反证法，假设最长路的长度 $l \leq k - 1$，即从 v_0 到 v_l 的长度为 l。

由题干可知 $d(v_0) \geq k$, 则G中至少有k个点与 v_0 有边相连，而假设中 v_0 链接最长路的长度 $l \leq k - 1$, 则一定有另一个点与 v_0 相连且在 l 外，则假设相矛盾，因此 $l \geq k$，等证。