一、用逻辑符号表达下列语句

（论域为包含一切事物的集合）

1）过平面上的两个点，有且只有一条直线通过

解析：（仅供参考）$P_{(x,\ y)}$：x，y是平面上的两个点，$Q_{(x,y,z)}$：z是过x和y的直线，$R_{(x,\ y)}$：x与y相同

$\forall x \forall y \forall z \exists w P_{(x,\ y)} \wedge Q_{(x,\ y,\ z)} \wedge Q_{(x,\ y,\ w)} \rightarrow R_{(z,\ w)}$

2）并不是所有的士兵都想当将军，而且不想当将军的士兵未必不是好士兵（一种形式，包含全称量词和存在量词）

解析：（仅供参考）$P_{(x)}$：x是士兵，$Q_{(x)}$:x 想当将军，$R_{(x)}$ x是好士兵；

$\neg \forall x P_{(x)} \rightarrow Q_{(x)} \wedge \exists x (\neg Q_{(x)} \wedge R_{(x)})$

二、填空题

1.集合 A={1,2,3,4,5,6,7}，A 上的一个划分 R={{1,2},{3,4,5}，{6,7}}. 那么所对应的等价关系 R 包含的有序对的个数是（ 17 ）个.定义偏序关系为集合 A 上的整除关系,则这个偏序关系上含有的有序对个数是（ 16 ）个.集合 A 上有（ 128 ）个既是对称又是反对称的关系。

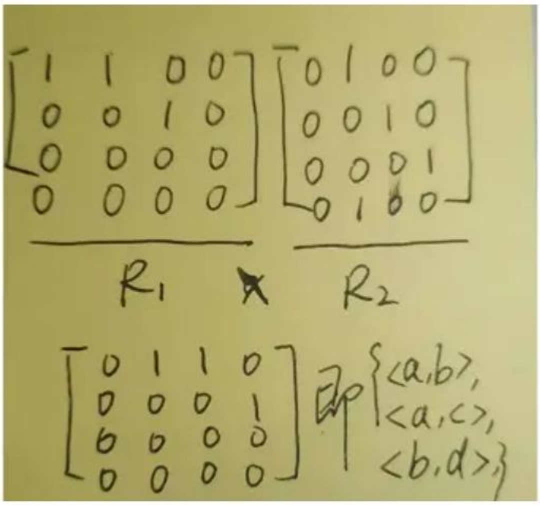
解析： 第1空：用笛卡尔积的方法 2X2 + 3X3 +2X2 = 17；

第2空：整除偏序关系有<1,1>,<2,2>,<3,3>,<4,4>,<5,5>,<6,6>,<7,7>,<1,2>,<1,3>,<1,4>,<1,5>,<1,6>,<1,7>,<2,4>,<2,6>,<3,6>，因此是16个；

第3空：既是对称又是反对称，用矩阵来表示，即对角线上的数字有0和1组成，其他值都为0. 因此有2^7 = 128 个。

2.已知集合A={a,b,c,d}上的两个关系R_1={<a,a>,<a,b>,<b,c>},R_2={<a,b>,<b,c>,<c,d>,<d,b>}.
则R_2^2 = **{<a,c>,<b,d>,<c,b>,<d,c>}**，$R_2 \circ R_1$ = ***{<a,b>,<a,c>,<b,d>}***

解析： 该题用矩阵的方法最简单，矩阵乘法就能解决，答案已经在题中斜体字部分。根据公式 $M（R_2 \circ R_1） = M（R_1） * M（R_2）$ 代入矩阵，用矩阵乘法可得，如下图所示。



矩阵乘法

3. 一个商店提供了 3 种不同的钢笔，假设顾客小王进店时，每种钢笔至少有 5 支. 则小王选 5 支钢笔的方式有（ 21 ）种.

解析： 用S是有k种类型对象的多重集合，每种元素具有无限的重复数，那么S的r组合的个数为 $C_{(r+k-1,r)}$,因此本题的答案为$C_{(7,5)}$ = $C_{(7,2)}$ = 21。

4. 设 Km,n 是两部分分别有 m 和 n 个顶点的完全二部图，则 Km,n 的着色数是（ 2 ）

解析： 【定理一】图G是2-可着色的当且仅当G是二部图； 因此可知该二部图的着色数位为2。

【定理二】奇圈和奇数阶轮图都是3-色图，而偶数阶轮图都是4-色图。

5.设树T的顶点集合为V={v1, v2, ..., vn}, T的平均度为 $D = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} v_i$,请用D表示出树T的顶点个数n= （ **2/(2-D)** ）

解析： 由平均度D可知该树的总度数为 nD， 而树的顶点数n与边数k的关系为 k = n-1, 则有 k = nD/2, 因此有等式 nD/2 = n-1，化简得 n = 2/(2-D) .

三、计算题

1.个体域为{a,b,c},将下列公式写成命题逻辑公式 $(\forall x)P_{(x)} \rightarrow (\exists y)Q_{(y)}$

解析： 个体域{a,b,c} 对于逻辑命题量词 $\forall x$ 即是个体域做合取计算， 而$\exists y$ 则是对个体域做析取运算。因此得 $P_a \wedge P_b \wedge P_c \rightarrow Q_a \vee Q_b \vee Q_c$

2. 计算下式的主析取范式和主合取范式 $(\neg P \vee Q) \rightarrow (Q \wedge \neg R)$,写出求解步骤，结果用极小项和极大项数字表示简洁形式。

解析： 该题有两种方法可解，一种是利用真值表，一种是公式转换。

方法一: 先用真值表来解题:

index	P	Q	R	¬P∨Q	Q∧¬R	(¬P∨Q)→(Q∧¬R)
0	0	0	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
2	0	1	0	1	1	1
3	0	1	1	1	0	0
4	1	0	0	0	0	1
5	1	0	1	0	0	1
6	1	1	0	1	1	1
7	1	1	1	1	0	0

真值表图

则主析取范式为 $(\neg P \vee Q) \rightarrow (Q \wedge \neg R) \Leftrightarrow m_2 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_6$

主合取范式为 $(\neg P \vee Q) \rightarrow (Q \wedge \neg R) \Leftrightarrow M_0 \wedge M_1 \wedge M_3 \wedge M_7$

方法二: 公式推导

$$(\neg P \vee Q) \rightarrow (Q \wedge \neg R) \Leftrightarrow \neg(\neg P \vee Q) \vee (Q \wedge \neg R)$$

$$\Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg R)$$

$$\Leftrightarrow ((P \wedge \neg Q) \wedge (R \vee \neg R)) \vee ((P \vee \neg P) \wedge (Q \wedge \neg R))$$

$$\Leftrightarrow ((P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R)) \vee ((P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R))$$

$$\Leftrightarrow (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R)$$

得主析取范式为 $m_{(101)} \vee m_{(100)} \vee m_{(110)} \vee m_{(010)} = m_2 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_6$

因此主合取范式为 $M_0 \wedge M_1 \wedge M_3 \wedge M_7$

四、解答题

1．写出集合 A 上的一种关系，它既是等价关系，又是偏序关系，并简要说明这种关系的特点。

解析：设集合 A={a, b, c}，等价关系满足的条件是：自反，对称，传递；而满足偏序关系的条件是：自反，反对称，传递。条件中 A 的关系 R 需满足等价和偏序关系，也就是 R 必须满足既是对称又是反对称关系。则 R = {<x, y>| x=y}即关系矩阵对角线上的数都为 1,因此该关系为集合 A 上的每个元素自成环，无其他关系路径。

2.求满足递推关系$h_n = h_{n-1} + 9h_{n-2} - 9h_{n-3}$中$h_n$的表达式，其中$n \geq 3$，初始条件$h_0 = 0$，$h_1 = 1$，$h_2 = 2$。

五、证明题

证明下面恒等式：

$C_{(n,k)} + C_{(n+1,k)} + C_{(n+2,k)} + \ldots + C_{(n+m,k)} = C_{(n+m+1,k+1)} - C_{(n,k+1)}$，$C_{(n,i)}$ **表示n元素中取i个组合数。**

证明：证明原式

$$C_{(n,k)} + C_{(n+1,k)} + C_{(n+2,k)} + \ldots + C_{(n+m,k)} = C_{(n+m+1,k+1)} - C_{(n,k+1)}$$

$$\Leftrightarrow C_{(n,k+1)} + C_{(n,k)} + C_{(n+1,k)} + C_{(n+2,k)} + \ldots + C_{(n+m,k)} = C_{(n+m+1,k+1)}。$$

$C_{(n,k+1)} = C_{(n-1,k)} + C_{(n-1,k+1)}$该等式恒成立，即在n个元素中取k+1个方法可以分成两个部分，一部分选择部分包含1个特定元素a，一部分选择部分一个不包含a。

因此$C_{(n,k+1)} + C_{(n,k)} + C_{(n+1,k)} + C_{(n+2,k)} + \ldots + C_{(n+m,k)}$

$= C_{(n+1,k+1)} + C_{(n+1,k)} + C_{(n+2,k)} + \ldots + C_{(n+m,k)}$

$= C_{(n+2,k+1)} + C_{(n+2,k)} + \ldots + C_{(n+m,k)}$

以此类推：

$C_{(n,k+1)} + C_{(n,k)} + C_{(n+1,k)} + C_{(n+2,k)} + \ldots + C_{(n+m,k)} = C_{(n+m+1,k)} + C_{(n+m,k)} = C_{(n+m+1,k+1)}$

$\Leftrightarrow C_{(n,k)} + C_{(n+1,k)} + C_{(n+2,k)} + \ldots + C_{(n+m,k)} = C_{(n+m+1,k+1)} - C_{(n,k+1)}$

得证。